



DIDÁCTICA DE LAS
MATEMÁTICAS

X CONGRESO INTERNACIONAL SOBRE
ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

20, 21 y 22 de febrero de 2020

ACTAS CIEM 2020

CONFERENCIAS

TALLERES

REPORTES DE INVESTIGACIÓN

SOCIALIZACIÓN DE EXPERIENCIAS

X Congreso Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas

20, 21 y 22 de febrero de 2020

ACTAS *CIEM 2020*

Conferencias

Talleres

Reportes de Investigación

Socialización de Experiencias

X Congreso Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas

Actas

CIEM 2020

Editores: Cecilia Gaita Iparraguirre, Jesús Flores Salazar, Francisco Ugarte Guerra

Diseño de carátula: Fondo Editorial PUCP

Diagramación de interiores: Cecilia Gaita Iparraguirre

© Pontificia Universidad Católica del Perú – 2021

Avenida Universitaria 1801, Lima 32

626 2000-anexo 4197

E-mail: irem@pucp.edu.pe

Dirección URL: <http://www.irem.pucp.edu.pe>

Derechos reservados, prohibida la reproducción de este libro por cualquier medio, total o parcialmente, sin permiso expreso de los editores.

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú N° 2021-12161

ISBN: 978-612-4320-38-5

Primera edición digital: noviembre de 2021

Producido en el Perú – Produced in Perú

Presentación

La historia de los CIEMs se remonta 20 años atrás, entonces cuando empezó como un coloquio y desde entonces ha venido creciendo hasta convertirse en el congreso sobre enseñanza de las matemáticas más importante del Perú, prueba de ello es el interés que ha despertado en las regiones de nuestro país: así en el año 2016 el Congreso se realizó en el campus de la Universidad Nacional de Piura y, en el 2018, en la Universidad Nacional de Huancavelica, a más de 4000 msnm, el IX CIEM congregó a más de 400 personas, entre profesores e investigadores de todo el Perú y del extranjero. Hoy la Universidad Nacional del Centro del Perú, la Universidad Nacional Hermilio Valdizán, la Universidad Nacional de Tumbes y la Universidad Nacional San Antonio Abad del Cusco han manifestado su interés por ser las sedes de los siguientes CIEMs.

Para nosotros el décimo CIEM, significa además celebrar los 20 años del IREM-PUCP aunque como toda institución, nuestro instituto tiene una historia y una memoria que va más allá de su creación: debo recordar con gratitud al Dr. José Tola Pasquel, ilustre matemático e ingeniero peruano, exrector de la PUCP entre 1967 y 1989, fundador del Instituto para la promoción de la enseñanza de las matemáticas IPEN, que funcionó entre 1961 y 1968. EL IPEN fue creado con la finalidad de realizar cursos de perfeccionamiento para profesores de matemáticas de los diferentes niveles, difundir los nuevos conceptos e ideas relacionadas con la enseñanza de la matemática; auspiciar la publicación de libros de texto y colaborar con los organismos y autoridades nacionales en sus esfuerzos para promover el estudio y la enseñanza de las matemáticas. El profesor Tola Pasquel fundó además la Sociedad Matemática Peruana y el Instituto de Matemáticas (IMUNI) que funcionó entre 1960 y 1968. Luego, en 1980, siendo Rector de la PUCP, auspició la creación de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas. Años más tarde, en 1997, el profesor César Carranza y César Camacho, discípulos de Tola Pasquel e infatigables promotores de las matemáticas en el Perú, fundaron el Instituto de Matemáticas y Ciencias Afines (IMCA) de la UNI: esto significó el renacimiento del IMUNI luego de 30 años. En el año 2000, el profesor Uldarico Malaspina, impulsó la creación del IREM-PUCP, lo que significó el resurgimiento del IPEN luego de 30 años.

He querido recordar de forma sucinta la historia del IREM-PUCP pues entiendo que es la manera en que puede y debe comprender una institución, pues en ella puede vislumbrarse su razón de ser, su necesidad y su misión.

Desde esa perspectiva el IREM-PUCP es una comunidad de investigadores en Didáctica de las Matemáticas, estrechamente vinculados con la comunidad matemática, cuya finalidad académica es la realización de investigación al más alto nivel y, al mismo tiempo esta investigación es solo un medio para alcanzar un fin aún más alto: mejorar la enseñanza de las Matemáticas en el Perú.

Así, el CIEM debe ser entendido como un espacio de encuentro y de reflexión, que nos enriquezca a todos, profesores e investigadores, con la mirada puesta en construir un Perú con centros de investigación en matemáticas y didáctica de las matemáticas, en distintas regiones del país, que contribuyan coordinadamente con la formación continua de las siguientes generaciones de investigadores y profesores de matemáticas de todos los niveles educativos, y que de igual manera ayuden a establecer la vinculación de las matemáticas y la didáctica de las matemáticas con otras ramas del saber.

El X CIEM desarrolló las siguientes áreas temáticas:

- Currículo, competencias y evaluación
- Historia y epistemología de la matemática y de la Educación Matemática
- Recursos tecnológicos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas
- Resolución y creación de problemas
- Modelización en Educación Matemática
- Matemáticas y su integración con otras áreas.

El presente libro contiene los artículos de las propuestas aceptadas y presentadas durante el congreso:

- 12 conferencias,
- 19 talleres,
- 53 reportes de investigación
- 13 socializaciones de experiencias

Mi agradecimiento al comité organizador, liderado por Cecilia Gaita y al Comité Científico coordinado por Jesús Flores y, por supuesto a todos aquellos que hicieron posible con sus participación este congreso.

Francisco Ugarte Guerra
Director del IREM-PUCP

Convocan

Instituto de Investigación para la Enseñanza de las Matemáticas (IREM-PUCP)

Maestría en Enseñanza de las Matemáticas – Escuela de Posgrado de la PUCP

Auspician:

IREM-PUCP

Red Peruana de Universidades

Comité Científico

Dra. Jesús Flores Salazar (IREM-PUCP, Perú)

Dr. Alain Kuzniak (Laboratorio de Didáctica André Revuz de la Universidad Paris Diderot, Francia)

Dra. Avenilde Romo Vásquez (Instituto Politécnico Nacional-IPN, México)

Dr. Cerapio Quintanilla Cóndor (Universidad Nacional de Huancavelica-UNH, Perú)

Dra. Cileda De Queiroz e Silva Coutinho (PUC Sao Paulo, Brasil)

Mag. Daysi Julissa García Cuéllar

Dra. Elizabeth Montoya Delgadillo (Pontificia Universidad Católica de Valparaíso-Chile)

Dr. Fumikazu Saito (PUC Sao Paulo, Brasil)

Dr. Laurent Vivier (Laboratorio de Didáctica André Revuz de la Universidad Paris Diderot, Francia)

Dra. Maria Jose Ferreira da Silva (PUC Sao Paulo, Brasil)

Dra. Norma Rubio Goycochea (PUCP-Perú)

Dr. Saddo Ag Almouloud (PUC Sao Paulo, Brasil)

Dr. Uldarico Malaspina Jurado (IREM-PUCP, Perú)

Comité Organizador

Dr. Francisco Ugarte Guerra (IREM-PUCP)

Dra. Cecilia Gaita Iparraguirre (IREM-PUCP)

Dra. Nancy Saravia Molina (IREM-PUCP)

Mag. Cintya Gonzáles (IREM-PUCP)

Mag. Flor Carrillo Lara (IREM-PUCP)

Mag. Iris Flores Quesquén (IREM-PUCP)

Índice General

CONFERENCIAS PLENARIAS

1	Instrumentación Corporeizada: combinando diferentes puntos de vista sobre el uso de la Tecnología Digital en la Educación Matemática. <i>Paul Drijvers.</i>	19
2	Razonar con la Covariación. Un estudio sobre las Estrategias en un Curso de Formación de Futuros Profesores de Matemática. <i>Jhony Alexander Villa-Ochoa.</i>	44
3	El Papel de los Problemas de Modelación en la Enseñanza Secundaria. <i>María Trigueros Gaisman.</i>	56
4	El 'Networking' de Teorías en Educación Matemática: ¿Qué significa y Qué produce? <i>Michèle Artigue.</i>	72

CONFERENCIAS PARALELAS

1	Indagar, crear y resolver Problemas de Matemáticas <i>Uldarico Malaspina Jurado.</i>	82
2	Geometría y Ecuaciones Cuadráticas de una Incógnita: Análisis de una Construcción <i>Maria José Ferreira da Silva.</i>	91
3	Praxeologias requeridas por la Profesion Docente <i>Michèle Artaud.</i>	102
4	Contribuição Da Didática da Matemática Na Forma Continuada de Professores que Ensinam Matemática <i>Saddo Ag Almouloud.</i>	103
5	Curiosidades Criativas Na História Do Conceito de Função: Contribuições para o Ensino <i>Iran Abreu Mendes.</i>	116

6	Cambios en el Espacio de Trabajo Matemático de Profesores del Liceo en el Dominio del Análisis y sus Implicancias con la Modelización <i>Elizabeth Montoya Delgadillo.</i>	124
7	Formación Docente: el caso de la proporcionalidad <i>Jean-Pierre Bourgade.</i>	132
8	Estadística, Criticidad y Registro de Representaciones Semióticas <i>Cileda de Queiroz e Silva Coutinho.</i>	142

TALLERES

1	¿Cómo construir el concepto de Fracción a partir de sus significados? <i>Olimpia Castro, Sahara Doria, Rosa Lafosse, Percy Merino.</i>	151
2	O Cubo Estatístico: Material para Trabalhar Variáveis Estatísticas <i>Irene Mauricio Cazorla, Cláudio Vitor antana.</i>	158
3	Problemas de Matemática Recreativa: Resolución con TAC <i>Daniel Moreno Caicedo, Juddy Amparo Valderrama Moreno.</i>	168
4	Aprendizaje Activo y Visualización: Representación de un Objeto Tridimensional (3d) en el Plano Bidimensional (2d), a partir de sus Proyecciones Ortogonales o Vistas Principales <i>Carlos Manuel Sabino Escobar, Emilio Máximo Vera Namay.</i>	176
5	Patrón, Sucesión y Secuencia. <i>Elvis Bustamante Ramos, Francisco Ugarte Guerra, Magaly Ethel Campos.</i>	182
6	Propuesta de Tareas y Recursos para la Enseñanza de la Geometría <i>Isabel Torres Céspedes, Marisel Beteta Salas, José Carlos León Ríos.</i>	188
7	Recursos Tecnológicos-Matemáticos para formar Docentes Digitales <i>Zenón Eulogio Morales Martínez.</i>	196
8	Construindo o Pensamento Probabilístico: O Jogo Do Franc-Carreau <i>Cileda de Queiroz e Silva Coutinho, Auriluci de Carvalho Figueired.</i>	206
9	Visualización de Sólidos por Secciones Transversales usando Geogebra <i>Nancy Saravia Molina, Elizabeth Advíncula Clemente.</i>	213
10	Uso de Scripts para Crear Actividades Autoevaluables en Geogebra <i>Marco Gutiérrez Montenegro.</i>	218

11	La Formulación de Problemas: Herramienta utilizada en el aula para el desarrollo de Habilidades Matemáticas a lo largo de la Escolaridad <i>Percy Merino, Olimpia Castro, Carlos Torres, Sahara Doria.</i>	224
12	Criação de Aplicativos Na Perspectiva Da Matemática Inclusiva <i>Elton de Andrade Viana, Maximiliani Albano Hermelino Ferreira, Ana Maria Antunes de Campos, Ana Lucia Manrique.</i>	224
13	Educación Financiera en la Escuela Primaria <i>Celso Ribeiro Campos, Andréa Pavan Perin.</i>	240
14	Vigilancia Epistemológica de Forma y Medida en Geometría <i>Victor Barrial Sandoval.</i>	249
15	Visualización de Cuadriláteros: Mediación del Software Geogebra <i>Cecilia Gómez Mendoza, Flor Isabel Carrillo Lara, Rocío Figueroa Vera, Gustavo Rodríguez T.</i>	260
16	Creación de Problemas sobre Composición de Funciones usando Applets <i>Elton Barrantes, Maritza Luna, Marco Solorzano.</i>	269
17	Resolución de Problemas Aritméticos <i>Ángel Homero Flores Samaniego, Isabel Torres Céspedes.</i>	278
18	Conocimientos Didáctico-Matemático del Profesor de Secundaria sobre los Sistemas de Ecuaciones Lineales <i>Carlos Omar Cárdenas Estrella, Rosa Cecilia Gaita Iparraguirre.</i>	284
19	Una reflexión sobre el uso de la Geometría Dinámica en el Contexto Escolar <i>Guadalupe Morales Ramírez, Norma Rubio Goycochea.</i>	294

REPORTES DE INVESTIGACIÓN

1	La Creación de Problemas en Gestión de Datos y la Formación de Profesores de Secundaria <i>Augusta Osorio Gonzales, Sara Mónica Sáenz Chaparro, Yolanda Gladys Alhuay Albites, Norma Lidia Olivares Acuña.</i>	302
2	Ensino de Matemática a Alunos com Altas Habilidades/Superdotação por Meio da Construção de Cenários Animados no Geogebra <i>Adrielei Cristine Bueno, Maria Ivete Basniak.</i>	312
3	Una investigación con enfoque en las relaciones entre los trastornos y la ansiedad matemática <i>Ana Maria Antunes de Campos, Elton de Andrade Viana, Ana Lúcia Manrique.</i>	322
4	Teorías de maestros sobre evaluación, en el área de matemática <i>Rodri Demus De la Cruz Rodríguez, Luís Manuel Casas García.</i>	331
5	La Creación de Problemas en la Formación de Profesores <i>Carina Saire Huamani.</i>	340
6	Una estrategia de Invención de Problemas para estimular el Desarrollo de la Competencia de Análisis Didáctico en Profesores de Matemática <i>Carlos Torres, Uldarico Malaspina.</i>	340
7	Errores que cometen los estudiantes de tercer año de Secundaria en la Resolución de Inecuaciones Lineales con una Variable <i>Rolando Ruiz Carbajal.</i>	358
8	Relación entre las Cónicas y Diseño Arquitectónico <i>Sumaya Jaimes Reátegui, Rosa Kohama Aréstegui, Darcy E. Aréstegui de Kohama.</i>	381
9	Formas e Equações: Uma Introdução Ao Estudo Das Seções Cônicas Com O Geogebra <i>André Lúcio Grande, Benedito Antonio da Silva.</i>	393
10	Formación de Profesores de Matemática. Una Revisión de Literatura Científica de los últimos 10 años <i>Flor Isabel Carrillo Lara.</i>	403
11	Espacio de Trabajo Matemático Personal: Interpretación Geométrica de la Derivada de una Función Real de Variable Real <i>Lisbeth Chacón Cama, Jesús Victoria Flores Salazar.</i>	415

12	Objeto Virtual de Aprendizaje: Una Estrategia para Desarrollar Pensamiento Algebraico <i>Juddy Amparo Valderrama Moreno, Solange Roa Fuentes.</i>	421
13	Emociones de Profesores de Matemáticas en Formación <i>María S. García González, Elizabeth Advíncula Clemente, Carina J. Saire Huamani.</i>	429
14	La Enseñanza de Sumas con Números Naturales en la Escuela Primaria Multi - Grado <i>Lorena Trejo Guerrero.</i>	439
15	Análise de Livro Didático: Uma Olhar para o Ensino da Linguagem Gráfica <i>Sidney Silva Santos, Geovane Carlos Barbosa, Nathalia Tornisiello Scarlassari, Celi Espasandin Lopes.</i>	447
16	Un Análisis Normativo Ontosemiótico de los Textos Matemáticos Escolares bajo el Enfoque de Género <i>Anderson D. Chavez Marcelo.</i>	455
17	Álgebra nos Anos Iniciais e Finais Do Ensino Fundamental: Análise Das Expectativas Institucionais <i>Anderson Alves, Marlene Alves Días, Karina de Oliveira Castro, Mariana Silva Nogueira Ribeiro.</i>	464
18	Análisis de las Dificultades que presentan los Estudiantes Universitarios en Matemática Básica <i>Roger Ivan Soto Quiroz.</i>	473
19	Errores y Dificultades Relativos al Concepto de Solución de Ecuaciones Lineales <i>Aldrin Peña Lizano, Francisco Ugarte Guerra.</i>	484
20	Dificultades en el Desarrollo del Pensamiento Variacional en Estudiantes de Ingeniería <i>Alejandro M. Ecos Espino, Joffré Huamán Núñez, Zoraida R. Manrique Chávez.</i>	490
21	Articulación de las aprehensiones en la noción del límite en un punto de una función real de variable real en estudiantes de ingeniería <i>Violeta Lupita Bejarano Vélchez, Verónica Neira Fernández.</i>	500
22	El Concepto de Infinito y el Modelo de Van Hiele <i>Alba Soraida Gutiérrez Sierra, Rene Alejandro Londoño Cano.</i>	509

23	El Dinamismo de Geogebra para explorar Aspectos Básicos de la Teoría del Caos <i>Viviana Angélica Costa.</i>	519
24	Herramientas matemáticas para la práctica experimental en el área de física <i>Johel Aldo Tarazona Guillen.</i>	529
25	O Professor Em Uma Aula Assente No Ensino Exploratório de Matemática <i>Vania Sara Doneda de Oliveira, Dalva Spiler Brandelero, Maria Ivete Basniak.</i>	537
26	Instrumentación del Artefacto Simbólico Función Cuadrática <i>Daysi Julissa García-Cuéllar, Mihály André Martínez-Miraval, Jesús Victoria Flores Salazar.</i>	546
27	Enfoque Frequentista de Probabilidades - Um Estudo À Luz Da Teoria Dos Registros de Representação Semiótica <i>Cileda de Queiroz e Silva Coutinho, Auriluci de Carvalho Figueiredo.</i>	555
28	Formación Docente en Gestión de Datos <i>Augusta Osorio Gonzales, Elizabeth Advíncula Clemente.</i>	563
29	Concepções sobre Estatística Mobilizadas por Alunos E Professores Do Ensino Médio: Um Estudo de Caso <i>Cassio Cristiano Giordano.</i>	569
30	O Ensino Para O Desenvolvimento Do Pensamento Algébrico Nos Anos Iniciais Face Às Atitudes Em Relação À Matemática E Às Crenças De Autoeficácia De Professores In-Service E Pre-Service <i>Roseli Regina Fernandes Santana, Nelson Antonio Pirola.</i>	579
31	Programa Institucional De Bolsas De Iniciação À Docência, Pibid: O Que Dizem As Escolas, A Universidade E Os Bolsistas <i>Maria Aparecida Silva de Souza, Saddo Ag Almouloud.</i>	589
32	Propuesta De Un Perfil De Ingresante A La Carrera Profesional De Matemática De La Universidad Nacional De Piura <i>Gloria Solvey Crespo Guerrero.</i>	598
33	El Sistema Métrico Decimal En Las Escuelas De Perú: Un Análisis Del Manual De Aritmética Práctica Del Año De 1864 <i>Elenice de Souza Lodron Zuin.</i>	608

34	Elaboração De Livro Paradidático Para O Ensino De Estatística: O Trilhar De Uma Proposta Para O Nono Ano Do Ensino Fundamental <i>Anneliese de Oliveira Lozada, Ailton Paulo de Oliveira Jr.</i>	617
35	A Contribuição Da Autoscoopia Na Formação Do Professor De Matemática Da Rede Estadual Do Ensino Médio No Estado Do Amazonas <i>Aldemir Malveira de Oliveira, Floriano Augusto Veiga Viseu.</i>	630
36	Formación Docente Que Enseña Matemáticas Desde Una Perspectiva Colaborativa <i>Zionice Garbelini Martos Rodrigues, Roseli Regina Fernandes Santana, Luciane de Castro Quintiliano, Adriana de Bortoli.</i>	639
37	O Ensino E A Aprendizagem Da Matemática No Processo De Letramento Da Língua Materna: Reflexões Para A Prática Pedagógica <i>Dimas Cássio Simão.</i>	645
38	Crenças De Autoeficácia E O Ensino Da Álgebra Nos Anos Finais Do Ensino Fundamental <i>Anderson Cangane Pinheiro, Nelson Antonio Pirola.</i>	653
39	La Tasa De Variación: Una Mirada Desde El Etm Personal De Estudiantes De Secundaria <i>Marco Antonio Ticse Aucahuasi, Jesús Victoria Flores Salazar, Elizabeth Montoya Delgadillo.</i>	662
40	Estudio Histórico-Epistemológico De Las Nociones Trigonométricas Seno Y Coseno <i>Gilder Samuel Vargas Vargas, Mihály Martínez-Miraval.</i>	671
41	Estudo Dos Quadriláteros: Uma Revisão Da Literatura <i>Daysi Julissa García-Cuéllar, Saddo Ag Almouloud.</i>	682
42	La Teoría Del Reflejo De V. I. Lenin En La Tradición Dialéctica De L. S. Vygotsky Y Sus Vínculos Con La Educación Matemática: Error Y Fantasía En La Enseñanza Problemática De La Geometría <i>Luis Miguel Maraví Zavaleta.</i>	693
43	La Modelación Y La Experimentación En El Estudio De Un Fenómeno Físico. Experiencias Y Reflexiones En Educación Media <i>Alexander Castrillón-Yepes, Sebastián Mejía Arango, Ana Carolina González-Grisales, Paula Andrea Rendón-Mesa.</i>	704

44	Un Acercamiento Entre Los Recorridos De Estudio E Investigación Y Las Tareas Auténticas, Propuesta De Un Proceso De Modelización De La Función Seno <i>Percy Luján Rosadio, Cintya Sherley Gonzales Hernández.</i>	714
45	Prácticas De Enseñanza Del Proceso De Modelización Matemática En Secundaria En Bogotá, Colombia <i>Blanca Cecilia Fulano Vargas.</i>	725
46	Descriptores De Nivel De Razonamiento De Van Hiele, Para La Comprensión De La Parábola Como Lugar Geométrico <i>William Eduardo Calderón Gualdrón, René Alejandro Londoño Cano.</i>	735
47	Tareas de Aprendizaje y Habilidades de Visualización a Partir del Cálculo de Volúmenes <i>Catalina Molano Carranza, Hildebrando Díaz Soler.</i>	744
48	Usos de la Pendiente en Prácticas de Agricultura <i>David Esteban Espinoza, Gabriela Buendía Abalos.</i>	757
49	¿Cuáles Competencias Digitales Favorece Desarrollar El Concurso Foto gebra? <i>Karina Amalia Rizzo, Viviana Angélica Costa.</i>	767
50	La Autorregulación como Posibilidad para Aprender Lógica Proposicional a Través del Ajedrez <i>Yorman Arley Isaza Agudelo, Neysy Catalina Londoño Misas, Luz Stella Mejía Aristizábal.</i>	777
51	Textos Literarios para El Aprendizaje de la Matemática <i>Ingrid Maritza Aquino Palacios, Marta Celinda Ríos Zea.</i>	784
52	Análisis Praxeológico de la Integral Definida en Libros de Texto de Ingeniería <i>Walter Orlando Gonzales Caicedo, Rosa Cecilia Gaita Iparraguirre.</i>	792
53	Análisis Económico Institucional sobre la Enseñanza de Vectores <i>Maritza Luna Valenzuela, Saddo Ag Almouloud, Francisco Javier Ugarte Guerra.</i>	804

SOCIALIZACIÓN DE EXPERIENCIAS DIDÁCTICAS

1	Experiencia de Investigación Formativa en la Asignatura de Matemática Financiera <i>David Esteban Espinoza.</i>	817
2	Errores de Estudiantes en la Modelización de una Situación Cotidiana que Involucra a la Función Lineal y Cuadrática <i>Magaly Ethel Campos Motta, Elvis Bustamante Ramos.</i>	822
3	Sequências de Ensino para Promover o Letramento Estatístico <i>Irene Mauricio Cazorla, Miriam Cardoso Utsumi.</i>	828
4	Análisis de Actividades para la Enseñanza de la Gestión de Datos <i>Percy Callinapa Supo, Eliana Inca Choquepata, Elsa Macedo Anaya.</i>	839
5	La Situación Significativa en la Competencia Resuelve Problemas de Gestión de Datos e Incertidumbre <i>Giovanna Vicky Gonzales Oporto, Sebastiana Nancy Sacasqui Aguilar.</i>	848
6	Experiencia de la Competencia, "Resuelve Problemas de Forma, Movimiento y Localización" en el Último Puente Inca de Queswachaka <i>Franklin Taipe Florez, Julio Cesar Condori Huillca, Doris Castro Huamani Willi Taipe Florez.</i>	856
7	El Uso de la Regleta de Cuisenaire en el Aula <i>Elizabeth de Lourdes Caudana.</i>	866
8	Educação Estatística Em Um Ambiente de Modelagem Matemática: Uma Ótica Inclusiva Na Educação Infantil <i>Roseli Rosalino Dias da Silva Angelino, Ana Paula Gonçalves Pita, Maria Lucia Lorenzetti Wodewotzki, Andréa Pavan Perin.</i>	872
9	Usando El Ciclo Ppdac para el Análisis Didáctico de una Situación Problema de Secundaria <i>Augusta Osorio Gonzales, Gladys Flores Cuevas, Juliana Pérez Taxi.</i>	880
10	A Constituição Da Matemática Na Proposta Curricular Da Rede Pública Municipal De Educação De São Luís <i>Waléria de Jesus Barbosa Soares, Carlos André Bogéa Pereira.</i>	888
11	Vibraciones y Ondas con Mathematica <i>Roy Sánchez Gutiérrez.</i>	896

12	Aprendiendo a Entender La Noción de Límite de una Función <i>Judith Catherine Chávez Salinas.</i>	904
13	O Laboratório de Educação Matemática e Inclusão Na Formação Inicial Do Professor de Matemática <i>Karem Keyth de Oliveira Marinho, Elielson Ribeiro de Sales.</i>	910

ARTÍCULOS

CONFERENCIAS PLENARIAS

INSTRUMENTACIÓN CORPOREIZADA: COMBINANDO DIFERENTES PUNTOS DE VISTA SOBRE EL USO DE LA TECNOLOGÍA DIGITAL EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA¹

Paul Drijvers

p.drijvers@uu.nl

Universidad de Utrecht, Los países bajos

Resumen

El potencial de la tecnología digital para la educación matemática ha sido ampliamente investigado en las últimas décadas. Aun así, queda mucho por saber acerca de cómo usar las herramientas para fomentar el aprendizaje de las matemáticas. Para abordar esta cuestión, primero considero las funcionalidades didácticas de la tecnología digital en la educación matemática y los modestos efectos generales del uso de estas herramientas para el aprendizaje. Luego, para encontrar posibles explicaciones de estos hallazgos, abordo tres enfoques relevantes: (1) un enfoque de la Educación Matemática Realista (EMR) sobre el uso de herramientas, (2) un enfoque instrumental para el uso de herramientas y (3) un enfoque corporeizado sobre la cognición. Como conclusión, afirmo que las tres lentes comparten un enfoque en el significado matemático. Mientras que el enfoque de la EMR proporciona pautas generales importantes, un enfoque integrador para el uso de herramientas, que denomino instrumentación corporeizada, y que incluye la alineación cuidadosa de las experiencias corporeizadas e instrumentales, parece prometedor para generar actividades de aprendizaje poderosas.

Palabras clave: *tecnología digital, instrumentación corporeizada, Corporeización, enfoque instrumental, educación matemática, educación matemática realista.*

Una introducción al uso de herramientas

Desde el origen de la humanidad, los hombres han utilizado herramientas para ampliar su alcance y llevar a cabo tareas de manera más fácil y eficiente. Con el tiempo se ha desarrollado una amplia gama de herramientas. Las más básicas, como un hacha de piedra para cortar madera, permitieron a sus usuarios ir más allá de sus limitaciones físicas para lograr objetivos específicos. Las herramientas no siempre fueron diseñadas como tales. En algunos casos, las personas, o los animales, dado que el uso de herramientas no se limita a la especie humana, se apropiaron de los objetos para una tarea específica y de esta manera "convirtieron los objetos en herramientas". Por ejemplo, uno podría usar una rama de árbol para golpear a alguien más fuerte de lo que uno podría hacerlo con las manos descubiertas, pero la rama no creció del árbol para facilitar la paliza.

Drijvers, P. (2020). Instrumentación corporeizada: combina diferentes puntos de vista sobre el uso de la tecnología digital en la educación matemática. En U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen y M. Veldhuis (Eds.), *Actas del Undécimo Congreso de la Sociedad Europea para la Investigación en Educación Matemática* (pp. 8–28). Utrecht, Los países bajos: Grupo Freudenthal e Instituto Freudenthal, Universidad de Utrecht y ERME (Asociación Europea para la Investigación en Educación Matemática, en español).

Con el tiempo, las herramientas se han vuelto más sofisticadas y son diseñadas para llevar a cabo tareas cognitivas. Piense, por ejemplo, en tablillas de arcilla para plasmar cálculos (Proust, 2012). Escribir cálculos supone formas de representar números y operaciones, que son nociones matemáticas bastante abstractas; estas representaciones en sí ya pueden considerarse herramientas (Monaghan, Trouche y Borwein, 2016). Desde las tablillas de arcilla, muchas otras herramientas para las matemáticas se han diseñado y utilizado a lo largo de los siglos. Los artefactos físicos como el ábaco y las brújulas respectivamente facilitaron los cálculos y las construcciones geométricas.

Gradualmente, surgieron nuevos tipos de herramientas, como las herramientas mecánicas (piense en la Pascalina de Pascal (Maschietto y Soury-Lavergne, 2013)) y las herramientas digitales. Hoy en día, la tecnología digital, como calculadoras, tabletas (aunque ya no de arcilla), teléfonos inteligentes y relojes inteligentes, da acceso a una amplia gama de características matemáticas, incluidos sofisticados motores de álgebra computacional y paquetes estadísticos. En muchos casos, las matemáticas integradas en los últimos tipos de software tienen un carácter de caja negra no transparente. Además de esto, el papel de las matemáticas bajo el capó de las herramientas avanzadas, tales como motores de búsqueda, herramientas de navegación y tarjetas de crédito, por mencionar solo algunos ejemplos, se está volviendo cada vez más invisible.

A medida que la educación prepara para la vida privada y profesional futura, el desarrollo y la disponibilidad generalizada de herramientas matemáticas sofisticadas afecta la educación matemática. Estas herramientas transforman la actividad matemática (Hoyles, 2018). Sin embargo, aún se desconoce mucho sobre cómo explotar el potencial de estas poderosas tecnologías para el aprendizaje de las matemáticas. A pesar de la gran cantidad de literatura disponible (para ver resúmenes, ver Ball et al., 2018; Hoyles y Lagrange, 2010; Trgalová, Clark-Wilson y Weigand, 2018), la comunidad de educación matemática todavía está luchando por la integración de la tecnología digital tanto en la enseñanza como en el aprendizaje. La pregunta sobre cómo el uso de la tecnología digital puede fomentar el aprendizaje de las matemáticas y qué lentes teóricos pueden guiarnos está esperando ser respondida.

Para abordar esta pregunta, primero cubriré globalmente las funcionalidades didácticas de la tecnología digital en la educación matemática y los modestos efectos generales del uso de estas herramientas para el aprendizaje. Para considerar posibles explicaciones de estos hallazgos, luego abordaré tres enfoques teóricos relevantes con más detalle: (1) un enfoque de la Educación Matemática Realista (EMR) sobre el uso de herramientas, (2) un enfoque instrumental para el uso de herramientas y (3) un enfoque corporeizado sobre la cognición. Finalmente, afirmaré que estas tres lentes comparten un enfoque en el significado matemático. Mientras que el enfoque de la EMR proporciona pautas generales importantes, un enfoque integrador para el uso de herramientas, que denominaré instrumentación corporeizada, y que incluye la cuidadosa alineación de las experiencias corporeizadas e instrumentales, parece prometedor para generar actividades de aprendizaje poderosas.

HERRAMIENTAS DIGITALES EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Una taxonomía de las herramientas digitales

En las últimas décadas, se ha desarrollado una miríada de herramientas digitales para la educación matemática. Estas herramientas muestran una amplia variedad con respecto al enfoque matemático, la funcionalidad didáctica, la facilidad de uso y otras características. Todas, sin embargo, vienen con posibilidades y limitaciones, con oportunidades y restricciones. Permítanme tratar de esbozar una visión general del panorama fragmentado de la tecnología digital en la educación matemática. Una primera dimensión, por supuesto, es la funcionalidad matemática de la herramienta. Una categorización de la funcionalidad matemática de una herramienta puede estar cerca de una categorización del campo de las matemáticas en sí. Las herramientas digitales pueden realizar trabajos algebraicos, tareas gráficas, análisis estadísticos, procedimientos de cálculo y trabajos geométricos. Los dominios tradicionales de las matemáticas escolares (por ejemplo, número, razón, álgebra, geometría, cálculo, estadística) pueden servir para clasificar globalmente la funcionalidad matemática de las herramientas digitales para la educación matemática. No hace falta decir que una herramienta digital específica puede cubrir un rango de estos dominios y, como tal, servir a más de una funcionalidad matemática, pero esta categorización matemática todavía parece funcionar.

Un poco más complicada es una taxonomía de la funcionalidad didáctica de una herramienta digital, más aún, ya que esto no es solo una cuestión de la herramienta en sí, sino que también depende en gran medida del tipo de tareas y de la forma en que el uso está integrado y orquestado en los procesos de enseñanza y aprendizaje. A pesar de esta limitación evidente, creo que el modelo muy global presentado en la Figura 1 (Drijvers, Boon y Van Reeuwijk, 2011; Drijvers, 2018b) puede ayudar a los maestros y educadores a preparar su enseñanza con tecnología y ser explícitos acerca de sus objetivos principales y las opciones correspondientes con respecto a la herramienta a utilizar. La primera funcionalidad didáctica en la Figura 1 es "hacer matemáticas". Esta funcionalidad no se dirige al corazón de la actividad matemática en sí misma, sino que se refiere a externalizar parte del trabajo para aliviar la mente del alumno. De esta manera, se puede ahorrar energía para el asunto principal; una división del trabajo entre estudiante y máquina, por así decirlo. A continuación, la Figura 1 muestra dos tipos de funcionalidad didáctica que se centran en el aprendizaje. Con respecto al aprendizaje mediante la práctica de habilidades matemáticas, las herramientas digitales pueden ofrecer variación y aleatorización de tareas, y retroalimentación automatizada e inteligente. Como tal, las herramientas digitales forman un entorno personal en el que uno puede cometer errores de forma segura y aprender de ellos. Finalmente, el uso de herramientas para el desarrollo de conceptos implica el uso de una herramienta digital para explorar fenómenos que invitan al desarrollo conceptual. Ésta es probablemente la funcionalidad didáctica más desafiante y sutil para explotar, ya que el desarrollo de conceptos puede considerarse un objetivo de aprendizaje de orden superior.

Por supuesto, las categorías en esta taxonomía de funcionalidad didáctica no son mutuamente excluyentes; en muchos casos, la funcionalidad didáctica de "conceptos en desarrollo" se basa en la función de externalización para hacer matemáticas. Además, la función didáctica de una herramienta digital es solo una característica de la herramienta en menor medida que la

funcionalidad matemática; también depende del tipo de tareas y la actividad del estudiante, y el entorno educativo. Dicho esto, el modelo puede ayudar a identificar algunos roles principales de la tecnología digital en el aprendizaje de las matemáticas.

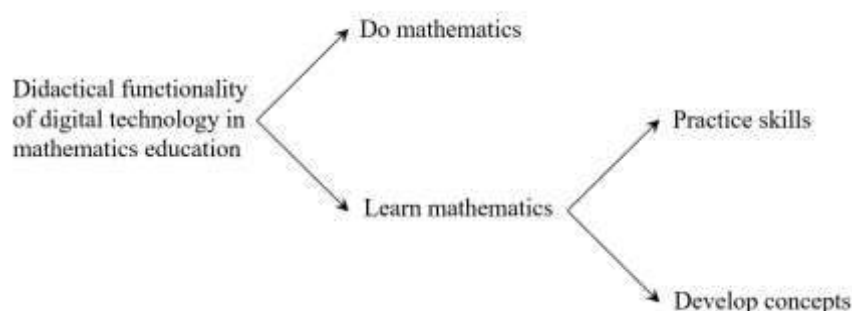


Figura 1. Funcionalidad didáctica de la tecnología digital en educación matemática

(Drijvers, Boon y Van Reeuwijk, 2011; Drijvers, 2018b)

Los beneficios del uso de herramientas

Después de este bosquejo global del panorama matemático y didáctico, uno podría preguntarse sobre los beneficios del uso de la tecnología digital en la educación matemática. ¿Cuánta evidencia hay para los logros de aprendizaje? Recientemente, la OCDE no fue muy optimista sobre esta evidencia: "A pesar de las considerables inversiones en computadoras, conexiones a Internet y software para uso educativo, hay poca evidencia sólida de que un mayor uso de la computadora entre los estudiantes conduzca a mejores puntajes en matemáticas y comprensión lectora". (OCDE, 2015, p. 145)

Para seguir investigando esto, repasé algunos estudios en este dominio (Drijvers, 2018a). Al hacerlo, una fuente principal fue un metaanálisis de segundo orden llevado a cabo por Young (2017), quien, curiosamente, tomó como punto de partida la tipología de funcionalidad didáctica que se muestra en la Figura 1. Incluyendo 19 meta estudios, Young encuentra un efecto positivo significativo del uso de la tecnología en la educación matemática con un tamaño de efecto promedio pequeño a moderado de 0,38 (Cohen, 1988). En su cálculo, la *d* de Cohen y la *g* de Hedges se consideran comparables. Este promedio varía ligeramente sobre las tres funciones didácticas diferentes: 0,47 para el papel de "hacer matemáticas", 0,42 para el papel de "practicar habilidades" y 0,36 para el papel de "desarrollar conceptos". Esto no me sorprende, ya que la última funcionalidad generalmente requiere más reflexión del estudiante que las otras dos. Sin embargo, para los estudios en los que se combinan las diferentes funcionalidades didácticas, el tamaño del efecto promedio es menor, es decir, 0,21.

Un hallazgo interesante de Young (ibíd.) es que el tamaño del efecto promedio reportado parece disminuir con la calidad creciente de los metaanálisis incluidos. La calidad aquí se refiere tanto al metaanálisis en sí como a la calidad de los estudios incluidos en él. Por ejemplo, los tres estudios mencionados en la Tabla 1 son los únicos calificados como de alta calidad y muestran tamaños de efecto relativamente bajos. Una mirada más detallada a estos estudios también revela que los tamaños del efecto reportados en los diferentes informes de investigación no aumentan significativamente con el tiempo, mientras que uno podría esperar que las herramientas tecnológicas estén mejorando junto con la capacidad de los maestros

para explotarlas en la enseñanza. Una posible explicación podría ser que un posible desarrollo positivo con el tiempo se compensa con otros factores, tales como diseños y métodos de estudio más rigurosos y tamaños de muestra más grandes.

Tabla 1:

Tamaños de efectos informados en tres estudios de meta-revisión de alta calidad

Estudio	Número de tamaños del efecto	Tamaño del efecto promedio	Conclusión global según los autores
Li y Ma, 2010	85	$d = 0.28$ (ponderado)	Efectos positivos significativos moderados
Cheung y Slavin, 2013	74	$d = 0.16$	Un efecto positivo, aunque modesto.
Steenbergen-Hu y Cooper, 2013	61	g rango 0.01 – 0.09	Sin efecto negativo y quizás un pequeño efecto positivo

Fuente: basados en Drijvers, 2018a

Por supuesto, este enfoque de *zoom out* sufre limitaciones importantes. Los estudios se basan en investigaciones anteriores, por lo que la imagen podría haber cambiado desde entonces. Además, los estudios solo incluyen estudios experimentales y cuantitativos y descuidan la investigación cualitativa o basada en el diseño. Y, finalmente, las descripciones generales como éstas no distinguen los niveles educativos, los tipos de tecnología utilizados y otros factores educativos que pueden ser decisivos.

Aun así, sería demasiado fácil ignorar los hallazgos anteriores debido a estas limitaciones. Los tamaños del efecto no son abrumadores y la cita de la OCDE al principio de esta sección parece apropiada. ¿Por qué la integración de la tecnología digital en la educación matemática no es el éxito que uno podría haber esperado? En mi opinión, la pregunta "¿funcionan las TIC en la educación matemática?" es demasiado amplia. Si reemplazáramos "TIC" por "libro de texto", por ejemplo, a nadie le sorprendería obtener una respuesta como "solo depende de la calidad del libro de texto". De manera similar, explotar todo el potencial de las herramientas digitales en la educación matemática es un tema complejo que requiere conocimientos más detallados sobre los procesos de aprendizaje que juegan un papel, en el contenido matemático orientado, y en las formas en que la actividad matemática se ve afectada por el uso de la herramienta. Por lo tanto, ahora me acercaré a tres puntos de vista teóricos y más matizados sobre el uso de herramientas digitales en la educación matemática, que pueden ofrecer principios y marcos para abordar mejor la sutileza del tema.

Un enfoque de la Educación Matemática Realista

Aunque la teoría de la Educación Matemática Realista (EMR) se aplica a la educación matemática en general, también podría arrojar algo de luz sobre los posibles beneficios del uso de la tecnología digital en la educación matemática. Permítanme explicar primero algunas características generales de la EMR. La EMR es una teoría de instrucción para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas que se desarrolló en Holanda. Un punto de partida fue el enfoque de Freudenthal (1973) sobre las matemáticas como una actividad humana, es decir, los estudiantes deberían experimentar las matemáticas como significativas, auténticas, con sentido y reales. La siguiente cita subraya que la palabra "realista" no debe entenderse como "mundo real":

Aunque las situaciones "realistas" en el sentido de las situaciones del "mundo real" son importantes en la EMR, "realista" tiene una connotación más amplia aquí. Significa que a los estudiantes se les ofrecen situaciones problemáticas que pueden imaginar. Esta interpretación de "realista" se remonta a la expresión holandesa "zich REALISeren", que significa "imaginar". Es este énfasis en hacer algo real en tu mente lo que le dio a la EMR su nombre. Por lo tanto, en la EMR, los problemas que se presentan a los estudiantes pueden provenir del mundo real, pero también del mundo de fantasía de los cuentos de hadas o del mundo formal de las matemáticas, siempre que los problemas sean experimentalmente reales en la mente del estudiante. (Van den Heuvel-Panhuizen y Drijvers, 2014, p. 521).

Este punto de partida se elabora en algunos conceptos clave, incluidos el principio de actividad, la matematización y la fenomenología didáctica. Permítanme explicar brevemente cada uno de estos tres.

- El *principio de actividad* se vincula con la visión de las matemáticas como una actividad humana y destaca que los estudiantes deberían tener la oportunidad de explorar y reinventar las matemáticas, y de esta manera desarrollar sus conocimientos matemáticos.
- En línea con esto, la *matematización* se refiere a la actividad de hacer matemáticas. Treffers (1987) distingue la matematización horizontal y vertical. La matematización horizontal se refiere a la realidad matematizante y al proceso de formulación de una descripción matemática, que implica la transferencia entre diferentes dominios. La matematización vertical se refiere a la matematización de las matemáticas y al proceso de reorganización dentro del sistema matemático, que involucra la génesis de objetos matemáticos y las relaciones entre ellos.
- Una *fenomenología didáctica* es un análisis de "cómo los objetos de pensamiento matemático pueden ayudar a organizar y estructurar los fenómenos" (Van den Heuvel-Panhuizen, 2014, p. 175). Identifica fenómenos que ruegan organizarse con los medios matemáticos específicos que son el tema del aprendizaje y, como tal, pueden "mostrarle al maestro los lugares donde el alumno podría entrar en el proceso de aprendizaje de la humanidad" (Freudenthal, 1983, p. ix). Invita al desarrollo de las matemáticas en juego y le da sentido. Como se dijo antes, estos fenómenos pueden

provenir de diferentes "mundos" siempre que sean experimentalmente reales para los estudiantes (Gravemeijer y Doorman, 1999). Tal análisis, por un lado, pide un análisis exhaustivo del tema matemático y, por otro lado, una visión clara del público objetivo de la enseñanza.

¿Cómo es que estos principios de la EMR informan el uso de la tecnología digital en la educación matemática? Primero, la interpretación de la palabra "realista" en el sentido de experimentalmente real sugiere que los estudiantes deberían experimentar la actividad con la tecnología digital como significativa. En línea con Ainley, Pratt y Hansen (2006), los estudiantes pueden percibir una actividad como significativa si son conscientes de su propósito y su utilidad, donde el propósito se refiere a la actividad que conduce a un "resultado significativo para el alumno, en términos de un producto real o virtual, o la solución de un problema interesante" (p. 29), y utilidad se refiere a "las formas en que esas ideas matemáticas son útiles" (p. 30). Espero que un cierto nivel de transparencia de la herramienta fomente el significado en términos de propósito y utilidad experimentados.

Segundo, el principio de actividad y el enfoque de la actividad humana sugieren que la herramienta digital debería ofrecer a los estudiantes oportunidades para explorar y ser un actor en lugar de un usuario pasivo. Pienso que un grado de propiedad y la sensación de tener el control puedan dar lugar a aquello. Desde la perspectiva de la matematización, tener el control también incluye la oportunidad de expresarse matemáticamente de forma fácil con la cantidad de libertad que uno también tiene al hacer matemáticas en papel y lápiz. Esto requiere una base matemática sólida para la herramienta en uso.

Tercero, y para finalizar, tomar una perspectiva didáctica de la fenomenología me lleva a esperar que los fenómenos puedan cambiar en un aula rica en tecnología: el entorno digital en sí mismo puede ser un fenómeno significativo para estudiar. Por ejemplo, si los estudiantes usan regularmente herramientas digitales como calculadoras gráficas o software para geometría dinámica, estos entornos realmente se convierten en parte del ambiente del aula y, como tales, pueden provocar fenómenos inspiradores que invitan a una mayor investigación. Además, como muchos estudiantes hoy en día están familiarizados con los juegos y las herramientas, los entornos digitales pueden ser bastante naturales y auténticos para ellos, lo que ofrece oportunidades para realizar mejor este principio de la EMR.

Permítanme ilustrar estos principios a través del ejemplo de una serie de lecciones en línea sobre cadenas de flechas y funciones para estudiantes del octavo grado (estudiantes de 14 años), implementados en el Entorno² de Matemática Digital del Instituto Freudenthal (Doorman, Drijvers, Gravemeijer, Boon y Reed, 2012; Drijvers, Doorman, Boon, Reed y Gravemeijer, 2010). En esta serie de lecciones, los estudiantes primero exploran cadenas de operaciones en contextos significativos. Como ejemplo, descubren cómo las distancias de frenado de los diferentes tipos de vehículos, la distancia necesaria para detenerse en caso de emergencia, dependen de su velocidad. Luego, representan el encadenamiento al pararse uno al lado del otro, creando una cadena de entrada/salida en la que cada estudiante es responsable de realizar una de las operaciones, para prepararse para el trabajo en el entorno digital.

La Figura 2 muestra algunas instantáneas del trabajo en el entorno digital que sigue. La primera fila muestra cómo los estudiantes pueden encadenar operaciones para calcular la distancia de frenado en metros de un scooter con una velocidad inicial de 40 km / hora. Por supuesto, después de su experiencia previa con series de cálculos numéricos, el estudiante debe experimentar la construcción de estas cadenas como una forma significativa de organizar estos cálculos. En la segunda fila, la distancia de frenado se investiga como función de la velocidad inicial y se agrega un gráfico. En la tercera fila, estas funciones de distancia de frenado se comparan para scooters, automóviles y camiones. Debido a que la ventana se llenó demasiado, el usuario ha contraído las cadenas de funciones en cuadros individuales, lo que permite una buena comparación de los tres gráficos.

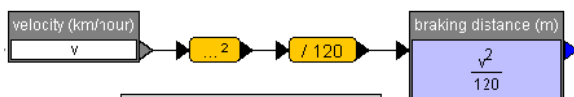
Incluso si estas actividades se describen solo brevemente, se pueden reconocer algunos principios de la EMR. En cuanto al principio de realidad, a los estudiantes se les presentaron cadenas de flechas para organizar los cálculos en actividades que incluyan a toda la clase y en papel y bolígrafo, por lo que se han convertido en formas significativas de capturar cálculos. El carácter abierto del entorno, con una gran ventana vacía como sala de exploración para los estudiantes, está destinado a proporcionar a los estudiantes los medios para construir, cambiar y organizar libremente cadenas de flechas y tener el control de lo que está sucediendo. La matematización horizontal se aborda mediante la tarea de modelar las cadenas de flechas para el caso de las distancias de frenado, y la matematización vertical entra en juego tan pronto como se comparan las tres funciones cuadráticas y sus relaciones, independientemente de la situación inicial del problema de la distancia de frenado. La opción de contraer cadenas de funciones en cuadros está pensada para admitir una vista de objeto en función. Una lente de fenomenología didáctica llevó a los diseñadores a considerar el contexto de la distancia de frenado como un fenómeno que se puede organizar muy bien a través de funciones matemáticas y cadenas de flechas.

Para resumir, el ejemplo ilustra cómo los principios generales de la EMR se pueden aplicar a la situación específica del uso de herramientas digitales de una manera significativa, y como tal proporcionan pautas y criterios para el uso sensato de herramientas. De esta manera, la lente de la EMR puede ofrecer una visión matizada sobre el uso de la tecnología digital en la educación matemática, incluso si no está destinada a este caso particular.



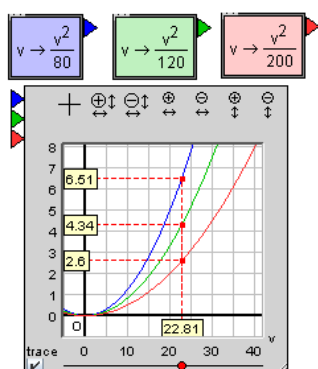
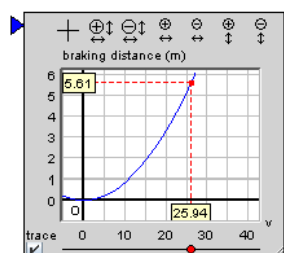
A function as an input-output assignment:
braking distance as a function of velocity

Una función como una asignación de entrada-salida: distancia de frenado como función de la velocidad



Investigation of the co-variation of velocity and braking distance through tracing the graph

Investigación de la covariación de la velocidad y la distancia de frenado a través del trazado del gráfico



Investigation of a family of functions, representing braking distances for three different vehicles

Investigación de una familia de funciones que representan distancias de frenado para tres vehículos diferentes.

Figura 2. Instantáneas del material Function and Arrow Chains (de Drijvers, Boon, Doorman, Bokhove y Tacoma, 2013). Ver <https://youtu.be/OMDjC5yVlr0> para una animación.

Un enfoque instrumental

Además de las pautas generales ofrecidas por la EMR, se necesita una visión más detallada sobre la interacción entre las matemáticas y el uso de herramientas. Una primera visión un tanto ingenua sobre las herramientas digitales y su uso en la educación matemática podría ser que las herramientas son solo asistentes matemáticos "objetivos" que nos ayudan a realizar tareas, a "hacer el trabajo": usarlas reduce la resolución de tareas matemáticas a tan solo presionar botones y, como tal, simplifica nuestras vidas. Sin embargo, las cosas no son tan sencillas. Las herramientas no son tan neutrales como uno podría esperar, pero vienen con posibilidades y limitaciones, con oportunidades y obstáculos, y como tales guían las prácticas matemáticas del usuario:

Las herramientas son importantes: se interponen entre el usuario y el fenómeno a modelar, y dan forma a las estructuras de actividad. (Hoyles & Noss, 2003, p. 341)

Por ejemplo, dibujar un círculo con compás es bastante diferente de dibujarlo en un entorno de geometría dinámica como GeoGebra. En el primer caso, uno realmente experimenta un movimiento circular, después de decidir sobre el centro y el radio. En el último caso, la atención se centra en establecer el centro y el radio, pero al agrandar el radio, el círculo crece y el movimiento circular ya no es necesario. Diferentes herramientas conducen a diferentes técnicas y, como tal, a diferentes puntos de vista sobre el mismo concepto matemático subyacente.

De hecho, en línea con Vygotsky (1978), las herramientas median entre la actividad humana y el medio ambiente. Como consecuencia, el uso de herramientas digitales para aprender y hacer matemáticas no es solo una cuestión de transformar directamente el pensamiento matemático en comandos de herramientas. Por un lado, el usuario da forma a las técnicas para usar la herramienta, pero, por otro lado, la herramienta da forma y transforma la práctica matemática del usuario. Estas consideraciones dieron lugar al desarrollo de un nuevo enfoque teórico, llamado enfoque instrumental para el uso de herramientas. La clave de este enfoque son las nociones de artefacto, instrumento, génesis instrumental, esquema y técnica. Permítanme explicar brevemente estas nociones.

Un punto de partida en los enfoques instrumentales es la distinción entre artefacto e instrumento (Rabardel, 2002; Vérillon y Rabardel, 1995). El artefacto es el objeto que se utiliza como herramienta. En nuestro caso, las calculadoras gráficas o el software de geometría dinámica son artefactos, incluso si también queremos mirar con más detalle, y considerar la ventana de gráficos en GeoGebra como un artefacto, o la opción Solucionador en una calculadora gráfica. Un instrumento consiste en un artefacto y "uno o más esquemas de utilización asociados" (Verillon y Rabardel, 1995, p. 87). Entonces, además del artefacto, el instrumento también involucra los esquemas que el usuario desarrolla y aplica mientras usa el artefacto para una clase específica de situaciones de actividad instrumentada, en nuestro caso a menudo involucrando un tipo de tareas matemáticas. Para resumir esto a una "fórmula" algo simplificada: Instrumento = Artefacto + Esquema. El proceso de un artefacto que se convierte en parte de un instrumento se llama génesis instrumental (Artigue, 2002; Trouche & Drijvers, 2010).

¿Cuáles son estos esquemas, clave en la génesis instrumental? Basado en el trabajo de Piaget (1985) y otros, un esquema se considera una forma más o menos estable de manejar situaciones o tareas específicas. Vergnaud afirma que "la organización secuencial de la actividad para una determinada situación es la referencia primitiva y prototípica para el concepto de esquema" (Vergnaud, 2009, p.84). Refiriéndose al esquema de contar en particular, Vergnaud (1987, p.47) habla de "una secuencia funcional y organizada de acciones gobernadas por reglas, una totalidad dinámica cuya eficiencia requiere habilidades sensoriomotoras y competencias cognitivas". Luego, Vergnaud (2009) prefiere hablar de esquemas perceptivo-gestuales en lugar de esquemas sensoriomotores, como ir más allá del nivel puramente biológico y resaltar la estrecha relación entre percepción y gesto, por un lado, y conceptualización por el otro. De acuerdo con estas ideas, el término esquema sensoriomotor en el resto de este texto debe interpretarse en este sentido más amplio.

El desarrollo del esquema implica el desarrollo entrelazado de habilidades sensoriomotoras y cognición. Cuando vemos un esquema aquí como parte de un instrumento, hablamos de un

esquema de instrumentación. Artigue (2002) destaca el valor pragmático y epistémico de los esquemas: el valor pragmático en el sentido de su potencial productivo para "hacer las cosas", y el valor epistémico en el sentido de contribuir al significado y la comprensión de las matemáticas involucradas.

Las partes observables de un esquema de instrumentación, las interacciones concretas entre usuario y artefacto, se denominan técnicas instrumentadas. Las técnicas instrumentadas son secuencias más o menos estables de interacciones técnicas entre el usuario y el artefacto con un objetivo particular. Como tal, un esquema de instrumentación consiste en una o más técnicas instrumentadas observables, que se guían por las oportunidades y limitaciones que ofrece el artefacto, y por el conocimiento de los estudiantes. Mientras tanto, las técnicas también pueden contribuir al desarrollo de este conocimiento. Como tal, las técnicas pueden verse como acciones que reflejan el conocimiento de los estudiantes. Y, aún más importante, las técnicas y el conocimiento pueden coexistir. Es esta coexistencia la que forma el corazón de la génesis instrumental y que refleja el potencial educativo principal de usar el artefacto en una situación dada.

En el enfoque instrumental, un esquema depende del sujeto, el artefacto y la tarea. Tres comentarios deben hacerse aquí. Primero, esto implica que llevar a cabo una tarea similar con diferentes artefactos puede conducir a diferentes esquemas. El caso de las brújulas descrito anteriormente muestra que tendrán lugar diferentes génesis instrumentales. Es interesante utilizar diferentes artefactos para tareas similares y confrontar y comparar los diferentes esquemas que surgen (Maschietto y Soury-Lavergne, 2013). Como consecuencia, las prácticas matemáticas se transforman mediante el uso de artefactos digitales (Hoyle, 2018). En segundo lugar, la génesis instrumental no es solo un proceso individual, sino que forma parte de los procesos de aprendizaje social y la institucionalización dentro del contexto educativo específico. A través de la orquestación instrumental de los docentes (Trouche, 2004), se cuida una génesis instrumental colectiva para asegurar la convergencia hacia instrumentos y conocimientos matemáticos compartidos. De hecho, los maestros están involucrados en una génesis instrumental doble, incluido su desarrollo personal de esquemas, por un lado, y esquemas para usar en la enseñanza de sus alumnos por el otro. Tercero, algunos artefactos son más adecuados para tipos específicos de génesis instrumental que otros. Haspekian (2014) introdujo la noción de distancia instrumental para enfatizar el cambio en la práctica matemática que puede surgir como resultado de algún tipo de uso de herramientas. Si la distancia, por un lado, entre las prácticas matemáticas regulares o específicas y, por el otro, las técnicas invitadas por el artefacto son demasiado grandes, la génesis instrumental podría no ser productiva para el proceso de aprendizaje.

La importancia de esta visión instrumental para el uso de herramientas matemáticas en la educación matemática radica no solo en el reconocimiento de la sutileza y la complejidad del tema, sino también en las pautas concretas que ofrece para un uso fructífero: como maestros y diseñadores educativos, nosotros debemos establecer actividades para los estudiantes y elegir artefactos apropiados que juntos conduzcan a procesos de génesis instrumental en los que el conocimiento matemático objetivo se desarrolle de una manera significativa y natural. Un desajuste entre la tarea, las posibilidades del artefacto y el conocimiento matemático en

juego no será efectivo. Esbozar estos tres elementos es el juego a jugar; incluye ser explícito sobre la génesis instrumental y el desarrollo del esquema al que se dirige.

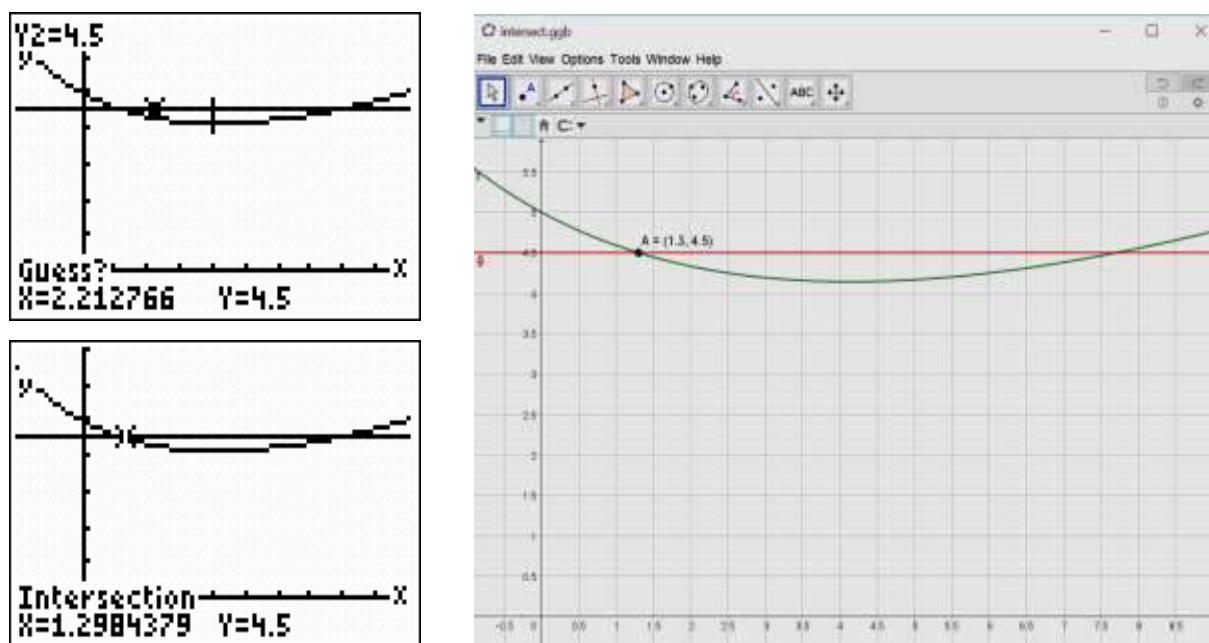


Figura 3. Intersección de gráficos para resolver ecuaciones con dos herramientas diferentes

Como ejemplo de desarrollo de este esquema, la Figura 3 muestra dos formas en que una ecuación se puede resolver gráficamente a través de un procedimiento de Intersect, una usando una calculadora gráfica (pantallas a la izquierda) y otra usando GeoGebra (pantalla a la derecha). Esta ecuación, $\frac{x^2+100}{2x+20} = 4.5$, apareció en una situación de problema realista en una pregunta de examen nacional en Holanda, en la que los estudiantes usaron una calculadora gráfica. Técnicamente hablando, el procedimiento se reduce a ingresar el lado izquierdo y el lado derecho de la ecuación por separado como funciones en la herramienta gráfica. A continuación, se debe establecer una ventana de visualización para que los dos gráficos muestren un punto de intersección. Luego se llama al procedimiento de intersección mediante la selección de los dos gráficos. Esto conducirá a las coordenadas de dicho punto de intersección. Finalmente, su primera coordenada es una solución de la ecuación. Dicho de esta manera, la técnica suena muy directa y procedimental.

Sin embargo, hay varios elementos conceptuales involucrados. Primero, el estudiante debe ser consciente de la relación entre las soluciones de una ecuación y los puntos de intersección gráfica. En segundo lugar, al establecer las dimensiones de la ventana de visualización, el estudiante debe tener una idea de dónde se pueden encontrar los puntos de intersección, lo que requiere un cierto razonamiento (o un comportamiento de prueba y error). Tercero, el resultado consiste no en uno sino en dos valores numéricos, y una solución es un valor numérico aproximado. Cuarto, y para finalizar, el procedimiento conduce a una única solución; el procedimiento debe repetirse para ecuaciones con múltiples soluciones, que pueden ser visibles en la ventana de visualización actual, pero también pueden existir fuera de sus límites. Nuevamente, se necesita algún razonamiento para considerar la opción de otros puntos de

intersección fuera de la vista actual. Eventualmente, esta técnica se puede complementar haciendo zoom in en los puntos de intersección, haciendo zoom out para obtener una visión general o generando tablas de valores de funciones.

Es este entrelazamiento de elementos técnicos y conceptuales lo que me hace hablar de un esquema de instrumentación Intersect. El desarrollo de este esquema impacta en la visión de los estudiantes sobre la resolución de ecuaciones de una manera sutil y algo implícita. Resolver una ecuación ya no es una cuestión de manipulación algebraica exacta mientras se mantiene la equivalencia, sino que se reemplaza por una vista gráfica funcional que conduce a valores aproximados. Como tal, el uso de la herramienta afecta el contenido matemático. El esquema Intersect, por lo tanto, integra técnicas e ideas matemáticas, y esto es exactamente de lo que se trata la génesis instrumental.

Los esquemas de instrumentación que los estudiantes desarrollan dependen de la herramienta digital en uso. En la Figura 3, la parte izquierda muestra dos pantallas de una calculadora gráfica, aquí un modelo de Texas Instruments (Drijvers y Barzel, 2012). El lado derecho muestra una pantalla similar en GeoGebra, que ofrece una pantalla más grande y una resolución más alta. Las técnicas también son ligeramente diferentes: GeoGebra no solicita un valor inicial, sino que inmediatamente presenta un punto. Esto hace que el procedimiento sea más eficiente, pero también hace que sea más difícil encontrar las coordenadas del segundo punto de intersección. Además, la demostración de las coordenadas depende de la configuración en GeoGebra. Las dos herramientas, una vez más, en la configuración predeterminada, proporcionan los resultados con una precisión diferente.

Para resumir, este ejemplo ilustra la interacción entre las técnicas para usar una herramienta digital y el conocimiento matemático relacionado involucrado; una interacción que afecta fundamentalmente a las matemáticas, pero mientras tanto es sutil para estudiar. El ejemplo muestra, para reformular la cita de Hoyles y Noss (2003) anteriormente en esta sección, que las herramientas y técnicas no son neutrales, pero pueden resaltar o incluso requerir puntos de vista matemáticos específicos sobre la tarea en juego. Como consecuencia, el uso de herramientas es menos simple de lo que parece. Las vistas instrumentales son útiles para tomar conciencia de esta complejidad e identificar la interacción entre artefactos y tareas, entre técnicas y esquemas. Reconocer la génesis instrumental como un camino hacia el aprendizaje de las matemáticas, y probablemente también de diferentes matemáticas, es un paso importante para fomentar el aprendizaje al usar herramientas digitales.

Un enfoque corporeizado de la cognición

El enfoque instrumental para el uso de herramientas ha resultado valioso para comprender la interacción entre lo técnico y lo conceptual cuando los alumnos usan artefactos. Hasta ahora, sin embargo, se centró principalmente en las matemáticas de nivel superior, como las corrientes preuniversitarias, y en herramientas digitales sofisticadas, como el álgebra computacional y los sistemas de geometría dinámica. Tal vez sea debido a estos focos que las matemáticas se abordan como una actividad cerebral, y que los cimientos corporales de la cognición tienden a descuidarse. Para hacer justicia a este último aspecto, ahora considero un

enfoque corporeizado de la cognición como un tercer lente para mirar el uso de la tecnología digital en la educación matemática.

Un punto de partida general aquí es que el cuerpo y la mente no pueden separarse y que una visión dualista de ellos es inapropiada. La cognición no se considera un asunto exclusivamente mental, sino que se basa en experiencias corporales que tienen lugar en la interacción con el mundo físico y social (por ejemplo, ver Radford, 2009; Lakoff y Núñez, 2000; de Freitas y Sinclair, 2014; Ferrara y Sinclair, 2016). La corporeización "es la hipótesis sorprendentemente radical de que el cerebro no es el único recurso cognitivo que tenemos disponible para resolver problemas" (Wilson y Golonka, 2013, p.1). Dicho de otra manera, Alibali y Nathan (2012) afirman:

Según esta perspectiva, las estructuras y los procesos cognitivos y lingüísticos, incluidas las formas básicas de pensamiento, las representaciones del conocimiento y los métodos de organización y expresión de la información, están influenciados y limitados por las particularidades de los sistemas de percepción humana y los cuerpos humanos. En pocas palabras, la cognición está formada por las posibilidades y limitaciones del cuerpo humano. (p. 250)

También para el caso de las matemáticas, a menudo considerado un tema muy abstracto y mental, se reconoce cada vez más que la cognición está enraizada en actividades sensoriomotoras, y los objetos matemáticos se basan en esquemas sensoriomotores. Dos números especiales, 57(3) y 70(2), de la revista científica *Educational Studies in Mathematics*, dedicados a la corporeización en la educación matemática, dan testimonio del creciente interés de la investigación en educación matemática en esta perspectiva. Muchos enfoques corporeizados toman "las cuatro E" de la cognición³ (encarnada o corporeizada, extendida, embebida y enactiva) como punto de partida. En estos términos, las opiniones iniciales sobre el uso de herramientas en este documento resaltan el papel de las herramientas para extender el cuerpo; ahora el centro de atención se desplaza hacia las otras E y hacia la tecnología digital que brinda oportunidades para crear experiencias corporeizadas en particular.

A primera vista, podría parecer que existe una tensión entre este enfoque corporeizado sobre la cognición y el uso de la tecnología digital en la educación matemática. Las herramientas digitales tales como hojas de cálculo, software de álgebra computacional y sistemas de geometría dinámica incorporan una cantidad impresionante de conocimiento matemático. Como estas herramientas no son transparentes, parecen "ocultar este conocimiento bajo el capó", lo que puede crear una distancia entre el usuario y las matemáticas utilizadas. Y, lo que es más importante, las formas de interactuar con estas herramientas no han sido hasta ahora "basadas en el cuerpo", ya que la interacción se realizó principalmente a través de las pulsaciones del teclado en el pasado más remoto, y a través de los movimientos del mouse en el pasado más reciente. Los desarrollos tecnológicos recientes, sin embargo, abren nuevos horizontes para hacer justicia a la multimodalidad del conocimiento matemático. Tal vez en parte debido a la necesidad de experiencias corporeizadas, se han desarrollado interfaces de usuario mejoradas (piense en tecnología de pantalla multitáctil, reconocimiento de escritura, sensores de movimiento y realidad virtual y aumentada), que ofrecen nuevas oportunidades para investigar un enfoque corporeizado para el uso de herramientas. Por ejemplo, algunos

investigadores estudiaron a estudiantes que "grafican a pie" usando un sensor de movimiento, y de esta manera crean experiencias corporeizadas de distancia, velocidad y aceleración que cambian con el tiempo (Duijzer, Van den Heuvel-Panhuizen, Veldhuis, Doorman y Leseman, 2019; Robutti, 2006).

En línea con la tradición didáctica de ingeniería dentro de mi instituto (Margolinas & Drijvers, 2015), el trabajo realizado en este campo por mis colegas y por mi dentro de mi instituto sigue un enfoque de diseño corporeizado (Abrahamson, 2009; Abrahamson, Shayan, Bakker y Van der Schaaf, 2016). Utilizamos "géneros de diseño" (Abrahamson, 2014; Bakker, Shvarts y Abrahamson, 2019) en las actividades en entornos digitales. En estas actividades, los estudiantes pueden participar en experiencias corporeizadas y desarrollar cognición matemática. Permítanme ilustrar este enfoque de diseño corporeizado con dos ejemplos.

Como primer ejemplo, la Figura 4 muestra una tarea diseñada por Shvarts (2018) en el Entorno de Matemática Digital. La pantalla izquierda muestra una línea base fija y un pequeño punto negro fijo. El punto gris más grande se proyecta sobre la línea base. Los tres puntos juntos definen un triángulo, que en la pantalla izquierda es rojo. La alumna puede mover el gran punto gris con su dedo, y el triángulo cambia en consecuencia. De repente, el triángulo se vuelve verde (pantalla derecha). El triángulo se vuelve verde cuando es isósceles, de lo contrario es rojo. Como consecuencia, el triángulo es verde si el punto gris móvil se encuentra en la parábola que tiene la línea base como directriz y el punto fijo como foco. Sin embargo, esta parábola de puntos discontinuos no se muestra a la alumna, pero se incluye aquí para el lector.

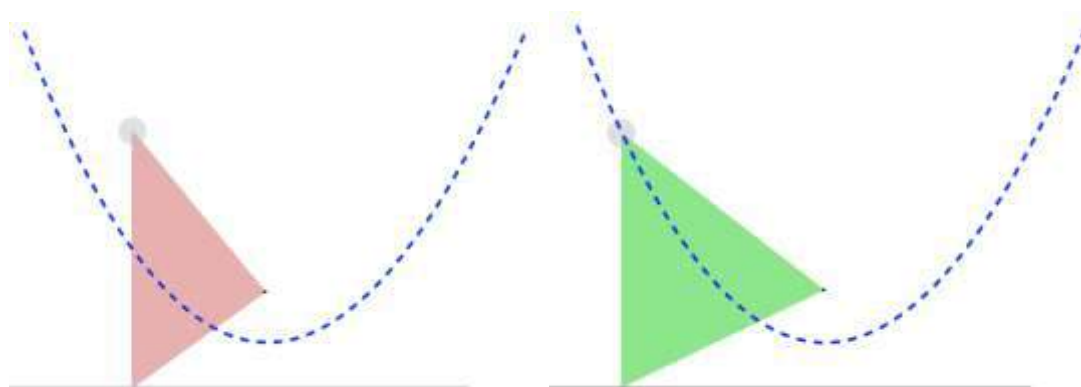


Figura 4. La tarea de la parábola (Shvarts, 2018; Shvarts & Abrahamson, 2019). Ver <https://youtu.be/JHiHIFdUGtw> para una animación.

La tarea, ahora, es mover constantemente el punto gris para que el triángulo permanezca verde. Cuando los estudiantes adquieren fluidez en sus movimientos, se les pregunta sobre la regla que determina el color del triángulo. La tarea es desafiante desde diferentes perspectivas. Desde una perspectiva de corporeización, la coordinación sensoriomotora es bastante compleja, ya que la dirección de movimiento debe verificarse constantemente con la orientación de la base del triángulo. Los datos de seguimiento ocular muestran muchos movimientos oculares que saltan entre el punto gris móvil y el punto medio de la base, a lo largo de la mediana del triángulo (Shvarts y Abrahamson, 2019). Estos saltos iterativos revelan los "anclas atencionales" más importantes (Duijzer, Shayan, Bakker, van der Schaaf y

Abrahamson, 2017). Desde una perspectiva matemática, la propiedad que hace que el triángulo sea verde es ser isósceles. Como un vértice del triángulo se fija a un punto y otro atraviesa una línea, esta tarea proporciona a los estudiantes experiencias sensoriomotoras que en el aprendizaje del futuro podrían alimentar la noción de parábola. En un nivel matemático más alto, y esto va más allá de cómo se presenta el ejemplo aquí, uno podría elaborar esta actividad hacia la reflexión sobre el locus del punto gris para el caso de que el triángulo permanezca verde (Shvarts, 2018). Como el triángulo es isósceles, y uno de los lados es perpendicular a la línea de base (directriz), podemos reconocer la propiedad de una cónica: las distancias al foco y la directriz permanecen iguales, por lo que el locus es una parábola. Este ejemplo muestra cómo las experiencias sensoriomotoras pueden llamar la atención de los estudiantes sobre la noción de que un triángulo es isósceles como preparación para la noción de parábola. Por supuesto, se deben tomar muchas decisiones de diseño, como cómo formular la tarea, qué soporte ofrecer (mostramos coordenadas o una cuadrícula), cómo secuenciar diferentes variaciones en esta tarea, cómo fomentar la noción de parábola, etcétera. El efecto de aprendizaje de tales tareas puede depender en gran medida de estas sutiles decisiones de diseño, pero va más allá del alcance del presente ejemplo. El diseño digital es un fenómeno relativamente nuevo, que exige mucho a los diseñadores (Leung y Baccaglini-Frank, 2017).

El segundo ejemplo se refiere al reconocimiento de escritura a mano. Escribir matemáticas a mano, ya sea en una pizarra vieja y polvorienta o en una tableta, implica movimientos de la mano y gestos que pueden proporcionar una experiencia sensoriomotora a los estudiantes. Por lo tanto, el Entorno de Matemática Digital ahora tiene un módulo de reconocimiento de escritura a mano, que permite la integración de la experiencia humana de los movimientos de la mano al escribir, y la inteligencia del software para interpretar la escritura y evaluar la precisión matemática en aras de la retroalimentación.

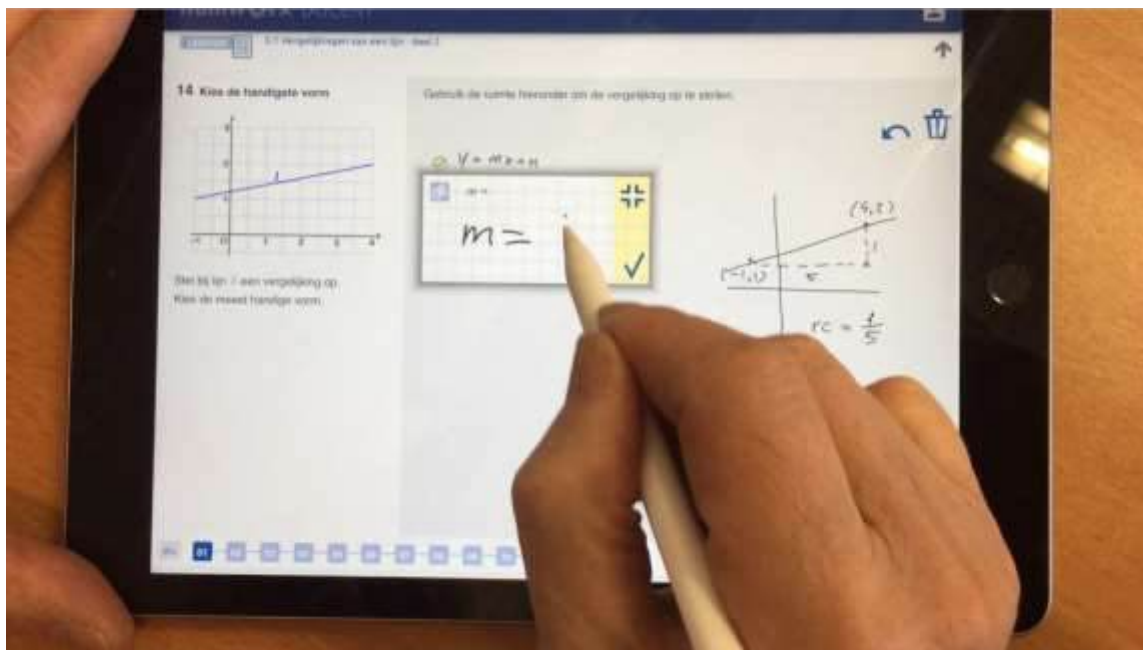


Figura 5. Reconocimiento de escritura a mano en el Entorno de Matemática Digital. Ver <https://youtu.be/YKtrr1IxWaA> para una animación.

Para resumir, los dos ejemplos ilustran cómo un enfoque de diseño corporeizado puede conducir a tareas en las que las experiencias sensoriomotoras forman la base de la cognición matemática, un punto de vista que no está explícitamente presente en los dos enfoques presentados anteriormente.

Instrumentación corporeizada

Los puntos de vista instrumentales y corporeizados sobre el uso de herramientas digitales en la educación matemática pueden parecer bastante diferentes. Por un lado, los enfoques instrumentales en muchos casos se centran en el desarrollo de esquemas mentales individuales, incluso si se reconoce la génesis instrumental colectiva, en las matemáticas convencionales de alto nivel y en herramientas digitales sofisticadas. Los enfoques corporeizados, por otro lado, se centran en esquemas sensoriomotores, en experiencias corporeizadas, en ideas de matemáticas básicas y hacen uso de herramientas de software dedicadas. La convergencia a la cognición y técnicas matemáticas convencionales a veces recibe menos atención. Sin embargo, desde la perspectiva de la teoría de redes (Bikner-Ahsbahs & Prediger, 2014), parece interesante comparar, contrastar, combinar y coordinar estos diferentes puntos de vista.

La afirmación que quiero hacer aquí es que, a pesar de estas diferencias aparentes, los enfoques corporeizados e instrumentales resaltan la complejidad de la interacción usuario-herramienta, comparten algunas bases teóricas similares y pueden coordinarse y alinearse de manera significativa. En línea con los investigadores que en el pasado exploraron la interfaz entre los enfoques corporeizados e instrumentales (por ejemplo, Artigue, Cazes, Haspekian, Khanfour-Armale y Lagrange, 2013; Arzarello, Paola, Robutti y Sabena, 2009; Maschietto y Bartolini -Bussi, 2009), defiendo un enfoque de instrumentación corporeizada para conciliar la naturaleza corporeizada de los esquemas de instrumentación y la naturaleza instrumental de los esquemas sensoriomotores. Como tal, un enfoque de instrumentación corporeizada explora la coexistencia de esquemas sensoriomotores, técnicas de herramientas y cognición matemática, y ofrece un diseño heurístico para actividades TIC que alinean los fundamentos corporales de cognición y la necesidad de génesis instrumental.

En cuanto a la base teórica compartida, los enfoques corporeizados e instrumentales comparten una base teórica en ideas de Vygotsky (1978) sobre el uso de herramientas y de Piaget (1985) sobre esquemas, y ambos enfoques reconocen la sutileza de la mediación de herramientas en una actividad matemática significativa. Mientras tanto, los dos enfoques pueden ser complementarios, en el sentido de que los enfoques corporeizados hasta ahora no han enfatizado demasiado la convergencia de las técnicas de herramientas y las nociones matemáticas convencionales, mientras que los enfoques instrumentales han tendido a descuidar la visión sensoriomotora de los esquemas y la naturaleza corporeizada de la cognición.

Con respecto a la coordinación y alineación de los dos enfoques, puedo imaginar trayectorias productivas de aprendizaje en conceptos matemáticos fundamentales, en los que el desarrollo de esquemas sensoriomotores puede ir de la mano, o incluso ser parte de la génesis instrumental. Tal trayectoria podría conducir a esquemas en los que las experiencias

corporeizadas todavía forman la base, y a través de un proceso de abstracción reflexiva (Abrahamson, Shayan, Bakker y van der Schaaf, 2016) conducen a una génesis instrumental. De esta manera, los enfoques corporeizados e instrumentales pueden estar alineados: el proceso de génesis instrumental es fomentado por actividades corporeizadas. A medida que los estudiantes avanzan en una trayectoria de aprendizaje, las técnicas de herramienta y el conocimiento matemático emergen de un proceso de génesis instrumental, y la base corporeizada puede moverse más a un segundo plano. Garantizar la coordinación entre el desarrollo de esquemas sensoriomotores y la génesis instrumental podría ser un diseño fuerte heurístico para tareas ricas en tecnología en la enseñanza de matemáticas.

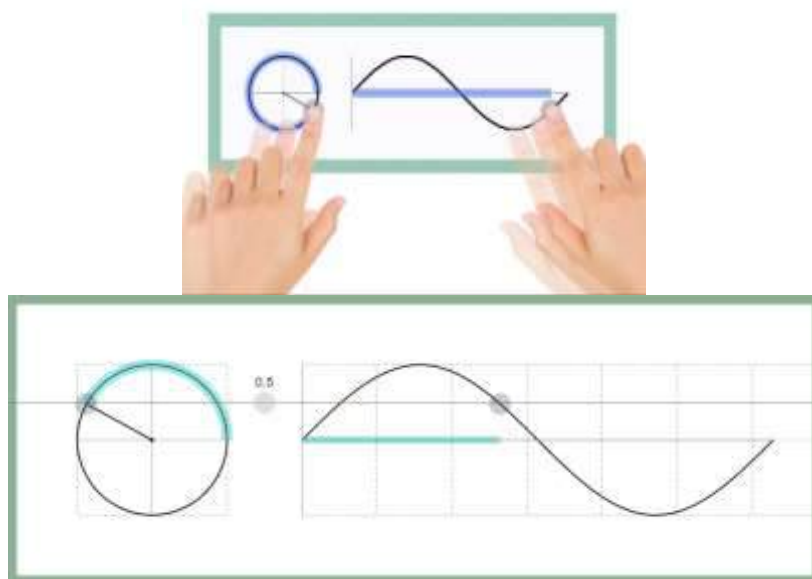


Figura 6. Tareas MIT-T (Alberto, Bakker, Walker-van Aalst, Boon y Drijvers, 2019). Ver <https://youtu.be/1eOU4XyyHmg> para una animación.

Permítanme ilustrar este enfoque de instrumentación corporeizada en un ejemplo final. La pantalla izquierda de la Figura 6 muestra la llamada App Inventor (MIT-T, por sus siglas en inglés), cuya abreviatura significa Entrenador de Imágenes Matemáticas – Trigonometría (Mathematics Imagery Trainer – Trigonometry, en inglés) (Alberto, Bakker, Walker-van Aalst, Boon y Drijvers, 2019). Muestra un círculo unitario y un gráfico senoidal con un punto móvil en cada uno de ellos. Como primera tarea, los estudiantes usan la pantalla multitáctil para mover simultáneamente los dos puntos y, de forma similar al caso en el ejemplo de parábola presentado anteriormente, para explorar cuándo el marco alrededor de los gráficos se vuelve verde. Éste es el caso si se logra una coincidencia correcta entre el seno de un ángulo en el círculo unitario y el valor de la función del seno en un punto en el eje horizontal, si es que los dos puntos están a la misma altura. La actividad de "mantener el marco verde" claramente invita a una adecuada coordinación sensoriomotora de mantener dos puntos a la misma altura y se espera que induzca un "sentimiento" para la coordinación de los dos movimientos. Como fue el caso de la tarea de parábola (Fig. 4), esto puede llevar a muchas actividades de seguimiento, donde cada una de las cuales requiere decisiones de diseño y arreglos sutiles de tareas y herramientas. Como posible punto final de dicha secuencia, la pantalla de la derecha de la Figura 6 muestra la herramienta adicional de una línea horizontal, que puede moverse

hacia arriba y hacia abajo a través del gran punto gris central con la etiqueta de su altura, 0.5, implementando así la coordinación que acaba de ser representada. Ahora, tanto el círculo unitario como el gráfico senoidal pueden usarse para resolver la ecuación $\sin a = 0.5$: en el círculo unitario, uno puede mover el punto para encontrar la intersección del círculo y la línea, y de manera similar en el gráfico. Por supuesto, estas dos técnicas también deben coordinarse: si los dos puntos de intersección no coinciden, el marco de retroalimentación no se volverá verde. En una fase posterior, es posible que uno desee soltar el círculo unitario y centrarse en el gráfico senoidal. En esa etapa, la tarea de hecho se reduce a resolver gráficamente ecuaciones de la forma $f(x) = c$, que es exactamente el ejemplo que se muestra al final de la sección de enfoque instrumental (ver Figura 3).

Para resumir, este ejemplo ilustra cómo los enfoques corporeizados e instrumentales pueden coordinarse y alinearse en una trayectoria de aprendizaje. En este diseño, las experiencias corporeizadas mediadas por herramientas digitales se preparan para la génesis instrumental. Por supuesto, se necesita investigar más para decidir si tales alineaciones conducirían a tamaños de efecto más altos que los informados anteriormente. Hablando en general, tanto las bases teóricas comunes de enfoques corporeizados como instrumentales, y su complementariedad, hacen que explorar su potencial alineación, como se expresa en la noción de instrumentación corporeizada, sea una empresa muy interesante.

Conclusiones

En este artículo, primero describí una taxonomía para la funcionalidad didáctica de la tecnología digital en la educación matemática. Esta taxonomía guió un metanálisis de segundo orden, cuyos resultados sugieren que los tamaños del efecto de las intervenciones ricas en tecnología son significativamente positivos, pero de pequeños a moderados. Esto llevó a la idea de mirar con más detalle tres enfoques sobre el uso de herramientas en la educación matemática. Como primer lente, la teoría de la Educación Matemática Realista destaca que los estudiantes deben experimentar las matemáticas como significativas. Aplicado al uso de herramientas, esto implica que las herramientas deben ser transparentes y proporcionar a los estudiantes formas auténticas de expresarse matemáticamente. Con un enfoque más específico en el uso de la herramienta, la segunda lente de la instrumentación enfatiza el entrelazamiento de las técnicas para usar la herramienta y el conocimiento matemático involucrado. Las técnicas y el significado matemático coexisten en procesos de génesis instrumental. La tercera lente de la cognición corporeizada afirma que las actividades sensoriomotoras forman la base de la cognición y, más que los otros dos enfoques, destaca la necesidad de enraizar el conocimiento matemático en las experiencias corporales.

Un principio rector clave compartido por los tres enfoques es el significado matemático, incluso si cada enfoque enfatiza diferentes aspectos del mismo: la EMR destaca la idea de que las matemáticas son "experimentalmente reales", la teoría de la instrumentación apunta al significado matemático incorporado en las técnicas para usar herramientas, y los puntos de vista corporeizados ven los esquemas sensoriomotores como la base del significado matemático. Este énfasis en el significado tiene sentido: si no logramos incorporar la tecnología digital en las prácticas matemáticas de los estudiantes de una manera que consideren significativa, es una empresa inútil.

Como conclusión, en mi opinión, los tres puntos de vista tienen mucho que ofrecer para la educación matemática rica en tecnología. El punto de vista de la EMR proporciona algunas pautas generales importantes, que pueden informar enfoques instrumentales y corporeizados. En cuanto a la interacción entre los puntos de vista corporeizados e instrumentales, creo firmemente que los dos pueden coordinarse y alinearse en un llamado enfoque de instrumentación corporeizada. Las experiencias corporeizadas y representadas, tan presentes en el enfoque de cognición corporeizada, pueden formar la base para el aprendizaje. Como tales, estas experiencias son las bases sobre las cuales se puede construir la génesis instrumental; una génesis instrumental basada en el cuerpo durante la cual las técnicas de herramientas y la cognición matemática coexisten.

Por supuesto, este argumento para un enfoque de instrumentación corporeizada necesita una mayor elaboración en varios aspectos. Primero, la lente de la EMR puede revelar posibles tensiones entre su principio de realidad y el foco del enfoque instrumental sobre las técnicas de herramientas. De manera similar, la alineación de los esquemas sensoriomotores y las técnicas de herramientas es sutil, incluso si los ejemplos en las Figuras 4, 5 y 6 proporcionan algunos enfoques posibles. Además, hasta ahora falta un cuerpo de evidencia empírica para los efectos positivos de un enfoque de instrumentación tan corporeizado. A pesar de estas limitaciones, creo que las tres lentes hacen justicia a tres elementos principales en el "paisaje" de la educación matemática: el mundo que nos rodea, nuestra interacción corporal con éste y las herramientas que utilizamos para facilitar esta interacción. Como tal, sugiero que la instrumentación corporeizada, vista como un enfoque integrado corporeizado e instrumental en el que coexisten los esquemas sensoriomotores, las técnicas de herramienta y la cognición matemática, merece prioridad en la agenda de investigación de aquellos interesados en el uso de tecnología digital en la educación matemática.

Agradecimiento

Agradezco a Rosa Alberto, Arthur Bakker, Peter Boon, Alison Clark-Wilson, Michiel Doorman, Anna Shvarts y Luc Trouche, así como a los revisores del Congreso de la Asociación Europea para la Investigación en Educación Matemática del Comité del Programa Internacional (CERME IPC, por sus siglas en inglés), por sus comentarios en versiones anteriores de esta contribución.

References

- Abrahamson, D. (2009). Embodied design: Constructing means for constructing meaning. *Educational Studies in Mathematics*, 70(1), 27–47.
- Abrahamson, D. (2014). Building educational activities for understanding: An elaboration on the embodied-design framework and its epistemic grounds. *International Journal of Child-Computer Interaction*, 2(1), 1–16.
- Abrahamson, D., Shayan, S., Bakker, A., & van der Schaaf, M. (2016). Eye-tracking Piaget: capturing the emergence of attentional anchors in the coordination of proportional motor action. *Human Development*, 58(4–5), 218–244.

- Ainley, J., Pratt, D., & Hansen, A., (2006). Connecting engagement and focus in pedagogic task design. *British Educational Research Journal*, 32(1), 23–38.
- Alberto, R. A., Bakker, A., Walker-van Aalst, O., Boon, P., & Drijvers, P. (2019). *Networking theories with design research: An embodied instrumentation case study in trigonometry*. Paper presented at the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Utrecht, the Netherlands, 6-10 February, 2019.
- Alibali, M. W., & Nathan, M. J. (2012): Embodiment in mathematics teaching and learning: Evidence from learners' and teachers' gestures. *Journal of the Learning Sciences*, 21, 247–286.
- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7, 245–274.
- Artigue, M., Cazes, C., Haspekian, M., Khanfour-Armale, R., & Lagrange, J.-B. (2013). *Gestes, cognition incarnée et artefacts : une analyse bibliographique pour une nouvelle dimension dans les travaux didactiques au LDAR*. [Gesture, embodied cognition and artefacts: a literature analysis for a new dimension in the didactical work at LDAR.] Paris, France: LDAR.
- Arzarello, F., Paola, D., Robutti, O., & Sabena, C. (2009). Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 70(2), 97–109.
- Bakker A., Shvarts A., Abrahamson D. (2019). *Generativity in Design Research: The Case of Developing a Genre of Action-Based Mathematics Learning Activities*. Paper presented at the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education [TWG 17: Theoretical Perspectives and Approaches in Mathematics Education], Utrecht, February 6–10, 2019.
- Ball, L., Drijvers, P., Ladel, S., Siller, H.-S., Tabach, M., & Vale, C. (Eds.) (2018). *Uses of technology in primary and secondary mathematics education; Tools, topics and trends*. Cham, Switzerland: Springer International Publishing.
- Bikner-Ahsbals, A., & Prediger, S. (2014). *Networking of theories as a research practice in mathematics education*. Dordrecht, the Netherlands: Springer.
- Cheung, A. C. K., & Slavin, R. E. (2013). The effectiveness of educational technology applications for enhancing mathematics achievement in K-12 classrooms: a meta-analysis. *Educational Research Review*, 9, 88–113.
- Cohen, J. (1988). *Statistical Power Analysis for the Behavioral Sciences*. New York, NY: Routledge.
- de Freitas, E., & Sinclair, N. (2014). *Mathematics and the body*. New York, NY: Cambridge University Press.
- Doorman, M., Drijvers, P., Gravemeijer, K., Boon, P., & Reed, H. (2012). Tool use and the development of the function concept: from repeated calculations to functional thinking. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 10(6), 1243–1267.

- Drijvers, P. (2018a). Empirical evidence for benefit? Reviewing quantitative research on the use of digital tools in mathematics education. In L. Ball, P. Drijvers, S. Ladel, H.-S. Siller, M. Tabach, & C. Vale (Eds.), *Uses of technology in primary and secondary mathematics education; Tools, topics and trends* (pp. 161–178). Cham, Switzerland: Springer International Publishing.
- Drijvers, P. (2018b). Tools and taxonomies: a response to Hoyles. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 229–235.
- Drijvers, P., & Barzel, B. (2012). Equations with technology: different tools, different views. *Mathematics Teaching*, 228, 14–19.
- Drijvers, P., Boon, P., Doorman, M., Bokhove, C., & Tacoma, S. (2013). Digital design: RME principles for designing online tasks. In C. Margolinas (Ed.), *Proceedings of ICMI Study 22 Task Design in Mathematics Education* (pp. 55–62). Clermont-Ferrand, France: ICMI.
- Drijvers, P., Boon, P., & Van Reeuwijk, M. (2011). Algebra and technology. In P. Drijvers (Ed.), *Secondary algebra education. Revisiting topics and themes and exploring the unknown* (pp. 179–202). Rotterdam: Sense.
- Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H., & Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 75(2), 213–234.
- Duijzer, A.C.G., Shayan, S., Bakker, A., van der Schaaf, M. F. & Abrahamson, D. (2017). Touchscreen tablets: coordinating action and perception for mathematical cognition. *Frontiers in Psychology*, 8, 1–19.
- Duijzer, C., Van den Heuvel-Panhuizen, M., Veldhuis, M., Doorman, M., & Leseman, P. (2019). Embodied learning environments for graphing motion: a systematic literature review. *Educational Psychology Review*, 31(3), 597 – 629.
- Ferrara, F., & Sinclair, N. (2016). An early algebra approach to pattern generalisation: actualising the virtual through words, gestures and toilet paper. *Educational Studies in Mathematics*, 92, 1–19.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, the Netherlands: Reidel Publishing Company.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, the Netherlands: Reidel Publishing Company.
- Gravemeijer, K. P. E., & Doorman, L. M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: a calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics*, 39(1–3), 111–129.
- Haspekian, M. (2014). Teachers' instrumental genesis when integrating spreadsheet software. In A., Clark-Wilson, O. Robutti, & N. Sinclair, N. (Eds.), *The mathematics teacher in the digital era* (pp. 241–276). New York, NY: Springer.

- Hoyles, C. (2018). Transforming the mathematical practices of learners and teachers through digital technology. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 209–228.
- Hoyles, C., & Lagrange, J.-B. (Eds.) (2010). *Mathematics education and technology: rethinking the terrain*. New York, NY: Springer.
- Hoyles, C., & Noss, R. (2003). What can digital technologies take from and bring to research in mathematics education? In A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Eds.), *Second International Handbook of Research in Mathematics Education* (pp. 323–349). Dordrecht: Kluwer.
- Lakoff, G., & Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from*. Basic Books.
- Leung, A., & Baccaglini-Frank, A. (Eds.) (2017). *Digital technologies in designing mathematics education tasks*. Potential and pitfalls. New York, NY: Springer.
- Li, Q., & Ma, X. (2010). A meta-analysis of the effects of computer technology on school students' mathematics learning. *Educational Psychology Review*, 22, 215–243.
- Margolinas, C., & Drijvers, P. (2015). Didactical engineering in France; an insider's and an outsider's view on its foundations, its practice and its impact. *ZDM–Mathematics Education*, 47(6), 893–903.
- Maschietto, M., & Bartolini-Bussi, M. (2009). Working with artefacts: Gestures, drawings and speech in the construction of the mathematical meaning of the visual pyramid. *Educational Studies in Mathematics*, 70(2), 143–157.
- Maschietto, M., & Soury-Lavergne, S. (2013). Designing a duo of material and digital artifacts: the pascaline and Cabri Elem e-books in primary school mathematics. *ZDM–Mathematics Education*, 45(7), 959–971.
- Monaghan, J., Trouche, L., & Borwein, J. (2016). *Tools and mathematics*. Cham, Switzerland: Springer International Publishing.
- OECD (2015). *Students, computers and learning. Making the connection*. Paris, France: OECD Publishing. <http://www.oecd.org/edu/students-computers-and-learning-9789264239555-en.htm>.
- Piaget, J. (1985). *The equilibration of cognitive structures*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Proust, C. (2012). Masters' writings and students' writings: school material in Mesopotamia. In G. Gueudet, B. Pepin, & L. Trouche (Eds.), *From text to 'lived' resources. Mathematical curriculum materials and teacher development* (pp. 161–179). New York, NY: Springer.
- Rabardel, P. (2002). *People and technology – A cognitive approach to contemporary instruments*. <http://ergoserv.psy.univ-paris8.fr>.
- Radford, L. (2009). Why do gestures matter? Sensuous cognition and the palpability of mathematical meanings. *Educational Studies in Mathematics*, 70, 111–126.
- Robutti, O. (2006). Motion, technology, gesture in interpreting graphs. *International Journal for Technology in Mathematics Education* 13(3), 117–126.

- Shvarts, A. (2018). A dual eye-tracking study of objectification as student–tutor joint activity appropriation, In E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg, & L. Sumpter (Eds.). *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4* (pp. 171–178). Umeå, Sweden: PME.
- Shvarts, A., & Abrahamson, D. (2019). Dual-eye-tracking Vygotsky: A microgenetic account of a teaching/learning collaboration in an embodied-interaction technological tutorial for mathematics. *Learning, Culture and Social Interaction*, 22, 100316.
- Steenbergen-Hu, S., & Cooper, H. (2013). A meta-analysis of the effectiveness of intelligent tutoring systems on K–12 students' mathematical learning. *Journal of Educational Psychology*, 105(4), 970–987.
- Treffers, A. (1987). *Three dimensions. A model of goal and theory description in mathematics instruction – The Wiskobas project*. Dordrecht, the Netherlands: D. Reidel Publishing Company.
- Trgalová, J., Clark-Wilson, A., & Weigand, H.-G. (2018). Technology and resources in mathematics education. In T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger, & K. Ruthven, *Developing Research in Mathematics Education. Twenty Years of Communication and Collaboration in Europe* (pp. 142–161). New York, NY: Routledge.
- Trouche, L. (2004). Managing complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9, 281–307.
- Trouche, L., & Drijvers, P. (2010). Handheld technology: Flashback into the future. *ZDM – Mathematics Education*, 42(7), 667–681.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2014). Didactical phenomenology. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 174–176). Dordrecht, Heidelberg, New York, London: Springer.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers, P. (2014). Realistic mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 521–525). Dordrecht, Heidelberg, New York, London: Springer.
- Vergnaud, G. (1987). About constructivism, a reaction to Hermine Sinclair's and Jeremy Kilpatrick's papers. In J. Bergerson, N. Herscovics & C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the 11th conference of the international group for the psychology of mathematics education, Vol 1* (pp. 73–80). Montréal, Canada: University of Montréal.
- Vergnaud, G. (2009). The theory of conceptual fields. *Human Development*, 52, 83–94.
- Vérillon, P., & Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: a contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education*, 10(1), 77–101.
- Vygotsky, L.S. (1978). *Mind in society: the development of higher psychological processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

- Wilson, A. D., & Golonka, S. (2013). Embodied Cognition is not what you think it is. *Frontiers in psychology*, 4(58).
- Young, J. (2017). Technology-enhanced mathematics instruction: A second-order meta-analysis of 30 years of research. *Educational Research Review*, 22, 19–33.

RAZONAR CON LA COVARIACIÓN. UN ESTUDIO SOBRE LAS ESTRATEGIAS EN UN CURSO DE FORMACIÓN DE FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICA

Jhony Alexander Villa-Ochoa

jhony.villa@udea.edu.co

Universidad de Antioquia, Colombia

Resumen

En la investigación internacional se han desarrollado constructos que sugieren acciones mentales, procesos cognitivos y de uso y significado en contextos profesionales y sociales que caracterizan los razonamientos, la modelación y comprensión de la covariación. Este documento ofrece parte de los resultados de un estudio que se propuso investigar las características del razonamiento que exhiben los estudiantes cuando resuelven tareas de modelación de la covariación en las que existe la necesidad de usar información de un contexto extra-matemático. Los resultados sugieren que una parte de los estudiantes se preocupa por determinar un “patrón” para dar sentido a una función como un modelo matemático. También se evidencia que durante su razonamiento utilizan casos particulares para interpretar relaciones entre cantidades como objetos multiplicativos; finalmente se ofrece evidencia de que el razonamiento de otros estudiantes tiene características deductivas; a partir de ello, la tasa de variación emerge de un proceso de interpretación y uso de modelos matemáticos previamente conocidos y como “un caso particular” en la aplicación de estos modelos.

Palabras clave: razonamiento covariacional, currículo, formación de profesores

Modelación en la perspectiva de la Educación Matemática

El desarrollo del pensamiento matemático es una de las metas para los currículos a nivel global. Este pensamiento involucra no solo la comprensión conceptual y operatoria sino también la capacidad de llevar a cabo procesos propios de la matemática, entre ellos, la modelación, comunicación, argumentación, planteamiento y resolución de problemas. La modelación se reconoce como un proceso que promueve relaciones entre la matemática y otros dominios sociales, de las ciencias y de la cotidianidad.

En una reciente revisión, Stillman (2019) informó que la modelación puede valorarse, desde un punto de vista, para la formación en matemática y, por otro, para la formación en ciudadanía. Con respecto al primer punto de vista, la autora afirma que la modelación puede considerarse

un vehículo para la enseñanza de conceptos y procedimientos matemáticos; también para la enseñanza de modelos y de aplicaciones. En ese sentido, se puede promover las matemáticas como una actividad humana que permite atender a problemas de diferente naturaleza que den lugar a la aparición de conceptos, nociones y procedimientos. En el otro punto de vista, la autora señala que existen investigaciones que se han enfocado en ofrecer experiencias que posibiliten una educación para la vida después de la escuela; ello involucra el análisis de problemas sociales, la educación en valores, cuestionar el rol de los modelos matemáticos en la sociedad y el medio ambiente.

A partir de las investigaciones realizadas en el Grupo de Investigación MATHEMA-Formación e Investigación en Educación Matemática de la Universidad de Antioquia y la Red Colombiana de Modelación en Educación Matemática - RECOMEM (Rendón-Mesa, 2016; Rendón-Mesa, Duarte y Villa-Ochoa, 2016; Parra-Zapata y Villa-Ochoa, 2016; Parra-Zapata et al., 2018; Villa-Ochoa, 2016; Villa-Ochoa y Berrio, 2015) es posible reconocer la modelación como un ambiente en que se considera:

1. Las ideas fundamentales de las matemáticas y su relación con los contextos, significados y procedimientos a partir de los cuales se construyó.
2. El uso de datos *reales* que les permita a los estudiantes matematizar; es decir, plantear y representar relaciones entre los diferentes objetos y cantidades.
3. El diseño de ambientes de clase que promuevan la participación, discusión, razonamiento y la toma de decisiones de los aspectos relevantes en el contexto o situación a modelar.
4. Promover diferentes conocimientos (matemáticos y no matemáticos) sin que se subordinen entre sí. El uso de estos conocimientos debe emerger de la naturaleza de la situación estudiada y no como imposiciones *a priori*.
5. Una comprensión de los resultados que proporcionan los modelos como *no absolutos*, es decir, relativos al campo, condiciones y supuestos bajo los cuales se construyeron.
6. Promover un discurso en el aula que incluya argumentos matemáticos y que se fundamente en ideas y procedimientos matemáticos.
7. El vínculo directo y constante con expertos (profesionales en distintas áreas) que permiten, por ejemplo, dar sentido a los datos en el contexto *real*/del problema y tener interpretaciones profesionales de los modelos.
8. La evaluación debe considerarse como un proceso formativo y expresado en diferentes medios, y que involucra tanto contenidos matemáticos como conceptos, técnicas y habilidades del contexto en el cual se modela y de la modelación misma.

Al igual que Rosa y Orey (2019), la modelación, vista como un ambiente, permite que el proceso de aprender matemáticas se relacione con la elaboración de conceptos matemáticos que ayudan a los estudiantes a construir conocimiento a partir de sus propios contextos, cultura, intereses y motivaciones para aprender. Para los autores, este enfoque desarrolla la autonomía de los estudiantes porque aprenden a elaborar sus propias estrategias para resolver los problemas que enfrentan en su vida diaria. En el caso particular de este estudio, se han diseñado ambientes implementados en el trabajo con estudiantes de licenciatura en matemáticas (futuros profesores). En ellos, el estudio de la variación ha sido un aspecto clave, por un lado, para promover el desarrollo de un pensamiento variacional; por otro, como una manera de promover experiencias que le permita a los estudiantes el reconocimiento de acciones, estrategias y tareas que apoyen su futuro desempeño profesional.

En coherencia con Romo-Vázquez, Barquero y Bosch (2019), en estos ambientes se generan condiciones para que los participantes puedan comprender el papel de la modelación en el aprendizaje de las matemáticas, pero también, para que puedan considerarlo como manera de desarrollar sus futuras prácticas como profesores. En este documento se ofrece un análisis de dos episodios extraídos de los ambientes implementados con estos estudiantes cuando resuelven tareas de modelación que involucran el estudio de la covariación.

La covariación y el razonamiento covariacional

En el ámbito internacional se ha recomendado el estudio y la modelación de fenómenos de variación y cambio como una manera de promover el desarrollo de un pensamiento variacional (Colombia-MEN, 2006), como base para una comprensión del cálculo (Carlson et al., 2003, Tall, 2009) y como un enfoque para las matemáticas escolares (Villa-Ochoa y Acevedo, 2019). Por tanto, el estudio y la modelación de fenómenos de variación no solo es un propósito para el desarrollo de los currículos de matemáticas, sino que también, ha sido un objeto de estudio para un sector de la investigación en Educación Matemática.

En Colombia, los currículos escolares de matemáticas deben promover “el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos” (Colombia-MEN, 2006, p. 66). En relación con el estudio del Cálculo, Tall (2009) puntualiza que la variación está en el corazón del análisis matemático y que es indispensable hacer énfasis en los procesos funcionales y dinámicos que subyacen en cada uno de los conceptos allí tratados. Por su parte, Rueda Rueda y Parada Rico (2016) recomiendan el uso de software como el Geogebra para el estudio de la covariación debido a las posibilidades que ofrece el software para coordinar magnitudes que covarían, la cantidad en que covarían y la comprensión de la tasa de variación media entre esas cantidades.

En el ámbito de la investigación, se ha desarrollado el constructo “razonamiento covariacional” (Thompson y Carlson, 2017). Uno de los orígenes de este constructo, tiene su fundamento en la noción de *covariación* de Confrey y Smith (1995); los autores describieron el razonamiento a partir de la noción de covariación entre cantidades; es decir, el reconocimiento de patrón predecible o reconocible de la manera en que cambia una variable con los cambios de otra variable. Otro de los orígenes está en el razonamiento cuantitativo descrito en los trabajos de P. Thompson; de acuerdo con Thompson y Carlson (2017), en estos trabajos existe un interés por comprender cómo los estudiantes conciben situaciones, cantidades que se involucran y las relaciones entre cantidades cuyos valores varían y las formas en que los estudiantes conciben la tasa de cambio.

Carlson et al. (2003) desarrollaron un marco conceptual que se describe en cinco acciones mentales y cinco niveles de razonamiento; sin embargo, recientemente, Thompson y Carlson (2017) reorganizaron este marco a través de la distinción de dos tipos de imágenes de covariación; a saber, suaves (*smooth*) y en partes (*chunky*). Esta reorganización incluye dos marcos que explican los niveles de razonamiento variacional y covariacional de los estudiantes; en ellos, el razonamiento que involucra imágenes suaves se encuentra en los niveles más altos de cada marco.

Las tareas y el contexto

En el marco de este estudio se utilizó el concepto de tareas de modelación presentado por Villa-Ochoa, Castrillón-Yepes y Sánchez-Cardona (2017), los autores describen estas tareas “como un conjunto de textos, enunciados, situaciones, orientaciones o indicaciones que se organizan para “dar vida” a la modelación en la cotidianidad escolar” (p. 222). También se tiene en cuenta la noción de tareas de covariación que Villa-Ochoa y Acevedo (2019) presentaron para analizar una interpretación “dinámica” de las razones trigonométricas; para estos autores, son tareas que exigen el reconocimiento de patrones de los cambios de una cantidad sobre las demás cantidades involucradas en la tarea. En coherencia con estos planteamientos, una *tarea de modelación de la covariación* puede presentarse a través de enunciados que exigen el reconocimiento y la matematización de las relaciones entre cantidades a través de funciones; es decir, las funciones se constituyen en modelos matemáticos de relaciones entre cantidades que covarían.

En el estudio del cual se deriva este documento, se diseñaron diferentes tipos de tareas de modelación de la covariación; entre ellas, tareas realistas, de análisis de modelos y la realización de proyectos de modelación. Estas tareas se han implementado en cursos de formación de profesores de matemáticas en un programa de Licenciatura en Matemáticas en una universidad pública en Medellín-Colombia. En particular, los datos que se analizan en este documento se extrajeron de una experiencia desarrollada durante 2017 en un espacio

denominado: Semillero de Investigación; en el espacio mencionado, también participaron dos profesores coordinadores del Semillero. En total la experiencia tomó cuatro horas de clase (dos sesiones de dos horas cada una). Los datos se extrajeron de las notas de campo de los investigadores y de grabaciones en audio.

De acuerdo con las ideas presentadas en el primer apartado de este documento, el ambiente de modelación no se limitó a la presentación del enunciado de la tarea que los estudiantes deberían realizar; más allá de ello, se ofreció la posibilidad para que los estudiantes buscaran en diferentes fuentes información necesaria para poder resolverla. En coherencia con ello, la experiencia inició con una descripción del proyecto desarrollado por estudiantes que participaron en el estudio reportado por Villa-Ochoa y Berrío (2015). Los profesores describieron el contexto en el que estos autores desarrollaron el proyecto de modelación y cómo en la delimitación del tema del proyecto, los estudiantes discutieron sobre variables que dependen de otras variables. Los profesores también comentaron que, entre varias opciones, una parte de los estudiantes decidió indagar si la inclinación de un terreno tiene repercusiones sobre la cantidad de árboles que se pueden sembrar. Después de la presentación de este contexto, los profesores presentaron el siguiente enunciado

"Se tienen dos terrenos, uno plano y otro inclinado, suponga que se desea sembrar determinado tipo de planta (por ejemplo, arbustos de café) y determine si la inclinación del terreno tiene o no alguna implicación en la cantidad de árboles que caben en él".

Inicialmente los estudiantes trabajaron en subgrupos, mientras los profesores del curso estaban atentos a las discusiones que se presentaban en ellos. Los profesores también estuvieron atentos a las opiniones, estrategias de solución, interpretaciones que consideraron relevantes para promover una discusión plenaria ante todo el grupo. En la primera parte, los estudiantes se comprometieron con la comprensión de la tarea y la construcción (o interpretación) del modelo matemático para determinar la cantidad de árboles en un terreno plano. En la segunda parte, al igual que los participantes de Villa-Ochoa y Berrío (2015), los estudiantes extendieron los modelos a los terrenos inclinados, compararon los resultados en ambos casos, y respondieron a la pregunta formulada en la tarea. Para dar sentido a los datos en términos del razonamiento, se segmentaron y analizaron los datos a partir de las descripciones del marco del razonamiento covariacional propuesto por Thompson y Carlson (2017). Con el ánimo de identificar cómo la modelación interviene en ese razonamiento, se buscaron evidencias sobre las acciones que realizaron los estudiantes y sobre el *porqué* y el *para qué* las realizaron.

Los resultados

Los resultados que se presentan en este documento se fundamentan en la primera parte de la tarea, es decir, en las acciones que realizaron los estudiantes para modelar la cantidad de árboles que caben en un terreno plano. Para enfrentar esta primera parte de la tarea, los estudiantes se propusieron reconocer las condiciones bajo las cuales se deben sembrar los árboles. Una pregunta recurrente entre los equipos, fue ¿Qué se debe tener en cuenta para sembrar los árboles? La respuesta a esta pregunta se deriva de la información propia de la agricultura. A partir de esta pregunta, dos tipos de estrategias pudieron reconocerse; la primera de ellas se desarrolló de un grupo a quienes los profesores explicaron las condiciones de sembrado rectangular (ver Figura 1). La segunda estrategia se derivó de los estudiantes que buscaron información en Internet y encontraron en el sitio web de Permacultura la distribución tres bolillos² y rectangular³; en la página también se encuentra los respectivos modelos matemáticos que se usan en cada tipo de sembrado. A continuación, se presentan las características del razonamiento de los estudiantes cuando buscaron describir y matematizar la covariación presente en esta primera parte de la tarea.

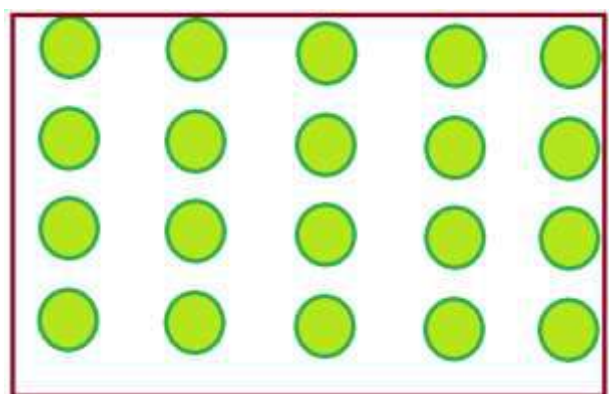


Figura 1. Ilustración sobre la distribución rectangular de arboles.

En la búsqueda de un patrón para el cálculo de árboles que se distribuyen de manera rectangular

Los estudiantes se comprometieron con la búsqueda de relaciones que le permitiera establecer la cantidad de árboles que cabrían según las dimensiones largo y ancho del terreno rectangular. En el siguiente comentario, Karla (seudónimo) explica el procedimiento realizado:

² <https://www.permacultura.org.mx/es/herramientas/formulario/tresbolillo/>

³ <https://www.permacultura.org.mx/es/herramientas/formulario/marco-en-calles/>

Karla: *En primer lugar, dibujamos cómo sería la distribución [ver Figura 2] e hicimos ejemplos concretos [numéricos], por ejemplo, si el ancho del terreno es 50 metros, la copa del árbol es de 1.5 metros de diámetro y la calle [distancia entre los tallos de dos árboles sobre la fila] es de 50 centímetros, entonces todo va a depender de la distancia que dejemos en los extremos. Nosotros supusimos que entre los dos extremos también daba 2 metros. Así nos quedaba más fácil para ver [encontrar] la relación. Entonces vimos que dividíamos el ancho [50 m] entre 2 metros y nos dio 25; eso quiere decir cabrían 25 árboles a lo ancho. Luego a lo largo se hace lo mismo, se divide el largo con el valor de la copa más el puente [distancia entre los tallos de dos árboles sobre la columna].*

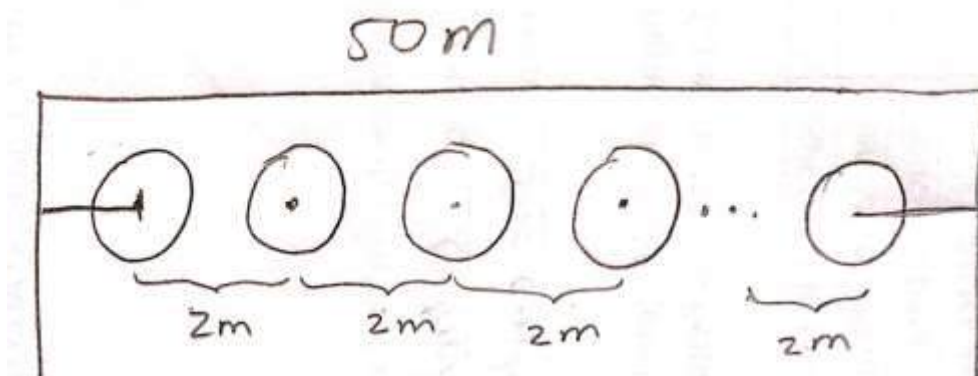


Figura 2. Esbozo de la distribución de árboles en un ancho de dimensión 50 metros

Una vez finalizada la intervención de Karla, uno de los profesores la interpeló para preguntarle, *¿y que pasa si las [suma de las] distancias en los extremos no da 2 metros?* A lo que Juan, otro compañero del equipo, respondió, *"alteraría el modelo y tendríamos que analizar, porque lo que sí es cierto, es que debe quedar una distancia entre el árbol y el borde del rectángulo, porque si no, no se podría recoger cosecha"*.

Varios aspectos se pueden rescatar en la estrategia usada por el equipo de Karla. En primer lugar, se resalta que los estudiantes buscaron información que les permitiera comprender la tarea. El esbozo [Fig. 2] y la solución de casos numéricos particulares les permitió reconocer la relación el ancho y la distancia entre tallo y tallo para calcular la cantidad de árboles. Por un lado, este hecho se puede interpretar como una estrategia para identificar la relación numérica entre las cantidades, pero por otro, como una manera de evocar un razonamiento de tipo inductivo a través del cual se infiere la relación entre cantidades variables.

El hecho que los estudiantes hayan esbozado un caso particular como *ejemplo* [ver segunda línea descripción de Karla] sugiere que los estudiantes *a priori* reconocen la existencia de una relación funcional entre las cantidades y *razonan* con el fin de conocerla algebraicamente. En

este esfuerzo buscan en los “casos particulares” una forma de “operar con números” para comprender “las relaciones entre cantidades variables”. Si bien estas acciones pueden asociarse con el nivel de *coordinación de valores* (Thompson y Carlson, 2017), también es posible interpretar este hecho como una acción producto del esfuerzo por identificar la expresión algebraica de “un patrón” previamente existente.

Otro hecho que se puede resaltar radica en que los estudiantes lograron reconocer en el cociente a/c la presencia de una “nueva” cantidad denominada *cantidad de árboles que caben en el ancho del terreno*. Los estudiantes señalaron que el mismo razonamiento se podría extender para calcular la cantidad de árboles en el largo del terreno. Con base en estos dos datos señalaron “Ya con estos datos multiplicamos y tenemos la cantidad de arboles en el terreno” [Karla cuando finalizó su presentación ante el grupo]. Después de esta intervención, los estudiantes señalaron que obtuvieron el siguiente modelo:

$$C = (a/c) (//p)$$

En donde:

C : cantidad de árboles en el terreno

a : medida del ancho del terreno

l : medida del largo del terreno

c (calle): distancia entre los tallos de dos árboles sobre la fila

p (puente): distancia entre los tallos de dos árboles sobre la columna.

El reconocimiento de esta “nueva” cantidad es evidencia de una característica del razonamiento covariacional denominada *objeto multiplicativo*. Para Thompson y Carlson (2017), la relación entre los valores de cantidades individuales como un objeto multiplicativo implica transformar cantidades individuales para crear una nueva cantidad conjunta que comprenda las cantidades individuales. Una interpretación de la manera en que los estudiantes llegaron a este objeto multiplicativo fue a través de la “ejemplificación” de “casos numéricos particulares”. Otro de los aspectos a resaltar es la naturaleza de la expresión $C = (a/c) (//p)$. Si bien puede considerarse como una función que representa la covariación entre C y las demás cantidades (dependiendo del caso algunas serían constantes) no se encontró evidencia de su construcción como covariación en los términos de Confrey y Smith (1995); más allá de ello, las descripciones de los estudiantes sugieren una “aplicación automática” de la “fórmula” del área de un rectángulo para calcular la cantidad de árboles total en el terreno; esto puede deberse a la “necesidad” que sintieron de enfocarse en la búsqueda del modelo para el cálculo de la cantidad de árboles, en sus palabras “para saber si la inclinación tiene un efecto en la cantidad de árboles, debemos conocer como calcular la cantidad de árboles [que caben el terreno]” [Karla frente a la pregunta, ¿Por qué decidieron buscar la fórmula?].

Información proporcionada en Internet

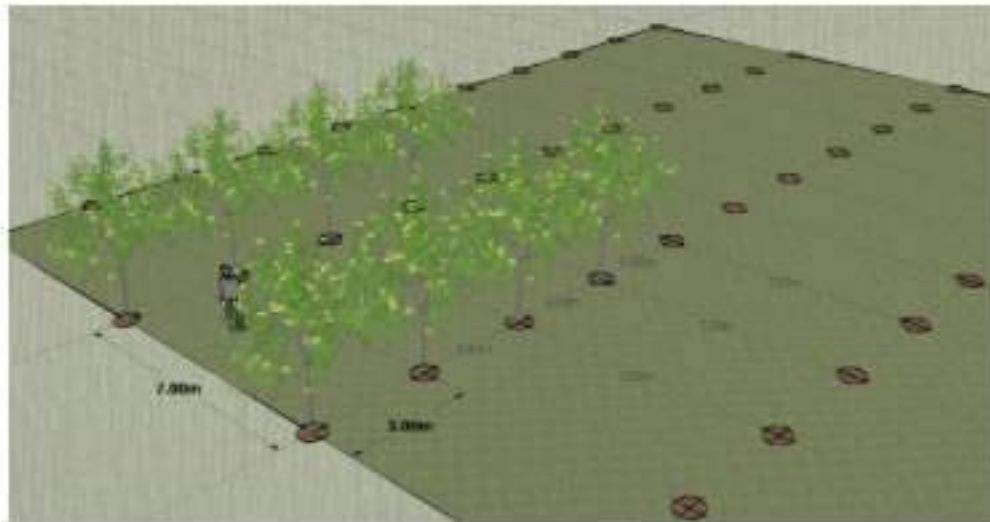
Conforme se mencionó anteriormente, otro grupo de estudiantes se comprometió con la búsqueda de información en Internet. En la Figura 3 se ilustra los detalles de la distribución de árboles en el cultivo, el modelo matemático dado, y la calculadora ofrecida por la aplicación web. Después de su hallazgo, los estudiantes comenzaron a ingresar datos en la calculadora web para determinar la cantidad de árboles dependiendo que cabrían acorde con el área del terreno. A partir de allí, se esforzaron por “darle sentido” a la expresión $n = Su/(M*m)$ (ver Fig. 3). Para ello, se apoyaron de la distribución de los árboles ofrecida en la Fig. 3 y realizaron cálculos para verificar si los resultados de sus cálculos a lápiz y papel coincidían con los resultados en la calculadora web. Posterior a ello, Camilo (Grupo 2) ofreció el siguiente comentario:

Camilo: *En la imagen se muestra que la distancia entre árboles es 7 metros y por el otro lado 3 metros. Pensamos en que esos valores son constantes cuando tenemos un cultivo fijo. Entonces la fórmula sería n sería igual a superficie dividido 21 metros [cuadrados]; y eso nos serviría para cualquier terreno que tenga ese mismo tipo de árboles.*

(Grupo2)

El comentario de Camilo, como representante del grupo 2, evidencia un razonamiento de tipo deductivo a partir del cual establecen el modelo $C(A) = A/21$. Para este grupo de estudiantes, la cantidad $1/21$ aparece como “un valor particular” que resulta de hacer constante algunas cantidades en el modelo. Sin embargo, aun no aparece evidencia de una interpretación como constante de proporcionalidad entre $C(A)$ y A . Frente a ello, uno de los profesores cuestionó al grupo frente al significado de $1/21$, a lo que Mariana (integrante del grupo 2) respondió: “sería el valor cuando el área es 1 [$C(1)$] Quiere decir que $1/21$ árboles por metro cuadrado [árbol/metrocuadrado]”.

Herramientas: Marco En Calles (Rectángulo)



En esta disposición cada 4 plantas configuran un rectángulo, colocadas en cada uno de los vértices. El lado menor de este rectángulo es lo que se denomina "distancia entre plantas"; el mayor, "distancia entre filas", que son, evidentemente, distintas.

La siguiente fórmula nos determina la densidad de plantas que caben en el terreno:

$$n = Su / (M * m)$$

Donde:

n = número de plantas.

Su = superficie del campo, en metros cuadrados (m²).

M = longitud del lado mayor (distancia entre filas), en metros (m).

m = longitud del lado menor (distancia entre plantas), en metros (m).

Superficie		m ²
distancia entre filas		m
distancia entre plantas		m
Resultado		
	Plantas	
Calcular		

Si bien la información generada a partir de este sitio se cree que es exacta, todas las medidas adoptadas sobre la base de los resultados, son responsabilidad exclusiva del usuario.

Publicidad

Figura 3. Imagen de la aplicación web: Permacultura

La presencia de los modelos como "expresiones matemáticas dadas" por la aplicación hizo que los estudiantes se comprometieran con casos particulares para comprender y usar los modelos. A partir de ello, el razonamiento fue deductivo. El reconocimiento de cantidades constantes hizo que la razón de cambio emergiera bajo una interpretación de un área particular y no como una constante de covariación entre las dos cantidades.

Consideraciones finales

La modelación de la covariación se reconoce como un proceso importante para otorgar significados al concepto de función; también se reconoce como una base para una comprensión dinámica del cálculo. Una parte significativa de la investigación sobre el razonamiento que se implica en la solución de tareas de covariación ha estado centrada en las acciones y procesos mentales que desarrollan los estudiantes cuando modelan la covariación; en estas tareas, la presencia de información del contexto extra-matemático es reducida.

En el presente estudio, se utilizó un tipo de tarea de modelación realista (Villa-Ochoa et al., 2017) que se adaptó de los resultados de un proyecto de modelación matemática. Para resolver la tarea los estudiantes se vieron en la necesidad de obtener información del contexto extra-matemático para comprender la tarea. Los primeros análisis de los datos permiten colegir que esta búsqueda de información pudo desencadenar dos tipos de razonamiento en los estudiantes; por un lado, un razonamiento de tipo inductivo en la que se encuentran indicios de una comprensión de una cantidad como objeto multiplicativo (Thompson y Carlson, 2017); pero también aparece una función como una “aplicación directa” de una fórmula previamente conocida. Por otro lado, la presencia de los modelos en la aplicación web hizo que la tarea se orientara más hacia el tipo “uso y análisis de modelos” (Villa-Ochoa et al., 2017); a partir de ello, se observaron características de un razonamiento deductivo en el cual la tasa de variación emergió como “un caso particular” del modelo previamente constituido. Esta interpretación de la tasa de variación parece ser diferente de las maneras en que emerge en los trabajos sobre razonamiento covariacional que se fundamentan en Confrey y Smith (1995).

Referencias

- Carlson, M. P., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: un marco conceptual y un estudio. *Revista Ema*, 8(2), 121–156.
- Confrey, J., & Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(1), 66–86.
- Colombia-MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá: Magisterio
- Parra-Zapata, M. M., Rendón-Mesa, P. A., Ocampo-Arenas, M. C., Sánchez-Cardona, J., Molina-Toro, J. F., & Villa-Ochoa, J. A. (2018). Participación de profesores en un ambiente de formación online. Un estudio en modelación matemática. *Educación Matemática*, 30(1), 185–212. <https://doi.org/10.24844/EM3001.07>
- Parra-Zapata, M. M., & Villa-Ochoa, J. A. (2016). Interacciones y contribuciones. Formas de participación de estudiantes de quinto grado en ambientes de modelación matemática. *Actualidades Investigativas en Educación*, 16(3), 1–27. <https://doi.org/10.15517/aie.v16i3.26084>
- Rendón-Mesa, P. A., Duarte, P. V. E., & Villa-Ochoa, J. A. (2016). Articulación entre la matemática y el campo de acción de la ingeniería de diseño de producto: componentes de un proceso de modelación matemática. *Revista de La Facultad de Ingeniería U.C.V.*, 31(2), 21–36.

- Rendón-Mesa (2016). *Articulación entre la matemática y el campo de acción de la ingeniería de diseño de producto: aportes de la modelación matemática*. Tesis de Doctorado (no publicada). Doctorado en Educación, Facultad de Educación, Medellín: Universidad de Antioquia.
- Romo-Vázquez, A., Barquero, B., & Bosch, M. (2019). El desarrollo profesional online de profesores de matemáticas en activo: una unidad de aprendizaje sobre la enseñanza de la modelización matemática. *Uni-pluriversidad*, 19(2), 161–183. <https://doi.org/10.17533/udea.unipluri.19.2.09>
- Rosa, M., & Orey, D. C. (2019). Mathematical modelling as a virtual learning environment for teacher education programs. *Uni-pluriversidad*, 19(2), 80–102. <https://doi.org/10.17533/udea.unipluri.19.2.04>
- Rueda Rueda, N., & Parada Rico, S. (2016). Razonamiento covariacional en situaciones de optimización modeladas por Ambientes de Geometría Dinámica. *Uni-pluriversidad*, 16(1), 51-63. Recuperado de <http://aprendeenlinea.udea.edu.co/revistas/index.php/unip/article/view/326184>
- Stillman, G. A. (2019). State of the Art on Modelling in Mathematics Education—Lines of Inquiry. In *Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education* (pp. 1–20). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-14931-4_1
- Tall, D. (2009). Dynamic mathematics and the blending of knowledge structures in the calculus. *ZDM - Mathematics Education*, 41(4), 481–492. <https://doi.org/10.1007/s11858-009-0192-6>
- Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation and functions: Foundational ways of mathematical thinking. In J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education* (pp. 421–456). Reston, VA: NCTM.
- Villa-Ochoa, J. A., & Berrío, M. J. (2015). Mathematical Modelling and Culture: An Empirical Study. In G. A. Stallman, W. Blum, & M. S. Biembengut (Eds.), *Mathematical Modelling in Education Research and Practice, International Perspectives on the Teaching and Learning* (pp. 241–250). Cham: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-18272-8_19
- Villa-Ochoa, J. A. (2016). Aspectos de la modelación matemática en el aula de clase. El análisis de modelos como ejemplo. In J. Arrieta & L. Diaz (Eds.), *Investigaciones latinoamericanas de modelación de la matemática educativa* (pp. 109–138). Barcelona: Gedisa.
- Villa-Ochoa, J., Castrillón-Yepes, A., & Sánchez-Cardona, J. (2017). Tipos de tareas de modelación para la clase de matemáticas. *Espaço Plural*, 18(36), 219-251.
- Villa-Ochoa, J. A., & Tavera Acevedo, F. (2019). La covariación en las tareas de los libros universitarios de precálculo: el caso de las razones trigonométricas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 33(65), 1379–139

EL PAPEL DE LOS PROBLEMAS DE MODELACIÓN EN LA ENSEÑANZA SECUNDARIA

María Trigueros Gaisman

trigue@itam.com

Instituto Tecnológico Autónomo de México (ITAM), México

Resumen

La perspectiva de modelación consiste en un acercamiento didáctico en el que se introduce nuevo conocimiento matemático a través del trabajo colaborativo de los alumnos en la solución de problemas reales o realistas que sean de su interés. Esta estrategia de enseñanza se suma a los enfoques de resolución de problemas, pero al presentar problemas más abiertos que demandan exploración e investigación, amplía el reto para los alumnos. Esta estrategia de enseñanza permite acercarse al conocimiento matemático de los alumnos y abrir oportunidades de nuevos aprendizajes. La investigación en Educación Matemática reporta criterios que permiten diseñar problemas de modelación efectivos para ser utilizados en el aula y en algunos estudios se sugiere su uso conjuntamente con actividades didácticas que apoyen la reflexión de los alumnos sobre la necesidad de nuevos conceptos matemáticos en su solución. En esta conferencia discutiremos tanto los elementos que deben tomarse en consideración al diseñar y utilizar este tipo de problemas en el nivel de la escuela secundaria. Mostraremos algunos ejemplos de problemas de modelación y de actividades de reflexión que los han acompañado al introducirlos en el aula y que se han investigado en detalle en el marco de un proyecto de investigación. Se presentarán los resultados obtenidos en las investigaciones en términos de la motivación y del aprendizaje de los alumnos. Terminaremos con una reflexión acerca de las bondades, los retos y limitaciones del uso de esta perspectiva en la enseñanza secundaria.

Palabras clave: *Problemas de modelación, estrategia didáctica, aprendizaje, secundaria.*

Introducción

Los resultados de las investigaciones recientes ponen de manifiesto que, aunque los cambios de la enseñanza tradicional hacia una enseñanza más participativa de las Matemáticas acontecen lentamente, es posible observar cada vez con mayor frecuencia un interés de los profesores por una enseñanza más participativa en la que se trabaja en problemas relacionados con el mundo de los estudiantes y en el que el maestro actúa como un guía y un promotor de las discusiones de los alumnos.

El contexto en el que se enseñan las matemáticas tiene un peso muy fuerte en su aprendizaje. Cuando los conceptos se enseñan de manera abstracta, con énfasis en la operatividad más que en la comprensión, el conocimiento queda encapsulado y es difícil aplicarlo a situaciones

distintas a las del contexto del aula; la transferencia del conocimiento no se da por sí sola. El reto del uso de problemas de modelación en la enseñanza intenta romper con la separación entre el aprendizaje de conceptos abstractos y su aplicación a través de enfrentar a los alumnos a situaciones que los motiven, les representen un reto y puedan utilizar sus conocimientos previos, relacionarlos y enfrentar la necesidad de nuevos conocimientos para encontrar soluciones adecuadas que además podrán ser útiles en la solución de nuevos problemas (i.e. Kaiser & Maaß 2006; Busee, 2011; Trigueros & Bianchini, 2016). Los alumnos logran además construir una visión de las matemáticas más cercana al trabajo propio de los matemáticos (Trigueros 2009).

La introducción de una nueva metodología de enseñanza representa un reto para los maestros. Es difícil adaptarse a ello. La investigación en enseñanza de las matemáticas ha propuesto diversas formas de apoyar a los alumnos para que aprendan matemáticas de manera más efectiva, entre ellas, el uso de problemas de modelación es una opción que puede utilizarse ya sea de manera continua o en forma ocasional de acuerdo a los temas a tratar y a las necesidades de los alumnos. Esta metodología permite al maestro acercarse a la forma en que los alumnos utilizan sus conocimientos, a sus dudas y a sus estrategias frente a una situación nueva que pone al maestro en una posición en la que cuenta con información relevante para proponer nuevas preguntas, responder algunas dudas y así promover el aprendizaje de los alumnos (Carlson, Larsen & Lesh, 2003).

La posibilidad de incorporar problemas que tienen su origen en otras disciplinas juega un papel importante en la posibilidad de aplicación de las matemáticas escolares en contextos diferentes. Brinda también oportunidades para que los alumnos reflexionen sobre la estructura de las matemáticas y para que exploren problemas que la comparten. El conocimiento de los alumnos de esa estructura puede conducirlos a descubrir ideas poderosas de las matemáticas que permiten resolver de la misma manera problemas que en apariencia son diferentes, pero que comparten justamente la estructura matemática. Desde hace muchos años, diversos investigadores han propuesto la idea de introducir las Matemáticas en la escuela a través de problemas de modelación de problemas reales o ficticios que planteen un reto a los alumnos y que al mismo tiempo no representen una dificultad imposible de salvar i.e. (Trigueros, M. 2009; Kaiser, W. Blum, R. Borromeo-Ferri, & G. Stillman, G., 2011; Lesh & English, 2005).

Uno de estos acercamientos es la perspectiva de Modelos y Modelación (Lesh & Doerr, 2003). En ella se postula que el uso de este tipo de retos permite la construcción de nuevo conocimiento a través de la interacción de los alumnos y de la guía efectiva del maestro. Esta perspectiva introduce, además, una serie de criterios que permiten al investigador o al maestro determinar si un problema puede resultar o no efectivo en la promoción del conocimiento en el aula y, a través de ciclos de modelación, abre al maestro y a los investigadores la posibilidad de analizar el conocimiento que los alumnos ponen en juego en su trabajo con el problema: desde la exploración del mismo, hasta el uso de las matemáticas para trabajar con él y el desarrollo de productos en los que comunican sus resultados.

El uso de modelos en el aula de Matemáticas permite al maestro y a los investigadores determinar qué conocimientos previos ponen en juego los alumnos, como los relacionan y diagnosticar con ello sus posibles dificultades. A través de los distintos ciclos de exploración y

de trabajo con el modelo, los alumnos tienen múltiples oportunidades de interpretación de diversos fenómenos y de reflexión sobre sus características más sobresalientes, pueden utilizar las Matemáticas como herramienta de predicción y, en casi todas las situaciones, tendrán necesidad de nuevos conocimientos matemáticos, de la búsqueda y uso de datos y de apoyarse en una variedad de tecnologías para poder trabajar eficazmente en la solución del problema de interés aprovechando las características de los modelos matemáticos planteados.

Los modelos a utilizar pueden provenir de distintas disciplinas, lo que brinda al maestro la oportunidad, mencionada anteriormente, de relacionar las disciplinas y de enfatizar cómo distintos problemas pueden ser abordados mediante modelos semejantes. Los modelos dejan de ser únicamente una herramienta matemática poderosa de solución de problemas para ser además una herramienta valiosa en la toma de decisiones.

En el contexto de la modelación, el uso de proyectos es particularmente interesante pues, al trabajar con un mismo problema durante varias sesiones de clase y mediante trabajo fuera del aula, se ofrece a los múltiples de reflexionar sobre sus estrategias de modelación y de trabajo matemático con el modelo. En los proyectos es posible también aprovechar la situación para introducir y desarrollar técnicas importantes, necesarias en la solución de una gran diversidad de problemas reales. Entre ellas podemos mencionar a la aproximación, el cálculo de parámetros, la creación de nuevas herramientas de análisis, el uso de una gran variedad de fuentes de información y el uso de una gran variedad de recursos, entre otras. La comunicación de los resultados de estos proyectos hace posible que los alumnos desarrollen su creatividad y utilicen sus habilidades artísticas, literarias, musicales, técnicas o científicas de formas novedosas e interesantes para ellos y para sus compañeros. En el proceso de trabajo y comunicación del proyecto los alumnos aprenden las matemáticas de interés.

En este artículo presentaremos algunas ideas teóricas que juegan un papel importante en el diseño de actividades de modelación adaptadas a distintos niveles educativos, en particular, a la secundaria. En particular se centra la atención en dos perspectivas teóricas y su posible articulación: Modelos y modelación (Lesh y Doerr, 2003) y la Teoría APOE (Arnon et, al. 2014). Se mostrarán dos ejemplos de problemas de modelación que han sido empleados en el aula y los resultados del análisis de los datos obtenidos en cada caso haciendo énfasis en algunas características de los problemas de modelación que se pueden utilizar en la enseñanza de matemáticas en el nivel de secundaria. En la descripción se mostrará, además, cómo el diseño de actividades basado en una teoría cognitiva de aprendizaje permite potenciar y dirigir la reflexión de los alumnos sobre las matemáticas involucradas en su trabajo en el modelo. Por último, se presentarán los resultados obtenidos en cada uno de los casos y se discutirán algunas bondades y limitaciones del uso de problemas de modelación en el aula en relación con el aprendizaje de los alumnos.

Modelos y modelación

Modelos y Modelación es un acercamiento conceptual que propone que el aprendizaje puede desarrollarse a partir del trabajo que hacen los alumnos para describir el comportamiento de una situación en un contexto real o realista que les permita utilizar aquello que han aprendido con anterioridad para desarrollar un modelo con el que pueden responder preguntas

relacionadas con la situación. El trabajo en el modelo puede requerir además el uso de nuevo conocimiento que puede construir mediante el trabajo en equipo y en discusión con el maestro (Lesh & Doerr, 2003, Lesh & English, 2005). El trabajo que se desarrolla con esta perspectiva incluye el postulado de un conjunto de principios que el modelo a utilizar debe satisfacer para poder aplicarse exitosamente en el aula (Lesh, Hoover, Hole, Kelly & Post, 2000):

Principio de realidad: El problema debe estar basado en una situación real o realista que tenga sentido para los alumnos.

Principio de construcción del modelo: El problema debe diseñarse para promover el desarrollo de un modelo. Debe considerar elementos para operar con, relaciones entre esos elementos y patrones y reglas que gobiernan la situación que los alumnos están modelando.

Principio de auto- evaluación: Los alumnos deben poder verificar su progreso y examinar si los modelos propuestos describen la situación que están modelando.

Principio de documentación: Los alumnos deben ser capaces de registrar su proceso de pensamiento mediante la presentación escrita de sus supuestos y modelos en términos verbales y matemáticos.

Principio de generalización de los constructos: El modelo desarrollado debe poder generalizarse y usarse en otra situación o problema. Debe convertirse en una nueva manera de pensar que los alumnos pueden aplicar a otros problemas y ser útil como una nueva herramienta de análisis.

Principio de simplicidad: El problema debe representar un reto para los alumnos, pero no debe ser tan complicado que no permita que los alumnos lo analicen.

La teoría APOE y su relación con Modelos y modelación

La teoría APOE utiliza elementos de la epistemología genética de Piaget que se consideran indispensables en la construcción de los conceptos matemáticos para definir las estructuras que forman la parte central de la teoría (Dubinsky y McDonald, 2001). Esta teoría se desarrolló para comprender cómo se aprenden las matemáticas. Sus principales estructuras son las Acciones, los Procesos, los Objetos y los Esquemas. La construcción de esas estructuras se lleva a cabo mediante el mecanismo de abstracción reflexiva que en la teoría se identifica con los mecanismos de interiorización, coordinación, encapsulación y tematización (Arnon et. al., 2014).

Las Acciones son transformaciones de objetos que los estudiantes perciben como externas o como un algoritmo a seguir. Las Acciones pueden ser muy limitadas, pero son cruciales en la construcción de un concepto. Un Proceso se construye cuando los estudiantes repiten estas Acciones y reflexionan sobre ellas. De esta manera se forma una construcción interna que ejecuta las mismas acciones pero que el individuo ha hecho suyas. Diferentes Procesos pueden coordinarse en nuevos Procesos. La construcción de un Objeto se lleva a cabo cuando un estudiante reflexiona sobre las Acciones que se pueden aplicar a un Proceso y lo concibe como un todo, es decir, cuando considera al Proceso como una transformación global. Los Esquemas se describen en la teoría como una colección de Acciones, Procesos, Objetos y otros Esquemas relacionados entre sí que el estudiante utiliza cuando enfrenta un problema matemático.

Cuando un Esquema se desarrolla y sus elementos son coherentes entre sí, puede tematizarse, en este caso es posible que el estudiante lo utilice como un Objeto sobre el cual puede hacer nuevas Acciones.

Un elemento fundamental en esta teoría es el modelo conocido como descomposición genética. Este modelo describe de manera minuciosa las construcciones que los investigadores consideran necesarias para aprender un concepto matemático. El modelo permite, por una parte, diseñar propuestas didácticas e instrumentos de investigación y, por otra parte, llevar a cabo un análisis de los datos recabados en la investigación de manera objetiva. La descomposición genética debe probarse experimentalmente y dependiendo de los resultados obtenidos puede refinarse para dar cuenta de ellos o validarse si no es necesaria a refinación. La descomposición genética no pretende describir la única forma en que un concepto puede construirse. Distintas descomposiciones genéticas sobre un mismo concepto pueden coexistir. Lo que es importante es que se demuestre experimentalmente que los estudiantes ponen en juego esas construcciones en la solución de los problemas matemáticos de interés relacionados con el esquema.

En APOE se considera que la tendencia general del estudiante a utilizar las estructuras de la teoría, cuando trabaja con una serie de situaciones relacionadas con una noción matemática específica, es diferente dependiendo del tipo de estructuras que muestra en su trabajo. Estas diferentes posibilidades se relacionan con el paso del estudiante de un nivel de conocimiento a otro, es decir, con su aprendizaje.

La modelación como estrategia de aprendizaje puede describirse en términos de las estructuras de la teoría APOE: Al enfrentar un problema real o realista, los estudiantes utilizan los Esquemas que han construido en el contexto de las matemáticas y otros Esquemas que han construido en otras asignaturas o en otros dominios para trabajar la situación problemática que enfrentan. Los estudiantes usan estos Esquemas en el proceso de selección de variables, en el proceso de establecer relaciones entre ellas y en la coordinación de estos procesos y Esquemas para llegar a lo que puede considerarse como la matematización de la situación problemática. De esta manera desarrollan un modelo que se encapsula en un Objeto. Los estudiantes hacen Acciones y Procesos sobre el modelo para analizarlo, determinar sus propiedades y para proponer nuevas preguntas. Es necesario que los estudiantes construyan nuevos Esquemas para responder a las preguntas que la situación problemática de modelación plantea. Estos nuevos Esquemas se usan para modificar, ampliar y analizar el modelo y para proponer nuevas preguntas.

La teoría APOE propone una metodología de investigación y propone también una metodología de enseñanza: el ciclo ACE en el que los estudiantes trabajan colaborativamente sobre actividades (A) didácticas diseñadas mediante la descomposición genética, discuten en grupo completo con la guía del maestro (C) y trabajan en Ejercicios que el maestro deja como tarea. El uso de modelos en la enseñanza de las matemáticas cuando se utiliza la teoría APOE.

Desde el punto de vista teórico, Modelos y Modelación y la teoría APOE postulan formas de construcción del conocimiento. Es posible entonces proponer una posible coordinación entre ellas considerando que el trabajo sobre el problema original permite poner en juego un

modelo matemático sobre el cual pueden hacerse dos tipos de actividad, una que permite analizar, desarrollar y validar el modelo matemático y otra en la que las Acciones sobre el modelo matemático, libres o guiadas mediante actividades, pueden ser complementadas mediante actividades específicas diseñadas en términos de una descomposición genética. Estos dos tipos de actividad se pueden ir intercalando en ciclos en los que la modelación da lugar a la necesidad de reflexión y a la construcción de las estructuras necesarias para el aprendizaje de los nuevos conceptos y éstos permiten mirar el trabajo sobre el modelo desde una perspectiva distinta que lo hace evolucionar. Desde el punto de vista metodológico la Modelos y Modelación puede utilizarse para validar el funcionamiento de la situación planteada en términos la promoción de nuevo conocimiento mientras que APOE puede utilizarse para analizar las construcciones de los alumnos y cómo podrían relacionarse con nuevas actividades que promuevan la construcción del conocimiento de interés pues, de acuerdo a esta teoría, el uso de conocimiento previo no es suficiente para garantizar la construcción de nuevos conocimientos. Los ciclos de enseñanza e investigación de APOE se insertan, además, de manera natural en los ciclos de modelación previstos por Modelos y Modelación. Y así, ambas teorías pueden ampliar sus fronteras para plantear nuevas propuestas didácticas y de investigación.

A continuación, se ejemplifican un par de problemas de modelación, uno de los cuales se trabajó como un proyecto, que han sido empleados en el aula y cuyos resultados han sido investigados, aunque no necesariamente publicados con anterioridad.

Una decisión importante

En una clase de Matemáticas con alumnos de 3º de secundaria, alumnos de alrededor de 15 años de edad, el plan de estudios de la materia proponía la necesidad de establecer relaciones entre distintos conceptos estudiados. En ese contexto se diseñó una actividad de modelación para los alumnos con el objetivo de que utilizaran sus conocimientos sobre semejanza de triángulos y sobre funciones. El problema presentado a los alumnos es el siguiente:

El señor López tiene un terreno en un acantilado que da al mar. Quiere construir en él un hotel. El terreno tiene una forma complicada, que se muestra en la figura que representa una vista del terreno desde arriba. El dueño del terreno no se decide sobre la forma de colocar un edificio de planta rectangular que aproveche mejor la posible vista al mar. Lo discutió con su hija Inés y decidieron solicitarnos ayuda para tomar una mejor decisión.

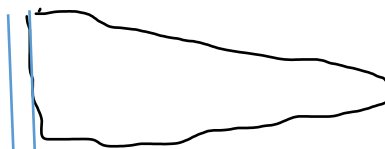


Figura 1. Forma del terreno a considerar

Reúnete con dos compañeros. Explore y analicen la situación y respondan ¿Qué datos les pedirían y qué les sugerirían a Inés y al señor López?

Todos los alumnos asociaron al terreno una forma triangular. Utilizaron distintos tipos de triángulo, los más frecuentes, isósceles y rectángulos, aunque posteriormente los isósceles se convirtieron en triángulos rectángulos en distintas posiciones que intentaron comparar. Al discutir intentaron comparar el área de los rectángulos y surgieron comentarios acerca de cómo sería más conveniente dibujar el rectángulo dentro del terreno. Después de este trabajo discutieron y decidieron que era importante contar con más datos sobre el terreno, por ejemplo *“¿Cuál es su área? ¿Cuánto mide lo que da a la carretera? ¿Cuánto mide cada uno de los lados?”* En cuanto a un primer ciclo emergen dos sugerencias: *“Pondríamos el rectángulo pegado a la carretera, así queda más fácil para entrar y salir”* y *“Si se coloca el rectángulo del plano del hotel horizontalmente se aprovecha mejor la vista al mar”*.

Después de la discusión de estas posibilidades con todo el grupo y el maestro, los alumnos decidieron que sería conveniente pensar en colocar el rectángulo horizontalmente y que sería conveniente que el rectángulo fuera lo más grande posible para que fuera un buen negocio. El plano para el hotel que surgió de esta discusión y con el que continuó el trabajo de todo el grupo fue semejante al que se muestra en la figura 2:

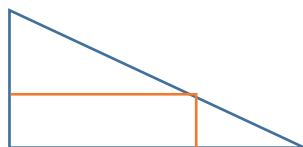


Figura 2. Modelo geométrico del problema

La maestra ofreció en este momento las dimensiones del terreno que solicitaron a Inés: La longitud de la base es de 150m, y el lado que da al camino es de 75m.

La maestra proporcionó además a los alumnos algunas actividades diseñadas con base en la descomposición genética para apoyarlos. Ejemplos de esas actividades son:

¿Cuántas maneras de dibujar el rectángulo pueden encontrar? _____

Observen la figura y anoten las características que les parezcan relevantes _____

El objetivo de estas actividades tenía la intención de que los alumnos fijaran su atención en las matemáticas del problema y hagan Acciones sobre los elementos de la figura para obtener algunas relaciones entre ellos.

El siguiente diálogo ejemplifica la discusión de los alumnos:

A1: Se forman dos triángulos adentro del triángulo grande

A2: Sí y el rectángulo si lo dejamos pegado a la hipotenusa se puede poner de distintas maneras, así, moviendo este vértice (el vértice que toca la hipotenusa del triángulo) ¿Cuál puede convenir más?

A3: Yo creo que necesitamos el más grande, con más área. Ese conviene más. Lo que sobre pueden ser jardines y otras cosas así.

A1: ¿Ven estos triángulos? Los tres que se ven son triángulos semejantes. Podemos ver cómo son.

A3: Sí, pero tenemos que ver su área. Si movemos el vértice no es tan fácil saber dónde ponerlo para que el área del rectángulo, base por altura, sea la más grande....

La discusión condujo a los alumnos a usar los datos para los lados del triángulo y a nombrar los puntos en donde el rectángulo toca al triángulo. Le dieron también un valor a la altura del rectángulo, pero reconocieron que esa altura cambia al mover el vértice del rectángulo y que la base del rectángulo también cambia, así llamaron x a la base del rectángulo y llamaron y a la altura.

Otros equipos analizaron el problema geoméricamente y consideraron, por ejemplo: *“Las partes que sobran son los triángulos ahí no hay rectángulo, queremos que sobre lo menos que se pueda”*. Haciendo dibujos de triángulos con rectángulos en diferentes posiciones intentaron encontrar dónde puede estar el punto en el que lo que sobra fuera lo menos posible después de comparar con el área del rectángulo. Por ejemplo: *“Si doblamos aquí hacia abajo parte del área del triángulo coincide con la del rectángulo, pero no toda. Sobra estos dos triángulos lo de este triángulo y también queda un triángulo que no queda tapado del rectángulo. Si nos imaginamos que lo movemos... Creo que ya sé, tenemos que ponerlo a la mitad de A porque ahí se tapa la mitad del rectángulo, pero... el área de la otra mitad, no sé si se tapa con el triángulo de la derecha”*.

Se puede observar que los alumnos, en general, discutieron matemáticamente y trataron de encontrar maneras de abordar el problema que representó un reto para ellos. Mediante la discusión en grupo se compararon las estrategias de los alumnos y el profesor intentó que todo el grupo las entendiera. Entregó después otra hoja de actividades para apoyar la reflexión de los alumnos en la introducción de variables, usando la sugerencia del primer grupo que fue compartida por los alumnos. Ejemplos de las nuevas actividades son:

- 1) Si llamamos x a la base del rectángulo ¿Entre qué valores podría variar?
- 2) Si llamamos y a la altura del rectángulo ¿Entre qué valores podría variar?
- 3) ¿Cómo cambia el área del rectángulo si se cambia el valor de x o el valor de y ?
- 4) ¿Para qué valores de x y de y el área del rectángulo sería cero? ¿Tiene sentido elegir esos valores? ¿por qué?
- 7) Analicen la figura ¿Cuántos triángulos observan? Señálenlos en la figura.
- 8) Comparen los triángulos ¿Cómo son uno respecto a los otros?
- 9) Qué propiedad de los triángulos pueden utilizar para encontrar una relación entre el valor de x y el valor de y ?

Con esta guía y lo que los alumnos habían considerado anteriormente los alumnos lograron plantear un modelo matemático para describir la situación y, posteriormente, encontrar la relación que describe el área del rectángulo restringido por las medidas del triángulo. Reconocieron con facilidad la expresión como una función cuadrática y que el valor mayor del área se obtiene para el valor de x que corresponde al vértice. De esa manera pudieron resolver el problema.

En la discusión en grupo los alumnos dieron evidencia de entender el problema y la maestra propuso como tarea que utilizaran el otro método sugerido por los compañeros que utilizaban los triángulos y que comparan las dos soluciones, que deberían ser iguales. No todos los alumnos pudieron resolver el problema de esta manera, pero los alumnos que la sugirieron sí lo lograron y demostraron informalmente su resultado y lo relacionaron con la metodología empleada en las actividades de la maestra. Ella pidió además a los alumnos que escribieran una carta a Inés y al señor López explicando su sugerencia y aclarando por qué consideraron que es la mejor opción para construir el hotel. Les pidió que sugieran además qué hacer con las partes del terreno que quedan fuera del rectángulo.

Los alumnos permanecieron siempre interesados en el problema. Discutieron en sus equipos y con otros equipos para intercambiar ideas. La principal dificultad encontrada fue identificar los triángulos en la figura como semejantes y pasar de la exploración utilizando números al uso de variables. En su carta, los alumnos mostraron haber entendido la relación entre los triángulos, el rectángulo y la función cuadrática. Los alumnos dieron evidencia de construcción de conocimiento que la maestra corroboró planteando otros problemas semejantes en la clase siguiente y en el examen parcial correspondiente donde el 73% de los alumnos obtuvo resultados satisfactorios.

El papel de la derivada implícita en la física

A partir de una discusión entre los maestros de Cálculo Diferencial e Integral para alumnos de bachillerato, se discutió la dificultad que encuentran los alumnos para comprender y utilizar correctamente las derivadas implícitas. Algunos maestros comentaron que plantear problemas sencillos relacionados con las ecuaciones diferenciales era, en su opinión, una forma más natural de introducir este concepto y uno de ellos completó la idea al comentar que además se podrían aprovechar esos problemas para relacionar con otras asignaturas como la Física, la Química o la Biología. En ese entorno se decidió intentar el uso de un problema abierto, conocido por los estudiantes, pero en el que siempre se les da una fórmula para trabajar con él y se pierde la oportunidad de que razonen sobre cómo surge esa fórmula. Después de una larga discusión, algunos maestros decidieron aprovechar el problema para que los alumnos trabajaran experimentalmente en la búsqueda de datos y lo plantearon como un proyecto de investigación (Trigueros & Oktaç, 2019). El problema planteado a los alumnos fue:

¿Cómo se puede encontrar la velocidad terminal de un paracaidista que se deja caer desde un avión? ¿Sería posible hacer un experimento para determinarla?

A los alumnos les interesó mucho el problema y comenzaron a discutir, pero encontraron dificultades para abordar el problema y dudaban sobre qué podrían hacer. Después de unos minutos imaginaron la situación y pensaron en ella; hicieron algunos dibujos y decidieron, en todos los equipos, empezar a concentrarse en un caso simple para "*poder pensar mejor*". El significado de la velocidad terminal fue el objeto de la mayor parte de las discusiones; los alumnos se preguntaban si era el caso que siempre al caer con el paracaídas abierto se alcanzara una velocidad terminal. Poco a poco, con la ayuda del maestro, fueron desarrollando estrategias para proponer un modelo. Varios equipos usaron el equilibrio de fuerzas; otros la suma de fuerzas en la caída y otros la razón de cambio de la velocidad. Para poner en juego

estos conceptos, los alumnos discutieron en términos generales la necesidad de incluir la fuerza de fricción que frena al paracaídas y propusieron algunas hipótesis, por ejemplo, que esa fuerza *"solamente depende de la densidad del aire"* y que *"lo que importa más es el tipo de paracaídas, en particular su tamaño y su forma"*. Después de discutirlo más, la mayoría concluyó que esos factores se podían agrupar en una constante porque las condiciones de la atmósfera podrían no variar en el tiempo de caída del paracaidista, pero que era importante considerar el área del paracaídas que también es constante.

Después de alrededor de 20 minutos el profesor pasó al frente a representantes de distintos equipos para discutir con el grupo completo cada una de las propuestas anteriores y compararlas. Los alumnos que propusieron el uso de la razón de cambio de la velocidad, por ejemplo, dieron el siguiente argumento para convencer al resto del grupo: *"Cuando algo cae su velocidad aumenta, el movimiento es acelerado. El paracaidista empieza a caer así, pero cuando se abre el paracaídas la fricción con el aire aumenta y en eso, suponemos que depende de qué tan grande es el paracaídas. Así se va frenando y si llega a una velocidad terminal eso pasa cuando la fuerza de fricción y la de la gravedad se equilibran y el movimiento a partir de ese momento es con velocidad constante que es la velocidad terminal."* Al igual que este equipo, los demás consideraron que el paracaidista se iría frenando y que la velocidad disminuiría más si la constante discutida anteriormente era mayor.

Los alumnos regresaron a trabajar en equipo para encontrar un modelo para la situación planteada, como recomendó el maestro. Para los alumnos fue fácil considerar al tiempo como la variable independiente y a la velocidad como variable dependiente, aunque hubo alumnos que siguieron considerando más pertinente considerar las fuerzas y su equilibrio. Los modelos propuestos por los estudiantes se discutieron en el grupo y el maestro actuó como guía en la elaboración de argumentos. Se consideraron al final tres posibles modelos:

1) $Fr = mg$ - Derivado únicamente del equilibrio de fuerzas necesario para que se alcance una velocidad terminal constante

2) $v' = a - bv$ - Derivado de la consideración de la aceleración como razón de cambio; modelo basado principalmente en consideraciones algebraicas y con a la altura de la que inicia el movimiento.

$mv' = mg - Fr(v)$ - Derivado de la consideración de la fuerza resultante de la suma de la caída libre y la resistencia del aire

La primera sesión concluyó con la distribución por el maestro de una hoja de trabajo con actividades relacionadas con la construcción de la derivada implícita para llevarla a cabo parte en clase y parte como tarea. Ejemplos de actividades de esa hoja son:

1. Si sabes que y es una función de x definida implícitamente mediante la ecuación: $2x^4 + \exp(2x) + 5y^2 = 3$

a) Explica cuáles términos requieren de la regla de la cadena para encontrar la derivada de la ecuación.

b) Encuentra la derivada de y .

c) Encuentra el valor de y en el punto $(-1,1)$ y el valor de y' en el mismo punto. ¿Qué significa el valor de y' en ese punto en relación con la ecuación dada?

2. Si sabes que y es una función de x definida implícitamente mediante la ecuación:

$$x^3 + \exp y - xy - \cos(xy) = 0$$

a) Explica cuáles términos requieren de la regla de la cadena para encontrar la derivada de la ecuación.

b) Encuentra la derivada de y .

3. a) Encuentra la primera y la segunda derivada de y para $x^3 + y^4 = a^2$.

b) Usa la información que encontraste para describir el comportamiento de la función $y(x)$.

c) Calcula la derivada de y en el punto $(-1,1)$ ¿Qué significa esa derivada en términos de la ecuación del inciso (a)?

4. a) Si sabes que $v = v(t)$ y que $v' = av$, calcula la derivada de v' . Exprésala únicamente en términos de v .

b) Usa la información de v y v' para analizar el comportamiento de la función $v(t)$ ¿Qué sucede cuando $v'=0$?

c) ¿Para qué valores de t $v'=1$? ¿Para qué valores de t , $v' = -1$? Responde las mismas preguntas para distintos valores de v . Interpreta los resultados en términos del comportamiento de $v(t)$.

d) Utiliza estos resultados para dibujar la gráfica de la función $v(t)$.

En la segunda sesión se retomó el trabajo sobre el problema de modelación. Los equipos que trabajaron con el primer modelo encontraron la ecuación $vt = mg/b$, en la que b se consideró la constante de la fuerza de fricción $Fr = bv$, aunque discutieron también la posibilidad de que la fuerza de fricción fuera proporcional a la velocidad al cuadrado. Pero, al no poder responder algunas de las preguntas de otros equipos respecto a la variación de la velocidad, optaron por utilizar uno de los otros modelos propuestos.

En un equipo que trabajaba con el segundo modelo surgió una idea importante. Al tratar de verificar qué predecía modelo y dado que no podían resolver la ecuación, los alumnos intentaron encontrar una función v que al sustituirla en la ecuación satisficiera la igualdad. Al no lograrlo, decidieron analizar la ecuación gráficamente y dibujaron una gráfica de $v'(t)$ vs $v(t)$. Estos estudiantes encontraron la representación de la ecuación diferencial en el plano fase que no habían estudiado antes. Los alumnos determinaron que esa variación era lineal y que la velocidad determinada por su modelo era positiva si la velocidad era menor que a/b y negativa si v era mayor que a/b .

Los alumnos interpretaron este resultado como *"la velocidad aumenta primero, pero después de ese punto decrece porque la derivada es negativa"* pero surgió una duda importante *"¿cómo encontramos la velocidad terminal?... creo que a esta mal por las unidades"*. El maestro manifestó su interés por el método y sugirió que notaran que la función v es la variable dependiente del problema y que analizaran la derivada con mayor cuidado.

En la discusión en grupo se presentó esta herramienta de análisis al resto del grupo. Los estudiantes de otro equipo que trabajaban con el tercer modelo consideraron que los modelos 2 y 3 eran semejantes matemáticamente, aunque el 3 contenía más información en términos físicos. Al tratar de resolver la duda de sus compañeros uno de ellos comentó, *"...en esa gráfica como la derivada depende de v , pero no de t , si la derivada ahí es cero será cero para esa v en cualquier tiempo"* y otro de sus compañeros completó *"Lo que dice es que, si la velocidad ahí es cero para toda t , es la velocidad terminal... y si la aceleración inicial es mayor que ese número, la derivada se va a hacer cada vez menor hasta llegar a la velocidad terminal"*. Después de discutir con el maestro, la mayoría de los alumnos entendieron el razonamiento de sus compañeros. Este resultado muestra que los alumnos descubrieron por sí mismos una herramienta de análisis útil en el estudio de las ecuaciones diferenciales. El poder predecir algo sobre el movimiento con ella despertó el interés de muchos estudiantes. El maestro sugirió analizar sus ecuaciones con la primera y segunda derivadas y detectó que los alumnos no usaban la derivada implícita así que entregó la primera hoja de trabajo.

Una vez analizado el modelo la mayoría de los equipos regresó a interpretar el significado de la constante b en términos del problema. En general los alumnos consideraron que *"Entre mayor sea el área del paracaídas, la velocidad disminuirá más; es decir b debe ser proporcional al área A "* y que *"...si lo hiciéramos en agua sería distinto, a lo mejor no se hundiría"* o *"Si lo hiciéramos en el Everest caería más rápido porque la densidad del aire es menor"*. Otro resultado interesante fue que los estudiantes no tuvieron ninguna dificultad en comprender que la solución de una ecuación diferencial es una función o una familia de funciones. El contexto del problema lo hizo evidente. Los alumnos experimentaron dejando caer paracaídas desde una ventana del tercer piso de la universidad. Otros compañeros tomaron el tiempo en el que pasó el paracaídas por la ventana del primer piso y parados sobre una banca del patio. Con estos datos comprobaron que la velocidad era la constante y calcularon la velocidad terminal.

Los alumnos interpretaron este resultado como *"la velocidad aumenta primero, pero después de ese punto decrece porque la derivada es negativa"* pero *"¿cómo encontramos la velocidad terminal?... creo que a esta mal por las unidades"*. El maestro manifestó su interés por el método y sugirió que notaran que la función v es la variable dependiente del problema y que analizaran la derivada con mayor cuidado.

En la discusión en grupo se presentó esta herramienta de análisis al resto del grupo. Los estudiantes de otro equipo que trabajaban con el tercer modelo consideraron que los modelos 2 y 3 eran semejantes matemáticamente, aunque el 3 contenía más información en términos físicos. Al tratar de resolver la duda de sus compañeros uno de ellos comentó, *"...en esa gráfica como la derivada depende de v , pero no de t , si la derivada ahí es cero será cero para esa v en cualquier tiempo"* y otro de sus compañeros completó *"Lo que dice es que, si la velocidad ahí es cero para toda t , es la velocidad terminal... y si la aceleración inicial es mayor que ese número, la derivada se va a hacer cada vez menor hasta llegar a la velocidad terminal"*. Después de discutir con el maestro, la mayoría de los alumnos entendieron el razonamiento de sus compañeros. Este resultado muestra que los alumnos descubrieron por sí mismos una herramienta de análisis útil en el estudio de las ecuaciones diferenciales. El poder predecir algo

sobre el movimiento con ella despertó el interés de muchos estudiantes. El maestro sugirió analizar sus ecuaciones con la primera y segunda derivadas y detectó que los alumnos no usaban la derivada implícita así que regresó a discutir la primera hoja de trabajo con todo el grupo e introdujo la segunda hoja de trabajo en la que las actividades consistían en dibujar la gráfica de varias ecuaciones diferenciales sencillas en las que aparecía la variable independiente explícitamente utilizando su conocimiento sobre la derivada y dibujar la gráfica de otras ecuaciones diferenciales en las que la variable independiente no aparecía explícitamente y dibujar una gráfica como la que presentaron sus compañeros y a partir de ella dibujar la gráfica de la variable dependiente contra la independiente. Los alumnos mostraron dificultades, pero lograron hacer las gráficas y explicarlas verbalmente. El maestro pidió enseguida que los alumnos utilizaran estos métodos con la ecuación diferencial del modelo.

Una vez analizado el modelo la mayoría de los equipos regresó a interpretar el significado de la constante b en términos del problema. En general los alumnos consideraron que *"Entre mayor sea el área del paracaídas, la velocidad disminuirá más; es decir b debe ser proporcional al área A "* y que *"...si lo hiciéramos en agua sería distinto, a lo mejor no se hundiría"* o *"Si lo hiciéramos en el Everest caería más rápido porque la densidad del aire es menor"*. Otro resultado interesante fue que los estudiantes no tuvieron ninguna dificultad en comprender que la solución de una ecuación diferencial es una función o una familia de funciones. El contexto del problema lo hizo evidente. En los días posteriores, los alumnos experimentaron dejando caer muñecos de plástico con distintos paracaídas diseñados en papel o en tela desde una ventana del tercer piso de la universidad y tomando el tiempo en que observaban que caía con velocidad constante. Otros compañeros tomaron el tiempo en el que pasó el paracaídas por la ventana del primer piso y parados sobre una banca del patio. Con estos datos comprobaron que la velocidad era la constante y calcularon la velocidad terminal.

La experiencia resultó exitosa. El interés de los estudiantes se mantuvo durante las dos sesiones; su interés los condujo incluso a experimentar durante varios días para asegurarse de que su procedimiento era correcto y para obtener mejores datos. Surgieron, en el transcurso de la experiencia, dos herramientas conceptuales sin intervención del profesor: la ecuación diferencial como modelo del problema y el plano fase. La segunda apareció como herramienta de análisis y de evaluación del potencial de predicción del modelo matemático propuesto sin necesidad de resolver la ecuación. Los estudiantes construyeron las nociones de ecuación diferencial y de su solución y lograron considerar a la derivada implícita como un ejemplo de la derivada de composición de funciones. Los alumnos lograron interrelacionar el plano fase y la gráfica velocidad tiempo, así como interpretar una en relación con la otra. A partir del análisis gráfico surgió la necesidad de buscar métodos de solución de ecuaciones diferenciales simples. La determinación adecuada de la relación entre la densidad del aire, el área del paracaídas y la variación de la velocidad fue un logro importante. Los distintos equipos presentaron un reporte de su trabajo en el que explicaron verbal y matemáticamente sus razonamientos y en el que utilizaron distintos medios de presentación como el escrito y el audiovisual.

Los alumnos mostraron evidencia de aprendizaje a lo largo del proyecto y en su comunicación. En una entrevista posterior con cada uno de los equipos se encontró que en dos de ellos los

alumnos mostraron evidencias de haber construido el conocimiento deseado y de haber construido una relación sólida entre la derivada implícita como Objeto y como un uso de la regla de la cadena y la solución a las ecuaciones diferenciales simples. Los demás mostraron una mejor comprensión de la derivada implícita como Proceso y la construcción de la relación de la derivada implícita con la solución de las ecuaciones diferenciales estudiadas.

Conclusión

Las evidencias encontradas en estos estudios muestran que el trabajo en los problemas de modelación contribuyó al aprendizaje de nuevos conceptos por parte de los alumnos. Es necesario aclarar que, si bien el trabajo en la modelación permitió que la necesidad de nuevos conceptos surgiera, su aprendizaje a profundidad y la construcción de relaciones con otros conceptos aprendidos en otro contexto o en el mismo curso, había sido más difícil si se hubiera utilizado únicamente el trabajo en los modelos. El trabajo en las actividades conceptuales diseñadas con la descomposición genética y su introducción en los momentos adecuados por parte de los maestros jugó un papel fundamental.

Es cierto que el uso de los modelos plantea dificultades importantes fuertes en el aula. Por una parte, está la complejidad del problema de modelación que debe elegirse de acuerdo a lo que se desea enseñar, el nivel matemático de los alumnos y su interés en el tema asegurando que se satisfacen los principios propuestos en Modelos y Modelación y, por otra parte, las formas de enseñar requieren ajustarse a las necesidades del problema de modelación. Decisiones como, por ejemplo, hasta dónde llegar en la modelación de una situación deben planearse de antemano, pero es importante considerar que, en muchas ocasiones, los alumnos van más allá de lo que el profesor espera y lo importante no es encontrar un modelo muy preciso o muy detallado, sino mostrarles que los problemas en los que se necesita utilizar matemática pueden surgir de muchos contextos, se pueden resolver de distintas formas y no siempre tienen una solución exacta. Los ejemplos mostrados en este artículo y en otros publicados en la literatura, es que los alumnos se acercan al problema, determinan variables, trabajan con el modelo reflexionando sobre lo que hacen y cambian, agregan o simplifican el modelo a la luz de lo que pueden hacer y de las preguntas a responder. Los procesos de comparación de modelos propuestos apoyan el desarrollo del pensamiento crítico y de las habilidades de argumentación. La comparación de soluciones encontradas al utilizar distintos modelos introduce, además, la idea fundamental de que, al usar matemáticas para resolver problemas reales, es necesario tomar decisiones y elegir la más apropiada en el contexto en el que surgió el problema. Pero lo central es recalcar que el uso de las matemáticas permite encontrar soluciones, compararlas y tomar las decisiones pertinentes para encontrar la respuesta a la pregunta de la cual surgió el modelo. En ese proceso de reflexión y de toma de decisiones los alumnos aprenden y los maestros, al trabajar junto con ellos, tienen la oportunidad de escucharlos, detectar sus dificultades y sus inquietudes y moldear su enseñanza introduciendo actividades conceptuales basadas en una descomposición genética tomando estos aspectos en consideración.

La importancia de la selección del problema a estudiar no debe dejar de enfatizarse. Los problemas a modelar no deben ser muy complejos, tampoco demasiado fáciles. Las sugerencias del trabajo de Lesh y sus colaboradores (2000) dan al maestro una buena guía para determinar si un problema es adecuado para el nivel de la clase en la que se pretende emplear. Diseñar estas situaciones y la forma de emplearlas en clase puede ser un obstáculo para el maestro, pero si los maestros utilizan el trabajo colaborativo con otros maestros, esta tarea es motivadora y eficiente. Los resultados que se obtienen, aun cuando se introduzcan este tipo de problemas ocasionalmente en la clase, hacen que el trabajo valga la pena.

Referencias

- Arnon, I., Cottrill, J. Dubinsky, E., Oktaç, A. Roa, S. Trigueros, M. & Weller, K. (2014) *APOS Theory: A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. Springer. New York.
- Busse, A. (2011). Upper secondary students' handling of real-world contexts. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo-Ferri, & G. Stillman, G. (Eds.) *Trends in teaching and learning of mathematical modelling*. ICTMA 14 (pp 37–46). New York, NY: Springer Science + Media, LLC.
- Dubinsky, E., & McDonald, M. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. In *The teaching and learning of mathematics at university level: An international commission on mathematical instruction study*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Kaiser, G. & Maaß, K. (2006). *Modelling in Lower Secondary Mathematics Classrooms – Problems and Opportunities*. W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education*. New York, Springer Academics (former Kluwer Academics).
- Carlson, M., Larsen, S., & Lesh, R. (2003). Integrating a model and modeling perspective with existing research and practice. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.) *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics teaching, learning, and problem solving* (pp. 465–478). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Camacho, M., Perdomo, J., and Santos, M. (2012). Procesos conceptuales y cognitivos en la introducción de las ecuaciones diferenciales ordinarias vía la resolución de problemas. *Enseñanza de las ciencias*. 30.2, 9 – 32.
- English, L. D. Lesh, R. & Fennewald, T. (2008) Methodologies for investigating relationships between concept development and the development of problem-solving abilities. In Santos, Manuel & Shimizu, Yoshi (Eds.) *Proceedings of the 11th International Congress on Mathematical Education*, Monterrey, Mexico.
- Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A., & Post, T. (2000). Principles for developing thought-revealing activities for students and teachers. In A. Kelly, & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* pp. 591–646. New Jersey: Lawrence Erlbaum.

- Lesh, R. & Doerr, H. M. (2003) Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning and problem solving. En *Beyond constructivism: Models and modelling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching*. NewHampshire: Lawrence Erlbaum Associates.
- Lesh, R., & English, L. (2005). Trends in the evolution of the Models and Modeling perspectives on mathematical learning and problem solving. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*. 37(6), pp. 487- 489.
- Trigueros, M. (2009) El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas Innovación Educativa, 9, pp. 75-87 Instituto Politécnico Nacional DF, México.
- Trigueros, M. (2014). Vínculo entre la modelación y el uso de representaciones en la comprensión de los conceptos de ecuación diferencial de primer orden y de solución. *Educación Matemática*. Número especial 25 Años, pp. 207-226.
- Trigueros, M., & Bianchini, L. B. (2016). Learning Linear Transformations using models. First conference of international network for didactic research in university mathematics. France: Montpellier. (hal-01337884) <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01337884/>.
- Trigueros, M. & Oktaç, A. (2019). Task design in APOS Theory. *AIEM - Avances de Investigación en Educación Matemática*, 15, 43 – 55

EL 'NETWORKING' DE TEORÍAS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA: ¿QUÉ SIGNIFICA Y QUÉ PRODUCE?

Michèle Artigue

michele.artigue@univ-paris-diderot.fr

Université de Paris, Francia

Resumen

En los quince últimos años, la diversidad teórica creciente en educación matemática ha generado, especialmente en el contexto europeo, el desarrollo de trabajos enfocados en la búsqueda de posibles conexiones entre teorías, para facilitar la comunicación entre investigadores y la capitalización de los resultados de la investigación. Es una empresa colectiva hoy conocida como el 'networking de teorías'. En esta conferencia, después de recordar elementos del contexto, presentaré dos herramientas conceptuales que me parecen particularmente útiles para este tipo de trabajo: la escala de 'networking' y la noción de praxeología de investigación. A continuación, mostraré, a través de varios ejemplos, en qué consiste prácticamente el trabajo de 'networking de teorías' y qué tipos de resultados produce.

Palabras clave: educación matemática, 'networking' de teorías, escala de networking, praxeología de investigación.

Introducción

En los quince últimos años, la diversidad teórica creciente en educación matemática ha generado, especialmente en el contexto europeo, el desarrollo de trabajos enfocados en la búsqueda de posibles conexiones entre teorías, para facilitar la comunicación entre investigadores y la capitalización de los resultados de las investigaciones. Esto se refleja, por ejemplo, en las actividades del grupo de trabajo sobre teorías creado en la conferencia CERME de 2005 (Kidron et al. 2018), en el trabajo del grupo de investigadores dicho "grupo de Bremen" creado al mismo tiempo (Bikner-Ashbahr & Prediger 2014), o en proyectos europeos como los proyectos TELMA y ReMath sobre el aprendizaje matemático con tecnologías digitales (Artigue 2009), (Kynigos & Lagrange 2014). Así nació la expresión "networking de teorías" a la que se dedica esta ponencia. Comenzaré destacando la diversidad de lo que se entiende por teoría en educación matemática y distinguiendo entre teoría y marco teórico. A continuación, presentaré dos herramientas conceptuales que considero importantes para pensar y trabajar sobre las conexiones entre teorías. Se trata, por una parte, de la escala de estrategias de "networking" (Bikner-Ashbahr & Prediger 2008) y, por otra, de la noción de praxeología de investigación, que extiende a las prácticas de investigación la noción de praxeología, fundamental en la teoría antropológica de la didáctica (TAD) (Artigue, Bosch & Gascón, 2011). Luego, utilizando unos ejemplos, mostraré en qué consiste prácticamente el trabajo de "networking" de teorías y algunas de sus aportaciones, antes de concluir con una reflexión más general sobre la diversidad teórica en el campo, y cómo hacer de ella una fuente de progreso y no un obstáculo.

Teorías y marcos teóricos

En educación matemática, la palabra "teoría" denota una diversidad de objetos, desde construcciones muy locales hasta sistemas estructurados de conceptos; algunas teorías se desarrollaron dentro del campo mismo, otras tienen su origen en otros campos de las ciencias humanas, algunas se han desarrollado a lo largo de décadas, mientras que otras han surgido bastante recientemente. Pero incluso si su nombre está asociado a un investigador en particular, han tomado el estatus de teorías porque se han convertido en obras colectivas.

En este texto, distinguiré entre teoría y marco teórico. Usaré el término marco teórico para denotar el ensamblaje a menudo complejo de teorías y conceptos teóricos que el investigador desarrolla para responder a preguntas específicas. Ciertamente, el cuestionamiento se inspira en una visión teórica, más o menos explícita, pero la mayoría de las veces, el ensamblaje constituido no se reduce a una sola teoría. Con los estudiantes de doctorado, a menudo utilizo el ejemplo de la tesis de Brigitte Grugeon (1995), una tesis pionera en el estudio de las transiciones institucionales. La TAD es la teoría principal, fundamentando la problemática de la tesis y las hipótesis asociadas; también apoya el análisis institucional de la transición, a través de programas, documentos curriculares y herramientas de evaluación. Pero está combinada con la teoría de las situaciones didácticas (TDS) que fundamenta el trabajo de ingeniería didáctica de la tesis y la teoría semiótica de Duval ampliamente utilizada por los didactas franceses. Además, hay elementos teóricos más exógenos pero que sería difícil no tener en cuenta en esta investigación, porque permiten expresar los conocimientos producidos por la investigación didáctica en álgebra, como la distinción entre sentido y denotación de las expresiones algebraicas debida a Frege, o la distinción entre concepción estructural y procedural de las expresiones algebraicas debida a Sfard. Estos conceptos y teoría se utilizan para construir la herramienta multidimensional de análisis de la competencia algebraica y la herramienta de diagnóstico, que son contribuciones clave de esta tesis. Este es sólo un ejemplo, pero muestra claramente, nos parece, el interés de distinguir entre teoría y marco teórico. Este ejemplo también muestra que, en el trabajo del investigador, las combinaciones teóricas son frecuentes, aunque la cuestión de la legitimidad de estas combinaciones, la forma en que respetan o transforman las construcciones existentes, no se plantee necesariamente y se trabaje seriamente. Este es el trabajo al que se dedica el "networking" de teorías. Para él, se han desarrollado herramientas específicas. En la siguiente sección, me centraré en dos de ellas.

Dos construcciones al servicio del "networking" de teorías

Estas dos construcciones son la escala de estrategias de "networking" y el concepto de praxeología de investigación.

La escala de estrategias de "networking"

La escala de estrategias de "networking" tiene por objeto poner de relieve la diversidad de formas que puede adoptar la búsqueda de conexiones entre teorías. Las organiza entre dos posiciones extremas que corresponden respectivamente a la actitud de ignorar otras teorías y al deseo de unificación global. Me parece importante señalar que, desde el principio, para mí como para los investigadores con los que he colaborado en este trabajo, la búsqueda de una

teoría unificadora no fue el objetivo perseguido. Asumimos la necesaria diversidad teórica del campo y rechazamos ambos extremos.

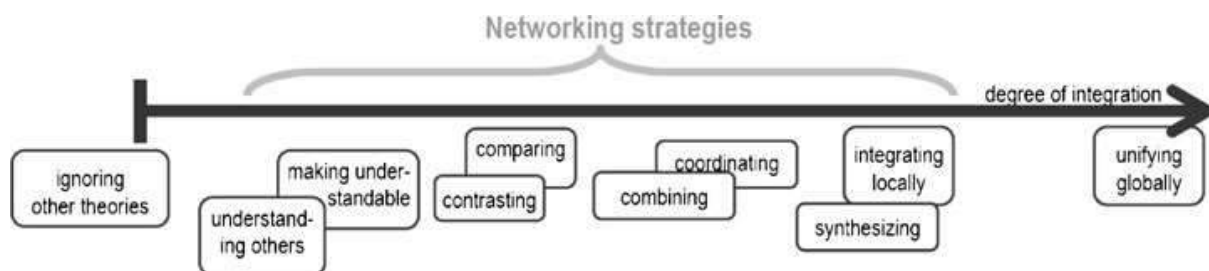


Figure 1. Escala de estrategias de "networking" (Bikner-Ahsbahr and Prediger 2008, p. 492)

Estas estrategias se organizan en parejas, como entender a los demás o hacerlos comprensibles, comparar o contrastar, combinar o coordinar, integrar localmente y sintetizar, y su significado exacto se especifica en el capítulo citado (ibídem, pp. 492-497). Por ejemplo, se especifica que la coordinación significa que "a conceptual framework is built by well fitting elements from different theories", pues implica la complementariedad de las teorías comprometidas, mientras que la combinación significa que "the theoretical approaches are only juxtaposed according to a specific aspect". Por lo tanto, esta estrategia puede incluir teorías en las que ciertos principios básicos están en conflicto. Además, como demuestran estudios como los del Grupo de Bremen, los investigadores que buscan establecer conexiones entre teorías generalmente combinan varias estrategias.

El concepto de praxeología de investigación

El concepto de praxeología de la investigación surgió después del de la escala de "networking". De hecho, su primera presentación tuvo lugar en el tercer congreso de la TAD (Artigue, Bosch & Gascón 2011). Luego lo utilicé con Marianna Bosch para reflexionar retrospectivamente sobre el trabajo realizado dentro del proyecto ReMath y del grupo de Bremen (Artigue & Bosch 2014) y más recientemente lo reelaboré para el estudio del desarrollo de la aproximación documental de la didáctica (Artigue 2019). En este texto, me baso en esta última elaboración.

Este concepto extiende a las prácticas de investigación la noción de praxeología, central en la TAD. Un principio básico de la TAD es que cualquier práctica humana puede ser modelada en términos de praxeología, por lo que esta extensión no es sorprendente. Permite una aproximación pragmática y dinámica a las teorías, que busca clarificar cómo "informan y dan forma al trabajo de investigación práctica y, a la inversa, cómo emergen progresivamente de ella e integran sus resultados" (Artigue & Bosch 2014, p. 251, traducción del autor). Una visión pragmática de las teorías, cualesquiera que sean las herramientas utilizadas para apoyarla -no hay razón para suponer que sólo la TAD pueda desempeñar este papel- me parece cada vez más necesaria para abordar productivamente las relaciones y conexiones entre teorías. Para el investigador, las teorías son ante todo herramientas que responden a sus necesidades. Establecer conexiones requiere el acceso a sus razones de ser, para entender sus funcionalidades, y esto es muy difícil si son consideradas en sí mismas independientemente de las prácticas que alimentan y que las alimentan.

En la TAD, la praxeología se define como un cuádruple que consta de dos bloques: un bloque práctico y un bloque teórico. En el nivel más simple, el de las praxeologías puntuales, el bloque práctico se compone de un tipo de tarea y de una técnica para llevarla a cabo. El bloque teórico es, por su parte, un bloque discursivo que consiste en un discurso que describe, explica y justifica la técnica, llamado tecnología, y un discurso teórico de alcance más general, más o menos elaborado, fundando y justificando a su vez el discurso tecnológico. A priori, el concepto de praxeología de investigación se aplica a todo tipo de tareas que el investigador debe realizar. Sin embargo, me centraré aquí en una forma de praxeología emblemática de la investigación, las praxeologías asociadas a la búsqueda de respuestas a preguntas sobre procesos de enseñanza y aprendizaje, o más generalmente sobre el funcionamiento de los sistemas didácticos.

Estas praxeologías surgen a través de su bloque práctico, pero las preguntas y su formulación están influenciadas por el teórico ya existente en el entorno del investigador. Desde el principio, por lo tanto, los bloques prácticos y teóricos de las praxeologías están en interacción dialéctica, y esto es fundamental para entenderlas. En el ejemplo citado anteriormente, por ejemplo, la pregunta inicial es el deseo de comprender por qué los alumnos del liceo profesional que, por sus excelentes resultados, son enviados a cursos de adaptación permitiendo su integración en el liceo general, se encuentran unos meses más tarde fracasando en matemáticas y, en particular, en álgebra. Sin embargo, la reformulación de la pregunta en cuanto a la existencia posible de discontinuidades más o menos visibles y mal tenidas en cuenta entre las relaciones institucionales con el álgebra en los dos tipos de liceo, es el resultado directo de la reformulación de la pregunta inicial dentro de la TAD.

En su forma más simple, estas praxeologías (dichas puntuales) se componen a priori de una pregunta, de una técnica utilizada para responderla, de un discurso metodológico que explica y justifica la técnica, y de una teoría subyacente a este discurso. La realidad es más compleja. Incluso en el caso de una praxeología puntual, el conjunto teórico no se reduce generalmente a una sola teoría, por ejemplo, porque tiene en cuenta, como en el ejemplo anterior, el estado de la investigación en el campo de estudio, lo que lleva a la incorporación de varias construcciones conceptuales desarrolladas dentro de otros enfoques teóricos. Además, el estudio de una cuestión implica generalmente varias praxeologías que comparten, al menos parcialmente, el mismo discurso teórico. Un conjunto coherente de praxeologías debe ser desarrollado y, en el curso de una o más investigaciones, éstas se organizan en praxeologías locales o incluso regionales, en el sentido de la TAD. Este desarrollo y estructuración no pueden ser realmente anticipados. De los resultados de la investigación surgen nuevas preguntas; nuevos elementos integran el discurso tecnológico: distinciones, categorizaciones, fenómenos didácticos. Si se comparten razonablemente, enriquecerán las teorías.

Ejemplos de actividades de “networking” y contribuciones

En el espacio limitado de esta contribución, me limitaré a dos ejemplos de actividades en las que he participado directamente. Ambas son actividades colectivas de “networking” en las que participaron investigadores de diferentes culturas. Sin embargo, esta actividad también puede llevarse a cabo a nivel individual. Este es el caso, por ejemplo, de mi reciente estudio sobre la aproximación documental de la didáctica mencionada anteriormente.

Dar sentido a interpretaciones discordantes de un mismo episodio

El primer ejemplo es una de las actividades de "networking" que se llevaron a cabo dentro del grupo de Bremen. El punto de partida del trabajo de este grupo, en el que participaron investigadores de cinco países (Alemania, España, Francia, Israel e Italia), fue un vídeo propuesto por Ferdinando Arzarello. Había sido filmado en una clase de 10º grado durante una sesión destinada a introducir funciones exponenciales, basada en tres archivos Cabri-géomètre propuestos sucesivamente a los alumnos.

El vídeo mostraba el trabajo de investigación autónomo de dos alumnos, en particular sus discursos y gestos, frente a la pantalla del ordenador. El trabajo colectivo movilizó cinco teorías, cada par de investigadores del mismo país representando una teoría, respectivamente, utilizando el orden alfabético de los países: IDS (Interest-Dense Situations, TAD, TSD, AiC (Abstraction in Context) y APC (Action, Production, Communication). Como muestra el libro resultante, a lo largo de los años se han movilizadas todas las estrategias de la escala de "networking", excepto las dos extremas, por supuesto. El trabajo que aquí presento ha surgido de la visión colectiva de un vídeo corto que complementaba al que inicialmente se estudió (Bikner-Ahsbahr, Artigue, Haspekian 2014). En este vídeo, vemos al profesor interactuando con los dos alumnos, sobre el tercer archivo Cabri que muestra una función exponencial y la recta que une los puntos de la curva de abscisas x y $x+\Delta x$, siendo el paso Δx modificable por un deslizador y el punto P de abscisa x móvil sobre la curva. Les pregunta qué pasa cuando x es muy grande.

Perceptualmente, como la función tiende al infinito y tiene una dirección asintótica vertical, observamos una curva cada vez más vertical que tiende a confundirse con la secante dibujada que, ella misma, parece más y más vertical. Esto es lo que uno de los estudiantes expresa verbalmente y con gestos, pero no corresponde a lo que el docente espera. Además, el docente interpreta su respuesta como señal que el alumno piensa que la curva tiene una asíntota vertical. Sigue un intercambio de unos minutos que dará lugar a interpretaciones contradictorias. Las investigadoras francesas identifican un efecto Topacio, la investigadora alemana un "funnel pattern", y los investigadores italianos presentan este episodio como un ejemplo de "juego semiótico".

Las dos primeras interpretaciones, aunque se refieran a conceptos diferentes, connotan negativamente este episodio. En ambos casos, aunque al final del episodio el profesor obtenga la respuesta esperada, es forzando los intercambios hasta el punto de que el acuerdo alcanzado al final ya no puede ser interpretado como señal del conocimiento esperado. En el tercer caso, por el contrario, el episodio se connota positivamente como ejemplo de una técnica didáctica en la que el docente, basándose en los gestos y las verbalizaciones de los alumnos, guía su evolución hacia una expresión matemática adecuada. Por lo tanto, esta discrepancia no era aceptable.

El trabajo impulsado por este episodio llevó a cuestionar las interpretaciones iniciales, pero también a cuestionar los tres conceptos mismos de efecto Topacio, de "funnel pattern" y de juego semiótico. Por ejemplo, demostró que la noción de efecto Topacio, denotando uno de las paradojas del contrato didáctico, probablemente se había naturalizado con demasiada

rapidez en la TSD, con criterios insuficientemente precisos, y que era necesario aclararla, lo que se hizo. El trabajo también mostró que tanto el efecto Topacio como el "funnel pattern" son construcciones que satisfacen necesidades similares: la necesidad de expresar como fenómeno didáctico un mismo hecho: una forma de interacción entre alumnos y docente que permite mantener la ficción que hubo aprendizaje cuando no lo hay. Sin embargo, responden a estas necesidades, siendo moldeados por las teorías de las que han surgido, respectivamente la TSD y el interaccionismo. Esto conduce a poner el énfasis en diferentes características de tales episodios: la desaparición gradual del valor epistémico de los intercambios para el efecto Topacio, la reducción gradual de la duración y del contenido de los intercambios y el aumento de su carga emocional para el "funnel pattern", características, de hecho, co-presentes y complementarias. Este análisis también llevó a una redefinición de la noción de juego semiótico, enfatizando características no satisfechas por este episodio. Finalmente, el estudio llevó a la conclusión de que, a pesar de las apariencias, este episodio no podía ser interpretado, ni como un efecto Topacio, ni como un "funnel pattern", ni como un juego semiótico.

El proyecto ReMath: capitalizando la diversidad de perspectivas instrumentales

El proyecto europeo ReMath se ha desarrollado en la continuidad del trabajo realizado dentro del equipo TELMA de la Red Europea de Excelencia "Kaleidoscope", con el objetivo de capitalizar el conocimiento adquirido a nivel europeo en el campo del "Technology Enhanced Learning".

En el caso de ReMath, más específicamente, se trataba de capitalizar el conocimiento adquirido sobre el potencial semiótico que ofrecen los artefactos digitales dinámicos (DDA) para el aprendizaje de las matemáticas. Para esto, el proyecto prevía el desarrollo de un marco teórico integrado por los seis equipos implicados en Francia, Grecia, Italia y el Reino Unido, y el desarrollo y experimentación de seis DDAs particularmente innovadores en términos de potencial semiótico. Los seis equipos implicados presentaban una gran diversidad teórica refiriéndose respectivamente a teorías como construccionismo, teoría de la actividad, TSD, TAD, y a una diversidad de aproximaciones semióticas: teoría de mediación semiótica, semiótica social, teoría semiótica de Duval, semiótica de Pierce.... El proyecto estudió cómo estas diversas inscripciones teóricas influían, metafóricamente u operativamente, en el diseño de los DDAs, cómo también condicionaban la visión de su potencial semiótico, los escenarios de uso desarrollados y su implementación.

Diferentes herramientas metodológicas apoyaron el estudio, en particular un sistema original de "experimentaciones cruzadas". Cada uno de los DDAs fué experimentado tanto por el equipo a cargo de su diseño como por otro equipo, de otro país y refiriéndose a otras teorías. Este sistema de experimentación cruzada, tal como la producción de los DDAs permitieron evaluar el papel exacto desempeñado por las diferentes perspectivas teóricas y establecer conexiones productivas entre ellas. No puedo entrar en más detalles refiriendo al lector a la síntesis propuesta en (Artigue & Mariotti 2014).

Ilustraré este trabajo de "networking" con el ejemplo de las cuestiones instrumentales. De hecho, el trabajo en ReMath pronto mostró que, a pesar de la diversidad de los enfoques teóricos de los diferentes equipos, todos eran sensibles a cuestiones instrumentales y

compartían una referencia común: la perspectiva instrumental desarrollada en ergonomía cognitiva por Rabardel y Vérillon (1995). Había consenso sobre la necesidad de distinguir entre un artefacto, por ejemplo, uno de los DDAs desarrollados, y el instrumento que podría llegar a ser para un alumno o una clase, a través de un proceso de génesis instrumental generalmente largo y complejo, que la enseñanza debía guiar. También nos acordábamos en que tales géneses instrumentales combinaban de manera dialéctica procesos de instrumentalización dirigidos hacia el artefacto y procesos de instrumentación que afectaban al alumno y a sus procesos cognitivos. Pero esta referencia común vivía incorporada en diferentes perspectivas teóricas en función de los equipos. El trabajo realizado mostró cómo esto afectaba al diseño de los DDAs y sus usos. Voy a ilustrarlo brevemente con un ejemplo. Nuestro equipo utilizaba una aproximación instrumental que integraba la perspectiva ergonómica de Rabardel y Verillon en la perspectiva institucional de la TAD. También utilizaba la TSD para el diseño de escenarios de enseñanza y la semiótica de Duval en términos de registros de representación. Esto se reflejó en el diseño del software Casyopée desarrollado por Jean-Baptiste Lagrange y también en los dos experimentos cruzados en los que participamos, en particular el del software Cruislet producido por los colegas griegos, desde una perspectiva construccionista.

La investigación demostró en particular que, en términos de diseño de artefactos, la visión construccionista del aprendizaje llevaba a poner un gran énfasis en la posibilidad ofrecida al usuario de desarrollar el artefacto y sus capacidades semióticas. Es decir que, en términos de génesis instrumental, se daba particular importancia a los procesos de instrumentalización. Esto se reflejaba en la noción de "half-baked" micromundo utilizada por los colegas griegos, y contrastaba con el diseño de Casyopée privilegiando la conexión dinámica entre representaciones institucionales usuales. Con respecto a los escenarios de uso, la investigación también destacó las profundas diferencias entre los escenarios basados en la TSD y el construccionismo, aunque ambas teorías comparten un fundamento socio-constructivista. Resultó evidente que la preocupación por optimizar el potencial adidáctico de las situaciones a través de la elección de variables didácticas, la atención a los procesos duales de devolución e institucionalización, en el corazón de la TSD, no se encontraba en los escenarios construccionistas donde se prestaba más atención a asegurar el potencial de las tareas y DDAs en términos de expresividad, sin tratar de controlar las trayectorias posibles.

Conclusiones y reflexiones

En esta contribución, traté de introducir al lector a lo que ahora se llama el "networking" de teorías, especificando el contexto de emergencia de esta terminología y de la investigación relacionada, introduciendo algunas de las herramientas diseñadas para apoyar este tipo de trabajo, e ilustrándolo con algunos ejemplos. No cabe duda que se trata solo de una iniciación al tema que no puede reflejar la riqueza del trabajo realizado en este dominio. Cada uno de estos estudios nos ayuda a establecer conexiones entre teorías y discursos, a luchar contra la tendencia a la fragmentación de nuestro campo de estudio. Al hacerlo, nos ayuda a capitalizar mejor los resultados de la investigación. Pero, este trabajo también nos lleva a reexaminar las teorías que nos son familiares, sus coherencias fundamentales, a comprender mejor sus fortalezas y limitaciones. Ciertamente, cada uno de nosotros en su actividad investigadora se enfrenta a estas cuestiones y las gestiona de forma más o menos satisfactoria, pero quiero

subrayar en esta conclusión lo que añade el hecho de llevar a cabo este tipo de trabajo dentro de colectivos de culturas mezcladas. Porque el trabajo sobre objetos comunes, con metodologías adaptadas, de investigadores de diferentes culturas permite crear "medios", en el sentido de la TSD, mucho más ricos y reactivos que los que se puede realizar en empresas personales o entre investigadores que comparten la misma cultura.

Referencias

- Artigue, M. (Ed.) (2009). Connecting Approaches to Technology Enhanced Learning in Mathematics: The TELMA Experience. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 14(3).
- Artigue, M. (2019). Reflecting on a Theoretical Approach from a Networking Perspective: The Case of the Documentational Approach to Didactics. In L. Trouche, G. Gueudet, & B. Pepin (2019). *The 'Resource' Approach to Mathematics Education* (pp. 89-120). New-York: Springer.
- Artigue, M. & Bosch, M. (2014). Reflection on Networking through the praxeological lens. In, A. Bikner-Ahsbahr & S. Prediger (Eds.), *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education* (pp. 249-266). New York: Springer.
- Artigue, M., Bosch, M., & Gascón, J. (2011). La TAD face au problème de l'interaction entre cadres théoriques en didactique des mathématiques. In M. Bosch et al. (Eds.), *Un panorama de la TAD. Actes du troisième congrès de la TAD* (pp. 33-56). Barcelona: Centre de Recerca Matemàtica.
- Artigue, M., & Mariotti, M.A. (2014). Networking theoretical frames: the ReMath enterprise. *Educational Studies in Mathematics*, 85(3), 329-356.
- Bikner-Ahsbahr, A., Artigue, M., & Haspekian, M. (2014). Topaze effect: A case study in Networking of IDS and TDS. In, A. Bikner-Ahsbahr & S. Prediger (Eds.), *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education* (pp. 201-221). New York: Springer.
- Bikner-Ahsbahr, A., & Prediger, S. (2008). Networking of Theories – An Approach for Exploiting the Diversity of Theoretical Approaches. In B. Sriraman & L. English (Eds.), *Theories in Mathematics Education* (pp. 483-506). New York: Springer.
- Bikner-Ahsbahr, A., & Prediger, S. (Eds.) (2014). *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education* (pp. 201-221). New York : Springer.
- Grugeon, B. (1995). *Etude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves à l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement : BEP et Première G*. Doctoral thesis. Université Paris Diderot – Paris 7.
- Kidron, I., Bosch, M., Monaghan, J., & Palmér, H. (2018). Theoretical perspectives and approaches in mathematics education research. In T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger & K. Ruthven (Eds.), *Developing research in mathematics education - twenty years of communication, cooperation and collaboration in Europe* (pp. 254-268). London and New York: Routledge.

- Kynigos, C., & Lagrange, J.-B. (Eds.) (2014). The ReMath enterprise. *Educational Studies in Mathematics*, 85(3).
- Vérillon P. & Rabardel P. (1995). Cognition and artifacts: a contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education*, 10/1, 77-101.

CONFERENCIAS PARALELAS

INDAGAR, CREAR Y RESOLVER PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS

Uldarico Malaspina Jurado

umalasp@pucp.edu.pe

Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú

Resumen

En la formación de estudiantes y de profesores, es primordial el estímulo del pensamiento matemático, más allá del manejo adecuado de algoritmos y de procedimientos. En esta perspectiva, es fundamental no solo aprender a resolver problemas, sino aprender mediante la resolución de problemas y, para ello, integrar la competencia de resolver problemas con la indagación y la creación de problemas. Se presentan experiencias didácticas que muestran la estrecha relación entre indagar, crear y resolver problemas de matemáticas, como parte de los procesos de aprendizaje y de estímulo del pensamiento matemático. Se han experimentado secuencias con estudiantes de primaria, con profesores en formación y con profesores en ejercicio. Cabe destacar los aspectos emocionales que se manifiestan en los estudiantes; y en los profesores, las oportunidades de hacer reflexiones didácticas, así como de aclarar y profundizar contenidos matemáticos.

Palabras clave: *Pensamiento matemático, indagación, creación de problemas, resolución de problemas,*

Introducción

En el documento oficial vigente del Ministerio de Educación del Perú, Currículo Nacional de la Educación Básica (2017), se destaca el desarrollo de veinte y nueve competencias de los estudiantes, siendo cuatro de ellas directamente vinculadas con el aprendizaje de las matemáticas: Competencia 23: Resuelve problemas de cantidad. (p.133); Competencia 24: Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio. (p.136); Competencia 25: Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre. (p.141); y Competencia 26: Resuelve problemas de forma, movimiento y localización. (p.144). Es evidente el énfasis en la resolución de problemas, lo cual ocurre también en otros países, entre los que destaca Singapur (Liljedahl, Santos-Trigo, Malaspina, & Bruder, 2016). Considero fundamental potenciar este enfoque, articulando fuertemente la resolución de problemas con la indagación y con la creación de problemas, por su presencia en el pensamiento científico y en la forma en que avanza el desarrollo de la ciencia y en particular de las matemáticas.

En el Currículo Nacional también se considera la indagación en la competencia 20: Indaga mediante métodos científicos para construir sus conocimientos. (p. 120); sin embargo, la indagación aparece más ligada a las ciencias naturales, no a la matemática. En cuanto a la creación de problemas, no hay una mención específica al explicitar las capacidades asociadas

a las competencias mencionadas.

En los siguientes apartados, presentaré algunos planteamientos sobre la resolución de problemas, la indagación en el aprendizaje de las matemáticas y la creación de problemas de matemáticas. Luego describiré algunas experiencias didácticas, tanto con estudiantes, como con profesores, en las que se muestra la interrelación de estos enfoques.

Resolución de problemas

Son abundantes las investigaciones y experiencias didácticas relacionadas con la resolución de problemas. Una muestra de esto se encuentra en la Liljedahl y Santos Trigo (2019), que reúne una selección de artículos que fueron presentados en el ICME-13, en el 2016, en Hamburgo. Ciertamente, uno de los trabajos pioneros sobre resolución de problemas es el de Polya (1945), con sus ya muy conocidas cuatro fases para la resolución de problemas. Cabe destacar su cuarta fase (looking back), en la cual abre pistas para la creación de nuevos problemas, al proponer el examen de la solución, del resultado y del método usado, pensando en su uso para otro problema.

Al reflexionar sobre resolución de problemas en la educación, un aspecto fundamental a destacar, es que es importante aprender a resolver problemas de matemáticas, pero aún más importante es aprender matemáticas mediante la resolución de problemas. Es muy usual desarrollar clases de matemáticas, sobre todo en el nivel universitario, empezando por la exposición de un teorema o concepto matemático, continuar con alguna aplicación o ejercicio y dejar los problemas para el final; sin embargo, casi siempre es posible empezar planteando un problema relacionado con el tema que se va a tratar, y que los estudiantes sientan el desafío de resolverlo, hagan uso de los conocimientos que tienen para intentar resolverlo y verificar luego, con orientación del profesor y usando ideas intuitivas en torno al teorema que se quiere tratar, que hay formas más eficientes de resolver tal problema. Entonces enunciar el teorema y, reflexionando conjuntamente con los estudiantes, ir armando su demostración, para luego regresar al problema y conjuntamente examinar otras soluciones, modificarlo, generalizarlo. En esta línea de reflexión está Houdement (2017) al considerar problemas básicos, que se espera sean resueltos sin mayor dificultad; problemas complejos, originados en problemas básicos, cuya construcción y manejo de la información son de responsabilidad del estudiante; y problemas atípicos, cuya resolución requiere la construcción de una estrategia, en ausencia de una semejanza con un problema resuelto, percibida por quien resuelve el problema.

Indagación en el aprendizaje de las matemáticas

Según el Consejo Nacional de Investigaciones de Estados Unidos (NRC), ante el énfasis que había en la acumulación de información en la enseñanza y aprendizaje de la ciencia, en lugar del estímulo del desarrollo de habilidades y actitudes para la ciencia, John Dewey presenta por primera vez en 1910 el concepto de indagación. Dewey (1916) sostiene que los problemas que se estudien deben tener relación directa con las experiencias de los estudiantes, para fomentar que ellos sean aprendices activos en búsqueda de sus propias respuestas. Ciertamente, esto es coherente con lo manifestado en el párrafo anterior, en relación a la resolución de problemas de matemáticas; sin embargo, cuando en 1996 el Consejo Nacional de Investigación de Estados

Unidos de América presenta una definición de indagación, esta no incluye, explícitamente, su uso en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Afirma que indagación es:

Las diversas formas en las que los científicos estudian el mundo natural y proponen explicaciones basadas en la evidencia derivada de su trabajo. La indagación también se refiere a las actividades de los estudiantes en la que ellos desarrollan conocimiento y comprensión de las ideas científicas. (NRC, 1996, p.23)

Anderson (2007) pone énfasis en la enseñanza basada en la indagación y destaca tres formas diferentes en que la NRC utiliza la palabra indagación en sus documentos: la conocida como "indagación científica", la enseñanza a través de la indagación y el aprendizaje basado en la indagación.

En el 2012, Artigue y Baptist publican, en el marco del Proyecto Fibonacci, un artículo sobre indagación en la educación matemática (Artigue, & Baptist, 2012) en el que toman las ideas generales de la indagación, orientada básicamente hacia las ciencias naturales y dan algunas pautas para incluir la indagación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Nos recuerdan que, en general, «la indagación es un término usado, tanto en la educación como en la vida cotidiana, para referirse a la búsqueda de conocimiento o información mediante el método de hacer preguntas» (Harlen, 2012) y nos manifiestan que:

La indagación matemática parte de una pregunta o un problema, y las respuestas se buscan a través de la observación y la exploración; se realizan experimentos mentales, materiales o virtuales; se buscan conexiones con preguntas ya respondidas y que tienen analogías relevantes para la pregunta que se está investigando; se ponen en juego técnicas matemáticas conocidas y se adaptan cuando es necesario. (Artigue, & Baptist, 2012, p. 4).

Este marco, da bases para ir aún más allá, hacia una indagación didáctica de los profesores, vinculada con la creación y resolución de problemas de matemáticas. Entendemos esta indagación, como la búsqueda de actividades adecuadas para sugerirlas a los estudiantes, así como la formulación de preguntas en torno a tales actividades y luego la creación, resolución y revisión de problemas relacionados con las actividades y preguntas. Todo esto constituye un proceso de indagación, que es una forma de desarrollar competencias didáctico-matemáticas de los profesores.

La creación de problemas de matemáticas

La creación de problemas de matemáticas es un proceso mediante el cual se obtiene un nuevo problema (Malaspina 2015, 2017), que está fuertemente vinculado a la resolución de problemas y a la indagación. Es sumamente importante en el estímulo del pensamiento matemático de estudiantes y profesores; más aún, contribuye a desarrollar competencias didácticas de los profesores.

La importancia de la creación de problemas ha sido destacada por científicos, matemáticos e investigadores en educación matemática (Einstein e Infeld, 1938, p.92; Halmos, 1980, p.524; NCTM, 1989, p. 138; y muchos otros). Hay numerosas y muy importantes publicaciones tratando diversos aspectos de la creación de problemas, vinculados con la formación matemática de los estudiantes en todos los niveles educativos y con el desarrollo de

competencias didácticas y matemáticas de los profesores. Así, Ellerton (2013) nos dice:

Durante demasiado tiempo, la resolución exitosa de problemas ha sido exaltada como la meta; ha llegado el momento en que a la creación de problemas se le dé un lugar prominente pero natural en los planes de estudio y las aulas de matemáticas. (pp. 100-101)

Crespo (2015), con base en sus investigaciones y experiencias didácticas, manifiesta que enseñar con énfasis en creación de problemas provee a los estudiantes de oportunidades de convertirse en productores de conocimiento y no solo ser receptores de contenidos ya conocidos. (p. 495).

En relación a la formación de profesores, en las investigaciones se evidencia la vinculación entre creación de problemas de matemáticas con el estímulo de competencias docentes (Crespo, 2003; Tichá & Hošpesová, 2013; Malaspina, Mallart & Font, 2015; Malaspina, Torres, & Rubio, 2019). Como lo manifestamos en Malaspina y Vallejo (2014, p 8), crear problemas es parte fundamental de la tarea docente. Cada profesor conoce la realidad específica en su aula, el entorno sociocultural y las motivaciones de sus alumnos y es un desafío a sus conocimientos y competencias didáctico-matemáticas, tanto crear secuencias de actividades y problemas adecuados para esa realidad, como estimular a sus alumnos no solo a aprender resolviendo problemas, sino a “ir más allá”: a aprender creando sus propios problemas.

¿Cómo crear problemas de matemáticas? En artículos y conferencias anteriores he detallado mis propuestas, compartidas con otros investigadores (Malaspina, 2015; Malaspina, Mallart & Font, 2015; Malaspina 2017; Malaspina, Torres, & Rubio, 2019). En resumen, se puede crear problemas modificando la información, el requerimiento, el contexto o el entorno matemático de un problema dado (uno o más de los cuatro componentes de tal problema); o, a partir de una situación dada, construyendo estos cuatro elementos de un problema. En el primer caso, decimos que el problema ha sido creado por variación; y en el segundo caso, decimos que ha sido creado por elaboración. Para estimular las competencias didáctico matemáticas de los docentes, mediante la creación de problemas, proponemos la estrategia Episodio, problema-pre, Problema-pos (EPP) para crear problemas por variación, y la estrategia Situación, Problema-pre, Problema-pos (SPP) para crear problemas por elaboración. En Malaspina, Torres, & Rubio (2019) y Torres (2016) complementamos estas estrategias con fases de reflexión didáctica, usando constructos teóricos del enfoque ontosemiótico de la educación matemática (EOS).

La relación estrecha entre creación de problemas y resolución de problemas parece clara y es mencionada desde el artículo pionero de Kilpatrick (1987). Hay estudios que evidencian esta relación, como los de Ayllón (2012). Silver (2013); Bonotto y Del Santo (2015). Más aún, se ha publicado un voluminoso libro, editado por Felmer, Pehkonen y Kilpatrick, J. (2016), con numerosos artículos sobre resolución y creación de problemas.

Parte fundamental en la creación de problemas, tanto por variación como por elaboración, es la formulación de preguntas. Una que es fundamental y bastante destacada por Brown & Walter (1983), es ¿qué pasaría si...? En nuestro enfoque, para crear problemas por variación, algunas preguntas útiles son: ¿qué pasaría si cambio la información?, ¿qué pasaría si cambio el requerimiento?, ¿qué pasaría si cambio el contexto?, ¿qué pasaría si cambio el entorno

matemático?, ¿qué casos particulares pueden tener especial relevancia?, ¿puedo generalizar?; y para crear problemas por elaboración: ¿qué información selecciono?, ¿qué relaciones puedo establecer en la información que selecciono?, ¿qué requerimiento hago?, ¿puedo considerar un contexto intra matemático? (Malaspina, 2018). Todo esto evidencia la relación de la creación de problemas con la indagación; y para dar énfasis a una indagación didáctica, en talleres que he desarrollado con profesores, introduje dos fases previas a la creación de problemas por elaboración, en un entorno matemático determinado. Una primera fase de propuesta de actividades, a partir de la situación presentada, y una segunda fase de formulación de preguntas, a partir de las actividades propuestas. La tercera fase fue la formulación de un problema, tomando como referencia alguna de las actividades propuestas, y sus respectivas preguntas. También he desarrollado talleres con estudiantes de primaria, en los cuales la propuesta de actividades y preguntas, así como la creación de problemas, fue usando material manipulativo estructurado y trabajando en grupos.

Una experiencia didáctica con profesores

Fue desarrollada con catorce profesores de educación secundaria en ejercicio. Mostraré parte de las actividades desarrolladas por el profesor de código 4C y por el grupo 4 que integró.

Situación: Juan y María disponen de alambres flexibles de 72 cm y 36 cm de longitud, respectivamente.

Actividad 1(Individual): Escriba brevemente una o más actividades, con los alambres flexibles de Juan y María, que Ud. sugeriría a estudiantes de segundo grado de secundaria, para afianzar sus conocimientos sobre área y perímetro de rectángulos.

Propuesta del profesor 4C:

- Construye rectángulos utilizando el alambre de 72 cm, en su totalidad. (sin partes)
- Construye rectángulos utilizando el alambre de 36 cm. " " " "

Actividad 2 (Individual): Escriba una o más preguntas que Ud. haría a los estudiantes, o se plantearía Ud misma(o), relacionadas con la(s) actividad(es) propuesta(s).

Preguntas sugeridas por el profesor 4C:

- ¿Cuál es el perímetro en el primer caso?
- ¿Cuál es el perímetro en el segundo caso?
- ¿Siempre el área de los rectángulos en el primer caso es mayor que el área de los rectángulos del segundo caso?
- ¿Qué podemos concluir de la propuesta anterior?
- ¿Cuál es el área máxima que se puede obtener en el primer y segundo caso?

Actividad 3 (grupal): Considerar una de las actividades propuestas – u otra que se les ocurra en el grupo – para crear y resolver un problema relacionado con *área y perímetro de rectángulos*.

Actividad considerada:

Actividad considerada:

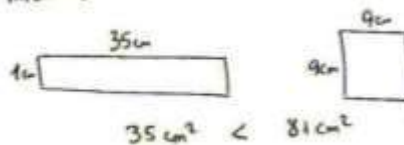
Dibujen 3 rectángulos que se podrían construir con el alambre de 72 cm y 3 rectángulos que se podrían construir con el alambre de 36 cm.

Problema creado:

¿Siempre el área del rectángulo construido con el alambre de mayor longitud será mayor que el área del rectángulo construido con el alambre de menor longitud? Explique su respuesta.

Una solución del problema creado:

No siempre es mayor, ya que podríamos formar un rectángulo cuyas dimensiones son 35 cm y 1 cm y cuya área mide 35 cm^2 y un rectángulo de 9 cm y 9 cm de dimensiones cuyo área mide 81 cm^2 .



Una experiencia didáctica con estudiantes

Fue desarrollada con 18 niñas y 12 niños, entre 10 y 11 años de edad. Mostraré parte de las actividades desarrolladas por el grupo 7, conformado por tres niñas y dos niños.

Situación: Julia recibió una caja con palitos de madera de distintos tamaños y colores. Los palitos del mismo tamaño son del mismo color. La información se resume en el siguiente cuadro:

Color	Cantidad de palitos	Medida de cada palito
Azul	3	10 pulgadas
Blanco	3	2 pulgadas
Amarillo	3	6 pulgadas
Rojo	3	4 pulgadas
Verde	3	8 pulgadas

Actividad 1 (Grupal): Escriban algunos ejemplos de actividades relacionadas con triángulos, que se podrían hacer con los palitos que recibió Julia.

Grupo 7: Un triángulo con 2 colores rojo y 1 amarillo.

- Un triángulo con tres lados color verde del mismo tamaño todos sus lados.

Actividad 2 (Grupal): Escriban 3 o más preguntas sobre las actividades relacionadas con triángulos, que escribieron antes (u otras que se les ocurra), que se podrían hacer con los palitos que recibió Julia.

Grupo 7: ¿Se puede crear un triángulo dentro de otro triángulo?

¿Los triángulos pueden estar encima de otros triángulos?

Actividad 3 (Grupal): Utilicen una o más preguntas de las escritas en la segunda parte, para inventar un problema sobre triángulos. Pueden usar la información que se da sobre los palitos, o modificarla.

Grupo 7:

¿Cuántos triángulos se pueden formar con los de verde, rojo y amarillo y cuál sería su perímetro?

Rpta: Se puede formar 3 triángulos y el perímetro de cada 1 es 12.

Comentarios

Los niños crearon problemas y en el camino, descubrieron por indagación que, con tres palitos de longitudes diferentes, no siempre se puede construir un triángulo cuyos lados tengan las longitudes de los palitos. En uno de los grupos, uno de los niños "adivinaba" cuándo se podía formar el triángulo y cuándo no, con tres palitos escogidos al azar, pero de diferentes tamaños. Ciertamente es una aproximación intuitiva al teorema correspondiente.

Los profesores desarrollaron una indagación didáctica, pues reflexionaron en grupo la pertinencia de las actividades propuestas, la importancia de la claridad en la formulación de estas y de los problemas y, además de los problemas inicialmente creados, inventaron otros problemas; unos que faciliten la comprensión y solución del problema creado, cuando en el grupo lo consideraron de cierta complejidad, y otros que sean más retadores que el problema inicial, cuando lo consideraron muy "sencillo" (estrategias EPP y SPP). A partir de los problemas retadores, y pasando a lo que se denomina el conocimiento especializado del profesor, en la puesta en común se llegó a discusiones en las que se vinculó perímetros de rectángulos con gráficos de segmentos de recta abiertos, y áreas de rectángulos con curvas de nivel de una función de dos variables.

Cabe destacar que las experiencias didácticas desarrolladas, relacionando indagación, creación y resolución de problemas, estimularon el pensamiento matemático y evidenciaron gran involucramiento emocional, tanto en los estudiantes como en los profesores, lo cual es altamente positivo para el aprendizaje de los primeros, así como para la reflexión didáctica de los segundos y también para la aclaración y la profundización de conocimientos.

Referencias

- Anderson, R. D. (2007). Inquiry as an organizing theme for science curricula. En: Abell, S. K., Lederman, N. G. (Eds.), *Handbook of Research on Science Education*, pp. 808-830. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Artigue, M., & Baptist, P. (2012). Inquiry in mathematics education (Resources for implementing inquiry in science and in mathematics at school). The Fibonacci Project Resources. <http://www.fibonacci-project.eu>.
- Ayllón, M. (2012). *Invencción-resolución de problemas por alumnos de educación primaria*. (Tesis doctoral). Universidad de Granada, España.
- Bonotto, C., & Dal Santo, L. (2015). On the relationship between problem posing, problem solving and creativity in the primary school. En Singer, F., Ellerton, N., & Cai, J. (Eds.) *Mathematical Problem Posing*. (pp. 103-124) New York: Springer.
- Brown, S. & Walter, M. (1983). *The art of problem posing*. Philadelphia: Franklin Institute Press.
- Crespo, S. (2003). Learning to pose mathematical problems: Exploring changes in pre service teachers' practices. *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 243-270.
- Crespo, S. (2015). A collection of problem-posing experiences for prospective mathematics teachers that make a difference. In *Mathematical Problem Posing: From Research to Effective Practice* (pp. 493-511). Springer New York.
- Dewey, J. (1916). Method in science teaching, *The Science Quarterly*, 1, 3-9.
- Einstein, A. e Infeld, L. (1938). The evolution of Physics from early concepts to relativity and quanta. New York: Simon & Schuster.
- Ellerton, N. F. (2013). Engaging pre-service middle-school teacher-education students in mathematical problem posing: development of an active learning framework. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 87-101
- Felmer, P., Pehkonen, E., & Kilpatrick, J. (Eds.) (2016). *Posing and solving mathematical problems. Advances and new perspectives*. Switzerland: Springer.
- Halmos, P. (1980). The heart of mathematics. *American Mathematical Monthly*, 87, 519-524.
- Harlen, W. (2012). *Inquiry in science education*. The Fibonacci Project Resources, 2012, <http://fibonacci-project.eu>.
- Houdement, C. (2017). Résolution de problèmes arithmétiques à l'école. *Grand N*, 100, 59-78.
- Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problem come from? In A. H. Schoenfeld (Ed.) *Cognitive science and mathematics education*, 123-147. Hillsdale, N.J: Erlbaum.
- Liljedahl, P., Santos-Trigo, M., Malaspina, U., & Bruder, R. (2016). *Problem Solving in Mathematics Education*. Germany: Springer.
- Liljedahl, P., & Santos-Trigo, L. (Eds.) (2016). *Mathematical Problem Solving*. Suiza: Springer.

- Malaspina, U. & Vallejo, E. (2014). Creación de problemas en la docencia e investigación. En Malaspina, U. (Editor) *Reflexiones y propuestas en Educación Matemática*. (pp 7 – 54). Departamento de Ciencias PUCP. Lima: Moshera
- Malaspina, U., Mallart, A., & Font, V. (2015). Development of teachers' mathematical and didactic competencies by means of problem posing. En Krainer, K. & Vondrová, N. (Eds.) *CERME 9 - Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2861-2866). Prague, Czech Republic: Proceedings of the CERME 9.
- Malaspina, U. (2015). Creación de problemas: sus potencialidades en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Conferencia en la XIV CIAEM, México.
- Malaspina, U. (2017). La creación de problemas como medio para potenciar la articulación de competencias y conocimientos del profesor de matemáticas. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo CIVEOS* Disponible en <http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html>
- Malaspina, U. (2018). ¿Cómo crear problemas de matemáticas? Experiencias didácticas con profesores en formación. *UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 52, pp. 307-313
- Malaspina, U., Torres, C., & Rubio, N. (2019). How to stimulate in-service teachers' didactic analysis competence by means of problem posing. En P. Liljedahl, & L. Santos-Trigo (Eds.), *Mathematical Problem Solving*. (pp. 133 -151) Suiza: Springer.
- Ministerio de Educación del Perú (2017). *Currículo Nacional de la Educación Básica*. Lima: Ministerio de Educación.
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM
- NRC, National Research Council (1996). *National Science Educational Standards*. Washington: National Academy Press.
- Silver, E. A. (2013). Problem posing research in mathematics education. Looking back, looking around and looking ahead. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 157 – 162.
- Pólya, G. (1945). *How to solve It*. Princeton University: Princeton NJ
- Tichá, M., & Hošpesová, A. (2013). Developing teachers' subject didactic competence through problem posing. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 133-143.
- Torres, C. (2016). Creación de problemas sobre funciones cuadráticas por profesores en servicio, mediante una estrategia que integra nociones del análisis didáctico. Tesis de Maestría no publicada. Maestría en Enseñanza de las Matemáticas – Pontificia Universidad Católica del Perú.

GEOMETRÍA Y ECUACIONES CUADRÁTICAS DE UNA INCÓGNITA: ANÁLISIS DE UNA CONSTRUCCIÓN

Maria José Ferreira da Silva

zeze@pucsp.br

Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil

Resumen

Este artículo tiene como objetivo presentar y analizar una construcción geométrica que permite la resolución de ecuaciones cuadráticas con una incógnita basada en las aprehensiones de una figura, según Duval, en las tres etapas del proceso de algebrización, así como en algunos puntos de la Base Nacional Común Curricular - BNCC, en lo que se configura como una reflexión teórica. Observamos que esa construcción permite relacionar los contenidos geométricos con la enseñanza del álgebra, y con que el estudiante alcance el tercer nivel de algebrización, que va más allá de la aritmética generalizada, al poder desarrollar la fórmula cuadrática para un tipo dado de ecuación. En cuanto a la geometría, además de permitir la conversión de representaciones figurales en representaciones algebraicas y viceversa, desarrolla las aprehensiones perceptiva, secuencial, operativa y discursiva en la construcción y en los posibles tratamientos en la figura resultante de esa construcción. Dichos resultados permiten alcanzar algunos objetivos señalados en el BNCC y el desarrollo de parte de las habilidades relacionadas con el tema.

Palabras clave: Ecuaciones cuadráticas, construcción geométrica, niveles de algebrización, aprehensiones de figuras.

Introducción

En este artículo, buscamos reflexionar sobre la relación entre la enseñanza de ecuaciones polinómicas cuadráticas y la geometría a partir de una construcción. Para iniciar la reflexión, consultamos la Base Nacional Común Curricular, que tipifica la enseñanza del álgebra en la escuela primaria desde el desarrollo del pensamiento numérico que, según Brasil (2017, p. 267) "se expande y profundiza cuando se discuten situaciones que involucran contenidos de las otras temáticas: Álgebra, Geometría, Cantidades y Medidas y Probabilidad." Agrega que la enseñanza del álgebra tiene como objetivo el desarrollo del pensamiento algebraico "que es esencial para usar modelos matemáticos en la comprensión, representación y análisis de relaciones cuantitativas de cantidades y, también, de situaciones y estructuras matemáticas, usando letras y otros símbolos", a partir de las ideas matemáticas fundamentales: equivalencia, variación, interdependencia y proporcionalidad (p. 268).

Este currículo prevé que el desarrollo de este tipo de pensamiento se concreta cuando los estudiantes

identifican regularidades y patrones de secuencias numéricas y no numéricas, establecen leyes matemáticas que expresen la relación de interdependencia entre cantidades en diferentes contextos, así como crean, interpretan y transitan entre las diversas representaciones gráficas y simbólicas, para resolver problemas a través de ecuaciones y desigualdades, comprendiendo los procedimientos utilizados. (BRASIL, 2017, p. 268).

Resumiendo, para el BNCC, la enseñanza del álgebra debe permitir que los estudiantes establezcan "conexiones entre variable y función y entre incógnita y ecuación", advirtiéndoles que "las técnicas para resolver ecuaciones, incluso en el plano cartesiano, deben desarrollarse como una forma de representar y solventar ciertos tipos de problemas, y no como objetos de estudio en sí mismos" (p. 269).

En la enseñanza del álgebra vemos una disposición para el uso de la "técnica de resolución en el plano cartesiano" para ecuaciones, lo que, para nosotros, implica que el estudiante tiene conocimientos de Geometría Analítica para representar rectas y parábolas, en el caso de ecuaciones polinómicas de 1.^{er} y 2.^o grados. Dicha disposición requiere la transformación de una ecuación dada con una incógnita en una otra de dos variables cuya representación gráfica permite encontrar las soluciones de la ecuación, se sale de un problema que involucra el cálculo algebraico para un problema de geometría analítica. En este sentido, entendemos que la BNCC aproxima el Álgebra a la Geometría solamente por el estudio del plano cartesiano, a través de la geometría analítica. Sin embargo, este documento establece que, como la idea de coordenadas se inició en los primeros años de la escuela primaria, debe ampliarse en los últimos años para que el estudio de la recta permita representar sistemas de ecuaciones de 1.^{er} grado. Con respecto a esta técnica, Ugarte Guerra, Silva y Gaita (2019) muestran en un análisis la limitación de su alcance, así como las dificultades que causan para los estudiantes.

Luego buscamos directrices con respecto a la geometría analítica y encontramos, para el 8.^o año (13 años), para el tema de álgebra, el objeto de conocimiento "asociación de una ecuación lineal de 1.^{er} grado con una línea recta en el plano" relacionado con la habilidad (EF08MA07) "Asociar una ecuación lineal de 1.^{er} grado con dos incógnitas a una línea recta en el plano cartesiano" (p. 310-311). Pero ¿no serían dos variables? Para el 9.^o año, todavía en el tema álgebra, presentan el objeto de conocimiento: "distancia entre puntos en el plano cartesiano" relacionado con la habilidad (EF09MA16) "determinar el punto medio de un segmento de recta y la distancia entre dos puntos cualesquiera, dadas las coordenadas de estos puntos en el plano cartesiano, sin el uso de fórmulas, y utilizar este conocimiento para calcular, por ejemplo, medidas de perímetros y áreas de figuras planas construidas en el plano" (p. 316-317). En una búsqueda en el documento no encontramos mención alguna a la parábola.

Para la enseñanza de la geometría enumeran, como ideas matemáticas fundamentales, la construcción, la representación y la interdependencia, y aclaran que la geometría "implica el estudio de un amplio conjunto de conceptos y procedimientos necesarios para resolver problemas del mundo físico de diferentes áreas del conocimiento", siendo indispensable, para

desarrollar el pensamiento geométrico, estudiar "posición y desplazamientos en el espacio, formas y relaciones entre elementos de figuras planas y espaciales" (p. 269). Agregan que la importancia de este tipo de pensamiento radica en la posibilidad de que el estudiante pueda "conjeturar y producir argumentos geométricos convincentes", además de considerar el aspecto funcional en el estudio de la geometría presente en las transformaciones geométricas. Por lo tanto, recomiendan que la enseñanza de la geometría esté centrada solo en la aplicación de fórmulas (área y volumen) o en aplicaciones numéricas, como ocurre con el teorema de Pitágoras, sino que esté volcada al estudio de la equivalencia de áreas sin usar fórmulas que "le permite transformar cualquier región poligonal plana en un cuadrado con la misma área", lo que da la posibilidad de "resolver geoméricamente problemas geométricos que pueden traducirse por una ecuación de 2.º grado" (p. 270-271).

Sin embargo, para el 8.º año encontramos en el tema álgebra el objeto de conocimiento "ecuación polinómica de 2.º grado del tipo $ax^2 = 0$ relacionado con la habilidad (EF08MA09) "resolver y elaborar, con y sin el uso de tecnologías, problemas que puedan ser representados por ecuaciones polinómicas del 2.º grado del tipo $ax^2 = 0$ " (p. 310-311). En este mismo tema, para el 9.º año, señalan los objetos de conocimiento "expresiones algebraicas: factorización y productos notables" y "resolución de ecuaciones polinómicas de 2.º grado a través de factorizaciones", ambos asociados con la habilidad (EF09MA09) "comprender los procesos de factorización de expresiones algebraicas, basadas en sus relaciones con los productos notables, para resolver y elaborar problemas que puedan ser representados por ecuaciones polinómicas de 2.º grado" (p. 314-315). Vemos entonces que la orientación es para la resolución de ese tipo de ecuación por factorización y no por la técnica, mencionada anteriormente, por plano cartesiano o asociada con la geometría. Por el contrario, en el tema de geometría para estos años escolares, tanto en los objetos de conocimiento como en las habilidades, no se mencionan ecuaciones de 2.º grado.

Gran parte de estas recomendaciones estaban presentes en los Parámetros Curriculares Nacionales - PCN (BRASIL, 1998), sin embargo, como lo muestran Ugarte Guerra, Silva y Gaita (2019), al enseñarse sistemas de ecuaciones lineales, por ejemplo, se enfatizan las técnicas de resolución. Los problemas surgen solo para automatizar las técnicas, ya que no se configuran como situaciones problemáticas en las que los sistemas de este tipo se presenten como la única solución alternativa, además, en general, uno no se dirige al problema para verificar si efectivamente la solución encontrada soluciona o no el problema, o si se presentan problemas sin solución, o con infinitas soluciones, sino qué parte de ellas solucionan el problema, etc... Por otro lado, tampoco se discute el alcance de las técnicas y mucho se invierte en técnicas muy restrictas, como es el caso de la solución gráfica. Para Gascón, Bosch e Ruiz-Munzón (2017, p. 30) el álgebra escolar se caracteriza por la aritmética generalizada, porque: "se construye en un contexto exclusivamente numérico"; "la resolución de un problema algebraico se identifica con la obtención de un número"; "las expresiones algebraicas surgen de la necesidad de representar y manipular números desconocidos"; "el álgebra escolar está muy vinculada con la aritmética y está aislada del resto del currículo"; "las tareas consideradas "algebraicas" se reducen a la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico, la manipulación formal de expresiones con letras y números y la resolución de ecuaciones"; "la aritmética generalizada hace una distinción absoluta entre datos conocidos (valores numéricos) y las incógnitas"; "una

ecuación generalmente se interpreta como una igualdad numérica que se aplica a algunos valores concretos de las incógnitas."

En el caso del álgebra y la geometría, Gascón (1999, p. 15) señala dos características generales de las matemáticas que se estudian en la educación básica, ejemplificando que el estudio de la geometría tiene un carácter "intrafigural", pues no se estudian ni las relaciones entre figuras, ni las propiedades del espacio geométrico y el carácter "prealgebraico" de la matemática.

Sin embargo, observando la historia, encontramos que la relación entre la geometría y las ecuaciones cuadráticas con una incógnita se remonta a la antigüedad. Problemas que hoy en día pueden relacionarse con ecuaciones cuadráticas con una incógnita, se referían, en general, a situaciones numéricas que involucraban la suma y el producto de números o geométricas relacionando medidas de lados y área de rectángulos. Boyer (2001, p. 22) presenta un ejemplo de los babilonios que pide "el lado de un cuadrado si el área menos el lado da 14,30) que hoy puede asociarse con la ecuación $x^2 - x = 870$ y que tenía un procedimiento de resolución retórico o geométrico por completación de cuadrado. La no aceptación de los números negativos hizo imposible, hasta el comienzo del período moderno, tratar con ecuaciones que presentaban ese número como solución, es decir, tratando solo con tres tipos: $x^2 + px = q$; $x^2 = px + q$ y $x^2 + q = px$.

Euclides, en el siglo IV a. C., presentó resoluciones de ecuaciones que encajarían en el primer tipo de construcciones con regla y compás considerando la división de segmentos en relación media y extrema. Los árabes, en IX DC, resolvían ecuaciones cuadráticas como los babilonios por completación de cuadrados y por un discurso retórico. En el siglo XII d. C. Bhaskara formuló reglas para encontrar soluciones para esos tipos de ecuaciones, pero fue solo con Viète (1540-1603) que surgió la representación simbólica, y con Descartes (1596-1650) que los símbolos comenzaron a representar incógnitas. Descartes, en su *Discurso del Método*, presenta un procedimiento para resolver ecuaciones del tipo $x^2 + bx - c = 0$ desde la construcción de un triángulo rectángulo y de una circunferencia cuyo radio tiene la misma medida que la menor medida del menor cateto del triángulo. Es esta construcción la que trataremos en este artículo, buscando articular dos referencias que abordan respectivamente la enseñanza del álgebra y la enseñanza de la geometría, los niveles de algebrización y las aprehensiones de una figura, que presentamos a continuación.

Referencial teórico

Para Gascón (1994), el álgebra debe ser un medio para resolver problemas, no problemas aislados, sino campos de problemas aritméticos, además de construcciones geométricas, entre otros, en que la solución algebraica puede permitir la representación global de las relaciones entre los datos y las incógnitas que permiten que las letras asuman estatus diferentes como incógnita, número generalizado, variable y aun como parámetro que conduce a un modelo algebraico. Las discusiones respecto de la enseñanza del álgebra iniciadas por Chevallard y Gascón en los años 90 se profundizaron, generando el desarrollo de procesos de algebrización y modelización, además de los de competencia algebraica, que fueron relacionados por Silva, Gaita y Almouloud (2018). Aquí, solo trataremos de las tres etapas del proceso de algebrización

respaldadas por Munzón, Bosch e Gascón (2015) e Gascón, Bosch, Ruiz-Munzón (2017). La primera etapa se caracteriza principalmente por problemas que pueden resolverse retóricamente y luego traducirse en expresiones numéricas. Además de las técnicas propias de la aritmética, implica la creación y simplificación de escritas algebraicas regidos por la jerarquía de las operaciones y las reglas para el uso de paréntesis. En esta etapa, las nociones de expresiones algebraicas, equivalencia y ecuación se desarrollan con una incógnita como objetos matemáticos. En la segunda etapa, se consideran problemas en los que se presentan datos numéricos conocidos y el desconocido es una cantidad, pero que debe evolucionar hacia otros en que la incógnita no es un resultado numérico, sino una expresión algebraica. Las ecuaciones se presentan como la igualdad entre dos expresiones algebraicas y las nociones de ecuación aparecen con dos variables (o incógnitas) y una familia de ecuaciones (con una incógnita) que dependen de un parámetro. Además de las técnicas de la primera etapa, aparecen nuevas técnicas, como la cancelación. Para los autores, la enseñanza actual se concentra en esta etapa y, en general, se concentra en convertir un enunciado en una representación algebraica, generalmente una ecuación que, al resolverse, resulta en números, que representan valores de las incógnitas presentadas. Para los autores, es necesaria una etapa más para que se logre el proceso de algebrización. En ella, además de los modelos de las primeras etapas, se deben trabajar otros, sin limitar el número de argumentos o variables, sin distinguir parámetros de incógnitas, abstrayéndose si son "conocidos" o "desconocidos". Por lo tanto, las expresiones algebraicas se identifican como fórmulas o modelos algebraicos que se pueden obtener, inicialmente, por la generalización de problemas de la etapa anterior para observar relaciones de interdependencia. Entendemos que las dos primeras partes de nuestra propuesta se encajan en el segundo nivel por traer un nuevo punto de vista a la enseñanza de resolución de ecuaciones cuadráticas con una incógnita, en lo que se refiere a geometría y que la última parte ya estaría en el tercer nivel, para permitir la construcción de una fórmula.

Por el lado de la geometría, haremos los análisis basados en los Registros de Representación Semiótica de Duval, más específicamente, en las aprehensiones relacionadas con el registro figural. Para Duval (2004), la pluralidad de registros de representación semiótica permite varias representaciones para un mismo objeto matemático, en el caso de este artículo asociaremos el registro de expresiones algebraicas al registro figural, es decir, para poder relacionar una ecuación con una construcción que parte de dos segmentos recta. El autor considera la figura como una aprehensión cognitiva, ya que hay diferentes formas de "mirar" un dibujo. Distingue cuatro aprehensiones cognitivas para el registro figural: perceptual, secuencial, discursiva y operativa. La perceptual permite la identificación inmediata de las formas de la figura geométrica en una situación dada, es decir, permite interpretar las formas de una figura o reconocer directamente el objeto. La aprehensión discursiva permite la interpretación y explicación de las propiedades matemáticas de la figura, además de las presentadas por una leyenda o hipótesis. La secuencial se refiere al orden de construcción de una figura geométrica con la ayuda de un instrumento o de la descripción de una construcción realizada. La aprehensión operativa se refiere a los posibles cambios y/o transformaciones en una figura inicial y las reorganizaciones perceptivas que permiten nuevos elementos para la solución de un problema dado. Esas modificaciones, según Duval (2004), pueden ser de tres tipos: óptica, que permite aumentar, disminuir o deformar una figura; posicional, que desplaza la figura sin

cambiar sus medidas y forma; y la mereológica, que permite la descomposición y composición de figuras a partir de la relación parte-todo, que se llama reconfiguración. Para el autor, la resolución de un problema puede requerir que se articulen dos o más aprehensiones, específicamente, identifica cuatro: la figura geométrica que resulta de la articulación entre las aprehensiones perceptiva y discursiva; la visualización, que es la articulación entre las aprehensiones perceptiva y operativa; la heurística, que articula las aprehensiones operativa y discursiva; y la construcción geométrica, que es la articulación entre las aprehensiones discursiva y secuencial que requieren la perceptiva.

Habiendo expuesto el marco que usaremos, pasamos a analizar la construcción que consideramos para este artículo.

Análisis de la construcción

Comencemos nuestra discusión usando la ecuación $x^2 - 6x - 16 = 0$, presentada en forma parcelada, que se puede transformar fácilmente en la forma factorizada en la ecuación equivalente $(x - 8)(x + 2) = 0$. Durante el estudio de factorización de trinomios, los estudiantes se dan cuenta de que para que se factorice el trinomio $x^2 - 6x - 16$, ellos deben buscar dos números cuya suma resulte en -6 y cuyo producto resulte -16 , o sea, -8 y $+2$. En el caso de la ecuación, en la forma factorizada, como tenemos un producto igual a cero, la solución viene dada por $x = 8$ o $x = -2$. Luego comenzaremos a partir de esta ecuación para hacer una construcción geométrica que nos permita determinar los segmentos que representan la solución de la ecuación. Usaremos Geogebra, porque, a partir de esta construcción, podemos generalizarla para obtener soluciones de ecuaciones que, generalmente, no son tratadas en la enseñanza, las de coeficientes decimales. Por otro lado, algunas manipulaciones algebraicas nos permitirán construir una fórmula para resolver cualquier ecuación del tipo específico que usaremos en la construcción. Así, dividimos nuestro análisis en tres partes.

Resaltamos que en esta construcción extrapolamos las medidas de segmentos que están representadas solo por números positivos para considerar raíces negativas, además de enfatizar que la construcción presentada aquí no permite la construcción de todo el conocimiento necesario para resolver ecuaciones cuadráticas. Otras construcciones, así como otros métodos, son necesarios para que ese conocimiento efectivamente se concrete.

Parte A - la construcción

- a) Consideremos la ecuación $x^2 - 6x - 16 = 0$ del tipo $x^2 - px - q^2 = 0$
- b) Dibuje un segmento LM de 4 cm.
- b) Por L, dibuje una línea recta perpendicular al segmento y determine en ella el punto N, de tal manera que LN mida 3 cm.
- c) Dibuje una circunferencia con centro en N y radio de 3 cm y dibuje la recta MN que interseca la circunferencia en los puntos P y O, con P entre M y N.

d) Considerando que $MO = x$, tenemos que $MN = x - 3$. Aplicándose el teorema de Pitágoras al triángulo LMN, ¿qué expresión encontramos? (En este caso, desarrollando $(x - 3)^2 = 3^2 + 4^2$ encontramos $x^2 - 6x - 16 = 0$, o sea, MO representa la raíz positiva de la ecuación).

e) Determine el valor OM y el valor PM y cuál es la relación con la ecuación encontrada. (PM representa la solución negativa de la ecuación y OM la solución positiva de la ecuación).

Cuando Descartes realizó esta construcción, solo se consideraba el resultado positivo como solución a la ecuación.

f) ¿Cuál es la relación entre los segmentos iniciales de la construcción, LM y LN, con la ecuación? ($LM = 4 = \sqrt{16}$ y $LN = 3 = 6 \div 2$).

g) ¿Qué pasaría si la ecuación fuera $x^2 + 6x - 16 = 0$? (En este caso, hay que considerar $PM = x$ como la solución positiva).

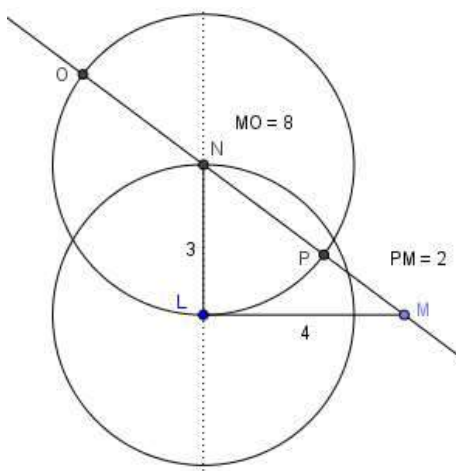


Figura 1: construcción geométrica de la ecuación $x^2 - 6x - 16 = 0$

Comenzamos esta primera actividad con las instrucciones para construcción de una figura para que el estudiante desarrolle la aprehensión secuencial, es decir, construya una figura a partir de una secuencia de pasos. Esta construcción nos permitirá determinar la resolución geométrica de la ecuación $x^2 - 6x - 16 = 0$ (Figura 1) y las cuestiones presentadas buscan desarrollar las otras aprehensiones, así como el trabajo con algunas expresiones algebraicas. En el curso de la construcción, las aprehensiones perceptiva y discursiva se resolvieron cuando se identificó el triángulo rectángulo y el teorema de Pitágoras se presenta como una aprehensión discursiva de los elementos de esta figura. Además, a partir de las órdenes para que surgiese la expresión de la ecuación, lanzamos las cuestiones finales para que los estudiantes pudiesen sacar sus propias conclusiones, es decir, desarrollasen un discurso algebraico como resultado de las conclusiones anteriores. En este momento, estamos solicitando la conversión de la representación realizada en el registro figural para una representación en el registro de las expresiones algebraicas, es decir, la figura construida corresponde a una ecuación cuadrática con una incógnita. Esta actividad permitiría ir más allá, con la aprehensión discursiva que asociaría a esta figura la relación entre secante y tangente a

una circunferencia y la observación de que $LM^2 = MP \times MO$, es decir, la medida del segmento de la tangente al cuadrado es igual al producto de las raíces de la ecuación.

Parte B - primera generalización

En esta parte, el objetivo es generalizar la construcción realizada en la parte anterior, considerando la respuesta del ítem f, para cualquier ecuación del tipo $x^2 - bx - c = 0$ siendo b y c las medidas de dos segmentos cualesquiera

- Si consideramos una ecuación del tipo $x^2 - bx - c = 0$ y la construcción anterior, ¿qué medida deberían tener los segmentos LM y LN? ($LM = \sqrt{c}$ y $LN = b \div 2$).
- Determine en Geogebra dos segmentos de medidas b y c y, a partir de ellos, represente la ecuación correspondiente. (En el caso de la figura 2, la ecuación es $x^2 - 7,1x - 12,8 = 0$)
- Para llevar a cabo la construcción, necesitamos determinar $\sqrt{c}$. En el Geogebra, digite en la entrada: *sqrt* (c) y pulse *enter*, el resultado aparecerá en la ventana de álgebra. (En el caso de la figura 2, $a = 3.6$)
- Construya el segmento LM utilizando la herramienta "segmento con longitud fija" y cuando se le solicite la longitud, digite a .
- Ahora, construya el segmento LN y termine la construcción determinando los puntos P y O .
- Determine las raíces de la ecuación. ($MO = 8,6$ y $PM = -1,5$).
- Calcule $(x - 8,6)(x + 1,5) = 0$. ¿Qué se puede concluir, excepto por algún error de redondeo? (Que, de hecho, los valores encontrados son las raíces de la ecuación. Geogebra le permite cambiar el número de casas decimales)
- Cambie las medidas de b y c para obtener otras ecuaciones y sus soluciones.
- ¿Cuáles serían las soluciones si el coeficiente b de la ecuación fuera positivo?

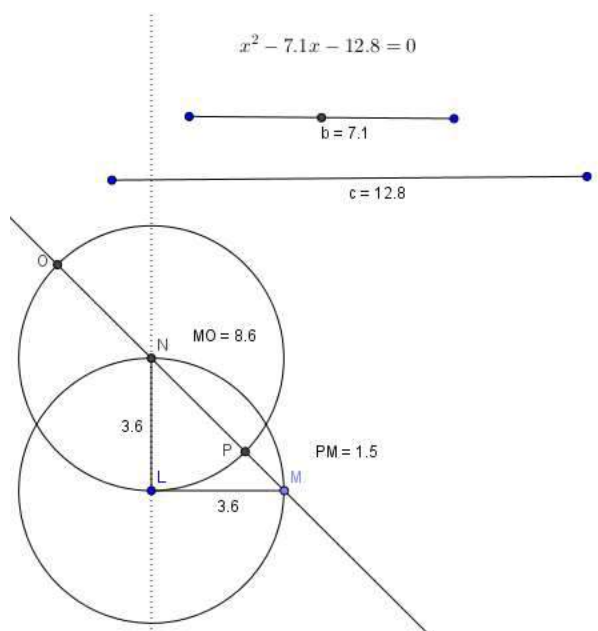


Figura 2: construcción geométrica de la ecuación $x^2 - 7,1x - 12,8 = 0$

En esta segunda construcción, reforzamos el desarrollo de las aprehensiones ya trabajadas en la figura anterior, pero dejamos que el alumno termine la construcción, es decir, él/ella debe describir cómo hacerlo. En términos algebraicos, asociará, a partir de la medida de dos segmentos, una ecuación cuadrática, y como los segmentos son cualesquiera, sus medidas no están definidas a priori, resultando en ecuaciones con coeficientes decimales, lo que difícilmente ocurre en la enseñanza. Ahora entra la factorización para que se verifique si las medidas encontradas realmente pueden estar relacionadas con las soluciones de las ecuaciones. Para este propósito, también podría usarse la relación entre secante y tangente a una circunferencia, como visto en la construcción anterior. En términos de aprendizaje de álgebra, el estudiante tiene una herramienta que permite resolver ecuaciones con coeficientes decimales, cuya solución podría ser más difícil con el uso de la fórmula cuadrática y la calculadora que la construcción. A partir de esta construcción, es posible dar ecuaciones específicas con coeficientes decimales para que los estudiantes realicen la construcción y obtengan sus soluciones, sin embargo, no se debe olvidar la cuestión del redondeo que realiza el software, que conduce a valores aproximados y no exactos, como es habitual en la enseñanza.

Parte C - segunda generalización: la construcción de una fórmula

En esta parte, vamos a deducir una fórmula para resolver ecuaciones del tipo $x^2 - bx - c = 0$ (aún considerando que b y c sean medidas de segmentos).

a) Consideremos esta ecuación y la figura 3.

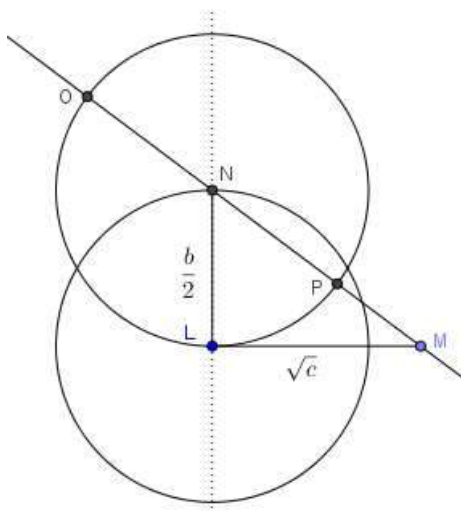


Figura 3: construcción geométrica de la ecuación $x^2 - bx - c = 0$

- b) Considere el triángulo rectángulo NLM y aplique Pitágoras. $(MN^2 = NL^2 + LM^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$ luego $MN = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} = \sqrt{\frac{b^2 + 4c}{4}} = \frac{\sqrt{b^2 + 4c}}{2}$
- c) Considerando que OM representa la raíz positiva de la ecuación, determine OM. $(OM = MN + NO = \frac{\sqrt{b^2 + 4c}}{2} + \frac{b}{2})$
- d) Determine ahora PM, que representará la otra raíz de la ecuación. $(PM = MN - PN = \frac{\sqrt{b^2 + 4c}}{2} - \frac{b}{2})$.

e) ¿Cómo se verían estas fórmulas si consideramos b positivo? (Si b es positivo, la raíz positiva será PM. El análisis de la señal de las raíces es necesario porque en el caso de las construcciones las medidas son siempre positivas).

En esta parte, podemos decir que hemos alcanzado el tercer nivel de algebrización, porque el alumno es llevado a desarrollar una fórmula para un cierto tipo de ecuación, para que pueda construir algún significado para ella, lo que no sucedería si simplemente lo memorizase. Más adelante, esta fórmula debe compararse con la resolución geométrica realizada en Geogebra para que el alumno perciba las aproximaciones llevadas a cabo tanto para números fraccionales racionales como para números irracionales.

Consideraciones Finales

Nuestro objetivo fue presentar el análisis de una construcción que puede asociarse con la solución de un tipo de ecuación cuadrática con una incógnita, pero existen otras construcciones que permiten que se trabaje con otros tipos de ecuaciones. Una ventaja de la construcción es la posibilidad de cambiar las medidas de los segmentos en Geogebra y observar soluciones de diferentes ecuaciones con coeficientes decimales que dificultarían mucho la solución algebraica, además de permitir la discusión de soluciones que son aproximadas.

Esta forma de ver las ecuaciones no invalida otros procesos, como es el caso de la factorización, que sería el método más sencillo y rápido de tratar algunas ecuaciones de coeficientes enteros que se pueden factorizar, por el contrario, lo usamos para introducir la construcción. Además, en el proceso de enseñanza de ecuaciones cuadráticas, debe llegar el momento en que los estudiantes confronten la respuesta obtenida por la construcción con la respuesta obtenida por la fórmula, para darse cuenta de que el software aproxima números irracionales por números racionales escritos en forma decimal, es decir, llegará el momento en que debe generalizar la fórmula para una ecuación cuadrática cualquiera, lo que permitirá identificar raíces irracionales.

En cuanto a la BNCC, entendemos que las actividades presentadas les permiten interpretar y moverse entre representaciones figurales y algebraicas, comprendiendo los procedimientos utilizados, así como percibir las conexiones entre incógnita y ecuación, lo que evita que las ecuaciones sean presentadas como objetos de estudio en sí mismos. Por otro lado, permite, según las normativas de ese documento, resolver un problema de construcción geométrica que puede ser representado mediante ecuaciones polinómicas de 2.º grado que va más allá de las ecuaciones del tipo $ax^2 = 0$.

Un trabajo sistematizado que utilice, además de la construcción presentada en este trabajo, otras construcciones posibles, ampliará el conocimiento del estudiante sobre geometría y ecuaciones cuadráticas, contribuyendo al desarrollo de una competencia matemática como un proceso individual, que permite, como afirman Geraniou y Jankvist (2019), "conocer, comprender, ejecutar, usar y opinar sobre la matemática y las actividades matemáticas en diversas formas de contextos".

Referencias

- Boyer, C. B. (2001). *História da Matemática*. Tradução: Elza F. Gomide. Editora Edgard Blücher Ltda. 3ª reimpressão.
- Brasil. (2017). *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518-versaofinal_site.pdf
- Brasil (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. Educação é a Base. Ensino Médio. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/historico/BNCC_EnsinoMedio_embaixa_site_110518.pdf
- Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales*. Edición en castellano. Traducción: Myriam Vega Restrepo. Segunda edición, Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática, Cali, Colombia.
- Gascón, J.; Bosch, M. & Ruiz-Munzón, N. (2017). El problema del álgebra elemental en la Teoría Antropológica de lo didáctico. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI*, 25-47, Zaragoza: SEIEM.
- Gascón, J. (1999). Del Programa Cognitivo al Programa Epistemológico en Didáctica de las Matemáticas. Dos Programas de Investigación Inconmensurables? *Actes de la Xème École d'Été de Didactique des Mathématiques*. ARDM, tome II, 152-170.
- Gascón, J. (1994). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'arithmétique généralisée. *PETIT X*, 37, 43-63.
- Geraniou, E.; Jankvist, U. T. (2019). Towards a definition of "mathematical digital competency". *Educational Studies in Mathematics*. <https://doi.org/10.1007/s10649-019-09893-8>.
- Ruiz-Munzon, N.; Bosch, M. & Gascón, J. (2015). El problema didáctico del álgebra elemental: un análisis macro-ecológico desde la Teoría antropológica de lo Didáctico. *REDIMAT*, 4, 2, 106-131
- Silva, M. J. F.; Gaita, C. & Almouloud, S. A. (2018). Una articulación teórica entre competencia algebraica, proceso de algebrización y modelización algebraica. *REVEMAT*, 13, 1, 1-30.
- Ugarte Guerra, F.; Silva, M. J. F. & Gaita, C. (2019). A componente tecnológica-teórica em praxeologias para sistemas de duas equações lineares na educação básica. *Educação Matemática Pesquisa*. 21, 5, 498-513.

PRAXEOLOGIAS REQUERIDAS POR LA PROFESION DOCENTE

Michèle Artaud

michele.artaud@univ-amu.fr

Universidad de Aix-Marseille-Marsella, Francia

Resumen

En esta conferencia nos centraremos en el equipo praxeológico (conjunto de relaciones con habilidades y conocimientos) que existe hoy en el puesto de profesor. El análisis de las sesiones de clase o materiales para la clase hace posible resaltar que él sufre de ciertas deficiencias en términos de lo que podría o debería existir. A partir del análisis de las necesidades praxeológicas, traeremos a la luz algunas de estas lagunas, matemáticas o didácticas, las que serán estructuradas y en ese proceso identificaremos un cierto número de condiciones y limitaciones que obstaculizan o incluso impiden la satisfacción de estas necesidades.

Palabras clave: Equipo praxeológico, TAD.

CONTRIBUIÇÃO DA DIDÁTICA DA MATEMÁTICA NA FORMA CONTINUADA DE PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA

Saddo Ag Almouloud

saddoag@gmail.com

Pontificia Universidad Católica de São Paulo, Brasil

Resumen

Proponemos presentar brevemente una parte de la contribución teórica de la Didáctica de las Matemáticas para comprender los procesos de enseñanza y aprendizaje de los conceptos matemáticos. Entendemos la "Didáctica de las Matemáticas" como la ciencia de la educación que estudia situaciones que apuntan a la adquisición de conocimiento por parte de estudiantes, niños o adultos en formación, tanto desde el punto de vista de las características de estas situaciones como del aprendizaje que permiten. También estudia las condiciones que favorecen la adquisición de conceptos matemáticos por parte de los estudiantes. En nuestro panel, nos centraremos esencialmente en la Teoría de las situaciones didácticas (TSD) y la Teoría antropológica de la didáctica (TAD) cuyo alcance va más allá del estudio de fenómenos relacionados con la construcción de conceptos matemáticos por parte de los estudiantes. Centraremos nuestras reflexiones en las contribuciones de estas teorías en la formación de maestros que enseñan matemáticas.

Palavras-chaves: *Didática da Matemática; Teoria das Situações Didáticas; Teoria Antropológica do Didático; Formação de professores.*

Introdução

Um dos objetivos nesses últimos anos é investigar a formação de professores, mais especificamente, em nosso caso, a formação de professores de Matemática, bem como as questões metodológicas. Neste sentido, são temas de investigação: Formação de professores de professores de matemática: demandas institucionais e da Universidades; Processos de ensino e de aprendizagem de Alunos com Necessidades Educacionais Especiais e formação de professores envolvidos nesses processos; Engenharia didática de formação voltada para a formação de professores; Engenharia Didática de Segunda Geração, Engenharia Didática dos Domínios de Experiência, Engenharia dos Percursos de Estudo Pesquisa (PEP) e Percurso de Estudo e Pesquisa para a Formação de professores (PEP-FP). O foco da minha conferência paralela vai estar na contribuição, principalmente, da TAD na compreensão de processos relacionados com a formação de professores que ensinam a Matemática, mais especificamente no estudo de PEP e PEP-FP.

Referencial teórico

As reflexões tecidas neste texto apoiam-se na TAD desenvolvida por Chevallard (1999) e colaboradores.

Bosch e Chevallard (1999) asseveram que essa teoria permite analisar, descrever e estudar as práticas institucionais. Nesse sentido um conteúdo matematicamente organizado é, em parte, o objetivo que o professor almeja ao mesmo tempo em que dá suporte para a elaboração da praxeologia ou organização didática, que será colocada em prática, na sala de aula, como organização do saber matemático em jogo. Segundo Chevallard (2002), o primeiro aspecto dessa organização caracteriza o saber-fazer, designado normalmente por um **bloco prático-técnico** que considera que toda atividade humana, inclusive as atividades matemáticas, consiste em cumprir uma tarefa (t) de certo tipo (T), por pelo menos uma técnica (τ). O segundo aspecto caracteriza o saber, em um sentido restrito, geralmente designado por um **bloco tecnológico-teórico**, que considera certa tecnologia (θ) que justifica a técnica (τ), ou seja, ao mesmo tempo permite pensar sobre tal técnica e também produzir novas técnicas, uma teoria (Θ), por sua vez, justificaria tal tecnologia.

Para Chevallard (2002), um tipo de tarefa do professor é "ensinar certo tema matemático" entendendo por "tema matemático" uma organização praxeológica de natureza matemática, que ele chama de **organização matemática**. Para o autor, em um universo de tarefas rotineiras, as praxeologias podem envelhecer, quando seus componentes teóricos e tecnológicos perderem crédito, pois, a todo o momento, novos tipos de tarefas problemáticas se apresentam como *problemas*, cuja solução encaminha para a construção de novas praxeologias.

A TAD que tem o propósito de formular o problema da formação de professores em termos das praxeologias a serem ensinadas, praxeologias para o ensino e praxeologias para a profissão, como proposto por Cirade (2006), na seguinte afirmação:

Quais são as questões cruciais que os professores enfrentam em sua prática docente e o que a formação pode fazer para ajudá-los a construir respostas satisfatórias – na forma de praxeologias – a essas questões? Em particular, como as questões na origem das praxeologias matemáticas são geradas pelo ensino e pelas praxeologias matemáticas para o ensino? Quais são os problemas que constituem a *raison de ser* das praxeologias da profissão docente? (CIRADE, 2016)

Se a proposta do dispositivo didático para o ensino e aprendizagem da matemática é formulada por meio dos percursos de estudo e pesquisa (PEP), a fim de integrar a razão de ser do saber escolar no cerne do processo de estudo (Chevallard, 2013), e promover o desenvolvimento das condições necessárias para tornar possível uma atividade matemática funcional, como apontado por Barquero (2009), Ruiz-Munzón (2010) e Serrano (2013), parece claro que uma abordagem progressiva no novo paradigma do questionamento mundial requer a transformação das condições matemáticas de trabalho dos professores e, em particular, um repensar radical do tipo de formação necessária para o ensino da matemática.

Assim, o dispositivo de formação de professores proposto a partir do TAD tem a estrutura do Percurso de Estudo e Pesquisa para a formação de Professores (PEP-FP), um percurso que começa a partir de uma questão problemática para a profissão docente, que chamamos de Q0-FP. O estudo desta questão será articulado em cinco módulos que constituem os componentes do PEP-FP, com as características que descrevo mais adiante.

Apresento minha perspectiva teórico-metodológica baseada na TAD e na Engenharia didática do Percurso de Estudo e Pesquisa proposta por Chevallard (2009a e 2009b), especificamente, no Percurso de Estudo e Pesquisa para formação de professores (PEP-FP).

Engenharia didática do Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP)

Na Teoria Antropológica do Didático, Chevallard (2013) identifica o fenômeno didático do Monumentalismo dos saberes, que é descrito com a analogia de um museu no qual os estudantes visitam as obras as quais somente podem ser vistas e veneradas, sem tocá-las ou manipulá-las e sem questioná-las, isto sob o paradigma das vistas das obras. Como contra paradigma, o pesquisador apresenta o paradigma do questionamento do mundo, no qual as obras podem ser visitadas na procura de dar resposta a um questionamento inicial, neste paradigma é importante estudar as razões de ser que fizeram e fazem existir determinada obra.

Para Chevallard (2009), toda situação didática pode ser representada por um sistema didático $S(X; Y; \heartsuit)$. Os sistemas didáticos vão se diferenciar sob o paradigma que os envolve, porém, podem ser $S(X; Y; O)$, se este está sob do paradigma da visita das obras ou pode ser $S(X; Y; Q)$, se está sob o paradigma do questionamento do mundo.

Baseado no paradigma do questionamento do mundo, Chevallard (2001c, 2009a, 2009b, 2011a e 2013) apresenta um dispositivo didático chamado de Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP), que amplia o sistema didático para integrar o chamado esquema herbartiano⁴. A forma reduzida do esquema é a seguinte: $S(X; Y; Q) \Rightarrow R^\heartsuit$

O esquema indica que os estudantes X investigam sobre uma pergunta Q sob a direção de Y, no intuito de dar uma resposta R à Q. Isto é, uma pergunta Q é explorada e uma resposta R deve ser produzida. Esse processo é indicado pela seta $\Rightarrow$. O símbolo $\heartsuit$ como expoente de R, representa a relatividade institucional do saber, isto é, que a resposta R é produzida sob determinadas condições/restrições próprias dessa instituição. (CHEVALLARD, 2009).

A elaboração de $R^\heartsuit$ a partir de Q supõe então a "fabricação", por parte do sistema S, de um *milieu* didático M, um meio de exploração e de construção da resposta Q. Isto é denotado como segue: $[S(X; Y; Q) \Rightarrow M] \Rightarrow R^\heartsuit$ (esquema herbartiano)

O esquema herbartiano, semidesenvolvido, indica que o sistema didático constrói e organiza ($\Rightarrow$) o *milieu* M como o qual produzirá ($\Rightarrow$) uma resposta $R^\heartsuit$. Para Chevallard (2009a),

M não está construído de antemão, se constrói de forma paralela à busca de respostas. A construção do *milieu* M implica ativar os gestos

⁴ Chamado de esquema herbartiano pelo o pedagogo alemão, Johann Friedrich Herbart (1776-1841) quem é considerado como o pai da pedagogia científica.

em cinco momentos: observar, analisar, avaliar, desenvolver, difundir e defender objetos, obras, recursos, informação etc. que possam ser incorporados, total ou parcialmente, ao *milieu* e ser parte indispensável na construção da resposta $R^\heartsuit$. (CHEVALLARD, 2009a, p.20, tradução nossa)

O *milieu* M é o conjunto de todos os recursos úteis para a construção de $R^\heartsuit$. Pode ser representado como: $M = \{R_1^\circ, R_2^\circ, R_3^\circ, \dots, R_n^\circ, Q_{n+1}, \dots, Q_m, O_{m+1}, \dots, O_p\}$.

Assim, o esquema herbartiano desenvolvido ficaria representado como segue:

$$[S(X; Y; Q) \Rightarrow \{R_1^\circ, R_2^\circ, R_3^\circ, \dots, R_n^\circ, Q_{n+1}, \dots, Q_m, O_{m+1}, \dots, O_p\}] \Rightarrow R^\heartsuit$$

O autor assevera que

Os elementos de R_i° para $i = 1, \dots, n$ são as respostas “carimbadas”, “validadas” por instituições como por exemplo, o livro de classe, um site, o curso do professor, aponte de cátedra etc. Os elementos de Q_j para $j = n + 1, \dots, m$ são perguntas derivadas de Q , isto é, perguntas formuladas a partir da procura de dar resposta a Q . Os elementos de O_l para $l = m + 1, \dots, p$ são obras, teorias, montagens experimentais, praxeologias que se acredita úteis para desconstruir a resposta $R^\heartsuit$. (CHEVALLARD, 2009b, p.21-23, tradução nossa)

Com a introdução do esquema herbartiano, Chevallard (2009a, 2009b) propõe que os Percursos de Estudo e Pesquisa (PEP) partem de uma pergunta geratriz Q , de maneira que na procura de uma resposta, leva a gerar outras perguntas derivadas de Q em função das necessidades de conhecimento gerados no estudo de Q .

Algumas das características dos PEP são: É gerado a partir de uma pergunta Q , denotada geratriz, pois sua resposta não é imediata; para sua resposta, é necessário formular outras perguntas derivadas de Q . A construção do *milieu* didático M é simultânea à construção de respostas. O professor não é o possuidor absoluto do saber. Para Chevallard (2012), os estudantes ampliam suas possibilidades de ação, formulando perguntas, procurando recursos e fontes de informação, constroem respostas, as avaliam e as defendem de maneira crítica a outros estudantes. O PEP é codisciplinar, para Chevallard (2009a), isto é, o aluno precisará mobilizar várias ferramentas praxeológicas de vários quadros da matemática, estabelecendo relações entre diferentes disciplinas.

Dependendo da pergunta geratriz e do gerenciamento dela, o autor indica que os PEP podem ser abertos, semiabertos e fechados (CHEVALLARD, 2017). O autor ainda afirma que

De maneira sub-reptícia, o professor pode impor um certo percurso que leva a classe a conhecer (e confrontar) as noções matemáticas escolhidas previamente pelo mesmo professor. Mais sutilmente, o professor pode ter escolhido a pergunta para investigar de tal maneira que, sob as restrições vigentes, o percurso passe quase necessariamente por esta ou aquela obra matemática. No primeiro caso, falo de um **percurso fechado**; no segundo, de um **percurso**

semiaberto. Chamarei aberto um percurso em que o papel desempenhado pelo professor é puramente negativo, no sentido de que o professor, como "chefe de investigação", conforma-se com impor de vez em quando a decisão de não ir encontrar tal ou qual obra, que lhe parece estar ainda fora do alcance do grupo de estudantes. Só neste caso falarei de **percurso aberto**. (CHEVALLARD, 2017, p. 168-169, tradução minha).

O autor (1989, 1991 e 2009a) indica três funções didáticas ou funções de produção denotadas como **cronogênese** (avanço de estudo), **mesogênese** (evolução do *milieu*) e **topogênese** (evolução das responsabilidades entre as posições de professor e aluno).

O estudo de uma pergunta Q é concretizado em um PEP cuja duração pode variar. Mais amplamente, a descrição e análise de PEP (especialmente do ponto de vista triplo da topogênese, mesogênese e cronogênese) é um problema fundamental do TAD (CHEVALLARD, 2011b, p. 29).

Além das funções didáticas, Chevallard (2001c, 2007, 2009a) indica que o ensino por meio do PEP envolve formas de fazer ou gestos de estudo e pesquisa chamadas dialéticas (*Dialética do estudo e pesquisa, Dialética do individual e do coletivo, Dialética média – milieu, Dialética da análise e da síntese praxeológica e didática, Dialética de entrada e saída do tema, Dialética do paraquedista e das trufas, Dialética das caixas negras e caixas claras, Dialética da leitura e da escritura, Dialética da difusão e da recepção*), para pôr em marcha, pilotar, organizar e ao mesmo tempo descrever o processo de estudo.

No próximo tópico, teço algumas reflexões sobre o Percurso de Estudo e Pesquisa para formação de professores (PEP-FP) que tem a mesma estrutura do PEP.

Percurso de Estudo e Pesquisa para formação de professores (PEP-FP)

Pesquisas como as de Ruiz-Olarría (2015), Barquero, Bosch e Romo-Vázquez (2015), Barquero, Florensa, Hausberger e Romo-Vázquez (2016), Barquero, Bosch e Romo-Vázquez (2016), Licera (2017), Sierra e Gascón (2018), Barquero, Bosch e Romo-Vázquez (2018), Benito (2019), Barquero, Bosch e Romo-Vázquez (2019) e Florensa, Bosch e Gascón (2019) apresentam o dispositivo didático do Percurso de Estudo e Pesquisa para a Formação de Professores.

O percurso de estudo e pesquisa para formação de professores tem como objetivo familiarizar aos professores em formação inicial ou em formação continuada com o PEP como um dispositivo didático útil para seu desenvolvimento profissional.

O objetivo é ir preparando uma transição efetiva do paradigma monumentalista ao paradigma de questionamento do mundo, a própria formação de professores necessita de dispositivos didáticos não fundamentados unicamente no paradigma monumentalista e, por isso, se deve recorrer de alguma forma a dispositivos com estrutura do

tipo PEP (Estudo de questões, mídias, *milieux*). (RUIZ-OLARRÍA, 2015, p. 136, tradução nossa).

Para Ruiz-Olarría (2015), o PEP-FP também inicia com uma questão geratriz Q_0 -FP a qual deve ser formulada para a busca de contextos ligados na formação de professores, esta deve focar um objeto de ensino a ser trabalhado considerando o nível escolar em que estes professores estão inseridos.

Todo processo de formação surge para responder a uma pergunta problemática Q_0 . No caso da formação de professores, o ponto de partida é uma questão vital e crucial para a profissão de professor que chamamos de Q_0 -FP. Para dar resposta a essa pergunta, o processo de formação é articulado em cinco módulos e é justamente o estudo dessa pergunta inicial que dará origem ao PEP-FP, permitindo ao mesmo tempo articular os módulos que o compõem e mostrar sua funcionalidade. (RUIZ-OLARRÍA, 2015, p. 137, tradução minha).

Como indicado por esses autores, o PEP-FP se desenvolve em 5 módulos (M_0 , M_1 , M_2 , M_3 e M_4) que são articulados durante o percurso. Segundo Ruiz-Olarría (2015); Barquero, Bosch e Romo-Vázquez (2015); Sierra e Gascón (2018); Barquero, Bosch e Romo-Vázquez (2018); Florensa, Bosch e Gascón (2019); Barquero, Bosch e Romo-Vázquez (2019) e Ruiz-Olarría, Bosch e Gascón (2019), os módulos do PEP-FP são:

Módulo M_0 : *Tornar explícitas as razões de ser do PEP-FP*, esse módulo. inicia-se com uma pergunta geratriz do tipo, como ensinar um conteúdo matemática específico C ? Esta pergunta é a que se pretende dar resposta, ao menos parcialmente, ao finalizar o processo de estudo.

O que é C ? De onde surgiu? Em quais âmbitos matemáticos e não matemáticos se utiliza ou utilizava? Por que se deve ensinar C ? Quais são suas razões de ser na matemática escolar (as estabelecidas explícita ou implicitamente e as potenciais)? Quais propostas de ensino existem? O que se sabe delas? etc. (RUIZ-OLARRÍA, 2015, p. 138, tradução minha).

O desenvolvimento desse módulo é feito mediante a procura de informação disponível como resultados de pesquisa, as diretrizes do currículo, e outras propostas inovadoras. Esse módulo é transversal aos outros módulos e vai se manter aberto durante todo o percurso, pois coleta os resultados dos outros módulos do PEP-FP.

Em nosso caso, nossa pergunta Q_0 -FP é como ensinar os quadriláteros? Com perguntas parciais como: Por que se deve ensinar os quadriláteros? Quais são suas razões de ser dos quadriláteros na matemática escolar? Quais propostas de ensino dos quadriláteros existem? O que se sabe dos quadriláteros?

Módulo M_1 : *Viver um PEP*, neste módulo, os professores são devem atuar como estudantes de um PEP que é apresentado como uma possível resposta ao Q_0 . Nesta perspectiva, os autores afirmam que

Esse módulo tem como objetivo familiarizar aos professores com uma atividade matemática normalmente desconhecida e que pode existir até certo ponto em uma sala de aula comum. Os formadores atuam como "professores" do PEP, orientando o processo de estudo e pesquisa com um contrato didático muito mais aberto que o tradicional. (FLORENSA, BOSCH E GASCÓN, 2019, p. 384, tradução minha).

Este módulo, tem como finalidade que o professor conheça o que é um PEP e como gerenciá-lo, mas para isso deve de ter vivido um PEP na posição do estudante.

Módulo M₂: *Analisar o PEP vivido*, depois de ter vivenciado o PEP no módulo M₁, neste módulo procura-se que o professor analise as tarefas sob uma perspectiva praxeológica, didática e ecológica, focando no problema das condições e limitações existentes para implementar esse tipo de dispositivo de ensino nas instituições escolares.

Módulo M₃: *Desenho de um PEP*, neste módulo, o professor deve desenhar um PEP para um grupo específico de estudantes, para isto deve considerar o trabalhado nos anteriores módulos e as restrições institucionais.

Adotando um papel preliminar de designers, propõe-se adaptar e desenhar sua própria versão de atividade para um grupo específico de estudantes. Durante essa adaptação, espera-se que diferentes restrições institucionais surjam, por exemplo, rigidez curricular, distribuição de tempo, papéis tradicionais assumidos por professores e alunos, entre outros, e que sejam os próprios professores que os façam explícitos. (BARQUERO, BOSCH E ROMO-VÁZQUEZ, 2019, p. 494, tradução minha).

Este módulo procura que o professor consiga desenhar um PEP considerando o vivido, analisado e conhecido nos módulos M₀, M₁ e M₂.

Módulo M₄: *Gerenciar e experimentar um PEP*, o objetivo desse módulo é o apoio aos professores que começam no desenho e no gerenciamento dos PEP, e a coleta dos problemas, dificuldades e obstáculos que possam surgir durante a aplicação do PEP na sala de aula.

A seguir apresentamos uma relação entre o PEP é a Engenharia Didática como metodologia de pesquisa para uma proposta de um PEP-FP.

Engenharia Didática como metodologia de pesquisa e desenho do PEP

A noção de Engenharia Didática (ED) surgiu na didática da matemática no início dos anos 80. Segundo Artigue (1988, 1995), esse termo foi denominado pela forma de trabalho no ensino comparável ao trabalho do engenheiro. A autora, argumenta que o professor concebe, executa, observa e analisa sequências de ensino para alcançar a aprendizagem de um conteúdo matemático em um grupo específico de estudantes.

A Engenharia Didática (ED) possui as seguintes fases:

Primeira fase: Análise preliminar. Segundo Artigue (1995) nesta análise é realizada distinguindo três dimensões: *epistêmica* (associada às características do saber posto em jogo), *cognitiva* (associada às características cognitivas dos estudantes aos que está dirigida o ensino) e *didática* (associada às características do funcionamento do sistema de ensino). Mas a mesma autora, (Artigue, 2015) reorganiza estas dimensões e as apresenta como: Análise epistemológica, análise institucional e análise didática.

Uma análise epistemológica do conteúdo em jogo, incluindo frequentemente uma parte histórica. Essa análise ajuda os pesquisadores a fixar os objetivos precisos da ED e a identificar possíveis obstáculos epistemológicos a serem enfrentados. Também apoia a busca de situações matemáticas representativas do conhecimento visado, o que a teoria das situações didáticas chama de situações fundamentais. São situações problemáticas para as quais o conhecimento é necessário ou, em certo sentido, ideal. A análise epistemológica ajuda os pesquisadores a tomar a posição reflexiva e a distância necessárias em relação ao mundo educacional em que estão inseridas e a construir um ponto de referência. *Uma análise institucional* cujo objetivo é identificar as características do contexto em que a ED ocorre, as condições e restrições que enfrenta. Essas condições e restrições podem estar situadas em diferentes níveis do que é chamado de hierarquia de níveis de codeterminação (Chevallard, 2002) na Teoria Antropológica do Didático. [...] *Uma análise didática* cujo objetivo é pesquisar o que as pesquisas têm a oferecer em relação ao ensino e aprendizagem do conteúdo em jogo e provavelmente orientará o design. (Artigue, 2015, p. 472, tradução minha)

Observa-se nesta citação que a autora reorganiza as dimensões da primeira fase da ED considerando aspectos propostos pela TAD.

Segunda fase: Concepção e análise a priori. Nesta fase se identificam as variáveis didáticas, as quais permitem controlar os comportamentos dos estudantes e seus significados. É uma fase descritiva e preditiva.

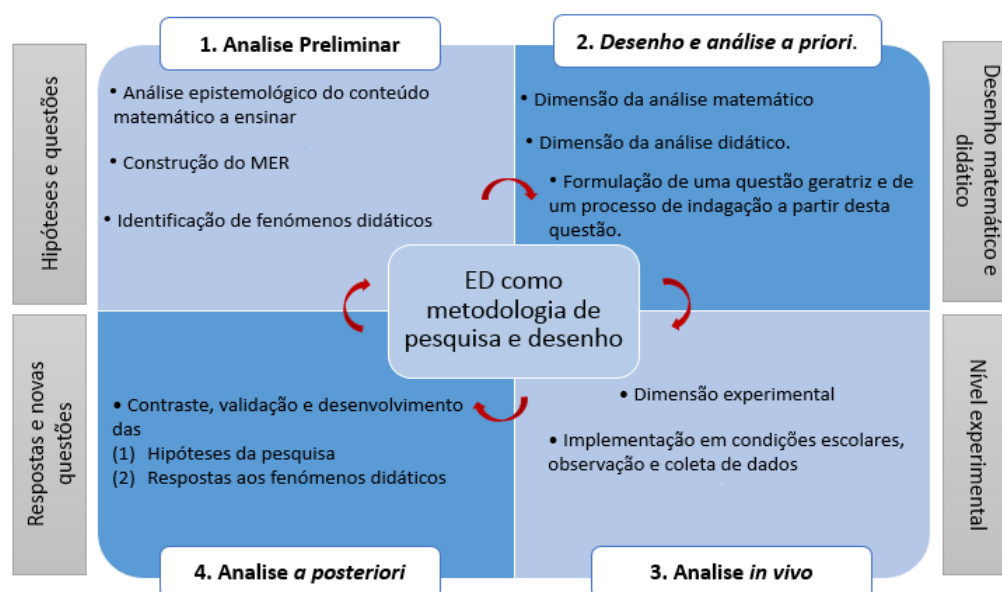
Terceira fase: Experimentação, observação e coleção de dados. Nesta fase, predomina a abordagem entre o professor pesquisador e a população de estudantes, sujeitos à pesquisa. Também são aplicados instrumentos projetados pelo pesquisador e são realizados registros de observação da experiência e a coleta de dados da pesquisa.

Quarta fase: Análise a posteriori e validação. Segundo Artigue (1995), nesta fase, é realizada a análise dos dados coletados nos diferentes momentos da experiência, assim como o confronto entre o conjunto de dados coletados na experimentação, observações da sequência de ensino e produções dos estudantes com o análises a priori.

Bosch e Barquero (2015) e García, Barquero, Florensa, Bosch (2019), levando em consideração os construtos teóricos da TAD, apresentam uma reorganização das fases da Engenharia

Didática (ED), especificamente para a construção, aplicação e análise (engenharia) de um PEP (Figura 2).

Figura 1 - ED como metodologia de pesquisa e desenho do PEP



Fonte: García, Barquero, Florensa, Bosch (2019, p.82, tradução nossa).

Na **fase de análise preliminar**, é preciso fazer o estudo das dimensões do problema didático do objeto matemático em jogo, isto é, a dimensão epistemológica que permite construir um Modelo Epistemológico de Referência (MER), a dimensão econômica e a dimensão ecológica, as quais permitem a identificação do Modelo Epistemológico de Dominante (MED).

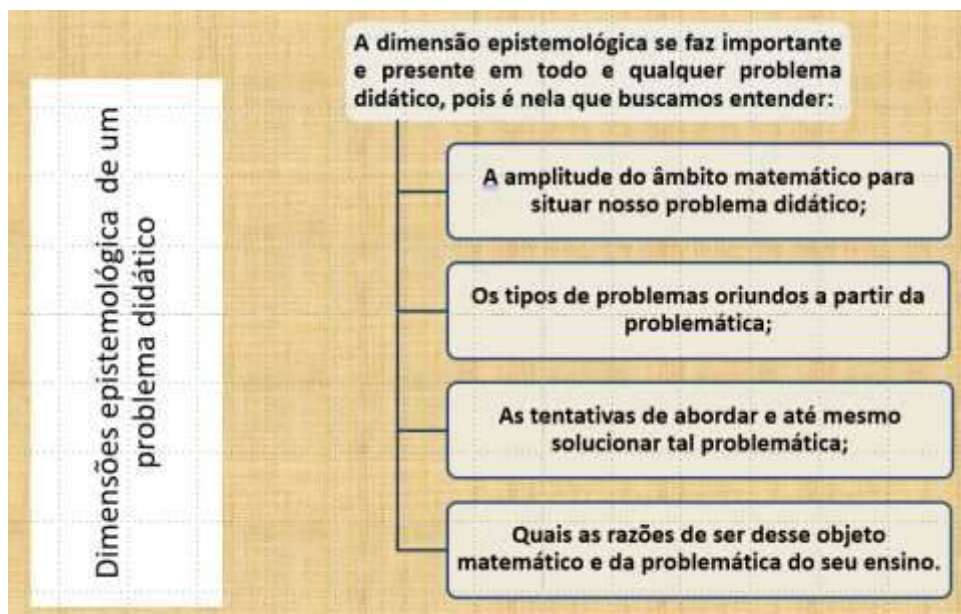
Nesta primeira fase, o estudo epistemológico nos permite a procura das razões ou razão de ser do objeto matemático investigado, tentando responder aos seguintes questionamentos elencados na figura 3.

As respostas a esses questionamentos dão indícios para a elaboração da pergunta Q_0 do PEP a ser vivido com os professores em formação inicial ou continuada.

Na fase de **desenho e análise a priori**, identificamos as questões Q_0 -FP do módulo M_0 , as quais são: Como ensinar o objeto matemático? Por que se deve ensinar esse objeto matemático? E perguntas parciais como, $Q_{0,1}$ -FP: O que dizem os documentos oficiais sobre esse objeto, sobre seu ensino e sua aprendizagem? $Q_{0,2}$ -FP: O que dizem livros didáticos sobre esse objeto? $Q_{0,3}$ -FP: Como esse objeto é ensinado? $Q_{0,4}$ -FP: Quais são as razões de ser do ensino desse objeto? O que dizem a história e os cientistas sobre esse objeto? $Q_{0,5}$ -FP: O que se sabe desse objeto? O que precisa saber sobre esse objeto para ensiná-los. Além disso, o desenho do PEP a ser vivido no módulo M_1 do PEP-FP é feito, assim como o mapa de questões e respostas⁵ preliminares.

⁵ O Mapa de questões e respostas é um esquema usado para enfatizar principalmente a dialética e a estrutura semântica de perguntas e respostas, às custas, por exemplo, da maneira como elas se desdobram no tempo. Winslow, Matheron e Mercier (2013, p. 271, tradução nossa).

Figura 2 - Questões para o estudo da dimensão epistemológica



Fonte: Construção própria

Para a construção da pergunta Q_0 do PEP a ser vivido, surge a partir do estudo epistemológico do objeto matemático em jogo, determinando a razão de ser histórica

Nesta segunda fase, Bosch e Barquero (2015) afirmam que se deve levar em conta as funções didáticas da mesogênese (evolução dos milieux experimentais), cronogênese (evolução das novas questões e o conhecimento introduzido pela mídia) e topogênese (compartilhamento de responsabilidades entre professor e estudantes).

Na fase da **Análise *in vivo***, aplica-se os módulos do PEP-FP (M_0 , M_1 , M_2 , M_3 e M_4) com professores ou futuros professores de matemática e que atuam em diferentes níveis do sistema educativo.

A coleta de dados poderia ser feita por meio de fichas de trabalhos, gravações em vídeo e em áudio das discussões que apareçam, assim como o mapa de questões e respostas produzidos no percurso da aplicação, fóruns de discussão em ambiente de tecnológico.

Em caso seja possível a aplicação do PEP construído no módulo M_3 por um professor participante da formação, deve-se apoiar, monitorar e observar as sessões da fae experimental.

Na fase da **Análise *a posteriori***, far-se-ia uma análise dos dados recolhidos durante a fase anterior (experimentação – Análise *in vivo*), a validação do desenvolvimento tanto do PEP como o PEP-FP por meio das dialéticas supracitadas. Além disso, faremos um estudo das condições e restrições dos módulos do PEP-FP pelo intermédio das funções didáticas da mesogênese, cronogênese e topogênese. Deve-se avaliar, também, as hipóteses das pesquisas feitas na primeira etapa da ED.

Referências

- Artigue, M. (1988) Engenharia Didática. In: BRUN, Jean (Org.). Didáticas das Matemáticas. Tradução de Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, Coleção Horizontes Pedagógicos, cap. 4, p.193-217.
- _____. (1995) Ingeniería didáctica. En Artigue, M., Douady, R, Moreno, L., Gómez, P. (Eds.). Ingeniería didáctica en educación matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Bogotá: Grupo editorial Iberoamérica.
- _____. (2011) Les questions de développement curriculaire à travers un exemple: l'enseignement de l'analyse en France au lycée depuis le début du XXème siècle. Revista Quadrante, vol XX, nº2, p. 109-131.
- _____. (2015) Perspectives on Design Research: The Case of Didactical Engineering. Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education, p. 467–496. doi:10.1007/978-94-017-9181-6_17
- Barquero, B., Bosch, M., Gascón, J. (2013) Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática. Revista Educação Matemática e Pesquisa, 15 (1), p. 1 – 28.
- Barquero B., Bosch, M. Romo-Vázquez, A. (2015) A study and research path on mathematical modelling for teacher education. In: Proceedings of the 9th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education. (CERME 9).
- _____. (2018) Mathematical modelling in teacher education: dealing with institutional constraints. ZDM Mathematics Education 50: 31.
- _____. (2019) El uso del esquema Herbartiano para analizar um REI online para la formación del profesorado de secundaria. Educação matemática e pesquisa, v.21, n.4, p. 493-509.
- Barquero, B. ; Florensa, I ; Hausberger, T. ; Romo-Vázquez, A. (2016). La prise en compte du collectif dans l'analyse de deux parcours d'étude et de recherche en ligne. Enjeux et débats en didactique des mathématiques : 18ème École d'été de Didactique des Mathématiques, La pensée sauvage, p.457-486. (hal-01323676)
- Bosch, M. (2018) Study and research paths: a model for inquiry. In: International Congress of Mathematics. Rio de Janeiro, Brazil.
- Bosch, M.; Garcia, F.J; Gascón, J.; Ruiz-Higuera, A. (2006) La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Educación Matemática, 18(2), p. 37-74.
- Bosch, M. ; Gascón, J. (2005) La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. Em A. Mercier & C. Margolinas (Coord.) Balises en Didactique des Mathématiques, pp. 107-122. Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage.
- _____. Introduction to the Anthropological Theory of the Didactic (2014). In: Bikner-Ahsbahr A., Prediger S. (eds) Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education. Advances in Mathematics Education. Springer.

- Brousseau, G. (1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques. Grenoble : La Pensée Sauvage Editions, v.7, n.2, p.33-115, 1986.
- Chevallard, Yves (1991). *La transposition didactique*. Grenoble : La Pensée Sauvage-Éditions.
- _____. L'analyse des pratiques enseignantes en Théorie Anthropologique du didactique. In : Recherches en Didactique des Mathématiques. v. 19. N° 2. 1999, p.221-266.
- _____. (1989) Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel. Grenoble : IREM d'Aix-Marseille.
- _____. (1991) La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné. La Pensée Sauvage, Grenoble (2^a edición).
- _____. (1997) La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado. Aique, Buenos Aires.
- _____. (1999) El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. Recherches em Didactique Mathématiques, Vol 19, n. 2, p. 221-266.
- _____. (2001a) Aspectos problemáticos de la formación docente. Conferencia impartida en las XVI Jornadas del seminário interuniversitário de Investigación en Didáctica de las Matemáticas. Escuela del Magisterio Huesca. Universidad de Zaragoza, 2001a.
- _____. (2001b) Les mathématiques et le monde : dépasser l'horreur ins-trumentale, Quadrature, núm. 41, p. 25-40.
- _____. (2001c) Les TPE comme problème didactique. Comunicação ao Seminário Nacional de Didática Matemática. Disponível em http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=14.
- _____. (2002a) Organiser l'étude. 1. Structures & Fonctions. Actes de la 11 École d'Été de Didactique des Mathématiques. France : La Pensée Sauvage. 2002. Versão eletrônica.
- _____. (2002b) Organiser l'étude 3. Écologie & régulation. In Dorier, J.-L., Artaud, M., Artigue, M., Berthelot, R., Floris, R. (Eds.), Actes de la 11^o École d'Été de Didactique des Mathématiques, p. 41 – 56. Grenoble, France : La Pensée Sauvage.
- _____. (2003) Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques. Communication aux 3^{es} Journées d'étude franco-québécoises (Université René-Descartes Paris 5, 17-18 juin 2002). Paru dans S. Maury S. & M. Caillot (éds), *Rapport au savoir et didactiques*, Éditions Fabert, Paris, p. 81-104.
- _____. (2007) Passé et present de la Théorie Anthropologique de Didactique. En A. Estepa, L. Ruiz, F. J. García (Eds.), Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (pp. 705-746). Jaén: Publicaciones de la Universidad de Jaén, 2007.
- _____. (2009a) La notion de PER: problèmes et avancées. Texto de uma apresentação apresentada à IUFM de Toulouse. Disponível em http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=161

- ____. (2009b) La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD. 15e école d'été de didactique des mathématiques, p. 16-23.
- ____. (211a) Les problématiques de la recherche en didactique à la lumière de la TAD. Séminaire de l'ACADIS. Disponible en http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=208
- ____. (2011b) Quel programme pour l'avenir de la recherche en TAD ? En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G..., M. Languier (Eds), Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico. Un panorama de la TAD, Vol 1, pp. 23-32. Cataluña, España: Centre de Recerca Matemàtica. Disponible en : <http://yves.chevallard.free.fr/>.
- ____. (2012) Théorie Anthropologique du Didactique, Ingénierie Didactique du Développement. Disponible en <http://yves.chevallard.free.fr/>
- ____. (2013) Enseñar matemática en la Sociedad del Mañana : Alegato a favor de un contraparádigma emergente. REDIMAT, Journal of Research in Mathematics Education, V2, n. 2, p. 161-18.
- ____. (2017) ¿Por qué enseñar matemáticas en secundario? Una pregunta vital para los tiempos que se avecinan. Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 20(1), p.159-169.
- García, F.J.; Baquero, B.; Florensa, I.; Bosch, M. (2019) Diseño de tareas en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Avances de Investigación en Educación Matemática, 15, p.75-94.
- Gascón, J. (2011) Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, 14 (2), p. 203-231.
- ____. Efectos del autismo temático sobre el estudio de la Geometría secundaria II. La clasificación de los cuadriláteros convexos. Revista SUMA, 45, p. 41 – 52, 2003.
- ____. (2014) Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la Didáctica Y La Historia De Las Matemáticas. Educación Matemática, P. 99-123, 2014.
- Ruiz-Olarría, A. (2015) La Formación Matemático-Didáctica del Profesorado de Secundario. De las Matemáticas por Enseñar a las Matemáticas para la Enseñanza. Tesis de Doctoral. Universidad Autónoma de Madrid. Madrid/ES.
- Ruiz-Olarría, A.; Bosch, M.; Gascón, J. (2019) Construcción de una praxeología para la enseñanza en la institución de formación del profesorado. Educación matemática, v.31, n.2.

CURIOSIDADES CRIATIVAS NA HISTÓRIA DO CONCEITO DE FUNÇÃO: CONTRIBUIÇÕES PARA O ENSINO

Iran Abreu Mendes
iamendes1@gmail.com

Universidade Federal de Pará-UFP, Brasil

Resumen

En esta conferencia tomaré como supuesto inicial que el conocimiento matemático contiene una composición epistemológica siempre conectada a la 4dinámica sociocultural de la producción de conocimiento en sus múltiples niveles (sociedad, escuela, ciencia, tecnología, religión, etc.), cuyas combinaciones epistémicas están organizadas de manera lógica para que diferentes grupos sociales puedan enunciar sus formas de ver lo que llamamos matemáticas. Se trata de proceder con un proceso de creación o invención basado en las ideas defendidas por Poincaré (1908) y otros que apoyan mis argumentos sobre la creatividad del desarrollo histórico de conceptos matemáticos para su enseñanza, como el concepto de función, considerando sus formulaciones y reformulaciones históricas, las que pueden explorarse pedagógicamente como una contribución conceptual y didáctica para enseñar esta materia en las clases de matemáticas de hoy.

Palavras-chaves: *Criatividade. História da matemática. Conceito de função. Ensino de funções.*

Introdução

A imaginação é mais importante que o conhecimento. O conhecimento tem seus limites (Albert Einstein).

A expressão de Albert Einstein, tomada como epígrafe de abertura desta introdução ao tema deste trabalho, deixa explicitamente evidente o quanto a relação entre o exercício da imaginação criativa é capaz de nos possibilitar a habilidade para se dar um passo sempre a frente em um processo de invenção que se desdobre em conhecimento novo, pois se levamos em conta um antigo provérbio cujo enunciado afirma que *a necessidade é a mãe da invenção*, poderemos nos perguntar: essa proposição afirmativa também se aplica à criatividade? Um pensador pragmático responderia "sim", porque não há diferença entre invenção e criatividade. Assim estaria terminando o debate sobre esse tema.

No entanto, esta simples resposta não parece ser suficiente para se tornar satisfatória a um pensador reflexivo e inquiridor, pelo menos não no que diz respeito à matemática. Se é inegável que a invenção passa por processo que emanam criatividade, é verdade que essa necessidade é sempre a causa subjacente? Não se pode negar que a invenção desempenha um papel importante na criação matemática embora não seja suficiente, pelo menos no se refere à experiência criativa e sua sistematização que caminha para a elaboração teórica. Não

se trata somente disso, uma vez que a criatividade está no coração da matemática e é o exemplo perfeito para uma discussão sobre a arte criadora na produção matemática em todos os tempos e espaços nos quais se estabelece a cultura humana.

A esse respeito, destaco um fragmento do registro de uma palestra proferida por Herbert Spencer em Oxford, no ano de 1933, no qual Albert Einstein comentou o seguinte:

até agora, nossa experiência nos permite acreditar que a natureza é o produto de idéias matemáticas que são simplesmente imagináveis. Estou convencido de que podemos descobrir, através de construções puramente matemáticas, os conceitos e leis que organizam essas ideias (EINSTEIN, 1933)⁶.

A expressão de Einstein deixa transparecer o quanto as ideias imaginadas estão, muitas vezes, a frente do que admitimos como possível, mas que podem nos levar a tornar outras coisas possíveis, desde que apostemos na ousadia da imaginação de modo a torná-la o mais real possível. Esse é verdadeiramente um exercício de criação. Entretanto, o ingrediente que falta para colocar em prática, os exercícios de criação é a curiosidade. No caso de vários investigadores criadores em matemática, muitas vezes, foi o impulso dado por uma pergunta simples: *¿e se?* Trata-se verdadeiramente de um momento em que pode surgir toda uma dinâmica criativa por meio da curiosidade, tal como o fez Arquimedes em seu tempo.

Neste trabalho convidamos o leitor a pensar um pouco sobre os múltiplos processos operacionalizados pelo pensamento e pelas práticas matemáticas em busca de explicação para o modo de ser e de estar dos objetos matemáticos em suas correlações no contexto sociocultural ao longo da nossa história humana, visando compreender como esses modos de ser e estar foram e são captados pela mente de quem exercita a criatividade na criação matemática em todas as suas dimensões, para assim produzir conhecimento a ser disseminado no contexto escolar e científico. Neste sentido tomarei aspectos relativos ao desenvolvimento histórico do conceito de função como foco intencional para este processo de pensar sobre o tema central: a criatividade na criação matemática ao longo de sua história e o potencial de uso no ensino de matemática.

Sobre criatividade e criação matemática

Os fundamentos teóricos que sustentam as discussões apresentadas em diversos artigos e livros que publiquei desde 2001, quase sempre convergem para princípios investigativos, ou seja, sobre o que é investigação, como praticar, como se aprender por meio da investigação, como se conhece investigando, dentre outros aspectos epistemológicos acerca desses princípios. Nesses artigos e livros tais ideias transparecem como matrizes teóricas nas quais me apoio para dialogar com princípios que sustentam minhas pesquisas sobre *História da matemática e Práticas Socioculturais*, com vistas a desenhar fundamentos epistemológicos para o ensino de matemática na Educação Básica e Superior.

⁶ Palavras de Albert Einstein sobre uma palestra de Herbert Spencer, em Oxford, em 1933.

Assim, a perspectiva da cultura matemática imbricada em práticas socioculturais não é de se encerrar a conformação do objeto em limitações epistêmicas porque como se trata apenas de uma forma para se focalizar vetorialmente o objeto na dinâmica sociocultural de produção de conhecimento humano, o aspecto matemático destacado por esse olhar nunca conformará uma dimensão plural desse conhecimento. Isto porque a dinâmica sociocultural, que é humana, não se encerra nunca; e como ela não encerra nunca, sempre surgirão elementos agregadores para que possamos fazer uma nova caracterização do que pode ser explicitado como cultura matemática material ou imaterialmente estabelecida por meio de um processo no qual a criatividade é essencial. E o mais importante é que essa dinâmica de criação vem justificar a mesma configuração epistemológica que a matemática evidencia em todo o seu desenvolvimento histórico, assim como o seu comportamento epistemológico como um certo jogo imaginativo, inventivo e inovador que se organiza por meio de combinações e rigores próprios em linguagem e técnica – eu diria um tipo de composição que não se fecha nunca, para oportunizar novos processos de criação e ampliação conceitual, embora a representação sociocultural de matemática faça emergir alguns sentidos como “uma conta” (uma expressão algorítmica que envolve aritmética ou álgebra), como “uma forma geométrica” (expressão geométrica que envolve medidas, proporcionalidade ou construções geométricas), ou outras expressões desse tipo. Todavia, a composição epistemológica do que pode ser concebido como matemática tem uma dinâmica que faz emergir múltiplos jogos combinatórios lógicos, de modo que sempre possa caber alguma explicação a mais, para ampliar sentidos e significados, e assim alargar o campo de criação matemática.

No meu entendimento a cultura matemática tem essa composição epistemológica em formação contínua, porque sempre recorre à dinâmica sociocultural de produção de conhecimento em seus múltiplos patamares (sociedade, escola, ciência, tecnologia, religião, etc), cujas combinações epistêmicas, se organizam de maneira lógica para que esse conhecimento que denominamos matemático, amplie nosso olhar nos modos como os diferentes grupos sociais podem enunciar determinados olhares sociais sobre aquilo que nos chamamos de matemática.

Trata-se, portanto, de proceder em exercícios de olhar sobre como a sociedade produz suas ideias, suas leituras do mundo, e que se torna enriquecedor, possibilitando que imaginemos mais possibilidades de diálogo com o mundo. Isto é o mais importante para adentrarmos em um caminho de compreensão da dinâmica cultural na qual a matemática se insere, ou seja, que se constitua em um movimento no qual os exercícios de olhar sobre os modos como a sociedade produz ideias, e que é enriquecedor. Talvez seja nesse princípio humano, logo sociocultural, que se assenta toda base epistemológica da matemática. Não se trata de se despir de um olhar formalizado, mas admitir que temos um olhar uno e múltiplo, singular e plural, portanto imaginativo e inventivo, que nos despe do nosso pensamento técnico para emprestar o pensamento lúdico do outro, que também é um modo de olhar. E quando pedimos o olhar do outro para também olharmos as coisas, começamos a criar possibilidades de ter conosco todos os olhares sobre as coisas.

E neste caso esse movimento sustentado pela sociodinâmica dos olhares culturais é que dá um caráter transdisciplinar à matemática, tal como estão presentes nas histórias das

matemáticas produzidas nos tempos e nos espaços, fazendo emergir daí pontos de sustentação epistemológica, como podemos ver nas histórias da cultura humana, de um modo geral, sempre com possibilidades de olharmos e emprestarmos os vários olhares para podermos ter uma amplitude maior sobre o objeto que queremos olhar. Esse é o modo característico do pensamento transdisciplinar, complexo, e que a matemática historicamente produzida também se materializa por este olhar. Se não exercitamos esse olhar, dificilmente conseguimos fazer matemática como cultura humana. Porque se restringirmos nosso olhar perderemos muitos aspectos a serem observados e, portanto, refletidos. Logo, esse é um ponto principal, ou seja, a base epistemológica para se pensar a matemática humana em sua diversidade e ao mesmo tempo unicidade; singularidade e pluralidade.

É com esse princípio que podemos abordar o processo de criação ou invenção em matemática. Para tanto podemos partir das ideias advogadas por Poincaré (1908) para formular argumentos baseados no fato de que a gênese da criação matemática é um problema que deve inspirar o mais vivo interesse do psicólogo, uma vez que se trata de uma ação cognitiva humana de processar modos de compreender e explicar fatos que forjam os modos de existir do mundo exterior e os processos internos de organização dessa compreensão e explicação no interior de cada humano em seus processos de comunicação sociocultural. Todavia, há uma questão provocativa no discurso de Poincaré: o que é, de fato, essa invenção matemática?

Para Poincaré (1908), não se trata apenas de fazer novas combinações com entes matemáticos já conhecidos, pois qualquer um poderia fazê-las e assim poder obter um número finito de resultados. Logo, inventar não significa somente ou apenas combinar para gerar coisas às vezes até inúteis, mas sim produzir para poder fazer escolhas que sejam úteis. Neste sentido, o autor assevera que os fatos matemáticos dignos de serem estudados são aqueles que, por analogia com outros fatos, podem nos conduzir ao conhecimento de novas teorias matemáticas assim como as experimentações nos favorecem conhecer melhor as fundamentações do conhecimento do mundo físico. Poincaré assevera, ainda, que a invenção se processa como se o inventor fosse um examinador de segundo nível, que não teria que interrogar senão os candidatos declarados elegíveis após uma primeira prova.

Criatividade no desenvolvimento histórico do conceito de função

A ideia da relação entre quantidades é tão antiga quanto a Matemática. Mas qual tem sido o caminho que conduziu desse sentido tão vago à concepção teórico-contemporânea de uma *função ou aplicação*, que estabelece correspondência entre elementos de um conjunto com um elemento de outro conjunto? E quais foram as diferentes representações do conceito de função ao longo da nossa história, como um conceito que se constitui central no desenvolvimento da análise? Essas são algumas das questões que moveram o exercício criativo em matemática para o desenvolvimento desse tema denominado conceitual de função.

Já na Antiguidade a ideia de função aparece exposta como relação entre grandezas na matemática babilônica, nas tábuas sexagesimais, nas relações entre quadrados e raízes quadradas, cubos e raízes cúbicas, dentre outros aspectos como medidas referentes à

astronomia antiga, particularmente nas observações estelares, solares, lunares e de outros planetas. É também desse período antigo as atribuições clássicas dos pitagóricos nas relações entre medidas relacionadas à geometria, astronomia, como por exemplo as tábuas astronômicas presentes no *Almagesto* de Ptolomeu.

As noções de função a partir das correspondências entre medidas de grandezas e valores transparece como uma concepção moderna. Entretanto, a ideia intuitiva sobre quantidade variável é muito antiga. Neste sentido, as matemáticas práticas emergentes do trabalho de Arquimedes remetem ao conceito de variável, limite e conseqüentemente ao conceito de função. O mais importante dessa dinâmica conceitual é o processo criativo estabelecido desde esses tempos remotos até a contemporaneidade, para se reinventar o conceito e se ampliar os horizontes epistemológicos sobre o assunto.

As dinâmicas concernentes ao desenvolvimento da criatividade na criação do conceito de função e sua epistemologia avança da Antiguidade clássica como no estágio zero ou de tendência técnica preliminar mencionado por Eryynck (1991) seguido pelo estágio 1 das atividades algorítmicas embrionárias estabelecidas por Nicolau de Oresme até às escolas de Oxford e de Paris, com as primeiras representações, como momentos teóricos extremamente importantes caracterizados pelos estudos dos movimentos ao das trajetórias dos corpos físicos.

Tal processo criativo historicamente construídos por filósofos e matemáticos apontam para uma dinâmica que convergiu para a ampliação dos exercícios inventivos que levaram a história do desenvolvimento do conceito de função ao estágio 2, concernente às atividades criativas (conceitual, construtiva), caracterizadas pelos modelos de função, como por exemplo a função logarítmica originada do trabalhos de John Napier (1550-1817) e o trabalho de René Descartes (1637) sobre as curvas geométricas e as funções algébricas que representaram tais curvas.

Das ideias de Descartes pode-se considerar que as atividades criativas sobre o conceito de função avançaram em direção aos algoritmos infinitos originados pelo método de John Wallis em seu *Arithmetica Infinitorum*, que originaram novos estudos em direção a um novo objeto matemático estabelecido pelos princípios e leis das variações, concretizados pelos trabalhos de Newton e Leibniz, ampliando esse conceito em extensão e significado, que retomou os embriões plantados por Arquimedes, Cavalieri, Oresme e Descartes. Tratava-se, portanto, da continuidade do estágio das atividades criativas que avançaram em direção ao estabelecimento da análise algébrica produzida, principalmente, no século XVIII, por meios dos trabalhos de Leonhard Euler (1707-1783) e de Daniel Bernoulli (1700-1782), que posteriormente abriram espaços para o fenômeno das funções multiformes.

É nesse movimento criativo que surge a obra *Introductio in analysin infinitorum* (Introdução da análise infinita), de Leonhard Euler (1748), que passou a dar outro contorno ao conceito e novas configurações algorítmicas ao assunto, de modo a evidenciar um espírito de invenção, dotado de uma técnica muito segura e confiável para obter resultados novos e variados.

Assim, o conceito de função na matemática de Euler, passou a contribuir sobremaneira para o desenvolvimento da análise algébrica, e que revelou um fenômeno ainda desconhecido sobre as funções e sua classificação formal como funções algébricas (racionais: inteiras e fracionárias e irracionais: explícitas e implícitas) e transcendentais como as funções trigonométricas, logarítmicas, exponenciais, etc.

Implicações para o ensino de Matemática

No final do século XIX as noções de função passaram a exercer uma importância decisiva na organização das matemáticas escolares, influenciando fortemente os currículos do ensino de Matemática. A abordagem proposta por Felix Klein, para a inserção do conceito de função no curso secundário e superior, naquele período, exerceu forte influência nos principais centros de estudos sobre Matemática e universidades, de modo a implicar na criação de disciplinas escolares relativas à Matemática com ênfase nos aspectos ligados à funcionalidade. Assim, o conceito de função, centrado nas ideias de variabilidade e interdependência, ocasionadas pelos estudos sobre o desenvolvimento do cálculo, já mencionados anteriormente, passou a ser tomado como princípio unificador do ensino de Matemática⁷.

A esse respeito, em 1893, durante um Congresso Internacional de Matemática, ocorrido em Chicago, Felix Klein apresentou para os professores presentes no evento, uma proposta que defendia a conveniência de adoção do conceito de função como eixo central unificador do ensino de Matemática. Posteriormente em 1904 persistiu no tema em uma conferência proferida em Göttingen, quando argumentou favoravelmente acerca do principal objetivo do ensino da Matemática no curso secundário, quando sugeriu que o ensino de Matemática deveria priorizar uma correlação com diversas partes de temas integrantes da formação intelectual dos estudantes, como por exemplo a noção de função e sua representação geométrica e analítica (gráfica), apoiada na ideia de dependência entre duas grandezas variáveis, tais como já vinha sendo anunciada desde os trabalhos de Nicolau de Oresme até Euler, ou seja, um processo de criação funcional que tinha uma trajetória de desenvolvimento há mais de quatro séculos, por meio de um processamento criativo (cf. ROXO, 1937).

Assim, o conceito de função passou a ser visto como um dos objetos principais do ensino de Matemática. Logo, haveria necessidade de uma reorganização dos conteúdos de Matemática no curso secundário e superior, em vistas das novas propostas de abordagens didáticas e conceituais para tal assunto, considerado de importância decisiva para o desenvolvimento científico e tecnológico do século XX que estava se iniciando, até então.

Tratava-se, portanto, de uma inovação criativa no ensino de Matemática que havia tomado como base a criação matemática desenvolvida durante mais de quatro séculos e que passava a exercer importância essencial na organização de um processo de disciplinarização e disciplinação da Matemática, que ocasionou a produção de saberes profissionais relativos ao ensino de Matemática, ou seja, *o saber a ensinar e para ensinar matemática no curso*

⁷ Para maior aprofundamento no assunto ver Pava (1927) mencionado nas referências no final deste livro.

secundário, conforme enfatiza Valente (2017), quando menciona as discussões conceituais e pedagógicas propostas por Euclides Roxo nas primeiras décadas do século XX.

Foi com esse pensamento que nas primeiras décadas do século XX surgiram propostas e encaminhamentos disciplinares de reorientação curricular, inovações em programas de ensino e reelaboração de conteúdos dos livros didáticos ou manuais escolares de Matemática para o curso secundário, com base nas inovações criativas advindas da nova Matemática caracterizada pelo pensamento funcional. Tratava-se de uma abordagem para o ensino de Matemática baseada no conceito de função, como uma perspectiva de estabelecimento de conexões entre saberes matemáticos por meio do referido conceito, tendo em vista a preparação dos estudantes para o ensino superior. Essa abordagem funcional estava fundamentada nas divulgações epistemológicas enunciadas por Felix Klein para essa transformação de saberes, advindas dos estudos sobre função na Europa, ao longo do século XIX, como desdobramento conceitual do desenvolvimento do cálculo diferencial e integral, mencionado anteriormente.

Os desafios à criatividade dos professores dos cursos secundário e superior, bem como aos autores de livros didáticos e manuais escolares de matemática residia em estabelecer conexões conceituais e didáticas entre os conteúdos de matemática por meio de uma abordagem funcional que transversalizasse o conhecimento disciplinar do curso, de modo a preparar os estudantes para o ensino superior. Assim foram estabelecidos alguns objetivos para um ensino de matemática centrado no pensamento funcional, cuja diretriz epistemológica reconhecia que a dependência de uma quantidade variável em relação a outra era um dos aspectos que os professores de matemática deveriam considerar como parte mais importante do pensamento funcional a ser estimulado como uma importante construção na aprendizagem da matemática escolar pelos estudantes.

Consequentemente, propunha-se a determinação da natureza das relações entre essas variáveis e os modos como as mesmas poderiam ser expressas algebricamente por meio de tabelas e gráficos, a fim de possibilitar o alcance dos objetivos desse novo ensino de matemática, centrado no desenvolvimento das várias características do pensamento funcional, conforme já mencionado anteriormente. Assim, considerou-se prioritário o uso de expressões algébricas para representar o conceito de função, com destaque para o estabelecimento da definição de variável ou de variação e do significado desse conceito como aplicação e transformação.

A evidência de criatividade sobre esse tema se estabeleceu principalmente nas conexões entre pensamento, linguagens e problematizações com características de ações transversais ou interdisciplinares para esse tema, uma vez que eram muito utilizados problemas relacionados às mais diversas áreas de conhecimento, além da matemática, para expressar tanto o pensamento quanto as linguagens funcionais. Nessa dinâmica foram se estabelecendo processos criativos para inserção nas atividades curriculares, conceituais e didáticas no ensino de matemática do curso secundário.

Neste sentido, Euclides Roxo (1937) considerou que o desenvolvimento das noções de função era completamente acessível aos estudantes do curso secundário, desde que tais

noções fossem desenvolvidas processualmente, de maneira lenta e progressiva, em todos os anos do curso secundário e configurado para todas as partes da matemática como elemento unificador. Daí terem surgido vários comentários sobre o princípio da funcionalidade que transversalizava todo o ensino da matemática na época, como um aspecto criativo que transformava os modos de pensar e fazer matemática no curso secundário da época, embora tenha sofrido fortes críticas de muitos *experts* daquele período.

Outro destaque apontado por Roxo (1937) foi a respeito da necessidade de se discutir acerca do desenvolvimento histórico-epistemológico do conceito de função no âmbito do domínio matemático e filosófico dos estudantes para sua ampliação conceitual ao ingressar na universidade, bem como a relação desse conceito nas ciências físicas e naturais e nas ciências sociais. Percebe-se que é a partir desses novos encaminhamentos conceituais e didáticos que os saberes concernentes ao ensino e a aprendizagem de função no curso secundário passaram a seguir uma nova trajetória como disciplina escolar que implicou modificações curriculares e reorientações nos modos de tratar o assunto nos manuais escolares conforme já mencionei anteriormente.

Igualmente, os estudos que desenvolvo desde 2007 sobre esses processos criativos na história da criação matemática apontam que outros ramos disciplinares da matemática em seu aspecto acadêmico e escolar passaram por transformações similares que processo apresentado nesta conferência, sobre o conceito de função, podendo também me levar a apresentar outros exemplos desses processos criativos, conforme se fizerem necessários, como é o caso do desenvolvimento histórico do cálculo diferencial e integral.

Referências

- Barthélemy, G. (2003). *2500 anos de Matemática*. A evolução das ideias. Tradução Isabel Andrade. Lisboa : Instituto Piaget.
- Dahan-Dalmedico, A., Peiffer, J. (1986). *Une histoire des mathématiques* : Routes et dédales. Paris : Éditions du Seuil, 1986.
- Descartes, R. (1637). La Géométrie. In : *Discours de la méthode*.
- Einstein, A (1993). *Escritos da Maturidade*. Tradução Maria Luiza X. de A. Borges. 5ª Reimpressão. Rio de Janeiro: Nova Fronteira.
- Hofstetter, R., Valente, W. R. (Org.) (2017). *Saberes em (trans)formação*: tema central da formação de professores. São Paulo: Editora Livraria da Física.
- Poincaré, H. (1908). *Science et Methode*. Paris: Flammarion. Reed. Paris: Kimé, 1999.
- Roxo, E. (1937). *A Matemática na Educação Secundária*. São Paulo: Companhia Editora Nacional.
- Valente, W. R. (2017). A matemática a ensinar e a matemática para ensinar. In: Hofstetter, R., Valente, W. R. (Org.). *Saberes em (trans)formação*: tema central da formação de professores. São Paulo: Editora Livraria da Física.

CAMBIOS EN EL ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO DE PROFESORES DEL LICEO EN EL DOMINIO DEL ANÁLISIS Y SUS IMPLICANCIAS CON LA MODELIZACIÓN

Elizabeth Montoya Delgadillo

elizabeth.montoya@pucv.cl

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile

Resumen

Se presenta un trabajo con profesores relacionados con problemas de modelización matemática en el dominio del cálculo. Se utilizó un marco conceptual, el cual, permitió generar un diálogo entre las teorías de los Espacios de Trabajo Matemático y el ciclo de modelización de Borromeo Ferri. Los datos y resultados provienen de un contexto de formación continua con temas relacionados a situaciones en que se evidencia el fenómeno discreto-denso-continuo de algunas funciones, como es el caso de la enseñanza de la función exponencial. Lo anterior nos permitió que los profesores repensaran los logros y dificultades de llevar la modelización matemática al aula en un contexto de enseñanza. Además, desde un punto de vista teórico, se tuvo la oportunidad de validar con datos experimentales las relaciones teóricas entre ambos enfoques.

Palabras clave: *modelización, formación de profesores, función exponencial.*

La formación de profesores de matemática

En la actualidad la relevancia de la formación de profesores es indiscutible y en los últimos años, las políticas educativas de la mayoría de los países del mundo reafirman la importancia en los logros en el sistema educativo (Proyecto de Estrategia a plazo medio 2014-2021; UNESCO). En este mismo informe se presenta la estrategia 2, en la cual se manifiesta el objetivo de formar bien a todos los docentes, tanto antes de empezar como durante su trayectoria profesional, indicando que los docentes han de poseer buenos conocimientos en las materias que imparten.

La concepción del Análisis en la Enseñanza Media: “análisis”

Nuestro problema se inserta temas que son tratados en el currículo del liceo propuestos en las bases curriculares, en los Programas de Estudio de Matemática y en la Formación diferenciados (Funciones u procesos infinitos, y Álgebra y Modelos Analíticos) en Chile y que tienen un sustento en principios del análisis; tales como problemas de modelación, inecuaciones, funciones, completitud de $\mathbb{R}$, densidad, entre otros. Pero estos principios no son explotados como tales y permanecen en algoritmos correctos pero desprovistos de fundamentos y contextos; existen objetos en este dominio que son abordados simplemente de manera algorítmica, provocando un desplazamiento y el privilegio del trabajo principalmente al dominio del álgebra (Montoya Delgadillo & Vivier, 2015), y perdiendo en consecuencia su

sentido analítico. Hemos constatado que existe una desarticulación entre lo que el futuro profesor aprende en la universidad con lo que luego va a enseñar como profesor en servicio (Montoya Delgadillo, Mena Lorca, Mena Lorca; 2014; 2016) y como especialista en didácticas de la matemática, tenemos una gran oportunidad de fortalecer y apoyar la formación de profesores en este ámbito disciplinar.

Por otro lado, la modelización matemática (MM) ha sido objeto de estudio en didáctica de la matemática por más de tres décadas, cobrando fuerza no sólo por su inclusión en grupos de trabajo internacionales como ICMI, ICTMA, CERME, RELME, sino que, además, por la marcada evidencia experimental producto de investigaciones a nivel internacional. Las investigaciones en MM sostienen que formar a los estudiantes en MM, permite no sólo promover su desempeño en el nivel escolar sino también en el ámbito social, como ciudadano (Kaiser & Brand, 2015; Blum, 2015; Borromeo, 2018)). En Chile, tal promoción de la MM es solicitada por el currículo educativo en todos los niveles educacionales. En el grupo de investigación de la teoría de Espacio de Trabajo Matemático (ETM) (desarrollado por Kuzniak y colaboradores, Kuzniak & Richard, 2011; Kuzniak, Tanguay & Elia, 2016; Montoya & Vivier, 2016), el interés por considerar el enfoque de modelación matemática, es relativamente reciente, realizándose proyectos e investigaciones que tratan sobre la interacción entre matemática y otras disciplinas, que permiten ir fundamentando el rol de ETM en MM.

El dominio de estudio en el análisis y sus fundamentos en la enseñanza en el liceo

La enseñanza del análisis puede ser vista como un proyecto a largo plazo de enseñanza (Bloom & Törner, 1984), comenzando con ecuaciones y proporcionalidad en la Enseñanza Básica, siguiendo con funciones, comportamiento analítico de las gráficas, la recta –su ecuación, su pendiente– la tangente, el concepto de área, sucesiones, entre otros en la Enseñanza Media, para continuar en los primeros años universitarios (de manera formal) el límite, la continuidad, la derivada, la integral entre otros. Todo este proyecto de enseñanza da incluso una base conceptual para el estudio de las probabilidades y de la Estadística. Por otro lado, el desarrollo de la habilidad de modelar (Blum & Borromeo Ferri, 2009) moviliza nociones y objetos matemáticos de los distintos dominios de la matemática, donde los conocimientos que pueden adquirir los estudiantes en el liceo se fundamentan en argumentos que viven en el dominio del análisis.

Cuando se habla de **análisis**, especialmente en las etapas iniciales de enseñanza, lo que viene a la mente es el cálculo y los esfuerzos por marcar la diferencia entre el cálculo y el análisis son más bien recientes. Klein (1908), en su libro de Matemática Elemental, no hace la diferencia entre cálculo infinitesimal y análisis. En otras obras, como la de Bourbaki (1972), o Lakatos (1978) tampoco hacen una diferencia explícita. Sin embargo, los tres se refieren a estos términos “cronológicamente” como cálculo, luego cálculo infinitesimal y luego análisis.

La inserción del análisis en la Enseñanza Media constituye una parte importante de los programas de matemáticas; en números, álgebra y funciones, pero también en forma transversal en algunos ejes como geometría o datos y estadística. Según Montoya Delgadillo y otros (2016) el acento debiera estar puesto en enfoques no solo algorítmicos, porque los

procedimientos y las nociones algébricas y numéricas se vuelven inadecuados para modelizar y tratar situaciones internas en las matemáticas como también externas.

En la Enseñanza Media (o liceo) en cierto modo se observa una enseñanza de objetos del análisis donde se han obviado sus fundamentos para conservar sólo los métodos, por ejemplo, resolver una ecuación o inecuación se hace solo con una serie de operaciones algebraicas algoritmizadas: a nivel de la transposición la evidencia muestra que el álgebra operatoria domina la enseñanza (Montoya Delgadillo, Mena Lorca, Mena Lorca, 2016) sin que exista una relación con las gráficas bajo un trabajo analítico de las funciones involucradas (López, 2013).

Desde luego, estos procedimientos algebrizados son útiles y necesarios para tratar los problemas y esto podría ser incluso necesarios. El profesor debería estar consciente del sentido y de la conceptualización que se debe esperar de los alumnos. Por esto, es pertinente observar la transposición que debe hacer un profesor, sin necesariamente reemplazar, sino que completando para tratar los conceptos involucrados; es decir, articulando diferentes procesos de dominios de la matemática.

La enseñanza de la función exponencial, en muchos casos, se introduce como un modelo poblacional, que modela fenómenos de la física, biología y química, y por lo tanto con un tratamiento discreto (no continuo), o bien, como una función que modela un problema de interés compuesto con un tratamiento basado en puntos dados por tablas, que en ambos casos no representa a la función exponencial con dominio en $\mathbb{R}$, la aproximación es discreta y aparece la función exponencial (y por consecuencia el logaritmo) como resultado al unir puntos sin una verdadera reflexión o cuestionamiento de la continuidad de esta función, de la pertinencia de la gráfica o de la misma función. Adicionalmente, el uso del software viene a invisibilizar la continuidad de la función exponencial con dominio en $\mathbb{R}$, y tampoco se observa que el estudiante tenga claridad cuando trabaja con a^n para una función discreta y luego con a^x para una función continua (Kuzniak, Montoya Delgadillo, Vandebrouk & Vivier, 2015).

En esta conferencia desarrollaremos problemas de modelización matemática relacionadas con la función exponencial y como los docentes, en formación inicial y continua los consideran. La modelización despliega conocimientos del profesor y del estudiante los cuales se fundamenta en el dominio del análisis, y sin estos conocimientos la modelación se transforma en un proceso sin reflexión analítica matemática.

Los profesores en su formación poseen conocimientos en el dominio del análisis, pero parecen estar desarticulados para enfrentar la enseñanza de la función exponencial en el liceo, y en adición, cuando están insertos con problemas de modelización.

Fenómenos didácticos e investigaciones en la didáctica del análisis

El fenómeno de enseñar un objeto bajo una aproximación discreta, siendo este continuo, lo hemos reconocido como la dialéctica *discreta-continua* que poseen ciertos objetos matemáticos al ser enseñados (Kuzniak et al., 2015). y nos preguntamos ¿qué consecuencias trae aprender objetos matemáticos continuos bajo una aproximación discreta?

En el liceo los problemas de modelación son meros introducciones en los textos escolares para pasar rápidamente a un trabajo algebraico de estas funciones, como es el caso de la enseñanza

de la función exponencial y logaritmo. En estos problemas no se desarrolla ni explota el carácter propio de este, y la continuidad de estas funciones son vistas empíricamente bajo una gráfica y el estudio analítico también es dejado de lado, a pesar que el programa si da espacio para ser tratado.

Fundamentos teóricos

El estudio contemplado se interesa tanto de la formación de los profesores en análisis matemático como en la comprensión en profundidad de este dominio desde un punto de vista epistemológico y didáctico y sus implicancias en un proceso de modelización matemática. Esta especificidad de la búsqueda nos condujo a privilegiar el marco teórico de los Espacios de Trabajo Matemático (ETM). Los desarrollos recientes de este marco (Kuzniak, 2011; Montoya Delgadillo, 2014) abren perspectivas nuevas para la investigación y la comprensión de distintos dominios matemáticos como se ha notado en los congresos temáticos del ETM (Nicosia en 2009, París en 2010, Montreal en 2012, Madrid en 2014, Florina en 2016, y Valparaíso en 2018).

Espacio de Trabajo Matemático

Se distinguen tres tipos de ETM, a saber: el *ETM de referencia*, definido según la relación con el saber, idealmente bajo criterios matemáticos; el *ETM idóneo*, que depende de una institución, y que es definido según la manera que este saber se enseña en esa con una función específica; y el *ETM personal*, que depende del individuo y está definido por la manera en que el individuo se enfrenta a un problema matemático, con sus propios conocimientos y capacidades cognitivas.

En el ETM se concibe la reflexión como el fruto de la interacción entre un individuo y los problemas en un dominio en un ambiente organizado por y para el matemático (geómetra, o algebrista, etc.) mediante la articulación de dos planos: el epistemológico y el cognitivo (Kuzniak, 2011).

El *plano epistemológico* está compuesto por tres *componentes* o polos, a saber: el *representamen*, que se constituye de los registros de representación semiótica usados; los *artefactos*, que son elementos materiales o simbólicos utilizados; y el *referencial* que está constituido por las propiedades, los teoremas, las definiciones. El *plano cognitivo* se compone de los procesos de *visualización*, *construcción* y *prueba*. Los planos se articulan mediante tres *génesis*: una *génesis semiótica*, basada en los registros de representación semiótica que confiere a los objetos tangibles del ETM un estatus de objeto matemático operacional; una *génesis instrumental*, que permite operacionalizar los artefactos en el proceso de construcción; y una *génesis discursiva* de la prueba que da sentido a las propiedades para dejarlas al servicio del razonamiento matemático.

Esta articulación no debe ser entendida como la unión individual entre las componentes de los planos epistemológico y cognitivo, sino más bien como una relación activa conjuntamente por dos o incluso tres génesis. (Kuzniak y Richard, 2014) quienes identificaron *tres planos verticales*: [Sem-Ins]; [Ins-Dis] y [Sem-Dis]. En la figura 1 se presenta dos diagramas que identifica las componentes del ETM, las génesis y la conformación de los planos verticales.

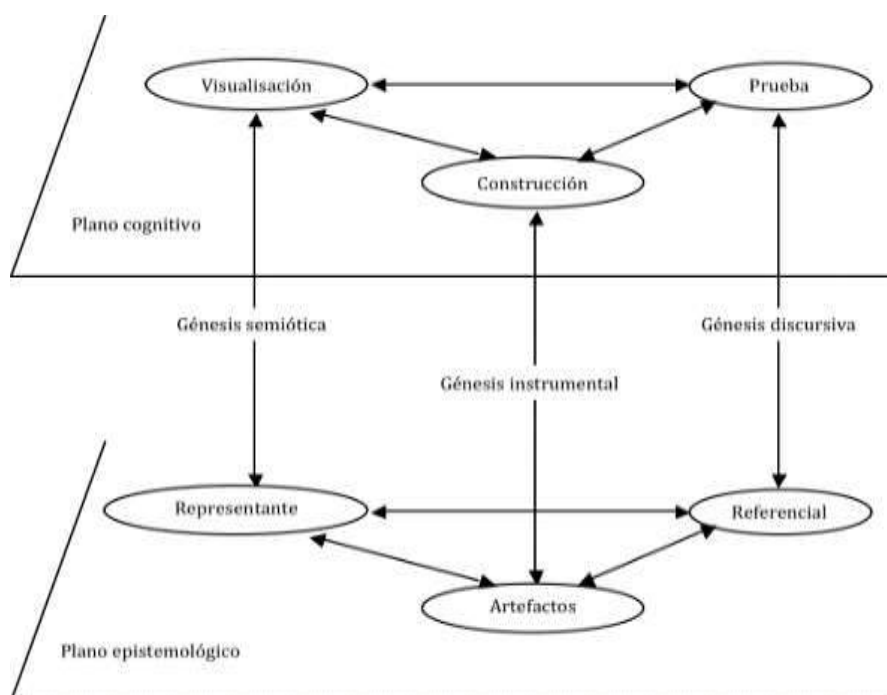


Figura 1: Espacio de Trabajo Matemático y sus génesis (Kuzniak 2011; Kuzniak & Richard, 2015)

El ciclo de modelización de Borromeo Ferri

El ciclo de modelización presentado a continuación de Borromeo Ferri (2006, p.92) permite analizar la producción de los estudiantes desde un punto de vista cognitivo, al estudiar las rutas individuales del proceso de modelización seguido por los estudiantes cuando se enfrentan a una tarea de modelización. La modelización en este proceso es considerada como una actividad que permite confrontar la matemática con la realidad, y, a través de ello, se puede caracterizar el trabajo del estudiante ante la tarea, pero también, permite el abordaje de nuevas nociones matemáticas, a través del diseño de situaciones de aprendizaje, ello de acuerdo al uso que el investigador le dé al modelo.

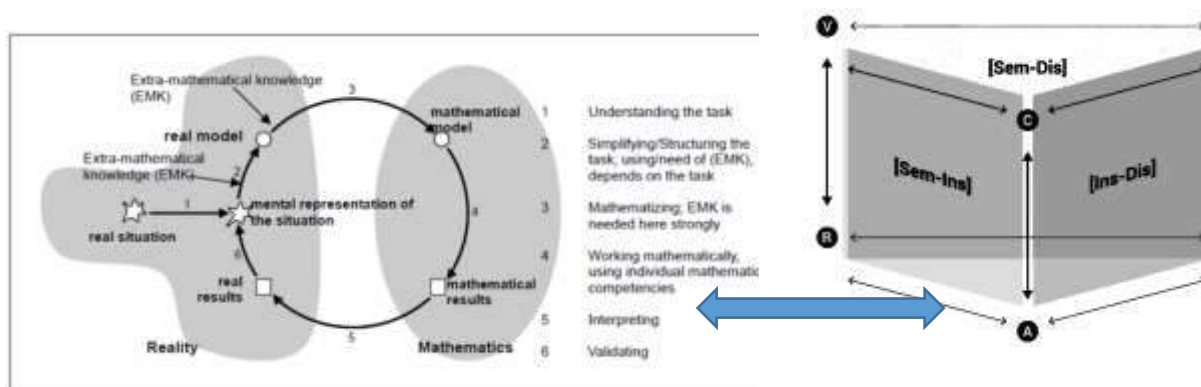


Figura 2. Interacción entre el ciclo de modelización desde una perspectiva y el ETM.

Teóricamente el ciclo de modelización se puede explicar atendiendo cada una de sus etapas según Borromeo Ferri (2006). Desde nuestra perspectiva de modelización matemática, esto es,

estudiar las relaciones que emergen cuando se diseñan o resuelven problemas de modelización entre la realidad que pertenece a contextos extramatemáticos y las nociones matemáticas asociadas a los modelos matemáticos que representan esa realidad. Donde el trabajo matemático asociado a lo extramatemático, es un catalizador de representaciones, uso de tecnología (simbólica o digital) y argumentaciones, que permiten estudiar y dar respuesta al problema de modelización.

El caso de un curso de formación continua de profesores y reflexiones

Se ha propuesto a un grupo de profesores en un perfeccionamiento docente enfrentarlos a un proceso de modelización matemática y al fenómeno discreto-denso-continuo. Dicho fenómeno está presente con la función exponencial, sin embargo, el problema propuesto no se podía saber (matemáticamente) si la curva en cuestión era o no una función exponencial.

La situación está basada en la medición de la espuma de cerveza, la cual, fue adaptada de la generada por Michael Kleine: Universidad de Bielefeld, Alemania. La discusión de esta actividad se realizó en 3 sesiones para que los docentes tuvieran la posibilidad de analizar las variables en juego, las nociones matemáticas que emergen, y el proceso de modelización.

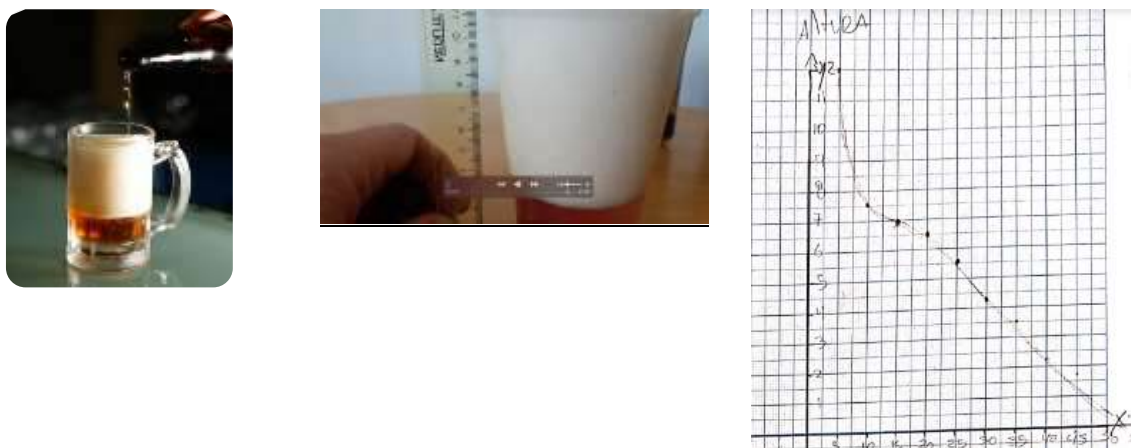


Figura 3: Situación de la cerveza y producción Grupo 1

Nuestros resultados, muestran como los profesores identifican procesos y logran distinguir el mundo extramatemático de lo que, para ellos, significa la matemática en juego. Además, los docentes pudieron evidenciar las dificultades que se genera al modelar, como así también, los logros y desafíos.

Trabajar con el enfoque de modelización matemática supone grandes desafíos, desde la investigación en didáctica de la matemática tenemos un área de oportunidad para considerarla en los diversos componentes del sistema educativo, en la formación de profesores con la finalidad de acortar las brechas existentes entre su formación matemática universitaria y su actividad como docente, donde los programas curriculares en diversos países consideran la modelización como una competencia a desarrollar.

Es en este sentido que consideramos a la modelización matemática como un enfoque a trabajar en el aula, y en la formación docente. Para ello creemos que el enfoque teórico-metodológico que proponemos será de gran aporte, por un lado, para la formación docente y diseño de situaciones de modelización, y por otro lado, se evidencia un área de oportunidad

en la investigación en didáctica de la matemática al considerar el trabajo matemático en modelización desde la teoría de ETM y su influencia en su proceso cuando se considera teoría de modelización.

Reconocimiento: Proyecto Fondecyt 1171744 – Conicyt, Chile.

Referencias

- Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In S. J. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12 th International Congress on Mathematical Education: Intellectual and attitudinal challenges* (pp. 73-96). New York, NY: Springer.
- Blum, W. & Borromeo, R. (2009). Mathematical Modelling. Can It Be Taught and Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(1), 45-58.
- Blum, W., & Törner, G. (1983). *Didaktik der Analysis*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.
- Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 38 (2), 86-95.
- Borromeo Ferri, R. (2018). *Learning How to Teach Mathematical Modeling in School and Teacher Education*. Suiza, Springer International Publishing AG.
- Bourbaki, N. (1976). *Elementos de historia de las matemáticas*. Traducción de Jesús Hernández. Madrid: Editorial Alianza Universidad.
- Kaiser, G. & Brand, S. (2015). Modelling competencies: Past development and further perspectives. In G.A. Stillman, W. Blum & M.S. Biembengut (Eds.), *Mathematical modelling in education research and practice. Cultural, social and cognitive influences* (pp. 129-149). Cham: Springer.
- Klein, F. (1908). *Matemática elemental: Desde un punto de vista superior. Volumen II. Geometría*. Traducción de R. Fontanilla. Madrid: Biblioteca Matemática.
- Kuzniak, A. (2011). *L'Espace de Travail Mathématique et ses Genèses*. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 9-24.
- Kuzniak, A. (2004). *Paradigmes et espaces de travail géométriques. Note pour l'habilitation à diriger des recherches*. Paris : IREM de Paris 7.
- Kuzniak, A., Montoya Delgadillo, E, Vandebrouck, F., & Vivier, L. (2015). *Curso Le travail mathématique en analyse de la fin du secondaire au début du supérieur : identification et construction*. Acta 18e École d'Été de Didactique des Mathématiques, 19 al 26 de agosto, Brest, Francia.
- Kuzniak, A. & Richard, P. (2014). *Espacios de Trabajo Matemático. Puntos de vista y perspectivas*. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*. (Número Especial).
- Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). *Mathematical Working Space in schooling: an introduction*. *ZDM Mathematics Education*, 48(6), 721-737.

- Lakatos, I. (1978). Matemáticas, ciencia y epistemología. Traducido por Diego Ribes. Madrid: Alianza Editorial.
- López, S. (2013). Las inecuaciones: una mirada desde el espacio de trabajo matemático. Trabajo Final para optar al grado de Magíster en Didáctica de la Matemática, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
- Montoya-Delgadillo, E. (2014). El proceso de prueba en el espacio de trabajo geométrico: profesores en formación inicial. *Revista Enseñanza de las Ciencias*. 32(3), 227-247.
- Montoya-Delgadillo, E, Mena-Lorca, A. & Mena-Lorca, J. (2016). Estabilidad Epistemológica del Profesor Debutante y Espacio de Trabajo Matemático. *Boletim de Educação Matemática, BOLEMA*, 30(54), 188-203.
- Montoya Delgadillo, E., & Vivier, L. (2016). Mathematical working space and paradigms as an analysis tool for the teaching and learning of analysis. *ZDM Mathematics Education*, (March), 1-16, 2016.
- Montoya-Delgadillo, E. & Vivier, L. (2014). Les changements de domaine de travail dans le cadre des Espaces de Travail Mathématique. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 19, 73-101
- Montoya-Delgadillo, E. Mena-Lorca, A. & Mena-Lorca, J. (2015). Circulaciones y génesis en el espacio de trabajo matemático. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17(4-I), 191-210.

FORMACIÓN DOCENTE: EL CASO DE LA PROPORCIONALIDAD

Jean-Pierre Bourgade

jean-pierre.bourgade@univ-tlse2.fr

Université Toulouse 2 Jean Jaurès, Francia

Resumen

La concepción de una formación docente sobre la enseñanza de la proporcionalidad puede fundamentarse en la identificación de dificultades del profesorado, vistas como síntomas de ciertas necesidades praxeológicas. Sin embargo, en general las propuestas de formación se enfrentan con resistencias u objeciones del profesorado: ciertas elecciones de organización del estudio ofrecen ventajas, cuyos posibles costos didácticos a veces no perciben los profesores. Dichos costos tienen que ver con el hecho de que la enseñanza de un tema dado se concibe generalmente de manera aislada, a un nivel de estudio particular, mientras que el pasado y el porvenir didáctico del tema de estudio tendría que ser tomado en consideración. Ilustramos nuestro punto de vista en el caso del concepto del coeficiente de proporcionalidad para enfatizar que superar un problema local a bajo costo puede conducir a otras dificultades a niveles inesperados.

Palabras clave: *formación docente, necesidades praxeológicas, proporcionalidad, magnitudes*

Introducción

Diseñar una formación sobre un tema matemático dado para una audiencia de profesores de matemáticas, principiantes o avanzados, requiere la aclaración preliminar de un cierto número de puntos. Quizás los más obvios son los siguientes: especificar lo más posible los contenidos matemáticos que se enseñarán en el tema seleccionado, de acuerdo con el nivel de estudio previsto; determinar las principales dificultades que plantean dichos contenidos para los estudiantes; etc.

Algunas asignaturas resisten, quizás más que otras, el deseo de idear una formación adecuada para superar ciertas dificultades escolares: la proporcionalidad sigue siendo una asignatura difícil de enseñar, a pesar de los muchos esfuerzos realizados para mejorar la formación del profesorado. A las dificultades específicas del estudio de las magnitudes y su medición, el tema de la proporcionalidad agrega además aquellas que son específicas del estudio de las relaciones entre las magnitudes. La "constante de proporcionalidad" vive así una vida a veces caótica en las clases; las técnicas de búsqueda de la cuarta proporcional no suelen ser sólidas debido a la falta de procedimientos de control sistemáticos; la gestión de las unidades en los cálculos es difícil tan pronto como intervienen dos cantidades o más; etc.

En esta conferencia, buscamos identificar algunas fuentes posibles, no de las dificultades de estos alumnos, sino de ciertas restricciones institucionales de las cuales estas dificultades son el síntoma. En particular, la profesión no tiene la capacidad de anticipar las consecuencias didácticas que esta o aquella elección con respecto al estudio de la proporcionalidad pueda tener en el estudio de otros temas (como el de las magnitudes y su medición, por ejemplo), o para determinar todos los efectos que tal elección puede tener en el estudio de la proporcionalidad misma: veremos que este problema tiene que ver, del punto de vista didáctico, con la capacidad de identificar los efectos a largo plazo de desarreglos de condiciones.

Dificultades de la profesión

En esta sección intentaremos presentar algunas de las dificultades de la enseñanza de proporcionalidad. Estas dificultades son bien conocidas (véase por ejemplo Bolea, Bosch & Gascón, 2001, Comin, 2002 y Hersant, 2005) y no es nuestro propósito estudiarlas exhaustivamente, señalar ciertos aspectos que son comunes entre sí.

En un aula en Francia, en 2019, trabajando con estudiantes de 12-13 años, una profesora propone la siguiente definición de la proporcionalidad: "Dos magnitudes son proporcionales si los valores de una se obtienen multiplicando los valores de la otra por el mismo número". Esta definición plantea una dificultad que uno comprende mejor si considera la siguiente situación: el precio del gasóleo es

proporcional al volumen comprado; si el precio por litro es S/5.57, pasamos de la magnitud "volumen" a la magnitud "precio" multiplicando las medidas (en litros) de los valores del primero por 5.57, y luego obtenemos las medidas (en S/) de los valores de la segunda. Sin embargo, el mismo precio por litro vale US\$6.21 por galón: para obtener medidas de precios en dólares estadounidenses a partir de medidas de volumen en galones estadounidenses, multiplique por 6.21 en lugar de 5.57. Las magnitudes son proporcionales en ambos casos, y son las mismas magnitudes. Sin embargo, el "número" por el cual debemos multiplicar los "valores" de una para obtener los de la otra no es fijo: depende de una elección de unidades. La definición dada por el profesor es, en el mejor de los casos, ambigua. Por otro lado, esta definición no tiene en cuenta lo que los estudiantes han trabajado en las clases anteriores, especialmente la construcción de proporcionalidad como una propiedad de aditividad común a dos magnitudes. Si recolectamos dos sacos de naranjas, sumamos sus masas, así como sus precios: es incluso lo que caracteriza la proporcionalidad del precio y la masa de las naranjas. La definición propuesta por la profesora no permite relacionar esta propiedad de aditividad con la existencia de una constante de proporcionalidad: pasa por alto la discusión, imponiendo, al nivel de la definición misma, la existencia de la constante de proporcionalidad como propiedad fundamental, independientemente de los antecedentes didácticos de los estudiantes. Veremos que, además de esto, impide aclarar la naturaleza de la constante de proporcionalidad.

Terminemos con un último ejemplo, tomado en la misma sesión. La maestra insiste en que los cálculos deben realizarse con unidades "en todas partes", o sin unidades, especificando la

unidad solo en el resultado final. A continuación, ella escribe en la pizarra: " $40 \times 1.48\text{€} = 50.29\text{€}$ ". La mayor dificultad aquí está relacionada con la elección de una magnitud privilegiada: si uno debe calcular con las unidades "en todas partes", en el caso del cálculo del precio de 40L de gasóleo, ¿por qué el cálculo no se escribe con unidades de volumen? Finalmente, las funciones realizadas por el cálculo "con unidades" no aparecen claramente; el discurso de la profesora sugiere que se trata de controlar la coherencia de los cálculos, sin ser explícita la técnica que lo haría posible. Asimismo, el uso "mixto" de medidas y de magnitudes en el mismo cálculo no permite controlar la coherencia de dicho cálculo, como lo indica bien el siguiente ejemplo. Imaginemos que un conductor de camiones deba comprar 3.15 hL de gasóleo. El cálculo puede asumir la siguiente forma sin que aparezca fácilmente para el estudiante la fuente de su error: $3.15 \times 1.48\text{€} \approx 4.66\text{€}$.

Necesidades praxeológicas

Las dificultades que acabamos de presentar son el síntoma de ciertas necesidades praxeológicas: en la Teoría antropológica de lo didáctico (TAD, Chevallard 2007), consideramos que toda acción humana consiste en la realización de un tipo de tareas T (lo que hay que hacer) por medio de una técnica τ (cómo hacerlo) que un discurso, una tecnología θ , viene a producir, justificar, hacer inteligible; la tecnología misma es objeto de un discurso, de una teoría Θ destinada a producirla, a justificarla y hacerla inteligible. El saber-hacer, la praxis $[T / \tau]$ y el saber, el logos $[\theta / \Theta]$, constituyen una praxeología $[T / \tau / \theta / \Theta]$. Las elecciones hechas por la profesora mencionada en la sección anterior tienen implicaciones para las praxeologías matemáticas estudiadas por los estudiantes; además, al tomar estas decisiones y ponerlas en práctica en el aula, la maestra da a conocer su propia praxis, a partir de la cual podemos inducir algunos elementos de su logos. De este modo, podemos reconstruir parte de sus praxeologías profesionales, que incluyen, sin reducirse a ellas, las praxeologías matemáticas para enseñar.

Un maestro en su clase puede tener dificultades, que eventualmente atribuirá a ciertas necesidades praxeológicas. En una discusión que siguió a la sesión mencionada en la sección anterior, la profesora pudo demostrar su incapacidad para calcular el costo de 40 litros de diésel con las unidades de precio y volumen. La necesidad praxeológica que se manifiesta aquí cae a la teoría de las magnitudes y su medición. Más allá de este profesor, es la posición misma de profesor en la institución escolar francesa la que padece esta necesidad praxeológica: el cálculo de las magnitudes generalmente se interpreta como un cálculo "con las unidades", cuyas funciones son generalmente mal entendidas. Esta interpretación se basa a su vez en una distinción entre tres entidades, como se ilustra en el siguiente diálogo entre el profesor (P.) y un estudiante (E.), extraído de la misma sesión:

P. ¿Se dijo que estábamos estudiando la proporcionalidad entre dos cosas? ¿Qué eran: unidades, medidas, magnitudes?

E. ¿Unidades?

P. Atención, se dijo que las unidades eran L, m, etc. ¿Había L escrito allí?

E. ¡Magnitudes!

El logos del maestro (y a través de él, el de la posición de profesor) incluye la distinción entre tres objetos: las magnitudes, las medidas de magnitudes y la unidad de medida de una magnitud.

Aquí nace el posible origen de una solicitud de formación: una determinada instancia (posición o persona, aquí la posición de investigador en didáctica p_ξ) identifica en otra instancia (aquí, la posición de profesor de matemáticas en Francia, p_t) una falta cuya naturaleza es una praxeología (aquí relativa a las magnitudes, a su medida y la proporcionalidad). Uno puede imaginar que la formación a producir podría (debería) garantizar que dicha praxeología se difunde en la posición p_t . La identificación de la falta, es decir, su descripción praxeológica, generalmente se basa en la siguiente observación (Chevallard, 2019; Artaud, 2019): ξ juzga que la relación de p_t a un objeto o (proporcionalidad, aquí) no cumple con una relación con o que le gustaría ver existente, y que denotaremos genéricamente $R(*\hat{s}, o)$, donde $*\hat{s}$ es, en cierto modo, la posición que debería existir, según imagina p_ξ . ¿De qué, precisamente, consta esta relación deseable, esta necesidad praxeológica de p_t según p_ξ ? Lo siguiente se fundamenta a lo largo en Chevallard y Bosch, 2001 y en Chevallard y Bosch, 2002.

En la Figura 2, vemos una propuesta de ejercicio de 2º grado de secundaria en Perú. El objetivo es establecer la existencia de una constante de proporcionalidad. Este ejercicio tiene un formato clásico: se entrega una tabla, los estudiantes deben completarlo y luego calcular el cociente de los valores escritos en una fila por los valores escritos en la otra fila. Los estudiantes observan que el cociente es constante y concluyen que existe una “constante de proporcionalidad” entre las dos magnitudes.

Tabla 3 (Reporte del MINSA)							
Cantidad de jóvenes con obesidad	2						...
Cantidad de jóvenes	5						...
Tabla 4 (Reporte del MINSA)							
Cantidad de mujeres obesas en edad reproductiva	1						...
Cantidad de mujeres en edad reproductiva	2						...

- Luego de completar las tablas, los estudiantes responde a las interrogantes que se plantean en esta actividad.
 - a. ¿Explica qué observas en cada una de las tablas con los valores asignados?
 - b. ¿Qué sucede si dividimos en cada columna los valores de la primera fila entre los valores de la segunda fila?
 - c. ¿El resultado obtenido en cada columna de cada una de las tablas es constante? ¿Por qué?

Figura 2. Extracto de una sesión de aprendizaje

El “resultado” de la división, en cada columna, del valor de la primera fila por el de la segunda fila, es constante para cada tabla. ¿Pero sigue siendo el caso? Tomemos el ejemplo del precio del gasóleo; en la misma sesión estudiada en la sección anterior, la profesora proporciona a los estudiantes la siguiente tabla:

Cantidad de gasóleo (en L)	1	20
Precio del gasóleo (en €)	1.48	29.6

En dicha tabla, el coeficiente obtenido es: $29.6 / 20 = 1.48 / 1 = 1.48$. Pero imaginemos que medimos volúmenes en galones estadounidenses:

Cantidad de gasóleo (en gal)	0.26	5.28
Precio del gasóleo (en €)	1.48	29.6

El coeficiente obtenido es ahora: $1.48 / 0.26 \approx 29.6 / 5.28 \approx 5.6$.

En aras de la coherencia, expresemos los precios en dólares estadounidenses:

Cantidad de gasóleo (en gal)	0.26	5.28
Precio del gasóleo (en US \$)	1.63	32.58

El coeficiente vale, esta vez: $1.62 / 0.26 \approx 32.58 / 5.28 \approx 6.2$.

Observamos aquí una dimensión problemática de la relación con la proporcionalidad cometida por la profesora observada: su logos incluye la idea de que el cociente de dos cantidades proporcionales es constante; también incluye que es irrelevante completar una tabla colocando las unidades en la primera columna y las medidas en esas unidades en todas las otras columnas, o colocar las unidades en todas las columnas excepto la primera columna; probablemente incluso incluye el hecho de que es preferible seguir la primera opción, ya que eso es lo que la praxis que implementa la profesora da para ver en su clase. Estos dos elementos del logos se enfrentan al siempre espinoso problema de la pluralidad de elecciones posibles de unidades.

Desde el punto de vista del cálculo con las cantidades, las prácticas aceptables según la profesora consisten en escribir:

" $40 \times 1.48 \text{ €} = 59.20 \text{ €}$, por lo que Eloïse pagará 59.20 €"

o sea,

" $40 \times 1.48 = 59.20$, por lo que Eloïse pagará 59.20 €".

Por el contrario, la siguiente práctica sería percibida como incorrecta por la profesora:

" $40 \times 1.48 = 59.20 \text{ €}$, por lo que Eloïse pagará 59.20 €".

Si podemos excluir correctamente esta última presentación, es porque incluye la escritura de una igualdad (incorrecta) entre un producto de medidas y una magnitud. La segunda presentación, por otro lado, equivale a calcular integralmente con mediciones. Finalmente, la primera presentación consiste en un cálculo mixto que involucra mediciones y magnitudes. Si, desde un punto de vista matemático, y con la condición de extraerlo del contexto preciso del

que proviene, como veremos, este cálculo es irreprochable, sin embargo, choca con unos de los elementos del logos de la profesora que hemos destacado anteriormente: “en un cálculo, colocamos las unidades en todas partes o en ninguna parte”. Aquí, la técnica utilizada se realiza de manera diferente para los dos tipos de magnitudes: la unidad de volumen no aparece en ninguna parte, mientras la unidad de precio aparece en todas partes. Podemos entender la elección de la profesora si intentamos desarrollar el cálculo con todas las unidades:

$$40L \times 1.48\text{€} = 59.20 \text{ €} \cdot L$$

La aparición de la cantidad producto “precio.volumen” es incongruente y explica que la profesora vacile en integrar todas las unidades en los cálculos, es decir, en trabajar con las magnitudes y no en parte con las magnitudes y en parte con sus medidas.

Volvamos a la tabla de proporcionalidad. Aquí también, el logos de la profesora no prohibiría, en principio, la construcción de una tabla de la siguiente manera:

Cantidad de gasóleo	1 L	20 L
Precio del gasóleo	1.48 €	29.6 €

Tomando nuevamente la pregunta planteada en la sesión de aprendizaje, ¿qué vale el resultado de la división de la segunda fila por la primera fila en cada columna de esta tabla? Calculemos:

$$1.48 \text{ €} / 1L = 29.6 \text{ €} / 20L = 1.48 \text{ €} / L$$

¿Qué sucede en la siguiente tabla?

Cantidad de gasóleo	0.26 gal	5.28 gal
Precio del gasóleo	\$ 1.63	\$ 32.58

Calculemos:

$$\$1.63/0.26 \text{ gal} \approx \$32.58/5.28 \text{ gal} \approx 6.2 \text{ $/gal.}$$

Por lo tanto, el cociente es constante, para cada tabla, al pasar de una columna a otra. ¿Pero es este cociente el mismo en todas las tablas? Calculemos:

$$1.48 \text{ €/L} = 1.48 \times 1\text{€/L}$$

$$\approx 1.48 \times \$1.1/0.264172 \text{ gal}$$

$$\approx 1.48 \times 4.163953787683682 \text{ $/gal}$$

$$\approx 6.162651605771997 \text{ $/gal}$$

$$\approx 6.2 \text{ $/gal}$$

Entonces, para las aproximaciones más cercanas, el cociente de magnitudes es el mismo en ambas tablas: decir que la constante de proporcionalidad es una constante no significa que su medición sea constante (ya que cambiará cuando cambiemos unidades de medida), pero que la magnitud-cociente precio/volumen es constante.

Vemos que el conjunto de dificultades encontradas por la profesora en esta breve sesión se basa en una necesidad praxeológica relacionada con la noción de constante de proporcionalidad: esa no es número sino una magnitud-cociente.

La relación deseable con la proporcionalidad que está surgiendo aquí también incluye elementos técnicos relacionados con el control de los cálculos: tomemos el ejemplo siguiente, sacado de un cuaderno “resolvemos problemas” proporcionado por el ministerio de la educación peruano (Figura 3).

Situación C

Para pintar la fachada del colegio se han necesitado 24 litros de pintura. Si se sabe que la superficie mide 52 m², ¿cuántos litros de pintura se necesitan para pintar 78 m² de superficie?

Figura 3. Una situación del mundo

A continuación, se entrega a los estudiantes una resolución (incorrecta) del problema y se les pide explicar porqué es incorrecta (Figura 4).

Resolución

(Encuentra el error)

A menor superficie, menor cantidad de pintura.

Por lo tanto, las magnitudes son directamente proporcionales.

Su proporción será:

$$\frac{52}{24} = \frac{x}{78} \Rightarrow (52) \cdot (78) = 24 x$$

$$x = \frac{4056}{24}$$

$$x = 169$$

Respuesta: Se necesitarán 169 litros de pintura.

1. ¿Los procesos ejecutados son correctos? Justifica tu respuesta.

Figura 4. Una resolución incorrecta

El manual para el docente proporciona una resolución de esta actividad (Figura 5) que bien ilustra el hecho que, al trabajar con las medidas, no se controla el cálculo.

Luego el docente indica analizar el procedimiento y la solución de la situación C, que tiene la característica de presentar algún tipo de error (de concepto, de aplicación, de procedimiento o de razonamiento). Los estudiantes, por medio del análisis, deberán identificar los errores y proponer su corrección respondiendo las preguntas:

- ¿Los procesos ejecutados son correctos? Justifica tu respuesta.

No, pues al plantear la proporción se ha confundido el orden de los valores.

$$\frac{52}{24} = \frac{78}{x} \Rightarrow x = 36 \text{ litros de pintura}$$

Figura 5. Comentarios para los docentes

En efecto, si se puede entender que “se ha confundido el orden de los valores”, el manual para el docente no da idea de cómo se podría evitar este fracaso. Sin embargo, trabajando con las magnitudes y parafraseando el cálculo erróneo del enunciado (Figura 4), obtenemos lo siguiente:

$$52 \text{ m}^2 / 24 \text{ L} = x / 78 \text{ m}^2,$$

de lo cual se puede deducir que $x = 52 \text{ m}^2 \times 78 \text{ m}^2 / 24 \text{ L} = (52 \times 78 / 24) \text{ m}^4/\text{L}$. Esta claro que el resultado no es un volumen, así que la pregunta “¿Los procesos ejecutados son correctos?” admite una respuesta inmediata. Esta técnica también proporciona herramientas para producir el cálculo correcto: los cocientes iguales deben ser iguales a la magnitud-cociente constante que relaciona las dos magnitudes. Así: $52 \text{ m}^2 / 24 \text{ L} = 78 \text{ m}^2 / x = \text{área de la fachada} / \text{volumen de pintura necesario para pintar la fachada}$.

Por fin, el logos relativo a la praxis que acabamos de presentar debe incluir una justificación de la existencia de la constante de proporcionalidad. Hemos visto en las secciones anteriores que la definición elegida por la profesora no toma en cuenta lo que los estudiantes han trabajado en las clases anteriores, entre otros la construcción de proporcionalidad como una propiedad de aditividad común a dos magnitudes. Basándose en esta propiedad, podemos observar que, si compramos un litro de gasóleo pagando 1.48 €, dos litros (volumen del bidón que se obtiene al unir dos bidones de un litro cada) costarán 1.48€ + 1.48€ (precio del bidón que se obtiene al unir dos bidones de 1.48€ cada), etc., y 40 litros costarán 1.48€ + ... + 1.48€ = 40 × 1.48€. El 40 que aparece en este cálculo representa el número de volúmenes de un litro de que consta un volumen de 40 L, así que tenemos: 40 = 40L / 1L, o sea:

$$1.48€ + \dots + 1.48€ = 40 \times 1.48€ = 40\text{L}/1\text{L} \times 1.48€ = 40\text{L} \times 1.48€/1\text{L} = 40\text{L} \times 1.48€/\text{L}.$$

El mismo razonamiento llega a escribir, para un volumen $x = X \text{ L}$, que el precio de este volumen es la suma de X términos 1.48€, es decir: $X \times 1.48€ = X \text{ L} \times 1.48€/\text{L}$. Se generaliza al caso de números decimales o racionales X , así que resulta que el volumen (y no su medida en litros) y el precio (y no su medida en euros) son relacionados por la existencia de una magnitud-cociente constante 1.48€/L – y hemos establecido este punto a partir de la propiedad de aditividad de las magnitudes proporcionales.

Objeciones y respuestas

En general, se hacen dos objeciones a la adopción de la praxeología descrita en la sección anterior: la definición de la proporcionalidad por la constante de proporcionalidad es “transparente” y proporciona directamente una técnica de determinación de cuarta proporcionales; la noción magnitud-cociente se estudia sólo en la clase siguiente (niños de 13-14 años). La primera objeción se fundamenta en la idea que el *logos* adquirido en las clases anteriores no tiene mucho valor por el trabajo en curso; la segunda en la idea que el trabajo en curso no tiene que elaborarse en relación con lo que se construirá en las clases siguientes. Las praxeologías profesionales que surgen de esta manera aparecen en un cierto aislamiento y se centran en las matemáticas por enseñar. La profesión percibe ciertos gestos como intencionalmente didácticos con respecto a esta o aquella praxeología para enseñar, pero es más difícil determinar los efectos más amplios de dichos gestos; por ejemplo, se reconocerá una clara intención didáctica en un gesto dado en el estudio de la proporcionalidad en una clase determinada, pero será difícil atribuirle una incidencia en el estudio de las magnitudes en la clase siguiente. Por lo tanto, la capacitación en la enseñanza de la proporcionalidad debe centrarse en nutrir el *logos* de la profesión desde este punto de vista en dos niveles.

En primer lugar, debe enfatizarse el enredo de las condiciones didácticas que se hacen a diferentes temas para que los gestos didácticos se produzcan a sabiendas, con el objetivo de controlar los efectos de estos gestos en varios temas de estudio. Por otro lado, la construcción de praxeologías a lo largo de varios años de estudio plantea un problema para una profesión a quién le resulta difícil considerar el aprendizaje de otra manera que como el aprendizaje completo de un conocimiento formalmente inequívoco. El caso de la proporcionalidad ilustra el hecho de que el estudio de la teoría de las magnitudes y el de la proporcionalidad se enredan en gran medida, y que se llevan a cabo durante varios años de estudio.

Por lo tanto, la formación para la enseñanza de la proporcionalidad debería ser capaz de proporcionar praxeologías profesionales para diseñar e implementar secuencias de enseñanza que articulen el pasado, el presente y el futuro didáctico de los estudiantes en proporcionalidad y magnitud. En particular, si la noción de magnitud-cociente no interviene al nivel de estudio de una clase dada, puede ser objeto de una primera familiarización indirecta: marcar la diferencia entre un precio y un “precio por litro”, o un “precio por volumen” es imprescindible desde los dos puntos de vista del estudio (en curso) de la proporcionalidad y del estudio (futuro) de las magnitudes-cociente. Eso requiere una adaptación de las praxeologías del profesor, para que incluyan la idea que se puede trabajar con magnitudes-cocientes sin desarrollar un *logos* “completo” (es decir conforme al *logos* que se desarrolla en las clases sucesivas). La notación €/L permite simplificaciones por “L”, como en el ejemplo siguiente, retomado de la situación donde un conductor quiere comprar 3.15 hectólitros de gasóleo:

$$3.15\text{hL} \times 1.48\text{€/L} = 3.15 \times 1.48 \text{ h}\cancel{\text{L}}.\cancel{\text{€}}/\cancel{\text{L}} = 4.662 \text{ h€} = 4.662 \times 100\text{€} = 466.20\text{€}.$$

Si esto representa el desarrollo máximo de la praxeología relativa a las magnitudes-cociente en la clase sucesiva, no significa que no se pueda – ni se deba – hacer nada en este asunto en la clase en curso: en vez de la notación €/L se puede escribir “euro por litro” en los cálculos. En vez de simplificar por “L”, se puede actuar “aritméticamente”: “3.15 hectolitros $\times$ 1.48 euro por

litro, son 315 veces un litro multiplicado por el precio por litro, es decir 315 veces el precio de un litro, que es 1.48 euro, y resulta $315 \times 1.48 \text{ €}$, es decir...". Al pasar del "precio por litro" al "precio de un litro", se cambio de tipo de magnitud, utilizando el hecho (elemento de logos) que el precio por litro multiplicado por un volumen de un litro, es el precio de un litro – por lo cual se aclara también el vínculo con los números racionales definidos de manera similar, siendo a/b el número cuyo producto con b es a . El uso de esta técnica pone de adelante varios ingredientes de logos y produce un desarreglo (Chevallard, 2019) de las condiciones (futuras) de estudio de las magnitudes cociente – y a la vez desarregla las condiciones del estudio de la proporcionalidad al favorecer la construcción de la constante de proporcionalidad como magnitud-cociente.

Referencias

- Artaud, M. (2019). Besoins praxéologiques de la profession : le cas des grandeurs et de leur mesure. Conferencia plenaria en la xxª escuela de verano de la ARDM. Autrans.
- Bolea, P., Bosch, M., & Gascon, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización: El caso de la proporcionalidad. *Recherches en didactique des mathématiques*, 21(3), 247-303.
- Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. Conferencia plenaria en el primer congreso internacional sobre la teoría antropológica de lo didáctico. En L. Ruiz-Higueras, A. Estepa, & F. Javier García (Eds.), *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de la Didáctica* (pp. 705-746). Universidad de Jaén.
- Chevallard, Y. (2019). The Curriculum Problem and the Paradigm of Questioning the World, in Mathematics and beyond. Comunicación presentada en el Intensive Research Programme: Advances in the Anthropological Theory of the Didactic and their consequences in curricula and in teacher education, Barcelona.
- Chevallard, Y., & Bosch, M. (2001). Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie I. Une atlantide oubliée. *Petit x*, 55, 5-32.
- Chevallard, Y., & Bosch, M. (2002). Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie II. Mathématisations. *Petit x*, 59, 43-76.
- Comin, E. (2002). L'enseignement de la proportionnalité à l'école et au collège. *Recherches en didactique des mathématiques*, 22(2), 135-182.
- Hersant, M. (2005). La proportionnalité dans l'enseignement obligatoire en France, d'hier à aujourd'hui. *Repères IREM*, (59), 5-41.

ESTADÍSTICA, CRITICIDAD Y REGISTRO DE REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS

Cileda de Queiroz e Silva Coutinho

cileda@pucsp.br

Pontificia Universidad Católica de São Paulo, Brasil

Resumen

En esta conferencia discutiremos el papel de los Registros de Representación Semiótica en la construcción de la criticidad en la lectura e interpretación de gráficos estadísticos. El ejemplo discutido es un diagrama de sectores y un gráfico de líneas en donde se identifican distorsiones debido a la elección de la forma de presentación, lo que conduce a una aprehensión perceptiva insuficiente para que se construyan argumentos críticos necesarios para el desarrollo de la ciudadanía, que es uno de los objetivos de la educación estadística. Por lo tanto, observamos que no se percibe ninguna implicación crítica y cuestionadora con el contexto, así como tampoco existe una comprensión del objetivo de los datos, la visualización de los datos, las medidas de tendencia central y las inferencias realizadas. Por lo tanto, los estudiantes no alcanzan el nivel de alfabetización (en portugués, letramento) crítica avanzada defendido por Sharma et al.

Palabras clave: Gráficos estadísticos, Registros de representación semiótica, Alfabetización estadística, Crítica.

¿Cómo leer las informaciones expuestas en varios medios de manera crítica?

En este texto discutiremos cómo podemos leer e interpretar críticamente las informaciones divulgadas en los medios, incluso si los gráficos utilizados no están apropiadamente presentados.

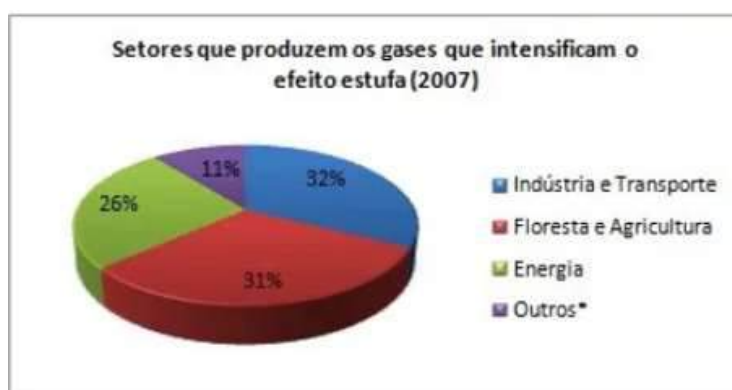


Figura 3. Ejemplo de gráfico circular inadecuado

Por ejemplo, en la Figura 1, el hecho de que el gráfico esté en perspectiva hace que parezca que el sector rojo es más grande que el azul, es decir, que la porción 31% es mayor que la porción 32%. Esta ilusión proviene de una deformación causada por la perspectiva (debido al

punto focal adoptado).

En los términos propuestos por Duval (1994), podemos decir que los gráficos estadísticos constituyen un registro de representación semiótica del objeto "distribución de frecuencia", que admite otros registros: lista (rol) y tablas. Cuando nos enfrentamos con gráficos impresos o en la televisión, primero movilizamos la aprehensión perceptiva y luego pasamos a la aprehensión discursiva. Esta sería una condición para entrar en un tipo de pensamiento estadístico que conduzca a un análisis crítico de los datos, es decir, del contexto al que se refieren los datos.

En este texto abordaremos solo los gráficos estadísticos y sus posibles tratamientos, e interpretaremos los registros de representación semiótica en los términos de Vieira (2008), quien leyó la teoría propuesta por Duval (1994) para figuras geométricas, adaptándola a los gráficos estadísticos.

Comenzando a teorizar: registros de representación semiótica

Para Vieira (2008), la aprehensión perceptiva en estadística permite al sujeto identificar que la figura en cuestión representa un gráfico (es decir, el tipo de gráfico tratado en la figura en cuestión), la variable estadística en juego y sus valores asumidos a lo largo de los ejes o de los sectores (en el caso del gráfico circular). Este autor agrega que tal aprehensión permite una lectura directa de los ejes o etiquetas de los sectores, de acuerdo con Curcio (1989, citado en Vieira, 2008), que es el nivel más elemental de lectura de un gráfico estadístico. Aún así, señala que la aprehensión perceptiva de un gráfico estadístico es más compleja que la de una figura geométrica (esa figura es un círculo), ya que la demanda cognitiva es más compleja (tipo de gráfico, variables, cantidad de valores, lectura de ejes).

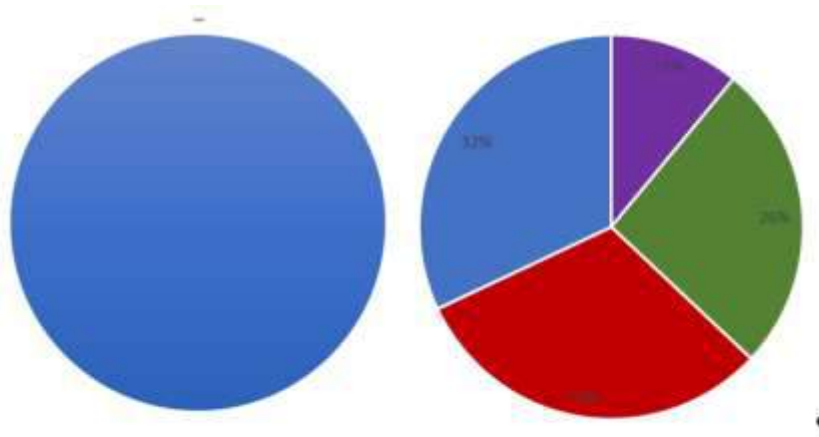


Figura 4. Figuras a reconocer por la aprehensión perceptiva: círculo y gráfico circular

En nuestro ejemplo, según la Figura 2, el observador tendría que reconocer el diagrama de sectores, aunque en perspectiva, las etiquetas que definen cada sector (11%, 26%, 31% y 32%) y asociarlos con el título presentado al lado de la figura. En este caso, la presentación en perspectiva en la Figura 1 da la falsa impresión, en una primera aprehensión, de que el sector que representa el 31% es más grande que el sector que representa el 32%, lo que nos lleva a

reflexionar sobre la insuficiencia de este tipo de aprehensión para la correcta interpretación de los gráficos estadísticos divulgados por los medios de comunicación.

La aprehensión discursiva exigiría, según Vieira (2008), explicitar las propiedades del gráfico: en el caso de un gráfico circular, se establecen las relaciones parte-todo. En el ejemplo dado en la Figura 1, dicha relación se ve obstaculizada por la ausencia de información sobre el valor absoluto sobre el cual se calcularon los porcentajes. Al recuperar la información en el sitio citado como fuente, el reportaje no aportó los valores divulgados sobre la investigación representada allí, lo que no permite la recomposición del conjunto.

Otro ejemplo en el que es importante el uso de la aprehensión discursiva es el gráfico de seguimiento del aumento de las temperaturas a lo largo del tiempo.

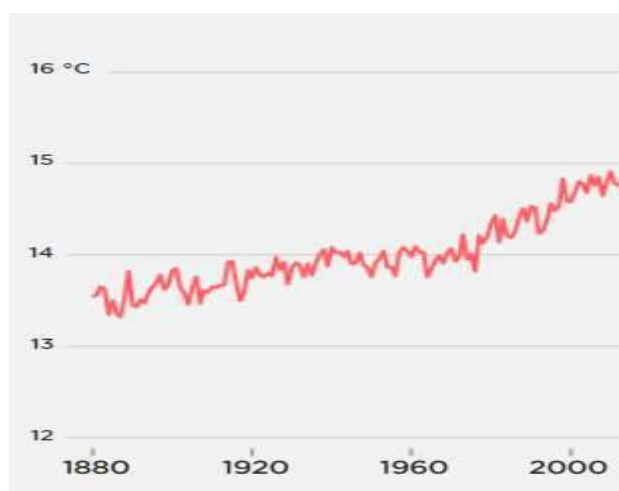


Figura 5. Ejemplo de gráfico de seguimiento de temperatura a lo largo del tiempo

La aprehensión perceptiva solo permite percibir un aumento gradual de la temperatura con el tiempo y que entre 1960 y 2000 aumentó aproximadamente 1 ° C. Sin embargo, leyendo con más profundidad y con los detalles permitidos por una aprehensión discursiva, se percibe una línea de tendencia ligeramente exponencial, que hace que el crecimiento se acelere en los últimos 40 años y continúe acelerando desde la década de 2000, llegando rápidamente a aproximadamente 15 ° C, incluso antes del período de 40 años generalmente utilizado como intervalos de medición.

¿Qué pasa con la Alfabetización Estadística?

¿Cuáles son las demandas en términos de alfabetización estadística de acuerdo con lo propuesto por Gal (2004)? Para Sharma (2017), es necesario unificar el vocabulario cuando se trata de pensamiento, razonamiento y alfabetización estadística y para esto, en su texto, hace un mapeo profundo de los textos sobre este tema. Una de las definiciones presentadas por este autor es la ampliamente difundida y utilizada en el campo de la educación estadística, propuesta por Gal (2004, apud Sharma 2017, p. 120):

La capacidad de las personas para interpretar y evaluar críticamente informaciones estadísticas, argumentos relacionados con datos ... para discutir o comunicar sus reacciones a [...] la información estadística, tales como su comprensión del significado de la información, sus

opiniones sobre las implicaciones de esas informaciones o sus preocupaciones con la aceptabilidad de ciertas conclusiones.

Podemos observar en el texto de Sharma (2017) que los modelos de alfabetización estadística propuestos conversan entre sí y convergen con los elementos indicados en el modelo propuesto por Gal (2004, apud Sharma, 2017), que consta de cinco elementos de conocimiento: conocimiento matemático, conocimiento estadístico, conocimiento contextual, habilidades de alfabetización y preguntas críticas. Además, agrega dos elementos actitudinales: la habilidad de acceder a problemas críticos y de activar el sentido crítico.

Entre otros, el autor también presenta su propio modelo, publicado en Sharma et al. (2011, apud Sharma 2017), en el que reduce lo propuesto por Watson (2006, apud Sharma, 2017) de seis a cuatro etapas, propuestas en orden creciente de complejidad y para las cuales las dos últimas serían equivalentes a lo que se necesita para existencia de los elementos de alfabetización del modelo propuesto por Gal (2004, apud Sharma, 2017).

Etapa 3: Crítica inicial

Los estudiantes en esta etapa están comenzando a exhibir características del pensamiento relacional. Los estudiantes en esta etapa pueden abordar más de un aspecto relevante de los datos y están comenzando a integrar los aspectos.

. Hay una participación crítica en los contextos familiares. Hay una participación selectiva con contextos desconocidos, con alguna justificación.

. Hay un uso adecuado de la terminología, la interpretación cualitativa del azar y la apreciación de la variación.

Los estudiantes demuestran conocimiento de las características relevantes de la exhibición de los datos, medidas de centro y distribución; sin embargo, se basan principalmente en los datos o en el contexto, pero no en ambos.

. Las preguntas a los datos se basan en más de un aspecto de la tarea de datos, pero no siempre están conectadas.

. Es probable que los estudiantes relacionen varios elementos sobre métodos de recolección de datos y gráficos; ellos pueden gestionar dos variables al mismo tiempo.

Etapa 4: Crítica avanzada

Los estudiantes en esta fase integran conocimientos estadísticos y contextuales que exhiben un pensamiento abstracto extendido. Los estudiantes tienen la capacidad de relacionar varios aspectos de una tarea para usarlos como base para pronosticar, generalizar, reflexionar o crear una nueva comprensión.

. Hay una participación crítica y cuestionadora con el contexto.

. Hay una comprensión del propósito de los datos, exhibición de datos, medidas de centro y las inferencias realizadas. Hay una evaluación crítica de los métodos de recolección de datos, la elección de medidas y la validez de los resultados que muestran una apreciación de la variación y la necesidad de incertidumbre al hacer predicciones.

. Las habilidades estadísticas y matemáticas sofisticadas se asocian con el éxito en esta etapa, especialmente en contextos mediáticos.

. Existe la capacidad de interpretar aspectos sutiles del lenguaje.

. Las preguntas formuladas se basan en recursos relevantes de los datos y del contexto, utilizando diversas perspectivas. (Sharma 2017, pp.127-127)

Interpretemos estos dos modelos, Gal y Sharma, en términos de nuestra Figura 1, objeto de nuestra reflexión en esta conferencia. Para esto, la traeremos de vuelta, pero esta vez comparándola directamente con la representación en perspectiva.

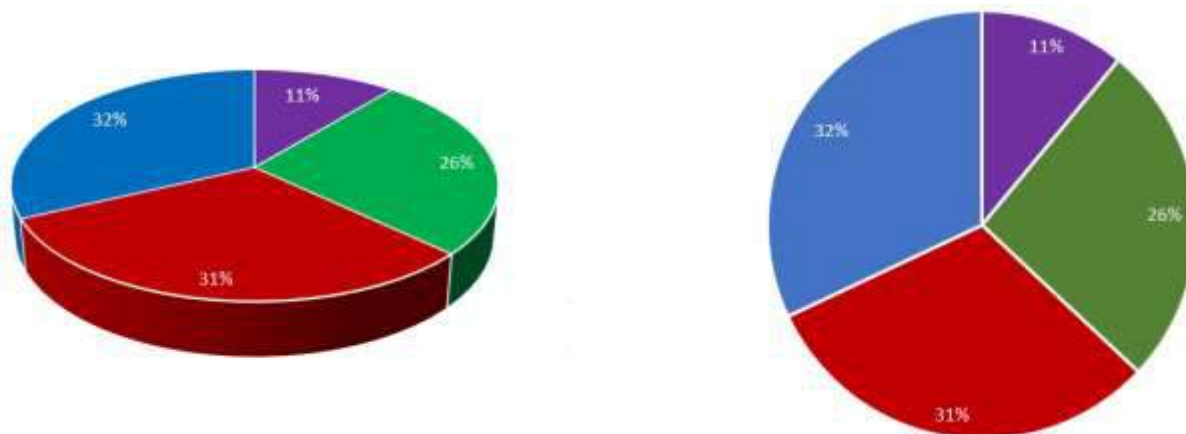


Figura 6. Comparación entre el gráfico circular con y el sin perspectiva

En esta figura es fácil observar la deformación en la información aportada por la representación en perspectiva, que se diluye fácilmente en la aprehensión perceptiva, pero no en la aprehensión discursiva, ya que buscará las propiedades de la figura y, por lo tanto, buscará los efectos de la representación del cilindro en perspectiva. De este tipo de distorsión surge la recomendación de que los gráficos estadísticos siempre sean representados en dos dimensiones, para que un lector desprevenido no malinterprete sus informaciones. ¡Es el caso del famoso "tan lindo, pero tan equivocado!!!!"

Si articulamos lo que acabamos de discutir con las etapas del pensamiento estadístico para la alfabetización propuestas por Sharma et al. (2011, apud Sharma, 2017), nos damos cuenta de que para que un sujeto/estudiante alcance la tercera y cuarta etapas hasta el final de su escolaridad, es necesario hacer aprehensiones discursivas de los gráficos estadísticos, para que pueda presentar una posición crítica y cuestionadora frente al contexto: ¿porcentajes en relación con qué total? ¿Qué efectos del uso de la perspectiva deben ignorarse?

En el gráfico de la tendencia de temperaturas tenemos el mismo tipo de preguntas: ¿Es posible establecer una línea que pueda explicar la tendencia promedio del crecimiento de las temperaturas a lo largo del tiempo? ¿Qué recursos matemáticos se requieren para esto?

Tales preguntas, en el modelo propuesto por Gal, se encuentran entre los cinco elementos del conocimiento identificados por él: el conocimiento matemático, el conocimiento estadístico y el conocimiento contextual. Como dijimos anteriormente y se destacó en el texto de Sharma (2017), las definiciones de alfabetización estadística y los modelos para identificar dicha

alfabetización convergen, y vemos aquí que la Teoría de los Registros de Representaciones Semióticas puede aportar enormemente para ello.

Articulando ideas

En esta conferencia, nuestro objetivo es discutir la lectura de los gráficos divulgados en los medios de comunicación, movilizando elementos de los modelos de alfabetización de Gal y Sharma, articulándolos con la percepción perceptiva y discursiva propuesta por Duval y adaptada a las estadísticas por Vieira, para que se tenga una lectura crítica de la sociedad en la que se vive: qué necesita el maestro desarrollar con sus alumnos. Para Brandt e Tozetto (2009, p.74),

Entre otras cosas, la alfabetización exige del futuro profesor una lectura crítica del fenómeno educativo, en el mismo sentido atribuido por Freire (1986), señalando que una lectura crítica de un texto solo es posible cuando hay una comprensión de las relaciones que existen entre el texto y el contexto. La alfabetización también implica un compromiso del maestro con una educación emancipadora de sus alumnos.

En el texto, las autoras discuten la formación docente, que debe tener como finalidad su alfabetización para que ellos mismos puedan tener como objetivo la alfabetización crítica de sus alumnos. Nadie forma a una persona de manera emancipadora si él o ella mismo/a no se ha formado así. Tal premisa es totalmente válida en estadística. Si solo preparamos a los maestros para las estadísticas procedimental, matematizada, ¿cómo podrán ellos desarrollar con sus estudiantes la capacidad y la habilidad de analizar los datos en el contexto en el que fueron recolectados? Después de todo, ¿cómo considerar la estadística como **Ciencia del Número en Contexto**?

Puesto que algunas investigaciones señalaran el hecho de que los maestros utilizan, prioritariamente, el libro de texto como material para su propia educación continua, además de su uso normal para la preparación de sus clases (Lajolo, 1996, apud Coutinho, 2016), Coutinho (2016, p.260) señala el predominio de elementos procedimentales en los enfoques, resaltando que, generalmente, la estadística se presenta en un solo capítulo del último volumen de colecciones de la escuela secundaria. Para la autora, aunque los estudiantes hayan trabajado en contenidos estadísticos en la escuela primaria, el lapso de tiempo entre enfoques no favorece el desarrollo de la alfabetización estadística de los estudiantes.

Si tal enfoque dificulta la construcción de una alfabetización estadística, también dificultará que los maestros desarrollen la criticidad y, por lo tanto, la alfabetización crítica citada por Brandt y Tozetto (2009). Particularmente sobre la criticidad, usamos las ideas de Skovsmose (2000, s/p), para quien la estructura misma de lo que se propone al estudiante es una herramienta de construcción de la criticidad:

Las prácticas de clase basadas en escenarios para la investigación difieren mucho de las basadas en el ejercicio. La distinción entre ellos se puede combinar con una distinción diferente, que tiene que ver con las "referencias" que tienen como objetivo llevar a los estudiantes a producir significados para conceptos y actividades matemáticas. (...) En mi interpretación, las referencias también incluyen los motivos de las acciones; en otras palabras,

incluyen el contexto para localizar el propósito de una acción (realizada por el alumno en la clase de matemática). Cuando, en lo que sigue, hablo sobre los diferentes tipos de referencia, generalmente aludiré a la producción de significado en la educación matemática.

Preguntamos: ¿cómo aprender la criticidad sin producir significado? Entender la estadística como la Ciencia del Número en Contexto nos brinda una oportunidad única para tal aprendizaje. Los dos gráficos que presentamos como ejemplo nos muestran cómo este contexto y esta criticidad son fundamentales para la comprensión, para la atribución de significado, que solo es posible a través de su aprehensión discursiva en un tipo de alfabetización más consistente, es decir, la cuarta etapa del modelo propuesto por Sharma et al. (2011, apud Sharma, 2017) y los siete elementos del modelo propuestos por Gal (2004, apud Sharma, 2017).

Por lo tanto, reforzamos la necesidad de una mirada más cuidadosa a la formación inicial y continua de los docentes, de modo que la construcción para la alfabetización crítica para los enfoques no solo de la Estadística, sino que de la Matemática sea un objetivo que a ser perseguido con persistencia. De esta manera, destacamos el importante papel de las teorías de la Didáctica de la Matemática y la Didáctica de la Estadística, que convergen para esta construcción, y que son herramientas fundamentales a ser manipuladas por los formadores de formadores en cada momento de este recorrido.

Referencias

- Brandt, C. F.; Tozetto, A. S. (2009) Reflexões Sobre Letramento Crítico Para A Docência Em Matemática Em Cursos De Formação De Professores IN: Práxis Educativa, Ponta Grossa, v.4, n.1, p.73-83, jan.-jun. Disponível em <http://www.periodicos.uepg.br>, pp.74-75, acesso em 29/10/2019
- Coutinho, C. S.C. (2016). O livro didático e a abordagem da estatística: O olhar do professor. In VIDYA, v. 36, n. 2, p. 257-274, jul./dez. - Santa Maria. Disponível em <https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/1816/1739>. Acesso em 17/11/2019.
- Duval, Raymond. (1994) Les différents fonctionnements possibles d'une figure géométrique. *Reperés*, n.17.121-138.
- Goulart, A. (2015). Um estudo sobre a abordagem dos conteúdos estatísticos em cursos de licenciatura em matemática: uma proposta sob a ótica da ecologia do didático. Tese (doutorado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Disponível em <https://leto.pucsp.br/bitstream/handle/11032/1/Amari%20Goulart.pdf>. Acesso em 17/11/2019.

- Sharma, S. (2017) Definitions and models of statistical literacy: a literature review, Open Review of Educational Research, 4:1, 118-133, DOI: 10.1080/23265507.2017.1354313
- Skovsmose, O. (2000). Cenários para investigação. BOLEMA – Boletim de Educação Matemática, 14, 66-91. Disponível em <http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10635>. Acesso em 17/11/2019.
- Vieira, M. (2008). *Análise Exploratória de Dados: uma abordagem com alunos do Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo. Retirado em 10 de Agosto de 2019 de <https://sapientia.pucsp.br/bitstream/handle/11347/1/Marcia%20Vieira.pdf>

TALLERES

¿CÓMO CONSTRUIR EL CONCEPTO DE FRACCIÓN A PARTIR DE SUS SIGNIFICADOS?

Olimpia Castro

Sahara Doria

Rosa Lafosse

Percy Merino

ocastro@minedu.gob.pe, sdoria@minedu.gob.pe, rlafosse@minedu.gob.pe,
pmerino@minedu.gob.pe

Unidad de Medición de Calidad de los Aprendizajes, Perú

Resumen

En el Perú, el currículo establece el desarrollo del concepto de fracción desde el Ciclo IV (9-10 años) de la Educación Básica Regular y se espera que, al culminar el Ciclo VI (14-15 años), los estudiantes logren interpretar diferentes significados de las fracciones. Sin embargo, evidencias recogidas en evaluaciones censales muestran que los estudiantes presentan dificultades en el aprendizaje de estos significados. Por ello, este taller tiene como objetivo explicar, cuáles son estas dificultades. En este taller teórico-práctico los participantes analizarán tareas de la evaluación censal para que reconozcan cada uno de estos significados de la fracción en situaciones problemáticas y la pertinencia de sus representaciones. De esta manera, los participantes lograrán afianzar sus conocimientos disciplinares y didácticos relacionados con el concepto de fracción, que les ayudará para proponer actividades que les permita organizar las nociones y las relaciones de los temas matemáticos a enseñar con respecto a las fracciones.

Palabras clave: Fracciones, significados, representaciones, evaluación.

Introducción

Se cuenta con diversas investigaciones que sirven de sustento científico para abordar el concepto de fracción según sus significados en diversas situaciones. Estas investigaciones ponen de manifiesto cómo el trabajar solo algunos significados de la fracción obstaculiza la construcción del concepto de fracción.

Entre las investigaciones encontradas se tiene a Silva (2005) con su tesis investigando saberes de profesores de enseñanza básica con enfoque en números fraccionarios donde señala que los docentes solo conocen algunos significados de la fracción y este suele ser el concepto de fracción como parte-todo. Esto hace que, por lo general sea este significado el único que se imparte en las clases, lo que genera limitaciones en la comprensión del concepto y hasta la ruptura en la relación entre fracción y sus usos, tal como la aparición del número mixto al medir

o usar la fracción como razón al comparar dos cantidades. Señala la autora, que puede ser esta la causa por la que los docentes recurran al uso de técnicas rígidas, centradas en procedimientos mecánicos poco comprendidos para lograr responder a ciertos tipos de problemas que no abordan todos los significados de las fracciones. Asimismo, Castro (2017) manifiesta que algunos docentes en formación inicial solo pueden leer y escribir numéricamente fracciones propias o impropias sin contexto alguno y muestran dificultad al representarlo gráficamente ya que todo lo asocian a solo un significado de fracción, que es el de fracción como parte-todo, que en algunos casos no se ajusta a la situación. De allí que estas investigaciones sugieren organizar los conceptos de fracción desde sus diversos significados para alcanzar mayor comprensión, lo cual permitiría consolidar el concepto de fracción, resolver con ello diversas situaciones problemáticas y sentar las bases para la construcción del campo de los números racionales.

Este taller busca afianzar en los docentes los conocimientos disciplinar y didáctico relacionados con el concepto de fracciones, y su estrecha relación con las representaciones. Sánchez (2001), nos dice que la comprensión de una idea matemática, implica, la habilidad de manejar sus diferentes representaciones y realizar conversiones entre estas, y Ma (2010) destaca la importancia del momento en que se presenta un concepto por primera vez para asegurar su comprensión. Por otro lado, D'Amore, Fandiño, Marazzani y Sbaragli. (2010) señalan que una de las causas más frecuentes de los errores de los estudiantes es la dificultad en el manejo de las diferentes formas de representación de un concepto. Al respecto, Rico (1995) señala que el error no solo manifiesta el desconocimiento de algo sino también pone en evidencia un conocimiento inadecuado sobre un contenido matemático que tiene uno o varios estudiantes. Por ello, en este taller se buscará explicar la naturaleza del error del estudiante en los aspectos de fracciones a partir de la evidencia encontrada en las evaluaciones censales, lo que mostrará cuáles son estas dificultades, cómo se expresan y cómo se podrían abordar.

Por ello que, se abordarán los diferentes significados de la fracción: como parte – todo (discreto o continuo), como cociente (o reparto), como razón, como operador y como medida. Se explicará cada significado a partir de situaciones que le den sentido tanto en contexto discreto como continuo, así también, usando diversas representaciones. Entre ellos se tiene:

- a) **Significado de la fracción como parte - todo:** Se presenta cuando un todo (denominado también "unidad") es dividido en partes equivalentes, para luego establecer una relación entre las partes seleccionadas y el número total de partes que conforman el todo.
- b) **Significado de la fracción como cociente:** Se presenta en situaciones de reparto, cuando un todo o "unidad" se distribuye de manera equitativa entre un número de personas o de partes.
- c) **Significado de la fracción como razón:** Surge en situaciones de comparación entre dos cantidades de la misma o de diferente magnitud.
- d) **Significado de la fracción como operador:** La fracción actúa sobre una cantidad mediante relaciones operativas de división y de multiplicación, de modo que la transforma en una nueva cantidad.

- e) **Significado de la fracción como medida:** Surge al comparar dos magnitudes, de las cuales una de ellas es el referente para medir y la otra magnitud es la que se quiere medir.

Con las actividades del taller, se buscará que los participantes reconozcan cada uno de estos significados de la fracción en situaciones problemáticas concretas, cómo se representan y cómo se relacionan. Llinares y Sánchez (1997) resaltan que para llegar a la comprensión del concepto de fracción se debe pasar por todas sus interpretaciones y, además, las establecidas desde el lenguaje cotidiano. Es importante establecer una gradualidad en el desarrollo de estos conceptos, a lo largo de la escolaridad y, por ello, se trabajará con situaciones problemáticas de los diferentes grados en que se consolidan dichos conceptos, desde 4.º grado de primaria hasta 2.º grado de secundaria.

Finalmente, dentro del taller se promoverá en los participantes la creación de situaciones problemáticas propias, las cuales podrán aplicar a los estudiantes en el aula para el desarrollo de la competencia matemática en fracciones.

Diseño e implementación del taller

El taller será activo – participativo, es decir, a la luz de una base conceptual, que será presentada y ejemplificada, los participantes analizarán y contrastarán diversas situaciones problemáticas con los distintos significados de la fracción para reconocer sus características y particularidades.

Además, será de alcance descriptivo donde se analizarán evidencias encontradas en las evaluaciones censales, relacionadas con las respuestas de los estudiantes a estímulos con fracciones. Se describirán de las respuestas las caracterizaciones de sus representaciones y se sistematizarán las dificultades de los estudiantes y, a partir de ellas, se buscarán estrategias para potenciar las habilidades cognitivas de los estudiantes.

Los docentes analizan, en grupos, tareas que le permitan identificar el contenido abordado, la capacidad que está involucrada y el contexto de la tarea. Veamos el siguiente ejemplo:

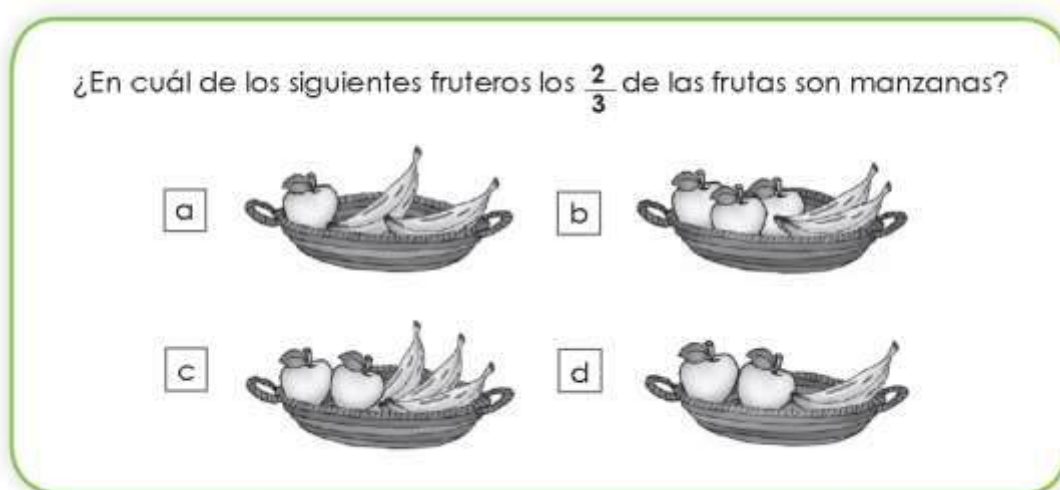


Figura 1. Pregunta de fracciones de la ECE 2015

Minedu (2016, p.18).

En este caso, primero se hace el análisis didáctico de la tarea identificando el conocimiento involucrado como análisis de contenido, y el análisis cognitivo identificando los procesos cognitivos que intervienen a través de las capacidades y el contexto en el que se presenta. En este ejemplo, los participantes identificarán que es una tarea de fracción en su significado parte todo discreto, centrado en la capacidad de comunicar ideas matemáticas, presentado en un contexto extra matemático. Resolver de forma correcta esta pregunta implica haber identificado el todo como frutas y las partes que son manzanas y plátanos, categorías inclusivas. Junto con señalar la respuesta correcta, los participantes comienzan a analizar los posibles errores que llevan a los estudiantes a marcar otras alternativas. En este caso, se evidencia que los estudiantes que marcan alternativa b) y c) son aquellos que conciben la fracción como un arreglo independiente de dos números y debido a que buscan que haya 2 frutas de un tipo y 3 de otro sin evaluar la relación que hay entre estas cantidades.

La evidencia de la Evaluación Censal de 2° de secundaria 2015 indica que el 31,8% de los estudiantes a nivel nacional marcó la alternativa c), y el 22,9% marcó la alternativa b), estos estudiantes no evidencian la comprensión del referente “frutas” como la unidad, no distinguen la inclusión de las manzanas dentro de la unidad de frutas y confunden los roles del numerador y del denominador en la representación simbólica de la fracción.

A partir de ello, se generan acciones que llevan a dar propuestas de cómo desarrollar el concepto de fracción en las actividades de clase para evitar estos errores. Asimismo, permite identificar claramente la dificultad generada en el estudiante para acompañarlo de mejor manera en el proceso de retroalimentación.

En este caso, por ejemplo, la discusión puede generar las siguientes actividades con la finalidad de abordar de una mejor manera la representación del concepto fracción en su significado como parte-todo en su forma discreta.

- Presentar situaciones que dejen claro el significado de fracción como parte-todo en su forma discreta. Observe el ejemplo que se muestra en la siguiente figura.



Figura 2. Primer ejemplo del significado de fracción parte todo-discreto.

Fuente: Castro (2017, p.32).

Al respecto Castro (2017) señala que en situaciones como las que muestra el ejemplo pierde sentido la expresión «se divide en partes iguales», puesto que como se observa hay 3

estudiantes con pantalones y no todos son iguales entre sí. Sin embargo, esto no impide decir que las tres séptimas partes del grupo de estudiantes usan pantalones largos.

- Usar diferentes representaciones que dejen claro este significado de fracción como parte-todo en su forma discreta.

Representación gráfica	Expresión verbal	Representación simbólica
¿Qué parte del conjunto de globos son rojos? 	Los globos rojos representan los dos quintos del total de globos.	Los $\frac{2}{5}$ del total de globos son rojos.

Figura 3. Representaciones del significado de fracción parte-todo discreto.

Fuente: Castro (2017, p.32).

- Considerar la gradualidad y el uso de otras nociones al trabajar ciertas tareas.



Sandra seleccionó $\frac{6}{8}$ de los 12 caramelos. ¿Cuántos caramelos seleccionó Sandra?

Figura 4. Segundo ejemplo del significado de fracción parte todo-discreto.

Fuente: Castro (2017, p.33).

La dificultad que pueden tener los estudiantes al resolver la situación del ejemplo que muestra la figura 4, es que puede parecer poco lógico hablar de octavos en un conjunto de 12 elementos. La complejidad que tiene esta tarea es que tiene más de una noción en juego, esta involucra además del manejo de fracción en su significado como parte-todo discreto el uso de la noción de equivalencias.

Podrán resolverlo solo aquellos que hayan construido la noción de fracción equivalente, y sabiendo que $\frac{6}{8}$ es equivalente a $\frac{3}{4}$ concluirán que, $\frac{3}{4}$ de 12 caramelos sí es factible y son 9 caramelos.

Luego, los participantes dan propuestas de tareas que enfatizan la comprensión del concepto de fracción atendiendo a las distintas capacidades matemáticas y que respondan a diversas demandas cognitivas.

El trabajo se hará en forma individual, luego en parejas y, finalmente, se hará una puesta en común.

Resultados esperados

Concluido el taller, los participantes serán capaces de:

- Diferenciar los distintos significados de la fracción y reconocer cada uno de ellos en un grupo de situaciones problemáticas dado.
- Crear situaciones problemáticas propias, con los diferentes significados de la fracción, para aplicar a los estudiantes en el aula con una intensidad pedagógica definida.
- Proponer tareas de fracciones que involucren las distintas capacidades, desde la representación, el modelar y el razonar y argumentar que impliquen variada demanda cognitiva.

Consideraciones finales

Este taller puede dar un valioso aporte a los docentes en formación como en servicio para poder comprender a cabalidad los conceptos de fracción y su forma de trabajarlo en aula según lo propuestos en el Diseño Curricular correspondiente a la noción de fracción. Los aportes y las evidencias encontradas nos confirman que:

Se debe trabajar desde los primeros grados de la escolaridad los distintos significados de las fracciones para poder consolidar la comprensión del concepto y poder aplicarlo en diferentes situaciones que se le presenten.

El aprendizaje de las fracciones a partir de sus significados permite dar una mirada funcional, es decir, da sentido y utilidad a los conceptos aprendidos.

Los docentes debemos propiciar en las actividades de clase el uso de diferentes representaciones de una fracción tanto de la situación a la representación y viceversa como también poder graduar la complejidad de las tareas.

Realizar estudios que permitan investigar el nivel de comprensión de conceptos con respecto a la fracción que tienen los docentes en servicio como también los docentes en formación para, a partir de ello, dar propuestas que contribuyan en la formación inicial y continua de estos. Dichas propuestas deben considerar el concepto de fracción tanto desde un conocimiento pedagógico como disciplinar.

Referencias

- Castro, O. (2017). *Comprensión del concepto de fracción en los estudiantes en formación inicial de educación primaria. Una mirada desde la teoría de campos conceptuales*. (Tesis de Licenciatura). Universidad Antonio Ruiz de Montoya. Lima, Perú. Recuperado de http://repositorio.uarm.edu.pe/bitstream/UNIARM/44/1/Castro%20Mora%2C%20Olimpia%20Rosa_Tesis_Licenciatura_2017.pdf
- D' Amore, B., Fandiño, M., Marazzani, I. y Sbaragli, S. (2010). *La didáctica y la dificultad en Matemática*. Bogotá: Magisterio.
- Llinares, S. y Sánchez, M. (1997). *Fracciones*. Madrid: Síntesis.

- Ma, L. (2010). *Conocimiento y enseñanza de las matemáticas elementales*. Santiago: Academia Chilena de Ciencias.
- Ministerio de Educación [Minedu]. (2016). *¿Qué logran los estudiantes en Matemática?. 2.º grado de secundaria*. Lima: Autor. Recuperado de http://umc.minedu.gob.pe/wp-content/uploads/2016/03/Informe-para-el-docente-Matem%C3%A1tica_ECE-2015.pdf
- Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, L. Rico & P. Gómez (Ed.) *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia* (pp. 69-108). Bogotá: Una empresa docente.
- Sánchez, M. (2001). Dificultades específicas en el aprendizaje de las fracciones. Estudio de casos. Implicaciones para la formación de maestros. En M. Chamorro (Ed.) *Dificultades del aprendizaje de las Matemáticas*. (pp. 11-24). Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.
- Silva, M. J. F. (2005). *Investigando saberes de professores do ensino fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série* (tesis de doctorado). Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo, Sao Paulo, Brasil. Recuperado de: <http://www.ime.usp.br/~iole/significados%20da%20fra%E7%E3o.pdf>

O CUBO ESTATÍSTICO: MATERIAL PARA TRABALHAR VARIÁVEIS ESTATÍSTICAS

Irene Mauricio Cazorla

Cláudio Vitor Santana

icazorla@uol.com.br, clvitor@yahoo.com.br

Universidade Estadual de Santa Cruz, Brasil

Resumen

Apresentamos “O cubo estatístico” para trabalhar variáveis estatísticas na Educação Básica, em sala de aula, envolvendo análise univariada, contextualizando situações que ajudam o estudante a compreender a distribuição dos dados das variáveis qualitativas, apropriada para os anos iniciais; bem como para as variáveis quantitativa, explorando a configuração espacial, as medidas de tendência central, de dispersão e posição. Nesta oficina exploramos as variáveis antropométricas contínuas (altura, massa corpórea, IMC, envergadura dos braços e idade), uma variável ordinal (classe de IMC) e uma nominal (gênero). As seis variáveis são dispostas no cubo e o gênero é trabalhado com duas cores de cubos. Também construímos um banner para dispor os cubos e os estudantes analisarem visualmente a distribuição dos dados, dando palpites sobre as medidas estatísticas, desenvolvendo a intuição e o reconhecimento de padrões.

Palavras chave: Cubo estatístico, variáveis estatísticas, medidas estatísticas, Ensino de Estatística.

I. As orientações curriculares para o ensino de Estatística na Educação Básica no Brasil

No Brasil, os conteúdos de Estatística foram introduzidos no componente curricular de Matemática, no Ensino Fundamental (nível primário), com a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (Brasil, 1997 e 1998), formando um dos quatro blocos, denominado “Tratamento da Informação”, e no Ensino Médio (nível secundário) como um dos três eixos, denominado de Análise de Dados (Brasil, 2002). Essa tendência foi ratificada na Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Brasil, 2018), que incluiu seus conteúdos em uma das cinco unidades temáticas denominada “Probabilidade e Estatística”.

Os conceitos estatísticos indicados na BNCC para o Ensino Fundamental, no Brasil são:

- Leitura de tabelas e de gráficos de colunas simples;
- Realizar pesquisa envolvendo variáveis categóricas e numéricas;
- Coleta, organização e descrição de dados;
- Interpretação e elaboração de listas, tabelas simples, de dupla entrada, fluxogramas;
- Resolver problemas cujos dados estão em tabelas ou em gráficos;

- Leitura e construção de gráficos de colunas simples e agrupadas, barras, pictóricos, de setores, linhas;
- Diferenciação entre variáveis categóricas e numéricas;
- Pesquisa amostral e censitária;
- Medidas de tendência central (Média, Mediana e Moda);
- Dispersão de dados (Amplitude).

E para o Ensino Médio são:

- Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.
- Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos.
- Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.
- Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.
- Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).
- Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.
- Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).
- Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de *softwares* que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.
- Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (*box-plot*), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise.

- Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

II. Os pressupostos para a construção de sequências de ensino

Ao longo desses anos, como professores em cursos de formação inicial e continuada de professores de Matemática, Geografia, Ciências Sociais e Biologia; bem como nas escolas primária e secundária, desenvolvemos pesquisa sobre o ensino e a aprendizagem de Estatística em escolas públicas; construindo materiais didáticos no Mestrado em Educação Matemática da UESC, pois acreditamos que a Estatística é uma ferramenta poderosa que pode contribuir na formação dos cidadãos, tornando-os capazes de ler o mundo.

Construímos várias sequências de ensino (SE) publicados no livro “Tratamento da Informação para o Ensino Fundamental e Médio” (Cazorla e Santana, 2006), no livro “Do tratamento da informação ao letramento estatístico” (Cazorla e Santana, 2010) e no livro “Estatística para os anos iniciais do Ensino Fundamental (Cazorla, Magina, Gitirana e Guimarães, 2017).

Todas as SE foram construídas percorrendo as cinco fases do ciclo investigativo (Wild e Pfannkuch, 1999) e atendendo os componentes do letramento estatístico, postulado por Gal (2002). Os conteúdos estatísticos abordados atendem as demandas de conteúdos postulados pelos PCN e da BNCC do Brasil. Além disso, acreditamos que para o estudante se assenhorar do comportamento dos dados, eles devem trabalhar no ambiente papel e lápis e, se possível no ambiente computacional, mas nunca desprezar o manuseio dos dados pois essa é uma etapa importante para “sentir os dados”.

2.1 O letramento estatístico

Segundo Gal (2002), o letramento estatístico nos remete à capacidade de ler, interpretar, compreender e avaliar criticamente informações, sejam elas escritas ou orais, possibilitando ao cidadão adquirir conhecimentos, que possam ser aplicados nos meios sociais, políticos, culturais e econômicos:

[...] refere-se, em termos gerais, a dois componentes inter-relacionados, primeiramente (a) a capacidade das pessoas de interpretar e avaliar criticamente as informações estatísticas, os argumentos ou fenômenos estocásticos, que elas podem encontrar em diversos contextos e, quando relevante (b) sua capacidade de discutir ou comunicar suas reações a tais informações estatísticas, tais como a sua compreensão do significado da informação, as suas opiniões sobre as implicações das informações, ou as suas preocupações quanto à aceitabilidade de determinadas conclusões. (GAL, 2002, p. 2-3).

Segundo Gal (2002), o letramento estatístico envolve dois componentes: o cognitivo e o afetivo. O componente cognitivo é formado por cinco elementos que são responsáveis pela competência das pessoas para compreender, interpretar e avaliar criticamente as informações estatísticas, são eles: o próprio letramento; conhecimento estatístico; conhecimento

matemático; conhecimento do contexto e a competência para elaborar questões. O componente afetivo, por sua vez, é formado por dois elementos, o primeiro relacionado às atitudes e às crenças das pessoas, que moldam suas visões de mundo; e o segundo que está relacionado à postura crítica, que nada mais é que a aptidão para uma conduta questionadora diante das informações estatísticas.

2.2 O ciclo investigativo

O ciclo investigativo PPDAC, proposto por Wild e Pfannkuch (1999), é composto por cinco fases: Problema, Planejamento, Dados, Análise, Conclusão. O Problema (P), refere-se ao conhecimento do contexto dos dados, à definição do problema ou fenômeno a ser investigado; o Planejamento (P), abrange a definição das ações para a investigação, definição da população, amostra, variáveis, instrumento de coleta etc.; os Dados (D) diz respeito a coleta e armazenamento dos dados; a Análise (A) se refere as transformações dos dados em tabelas, gráficos e medidas estatísticas e a Conclusão (C), encerra a investigação com um posicionamento crítico, reflexivo, com a comunicação dos dados, podendo gerar novas ideias e novos questionamentos. De acordo com Wild e Pfannkuch (1999),

Um ciclo de investigação PPDAC é definido para alcançar cada objetivo de aprendizagem. O conhecimento adquirido e as necessidades identificadas nestes ciclos podem iniciar novos ciclos de investigação. As conclusões das investigações se alimentam de uma base de conhecimento de contexto expandida que pode então informar qualquer ação. (Wild e Pfannkuch, 1999, p. 225).

Portanto, acreditamos que ensinar os conceitos e procedimentos estatísticos, com a utilização desse ciclo de investigação, na perspectiva do letramento estatístico, poderá ajudar os estudantes, não só a tratar os dados, mas assumir uma postura investigativa, ampliando sua compreensão de mundo, de modo a melhorar seu posicionamento frente a novas informações sejam elas sociais, políticas ou econômicas, melhorando assim, sua qualidade de vida e da comunidade onde está inserido.

Analisando as competências elencadas verificamos as potencialidades do ensino de Estatística na formação de um estudante capaz de compreender o mundo no qual está inserido. Além disso, a Estatística, pela sua própria natureza pode contribuir também para o letramento científico “que envolve a capacidade de compreender e interpretar o mundo (natural, social e tecnológico), mas também de transformá-lo com base nos aportes teóricos e processuais das ciências” (Brasil, 2018, p. 319).

2.3 O cubo estatístico

O Cubo estatístico foi desenvolvido por Souza e Tinti (2013), que o construíram para ensinar conceitos estatísticos, durante as oficinas do Laboratório de Ensino da Licenciatura em Matemática. Como o cubo é composto por seis faces, os autores sugerem trabalhar com cinco variáveis e uma face para o nome dos estudantes. No exemplo, eles trabalham com dados dos próprios estudantes, envolvendo três variáveis qualitativas: “Mês do aniversário” (qualitativa ordinal com 12 categorias), “Cor que mais gosta” e “Time que torce” (qualitativa nominal) e duas quantitativas: “Quantidade de irmãos” (discreta genuína) e “Idade” (continua,

discretizada), estas duas variáveis tomam poucos valores, observando que o público alvo são estudantes dos anos iniciais

Depois de instruir como devem preencher os dados e colar os lados do cubo, os autores solicitaram aos estudantes identificar a face em que encontra a variável e solicitam aos estudantes empilhar de acordo com as categorias, sobre a mesa ou no chão, como exemplificam na Figura 1 e 2.



Figura 1 – Gráfico do “mês do aniversário”

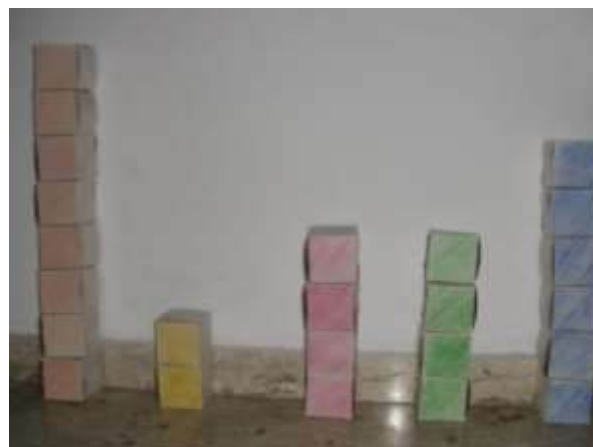


Figura 2 – Gráfico da “cor de preferência”

Fonte: Souza e Tinti (2013), p. 6.

Nesta oficina apresentamos uma adaptação do cubo estatístico para trabalhar a distribuição de variáveis quantitativas contínuas, relativamente às medidas antropométricas: Idade, Envergadura dos Braços, Altura, Massa corpórea, IMC, que tomam muitos valores por serem contínuas e no caso da idade por se tratar de uma turma de Enfermagem no Ensino Médio. A classe do IMC é uma variável ordinal, que classifica de acordo com o IMC se o estudante está abaixo do peso, normal, com sobre peso ou obeso. Além disso, utilizamos duas cores, azul para o sexo masculino e laranja para o feminino (Figura 3).

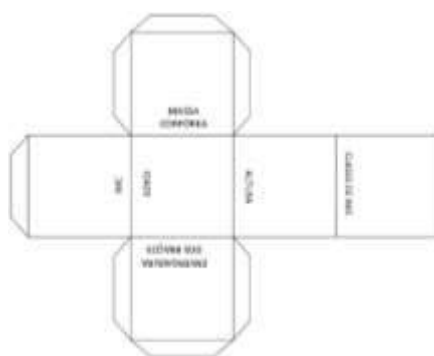


Figura 3 – Cubo estatístico para variáveis quantitativas que tomam muitos valores.

IV. A oficina com o “Cubo estatístico” no ambiente papel e lápis

Recomendamos fortemente que as sequências envolvendo conceitos estatísticos devem ser trabalhadas primeiro no ambiente papel e lápis, isto porque se faz necessário que os estudantes vivenciem todo o ciclo investigativo; somente depois desse trabalho, se possível trabalhar no ambiente computacional.

Objetivo geral: apresentar as contribuições do uso do cubo estatístico na visualização e compreensão da distribuição das variáveis estatísticas contínuas.

Objetivos específicos

- propiciar aos alunos a vivência do ciclo investigativo;
- visualizar a distribuição dos dados, as medidas de tendência central e dispersão;
- desenvolver a intuição sobre os valores das medidas estatística;
- calcular as medidas estatísticas e confrontar com os valores encontrados intuitiva;
- apresentar e discutir o dotplot.

Conteúdos

- Diagrama de pontos univariado (dotplot)
- Diagrama da caixa (boxplot)
- Medidas de tendência central (Média, mediana e moda)
- Medidas de dispersão (Amplitude, Mínimo e Máximo)

Materiais: para desenvolver esta atividade vamos precisar dos seguintes materiais:

- Papel madeira e papel milimetrado (quadriculado ou malhas)
- Fita métrica
- Balança (caso decidam estudar o peso)
- Planilha de dados e fichas de acompanhamento das atividades
- O cubo estatístico
- Calculadora

Tempo estimado: quatro encontros de duas horas aula, totalizando oito horas aula

V. Etapas de desenvolvimento

5.1 Problematização (P)

Como se distribuem as medidas antropométricas, será que as mulheres são mais baixas e menos pesadas dos que os homens? Como se dá a distribuição do IMC? As mulheres tendem a ter mais sobrepeso do que os homens? Para isso podemos recorrer a vários trabalhos publicados, em especial aqueles relativos ao Homem Vitruviano (Silva, Magina, Silva, 2010).

5.2 Planejamento (P)

Nesta fase, o professor deve discutir com os estudantes como podemos recolher evidências empíricas para verificar os questionamentos levantados? Guiar as discussões que levem a coletar os dados antropométricos. Questões como: a população a ser investigada, a pesquisa será realizada com os estudantes da turma ou com outros estudantes da escola? Onde serão realizadas as medidas, na sala de aula, no pátio? Que variáveis vamos levantar? Como vamos registrar os dados? Podemos construir um banco de dados no papel madeira? Vamos utilizar

5.3 Dados (D)

The photograph shows a woman standing against a height chart, with her arm being extended for measurement. The chart has markings for height in centimeters (100, 120, 140, 160, 180, 200).

Nome:	altura	amplitude do braço	distância do cotovelo até o antebraço	palma da mão fechada	palma da mão aberta	altura do calcanhar
Ana Paula	185	190	41	22	28	84
Angela	167	170	41	20	22	78
Carla	175	182	42	20	22	80
Carla A.	180	194	48	21	23	82
Carla B.	161	168	40	19	21	76
Carla C.	174	177	43	20	22	78
Carla D.	170	174	44	19	21	77
Carla E.	172	177	45	20	22	79
Carla F.	173	181	45	21	23	80
Carla G.	168	171	44	19	21	77
Carla H.	172	178	45	20	22	79
Carla I.	174	179	46	21	23	80
Carla J.	176	180	47	21	23	81
Carla K.	178	182	48	22	24	82
Carla L.	179	183	49	22	24	83
Carla M.	180	184	50	23	25	84
Carla N.	181	185	51	23	25	85
Carla O.	182	186	52	24	26	86
Carla P.	183	187	53	24	26	87
Carla Q.	184	188	54	25	27	88
Carla R.	185	189	55	25	27	89

Fonte: Silva, Magina, Silva (2010).

Iniciamos a análise com a exploração visual dos dados. Primeiro recomendamos construir o Dotplot Humano (Silva, Magina e Silva, 2010) e depois o dotplot no banner com o cubo estatístico como apresentamos a seguir.



Figura 5 – Tomando as medidas e registrando os dados no Cubo Estatístico.

Construindo o “dotplot humano” da altura dos estudantes

Procure um espaço para poder trabalhar com o corpo dos próprios estudantes. Pode ser a sala de aula se for grande ou o pátio (Figura 6). Peça aos alunos que se enfileirem em ordem, de acordo com a sua altura; caso alguns estudantes tenham a mesma altura, que esses se posicionem em fila perpendicular. Peça aos estudantes que examinem visualmente a configuração da altura: o máximo e o mínimo, a localização das meninas e dos meninos, a amplitude e a variabilidade.

Para encontrar a Mediana, conte o número de alunos (n) e identifique o estudante que ocupa a posição central (mediana), assim como o primeiro e terceiro quartil. Peça aos estudantes para dar palpite sobre a altura média. Após isso coloque no chão a fita métrica “gigante” para atentarem a escala métrica.



Figura 6 – Construindo o dotplot no papel.

Instigue os estudantes a verificar quais são as diferenças entre o enfileiramento e a fita métrica gigante. Observar que quando os estudantes estão enfileirados eles estão lado a lado, assumindo a mesma distância entre as alturas, o que pode não ser verdadeiro. Uma outra limitação para o dotplot humano é que nem todas as variáveis são visuais como a altura.

Construindo o dotplot no banner com o cubo estatístico e no papel

Construímos um banner com base suficiente para comportar os cubos, como cada cubo tem fases de 5 cm de lado, o banner foi construído com quadrados de 5,5 cm, indo de 150 cm até 200, portanto tendo um comprimento de quase 3 metros. Esse banner é colocado no chão e

os estudantes vão colocando seu cubo no local apropriado. A seguir solicitamos que os estudantes coloquem suas medidas no banner utilizando um círculo adesivo com diâmetro de 2 cm, como ilustramos na Figura 7, mais a direita. Na Figura 8 ilustramos os estudantes construindo o dotplot no papel.



Figura 7– Construindo o dotplot com o Cubo Estatístico e com círculos.



Figura 8– Construindo o dotplot no papel.

Como são muitas variáveis, o ideal é distribuir o tratamento das variáveis por duplas ou trios. Por exemplo um grupo trabalha a variável altura; outro, a envergadura dos braços etc. Dentre de cada grupo, pode-se dividir as tarefas, para o tratamento por gênero, assim um estudante calcula as medidas de tendência central das mulheres e ou outro, dos homens, o que facilita bastante o trabalho.

5.5 Conclusão (C)

Para finalizar os estudantes devem responder as perguntas iniciais, como se distribuem as diferentes variáveis, como são as medidas das mulheres em relação ao dos homens. Como está o nível de obesidade por gênero etc.

Considerações finais

Acreditamos que utilizar dados dos próprios estudantes e eles irem acompanhando as transformações dos dados em gráficos, tabelas, medidas possibilita aos estudantes darem sentido aos conceitos estatísticos. Além disso, sequências de ensino como esta possibilita aos estudantes a tomarem consciência de seu papel como cidadão e do cuidado com sua saúde. Obesidade não é mais uma questão de estética ou de bullying, é uma questão de saúde individual e da coletividade.

Referências

- Cazorla, I.; Magina, S.; Gitirana, V. e Guimarães, G. (Org.) (2017). *Estatística para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental*. Sociedade Brasileira de Educação Matemática, Biblioteca do Educador - Coleção SBEM; 9. Disponível em: http://www.sbem.com.br/files/ebook_sbem.pdf.
- Cazorla, I. M.; Santana, E. R. (Org.) (2010). *Do Tratamento da Informação ao Letramento Estatístico*. Itabuna: Via Litterarum.
- Gal, I. (2002). Adults' Statistical Literacy: Meanings, Components, Responsibilities. *International Statistical Review*, 70(1), 1-25.
- Silva, C. B., Magina, S & Silva, E. (2010). Homem Vitruviano. In I. M. Cazorla & E. R. Santana. (Org.) (2010). *Do Tratamento da Informação ao Letramento Estatístico*. Itabuna: Via Litterarum.
- Silva, C. b., Cazorla, I. & Kataoka, V. Y. (2013). Cartilha "O Homem Vitruviano". Disponível em: <http://ambiente.educacao.ba.gov.br/conteudos-digitais/conteudo/exibir/id/1620>
- Souza, M. F. de & Tinti, D. da S. (2013). O Laboratório de ensino de Matemática e o ensino de Estatística: socializando reflexões e possibilidades a partir de uma vivência no curso Licenciatura em Matemática. Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática. Curitiba: SBEM. Disponível em: http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/anais/XIENEM/pdf/3094_1728_ID.pdf
- Wild, C. & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67, 223-65.

PROBLEMAS DE MATEMÁTICA RECREATIVA: RESOLUCIÓN CON TAC

Daniel Moreno Caicedo

Juddy Amparo Valderrama Moreno

dmoreno65@gmail.com, juddyamparo2@gmail.com

Colegio Técnico Vicente Azuero- EDUMAT-UIS, Colombia

Resumen

El grupo de investigación en Educación Matemática EDUMAT- UIS, ha vinculado a diferentes colegios de los departamentos de Santander y Cesar para hacer parte de Comunidades de Practica (CoP) y trabajar mancomunadamente en la reflexión, diseño y evaluación de prácticas pedagógicas. Un ejemplo es la participación del Colegio Técnico Vicente Azuero en las CoP "Tecnologías" y "Matemática Recreativa" donde semanalmente se reúnen con el objetivo de fortalecer el desarrollo del Pensamiento Matemático a través de la resolución de problemas de Matemática Recreativa usando las Tecnologías del Aprendizaje y el Conocimiento (TAC). Producto de este trabajo se espera fortalecer el discurso Matemático Escolar (dME) del profesor en cuanto a la innovación educativa con uso de las TAC y para tal fin se planea el taller de estudiantes, donde a través del socio cognitivo GeoGebra, se experimente, visualice y razone entorno de la resolución de problemas del proyecto de Calendario Matemático.

Palabras clave: TAC, resolución de problemas, Matemática Recreativa,

Introducción

En este momento histórico por el avance tecnológico, surge la era digital y toma relevancia en todos los campos del ser humano, si se usa en el aula de clase donde se puede tener diferentes aparatos tecnológicos (Celular, Tabletas, Computador), y con ellos tiene una gama de aplicaciones para ser utilizadas de acuerdo con los gustos e interés, hoy existes software de aplicación a las disciplinas y programas que se ajustan a tendencias educativas y a las necesidades de los contextos y estudiantes de la época. Como lo manifestó Prensky (2010), los estudiantes actuales son "nativos digitales" y el uso de una computadora, una tableta u otro dispositivo digital hacen parte de su cotidianidad, razón por lo cual desde el Grupo de Investigación en Educación Matemática de la Universidad Industrial de Santander (EDUMAT–UIS) se hace parte de las Comunidades de Práctica de Profesores (CoP): Matemática Recreativa y Tecnologías, donde se busca fusionar intereses para fomentar el uso de tecnologías digitales en la resolución de problemas. Desde esta mirada se retoma lo planteado por documentos orientadores expedidos por Ministerio de Educación Nacional MEN como son; los Lineamientos Curriculares (1998) y Estándares Básicos de Competencias (2006), el primero plantea la estructura curricular para la enseñanza de la matemática, donde el objetivo es el

desarrollo del Pensamiento Matemático (PM) y los contenidos son solo el pretexto para enseñar una matemática contextualizada en sí misma y en otras ciencias; el segundo reafirma lo planteado y organiza estándares básicos por grupo de grados y por nivel de competencia, es así que define el punto mínimo de llegada al finalizar un grupo de grado. Por otro lado, el proyecto “Colombia Aprendiendo” dirigido por el profesor Carlos Zuluaga Ramírez, apunta al mismo horizonte, donde a través del enfoque de planteamiento y resolución de problemas se busca desarrollar PM, enfatizando en el razonamiento y la comunicación, promoviendo el abordaje y la búsqueda de diferentes estrategias de solución a los problemas planteados en el aula de clase. En consecuencia, el propósito del trabajo es contribuir al mejoramiento de la calidad de la Educación Matemática, promoviendo el desarrollo del PM a través de la estrategia de la resolución de problemas de Matemática Recreativa con tecnología digitales.

El discurso Matemático Escolar (dME) enriquecido con las Tecnologías del Aprendizaje y el Conocimiento (TAC) y la resolución de problemas de Matemática Recreativa.

Este taller se aborda desde tres categorías, el refinamiento del discurso Matemático Escolar (dME), desde las Comunidades de Práctica (CoP), y resolución de problemas con el uso de tecnologías digitales en el aula de clase, pero no como elementos separados sino como un todo armonioso. Se pretende explicar como si el profesor hace la aleación entre abordar la resolución de problemas, que en este caso se enfatiza en Matemática Recreativa con el uso de tecnologías digitales puede llegar a enriquecer su dME.

La capacidad comunicativa que el profesor posee para dar a conocer un saber matemático mediante estrategias de enseñanza no es una capacidad innata, no responde simplemente a su grado de conocimiento, ni se adquiere de forma inmediata al finalizar su programa de formación, sino que se construye y refina en la medida en que el profesor desee y busque las herramientas tanto pedagógicas como disciplinares. En consecuencia, responde a tener un discurso con elementos que le permita tener la satisfacción comunicarse de forma coherente, precisa, concisa pero sencilla, es decir comunicar un saber de forma clara para el receptor del mensaje, pero con elementos matemáticos inmersos.

Según (Chevallard, 1991), el conjunto de transformaciones adaptativas que debe sufrir un contenido de saber para convertirse en un objeto de enseñanza es el proceso de transposición didáctica, y este solo se logra en la medida que el maestro busca la forma de llegar al estudiante para que el saber sabio llegue a ser saber enseñando. Por lo anterior no solo tener un conocimiento matemático, sino es saber aplicarlo y para ello se requiere tener los elementos para convertirlo en un objeto matemático contextualizado propio para la enseñanza, donde se determine las estrategias requeridas para poder lograr el aprendizaje en los estudiantes; razón por la cual desde las CoP se busca dar elementos para que el profesor los apropie y tenga herramientas para lograr el objetivo del saber enseñado.

Otro referente es lo planteado por (Montiel, 2010) quien afirma que para lograr el propósito de la enseñanza- aprendizaje el desarrollo de estrategias en el aula implica una gran cantidad de elementos para provocar respuestas y construir conocimiento. Y se requiere hacer preguntas pensadas en cómo lograr el aprendizaje de un objeto matemático y se debe tener

conocimiento en la didáctica de la matemática, para no hacer preguntas simplemente por preguntas sino preguntas con sentido que conlleven a construir conocimiento.

De igual forma (Cantoral et al, 2006), manifiesta que es la negociación quien posibilita la institucionalización del saber en la medida que los procesos de enseñanza tengan transformaciones que afecten la estructura y el funcionamiento, de manera que se establezcan relaciones entre estudiantes y profesores.

En este escrito se ha mencionado CoP, pero a que hace referencia. Según (Wenger, 1998), son un grupo de personas que comparten un interés común y que profundizan su conocimiento. En síntesis, son las CoP quienes brindan los espacios para compartir con sus pares y refinar el dME replanteando prácticas pedagógicas bajo la negociación del saber disciplinario y pedagógico. Para este caso se busca mejorar el dME ahondando en la resolución de problemas usando tecnologías digitales, por lo tanto, se requiere enriquecer en tres frentes: disciplinar, tecnológico y pedagógico.

En cuanto a la resolución de problemas el referente es lo planteado por MEN (1998); no se trata de enseñar una matemática de contenidos, sino una matemática contextualizada en sí misma y en otras ciencias; donde a través del desarrollo de los procesos (comunicación, la modelación, el razonamiento, la elaboración, la comparación y ejercitación de procedimientos y resolución de problemas) sean la esencia y los contenidos no sean más que el pretexto para enseñar matemáticas. Razón por la cual este trabajo se fundamenta en la resolución de problemas de matemática recreativa usando tecnologías digitales.

Como lo manifestó (Villareal, 2010), el uso de la tecnología digital mejora la actitud de aprendizaje vinculadas a una actividad matemática y permite resolver problemas de una manera menos compleja. Lo anterior se puede evidenciar al realizar los talleres propuestos en diferentes escenarios (estudiantes de Colegio, estudiantes de licenciatura en matemáticas, y profesores de niveles de básica, media o superior), cada población usa sus conocimientos matemáticos a la hora de resolver un problema con ayuda de una herramienta tecnológica, si y solo si se tiene conocimiento en el manejo y bondades que el software brinda, que en este caso es GeoGebra, puesto quien tiene la Tecnología como socio cognitivo, puede hacer la construcción y responder al problema propuesto con mayor facilidad.

Por lo anterior como lo mencionó (Moreno, 2014), los artefactos tecnológicos en la medida que se utilizan y se apropia sus bondades se convierten en socio cognitivo, entendiendo como socio cognitivo en la medida que le permita modelar, experimentar conjeturar, comprobar, concluir, generalizar y comunicar. Es así como el uso de las tecnologías digitales en el aula no solo permite el dinamismo y mejora la actitud exploración y motivación, sino que genera ambientes de aprendizaje en torno de un objeto matemático sus conceptos y propiedades, de igual forma permite adentrar a los estudiantes en un contexto de la matemática.

Desde esta mirada, no se trata de aprender solo el manejo de la tecnología sino de saber utilizarla con fines educativos; parafraseando a Lozano (2011), es tener elementos para aprender más y de mejor manera. Y por esto se plantea la importancia de enriquecer el dME del profesor que orienta la matemática y el pertenecer a CoP, le da la oportunidad de mejorar e intervenir prácticas pedagógicas y participar en discusiones que fomenten la investigación

en Educación Matemática promoviendo en el profesor su espíritu innovador, creativo e investigativo de su propia práctica pedagógica.

Metodología y propuesta didáctica

Este taller presenta un diseño didáctico para resolver problemas de Matemática Recreativa en cinco pasos: interpretación, razonamiento, solución, conceptualización y comunicación. Para esto se busca que en cada problema se reflexione sobre el objeto matemático, el saber matemático y se comunique dicho saber con un lenguaje propio de las matemáticas dando la oportunidad para el desarrollo del Pensamiento Matemático.

Con anterioridad se determina como la resolución de problemas de Matemática Recreativa responde a lo planteado en los ámbitos internacional y nacional tanto por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) y por la National Council of Teachers of Mathematics por sus siglas en inglés (NCTM), en cuando a la importancia enseñar una matemática contextualizada y por procesos matemáticos; al igual que importancia de hacer la incursión de uso de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) con fines educativos.

Se propone el análisis del problema titulado “herencia desequilibrada”. El problema dice: Luis y Gustavo heredan juntos un terreno ABDE en forma de trapecio rectángulo. Luis coloca un poste C sobre el lado BD y se adjudica la parcela ACE, dejando a su hermano las parcelas ABC y CDE. Seguro de estar en desventaja con respecto a su hermano, Gustavo toma su decámetro y mide sus parcelas. Esto es lo que encuentra: $AB = CD = 12 \text{ Dm}$ y $BC = DE = 16 \text{ Dm}$. Después, calcula la superficie de cada parcela y se dirige a su hermano para reclamarle parte de la parcela que se atribuyó. ¿Cuál es el área que está reclamando Gustavo?

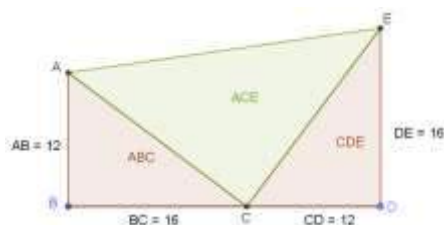


Figura 1. Herencia desequilibrada

Este problema se propuso a los diferentes grupos, (estudiantes, profesores), buscando la solución con la mediación de los cinco pasos:

El primer paso es la *interpretación* y se enfoca a la pregunta ¿Qué están preguntando? y se responde a la competencia interpretar. Este paso en ocasiones se pasa de alto o se subestima, sin embargo, en ocasiones la pregunta es directa, pero en ocasiones se requiere hacer mayor grado de interpretación para identificarla con claridad, en este caso es sencilla ¿Cuál es el área que está reclamando Gustavo? Pero al hacer reflexionar a quien está abordando; sin importar el problema, siempre se debe tener claro el horizonte de solución y para ello se debe responder de forma puntual y específica a la pregunta sin evasivas, buscando la solución más asertiva.

Un segundo paso es el *razonamiento* y responde a determinar los datos que se tiene tanto explícitos como implícitos en el problema. Como se puede observar, en este problema de la

herencia, se tiene explícito que es un trapecio rectangular, los valores de las medidas: $AB = CD = 12 \text{ Dm}$ y $BC = DE = 16 \text{ Dm}$. Implícitamente se tiene que los triángulos ABC y CDE son congruentes, y que si se rota 90° el trapecio con respecto al punto D, se tiene la altura 28, base mayor 16 y base menor 12. Estos datos implícitos no surgen con facilidad y se requiere la imaginación de la persona que está resolviendo el problema. A pesar de lo anterior, no fue hasta que se hizo la rotación con el software GeoGebra que se convencieron de ser un trapecio. Sin embargo, con facilidad determinaron las fórmulas del área del triángulo y del trapecio. Con ayuda de GeoGebra se hace una demostración de las bondades que ofrece el software dinámico al mostrar la construcción (figura 2).

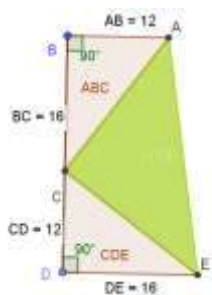


Figura 2. Trapecio rotado

En tercer lugar, se tiene el paso solucionar y responde a ¿Cuál es la estrategia para resolver el problema? Este es uno de los pasos que requiere mayor atención porque se tiene la concepción de única solución, apreciación errónea porque de acuerdo con quien aborde el problema puede existir varias formas de resolver. A continuación, se muestra soluciones presentadas por los participantes.

Tabla 1.

Estrategias de solución

Estrategia 1

Del área del trapecio se restan las áreas de los triángulos rectángulos ABC y CDE; a este resultado se divide en dos y se obtiene el área que reclama Gustavo.

$$2 (\text{área triángulo}) = 2 \frac{16 \times 12}{2} = 192$$

$$\text{área del trapecio} = \frac{28 (16 + 12)}{2} = 392$$

$$\text{área triángulo ACE} = 392 - 192 = 200$$

$$\text{diferencia de áreas} = 8$$

Por lo tanto, Gustavo reclama 4 Dm

Estrategia 2

Se determina el área de los tres triángulos rectángulos; inicialmente usando Pitágoras se encuentra los lados del triángulo ACE, para luego hallar su área y se resta las áreas de los triángulos ABC y CDE, se divide el resultado en 2 y se obtiene el área que Gustavo reclama

$$\text{Pitágoras. } AC^2 = 12^2 + 16^2 = 20$$

$$CE^2 = 12^2 + 16^2 = 20$$

$$\text{Área triángulo ACE} = \frac{20 \times 20}{2} = 200$$

$$\text{área triángulo ABC} = \frac{16 \times 12}{2} = 96$$

$$\text{área triángulo } CDE = \frac{16 \times 12}{2} = 96$$

$$200 - (192) = 8$$

$$\frac{8}{2} = 4$$

Luego Gustavo reclama 4 Dm

Fuente: Autor

Como cuarto paso es la conceptualización, acá se determina conceptos y propiedades y la pregunta es ¿Qué conceptos matemáticos se requieren?, se evalúa no solo para dar la respuesta sino para abordar la estrategia de solución. Puntualizando se requiere el concepto de trapecio rectangular, propiedades de perpendicularidad y paralelismo, teorema de Pitágoras, rotación, área de un trapecio, triángulos rectángulos, área de un triángulo y finalmente conceptualizar en el principio de igualdad y congruencia.

Después de tener solución al problema, haber conceptualizado es importante comunicar las ideas matemáticas que se usaron para resolver el problema, por lo tanto, se pide que en este paso se comunique con claridad ¿Cómo se resuelve el problema? En este paso se busca que se comunique todos los conceptos usados, orientando el paso a paso de la solución sobre todo tener con propiedad las ideas matemáticas.

Para concluir, el desarrollo de una situación problema, es importante tener una didáctica del paso a paso para resolver en forma adecuada el problema planteado. Se requiere tener claro los conceptos a usar y ser creativos para encontrar la solución y que esta sea pertinente en su planteamiento y comprensible para quienes lean o vean la solución. Esta propuesta se resume en el gráfico 1

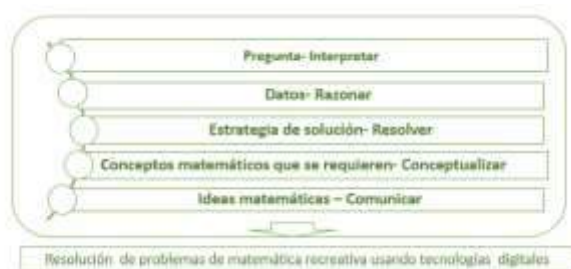


Gráfico 1. Propuesta didáctica

Al puntualizar el taller se desarrollará en tres momentos. Inicialmente se hace una explicación teórica de como resolver problemas de Matemática Recreativa usando las TAC, seguidamente un trabajo practico el cual requiere de equipos de computo con la preinstalación de GeoGebra versión 5; y finalmente el momento de reflexión del trabajo y su implicación en el aula de clase.

Resultados e implicaciones

Para analizar los resultados se retoma un poco de historia en cuento la incursión del uso de tecnologías al currículo de matemáticas. Al iniciar el siglo XXI el (MEN, 2000) lideró el proyecto titulado "*Incorporación de las Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Media en Colombia*", El proyecto consistió en capacitar a los maestros e intervenir sus prácticas

y para ello se dotó los colegios de las Calculadoras Texas 92 PLUS. Sin embargo, desde el grupo de investigación EDUMAT- UIS no se detuvo el trabajo y aún se continua con las reuniones semanales de profesores para fomentar las apropiaciones el discurso matemático escolar. Por otro lado, y a la par se fue formando el subgrupo de Matemáticas Recreativa quienes se enfatizaron en la resolución de problemas que hacen mención de su nombre y potenciaron en desarrollo del proyecto "Calendario Matemático" liderado por el grupo "Colombia Aprendiendo".

Particularmente se hizo la aplicación de este taller en la CoP Tecnologías (solo profesores), seguidamente CoP Matemática Recreativa (profesores y estudiantes de pregrado licenciatura en matemáticas) y finalmente como proceso de refinación en el RELME 32. En respuesta a esto se puede afirmar que es una necesidad sentida que el profesor debe mejorar su dME y compartir con sus pares es una buena estrategia, puesto que clásicamente se presenta en las aulas de clase las figuras de forma estándar o como viene registrado en los textos escolares y con ejercicios de reflexión como estos, deja entre ver la necesidad de hacer dinámico la presentación de tal forma que le permita al estudiante ver las diferentes posiciones. Un ejemplo de ello es lo ocurrido con el problema herencia desequilibrada, que sin importar el grado de escolaridad una de las dificultades que más se repitió fue ver el trapecio, ya que como la figura mostraba el trapecio acostado los profesores y estudiantes rotaban la cabeza después del análisis para poder identificar la altura del trapecio e identificar la estrategia de solución. Pero para ser dinámica la presentación solo se puede hacer con el método de representación de un software matemático que en este caso es Geogebra.

Consideraciones finales

Tener los elementos claros en cuanto a didáctica se refiere en la resolución de problemas facilita el proceso de enseñanza y con ello se garantizar mayor impacto en el aprendizaje, en consecuencia, se ha planteado una metodología en cinco pasos: interpretar, razonar, solucionar, conceptualizar y comunicar y de esta forma el profesor de matemáticas pueda ahondar en la solución con mayor grado de efectividad.

El Proyecto de Matemática Recreativa con su estrategia "Calendario Matemático" se socializa en el departamento de Santander desde hace 21 años y esto ha permitido compartir con profesores y estudiantes, diversas estrategias de solución y formas de abordar los problemas allí planteados. En este proceso se ha experimentado métodos de representación de acuerdo a las tendencias educativas y a la formación del profesor que oriente la clase. En la última década desde las CoP, se busca incentivar el uso de tecnologías digitales como método de representación para que maestros y estudiantes encuentren diferentes alternativas para resolver el mismo problema, apoyándose en las bondades ofrecidas por el software que en este caso es GeoGebra, el cual permite observar las características, conceptos y propiedades en una construcción matemática. Permitiendo así el desarrollo del PM desde la institucionalización del saber. Se comprende por institucionalización el momento que se hace en el aula de clases, donde con la mediación del profesor hace que varios estudiantes,

muestren al grupo sus conclusiones y procesos que realizaron, pueden ser erróneos o verdaderos, para resolver la situación propuesta y producto de la discusión del grupo se llega al saber matemático.

Referencias

- Chevallard, Y. (1991). *La Transposición Didáctica: del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares de Matemáticas*. Recuperado https://www.mineduacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf
- Ministerio de Educación Nacional. (2000). *Formación de Docentes sobre el uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas*. Recuperado <https://www.mineduacion.gov.co/cvn/1665/article-81040.html>
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Recuperado https://www.mineduacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf
- Montiel, G. (2010). *Hacia el rediseño del discurso: Formación docente en línea centrada en la resignificación de la Matemática Escolar*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Volumen (13)69-84 Recuperado de <http://www.clame.org.mx/relime/201004d.pdf>
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla, España: editorial Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.
- Lozano, R. (2011). *De las TIC a las TAC: tecnologías del aprendizaje y el conocimiento*. Anuario ThinkEPI. Volumen (5) 45-47 Recuperado de <https://recyt.fecyt.es/index.php/ThinkEPI/article/view/30473/16039>
- Prensky, M. (2010). *Nativos e Inmigrantes digitales*. Distribuidora SEK, S.A.
- Wenger, E. (1998). *Communities of Practice: Learning, Meaning, and Identity*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Villareal, G. (2010). Caracterización del uso de la tecnología, por profesores y alumnos, en resolución de problemas abiertos en matemática (tesis doctoral). Universidad de Barcelona.

APRENDIZAJE ACTIVO Y VISUALIZACIÓN: REPRESENTACIÓN DE UN OBJETO TRIDIMENSIONAL (3D) EN EL PLANO BIDIMENSIONAL (2D), A PARTIR DE SUS PROYECCIONES ORTOGONALES O VISTAS PRINCIPALES

Carlos Manuel Sabino Escobar

Emilio Máximo Vera Namay

csabino@gmail.com, emiliomaximov@gmail.com

Universidad Nacional de Tumbes, Perú

Resumen

Este taller está dirigido a los profesores de Educación Básica Regular; se compartirá una experiencia desarrollada con profesores y estudiantes del nivel secundario con el objetivo de contribuir con el desarrollo de la competencia para resolver problemas de forma, movimiento y localización propuesta en el Currículo Nacional del Perú. Esta experiencia promueve el desarrollo del pensamiento matemático en general y el desarrollo de la visualización matemática en particular; para ello se aplicará una secuencia de enseñanza que permita representar, a partir de sus vistas, un módulo multicubo tridimensional (3D) en el plano bidimensional (2D). Siguiendo un aprendizaje activo, los participantes al resolver las tareas propuestas de manera individual y de forma colaborativa, identificarán progresivamente no solo las vistas principales; sino también el módulo multicubo que lo representa. Se utilizará colores, lápiz, hojas de trabajo individual y por equipos, además de cubos multilink y un plano que simula el plano tridimensional.

Palabras clave: Visualización, vistas, módulo multicubo, espacio tridimensional

Visualización

Los estudios realizados indican que el concepto de visualización es considerado por algunos investigadores como capacidad espacial, razonamiento geométrico, pensamiento espacial o visión espacial; a continuación, presentamos algunos de ellos:

Zimmermann y Cunningham (1991). Visualización es el proceso de formar imágenes (mentalmente, con lápiz y papel o con la ayuda de tecnología) y usar tales imágenes para el descubrimiento y el conocimiento matemático.

Zazkis, Dubinsky y Dautermann (1996). Los términos utilizados para definir la visualización se han concretado, empezando a entenderla como acto por el cual un individuo establece una fuerte conexión entre una construcción interna y algo cuyo acceso es adquirido a través de los sentidos.

Hershkowitz, Parzysz y Van Dermolen (1996). Indican, se entiende a la visualización como la transferencia de objetos, conceptos, fenómenos, procesos y sus representaciones a algún tipo de representación visual o viceversa. Esto incluye también la transferencia de un tipo de representación visual a otra.

De acuerdo a nuestro interés, denominaremos visualización en la resolución de tareas y problemas de geometría en el contexto de lápiz y papel, al proceso o acción de transferencia de un dibujo a una imagen mental o viceversa; además de entenderlo como "la habilidad de representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflexionar sobre la información visual". (Hershkowitz, 1990)

Multicubo

Los bloques multicubos, también llamados cubos multienlace o policubos, son un material concreto que se utilizan para trabajar en matemáticas y facilitan el reconocimiento, experimentación y exploración de relaciones espaciales y la conquista del espacio tridimensional. Su uso, además permite, visualizar la profundidad o altura de un objeto tridimensional presentado en dos dimensiones. Asimismo, ayuda al estudiante a identificar las diferentes representaciones principales de un objeto tridimensional: vista planta, vista lateral y vista frontal

Módulo multicubo



Figura 1. Módulo multicubo

Un "módulo multicubo" es un sólido formado por varios cubos iguales pegados de manera que sus caras se superponen (Gutiérrez, 1998).

Representaciones planas de un módulo multicubo

El dibujo de las representaciones planas de módulos multicubos también ha sido ampliamente estudiado (Gutiérrez, 1996; Ben-Chaim, Lappan & Houang, 1985; Ben-Chaim, Lappan & Houang, 1989; Juraschek, 1990), entre las más frecuentes en el contexto de la geometría se encuentran la representación por niveles y las proyecciones en perspectiva, paralela (caballera), isométrica, ortogonal y ortogonal codificada de un módulo multicubo, como se muestra en la figura siguiente:

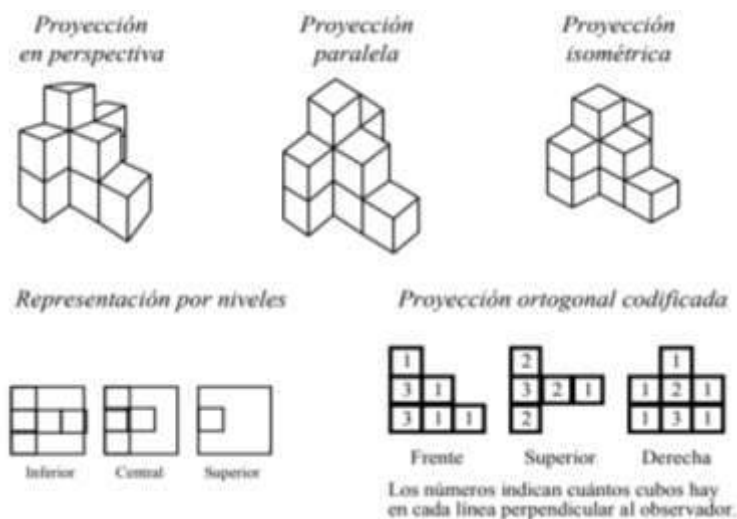


Figura 2. Representaciones planas de un módulo multicubo

Extraído de: <https://www.uv.es/angel.gutierrez/marcopap.html>

Tipos de actividades para el aprendizaje de las representaciones planas de un módulo multicubo

Gutiérrez (1998), en el análisis de un experimento de enseñanza de las representaciones planas de módulos multicubos, distingue tres tipos de actividades que, adaptadas al caso de objetos representados en el plano, sin el uso de material manipulativo, se pueden describir como sigue:

1. Dibujar algunas vistas o proyecciones ortogonales en el sistema diédrico de un objeto (o de una composición de objetos) a partir del dibujo del objeto en perspectiva (caballera, isométrica o con puntos de fuga); o inversamente:
2. Dibujar el objeto en perspectiva a partir de la representación del objeto en el sistema diédrico.
3. Poner en relación (sin dibujar) una representación de un objeto en perspectiva con su representación mediante vistas o en el sistema diédrico.

Observamos que en estas actividades se elaboran técnicas para representar un objeto o un espacio y, al mismo tiempo, se aprende a leer diferentes tipos de representaciones planas y los códigos respectivos. Asimismo, que la interpretación y la comunicación de la información espacial (descripciones gráficas y modelos de hechos y relaciones espaciales, términos verbales, vocabulario específico utilizado en geometría) de manera figural, verbal o mixta, son habilidades importantes relacionadas con la visualización de objetos tridimensionales (Gorgorió, 1998).

Aprendizaje activo

Malaspina (2006), en su reporte de investigación, resolución de problemas y aprendizaje activo, expresa que:

el aprendizaje activo es un método de enseñanza centrado en el estudiante, por el cual, a través de la variación de estímulos el estudiante va construyendo su propio conocimiento (...) se aprende mejor haciendo y comunicando lo que se va

aprendiendo. De esta forma, la nueva información se puede incorporar a la memoria de largo plazo, jerarquizada de modo que sea posible su reactivación cuando sea necesario. (p. 9)

En ese mismo orden de ideas, consideramos que una modalidad de aprendizaje activo es el aprendizaje colaborativo, según el cual los estudiantes trabajan individual y colectivamente, procurando hacer una sinergia en su aprendizaje. En tal sentido, no basta organizarse y repartirse el trabajo para que cada uno de los miembros haga "su parte" sin que los otros miembros del grupo se enteren y después se ensamblen las partes. "El aprendizaje colaborativo es mucho más que eso, pues demanda que eso, pues demanda una serie de requisitos al interior del grupo". (Malaspina, 2006, p. 10)

Jhonson y Smith (1991), proponen como elementos básicos del aprendizaje colaborativo, los siguientes:

1. **Interdependencia positiva.** Este elemento está en el corazón del aprendizaje colaborativo. Cada estudiante debe ser consciente de que podrá tener éxito en su propio aprendizaje a menos que los otros miembros del grupo lo tengan en el suyo, y que el trabajo de sus compañeros lo beneficia a él tanto como el suyo beneficia a los demás.
2. **Responsabilidad individual.** Cada estudiante debe comprender que no puede ampararse en el trabajo de los demás, sin hacer su parte. Para que funcione colaborativamente, un grupo debe saber cuál de sus miembros necesita más apoyo y aliento para completar su asignación.
3. **Interacción promotora.** Este elemento se pone en juego cuando los miembros del grupo se ayudan mutuamente y elogian el esfuerzo que cada uno hacen por aprender
4. **Uso de habilidades del equipo de trabajo.** Debido a que muchos estudiantes nunca han trabajado antes colaborativamente, con frecuencia les falta las habilidades de trabajo en equipo, como la puntualidad y la tolerancia. Para contribuir al éxito de un esfuerzo colaborativo, los estudiantes deben adquirir habilidades interpersonales y de grupos pequeños.
5. **Procesamiento del grupo.** Este elemento involucra la evaluación de los estudiantes de cuan bien ellos están logrando metas individuales colectivas y manteniendo relaciones de trabajo efectivo al interior del grupo. Esta evaluación capacita a los estudiantes a maximizar su propio aprendizaje y el de los demás y mejorar la calidad de la experiencia del grupo.

Utilizaremos este aprendizaje, dado que, el estudiante aprenderá experimentando y simulando; además consideramos que es la mejor oportunidad que tiene el estudiante para ir construyendo su aprendizaje. Al resolver las actividades propuestas se pone de manifiesto que es el centro del proceso de enseñanza aprendizaje, por lo que es responsabilidad del profesor conocer cuáles son las necesidades que requiere de acuerdo a su edad

Implementación del taller

La implementación de este taller lo iniciaremos con actividades que permitan utilizar la visualización para identificar las vistas principales de un módulo multicubo presentado en perspectiva isométrica, para lo cual se utilizará hojas para trabajar tanto individual como colectivamente, multicubos, colores, láminas y un plano 3D diseñado para simular el

espacio tridimensional. Seguidamente desarrollaremos la actividad principal de este taller de acuerdo al procedimiento siguiente:

1. El facilitador debe recortar, en cuatro partes, la hoja diseñada (Figura 3) para el trabajo colectivo que contiene las vistas principales y el módulo multicubo que lo representa.
2. Colocar dentro de una bolsa las hojas recortadas (en adelante llamaremos fichas).
3. Cada participante saca de la bolsa una ficha.
4. Luego de identificar las vistas deben buscar el módulo multicubo que lo representa.
5. Con los participantes que identifican las vistas y el módulo multicubo, queda conformado el equipo que luego tendrán que realizar colectivamente la siguiente tarea que se les asigne realizar.

A diferencia de lo que usualmente se realiza, podemos observar que los equipos de trabajo (cuatro integrantes) se formarán cuando los participantes culminen la primera actividad principal de este taller, es decir, cuando identifiquen al módulo multicubo al cual pertenece la vista principal que él escogió, relacionado sus representaciones.

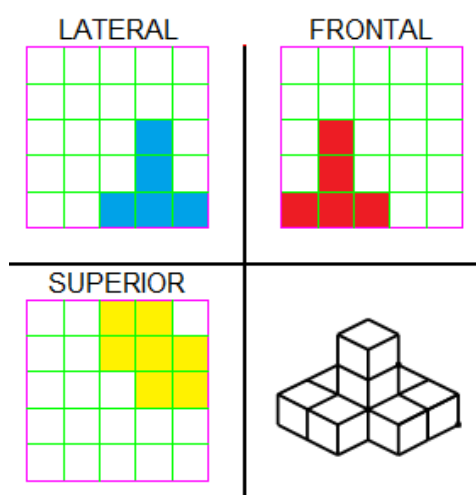


Figura 3. Hoja para recortar en cuatro fichas

Diseño de actividades

Las actividades se diseñaron teniendo en cuenta los tipos que, para el aprendizaje de las representaciones planas de un módulo multicubo, ha sido propuesto por Gutiérrez (1998). Asimismo, cada actividad propuesta tiene dos vistas principales iguales y una de ellas diferentes (Figura 4a y 4b), que luego de un análisis y reflexión colectiva permitirá contestar a las preguntas que se formulen.

Actividad 1: Representación de un objeto tridimensional (3D) en el plano bidimensional, a partir de sus vistas principales.

Objetivo: Identificar las vistas principales y el módulo multicubo que lo representa, dentro de un conjunto de representaciones tanto bidimensional (2D) como tridimensionales (3D).

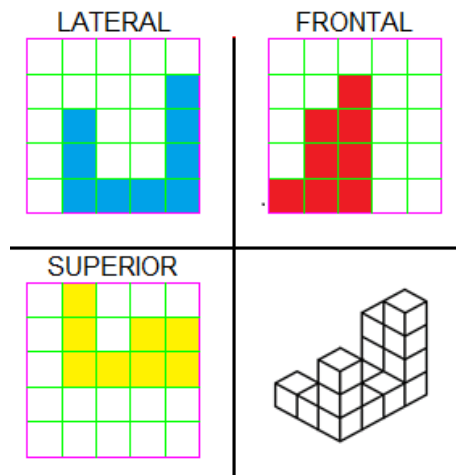


Figura 4a. Hoja de trabajo colectivo

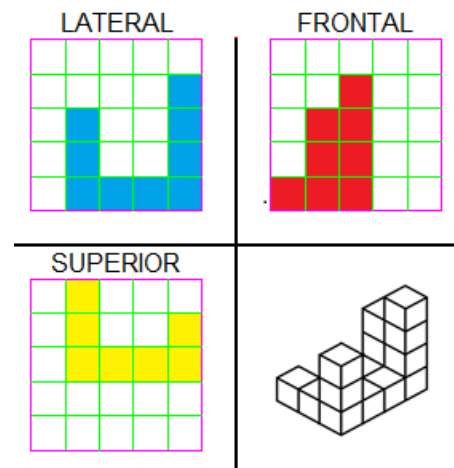


Figura 4b. Hoja de trabajo colectivo

Seguidamente se reflexionará sobre la actividad realizada y se plantearán las siguientes interrogantes:

1. ¿Es único el módulo multicubo que se puede formar al relacionar su representación isométrica con su representación plana?
2. ¿Cómo podría usted convencer a sus estudiantes que la respuesta que generó la reflexión anterior, sea aceptada sin ambigüedades?

Referencias

- Gutiérrez, A. (1998): Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial, *Revista EMA*, 3(3), 193-220.
- Johnson, D., Johnson, R., And Smith, K. (1991), Cooperative Learning: Increasing College Faculty Instructional Productivity, ASHE-ERIC Higher Education Report No. 4, Washington, DC: The George Washington University.
- Hershkowitz, R., Parzysz, b. y Van Dermolen, J. (1996). *Space and Shape*, en Bishop and others, A.J. (eds.). *International handbook of Mathematics Education*, pp. 161-204 (1). Dordrecht, Netherland: Kluwer Academic Plublishers.
- Malaspina. U. J. (2006). *Resolución de problemas y aprendizaje activo*. Coloquios sobre Matemática Educativa.
- Ministerio de Educación (Perú, 2016). *Currículo Nacional de la Educación Peruana*. Lima, Perú.

PATRÓN, SUCESIÓN Y SECUENCIA

Elvis Bustamante Ramos

Francisco Ugarte Guerra

Magaly Ethel Campos Motta

ebustamanter@pucp.pe, fugarte@pucp.edu.pe, mecamposm@pucp.pe

Instituto de Investigación sobre Enseñanza de la Matemáticas, IREM-PUCP, Perú

Resumen

El taller tiene como finalidad evidenciar los diferentes objetos, matemáticos o no, que intervienen al momento de resolver tareas relacionadas con patrones, para ello se analizan las tareas al respecto de una colección de textos de Matemáticas, de primaria y secundaria, del Ministerio de Educación del Perú. Mostraremos como la ambigüedad y la falta de articulación entre las definiciones propuestas, no solo no ayudan a la construcción del concepto matemático de sucesión, sino por el contrario son fuente de confusión. Esta situación podría explicar por qué las tareas con patrones se centran en la técnica de resolución sin prestar atención a los conceptos involucrados. De esta manera se obstaculiza la construcción del concepto de sucesión como objeto unificador y con el cual se desarrolla la interpretación y la generalización de patrones.

Palabras clave: Patrón, sucesión, secuencia

Introducción

El Ministerio de Educación del Perú señala que cualquier reto del mundo demanda competencias; estas competencias a la vez combinan un conjunto de capacidades y una de estas capacidades es, por ejemplo, identificar una regularidad existente en una sucesión.

Además, al momento de revisar los diferentes documentos oficiales del Ministerio de Educación del Perú se pone de manifiesto la presencia de la sucesión, la secuencia y otros objetos matemáticos en relación con el patrón; por esa razón, es importante ser consciente del concepto que se está desarrollando en el aula de clase para poder orientar el aprendizaje de los estudiantes. Por ello, consideramos que es necesario poder diferenciar un concepto de otro y no enfocarnos tan solo en la resolución sin importar como se está aplicando la teoría o el concepto. De esta manera, creemos que los estudiantes van a ser capaces de explicar o argumentar sus ideas para poder desarrollar así, conceptos mucho más complejos.

Finalidad

Como se mencionó anteriormente, el taller tiene como finalidad principal promover la reflexión en los participantes acerca de las diferencias entre los objetos, matemáticos o no, que intervienen en las tareas de patrón, tales como la sucesión, la secuencia, entre otros. Además, mostraremos que las definiciones no deben considerarse inamovibles en un contexto

(institución) al momento de organizar el contenido matemático. Todo ello, nos va permitir desarrollar los conceptos para poder así ser capaces de diferenciarlos, y ver de forma más clara la razón de ser de cada uno de ellos, lo cual es un aspecto importante para articular dichos conceptos y poder abordar conceptos más avanzados.

Marco teórico

En el taller, tomamos en cuenta el modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática (MTSK, por sus siglas en inglés) propuesto por Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán (2013) que tiene dos grandes dominios de conocimiento: conocimiento del contenido matemático (MK, por sus siglas en inglés) y conocimiento didáctico del contenido (PCK, por sus siglas en inglés).

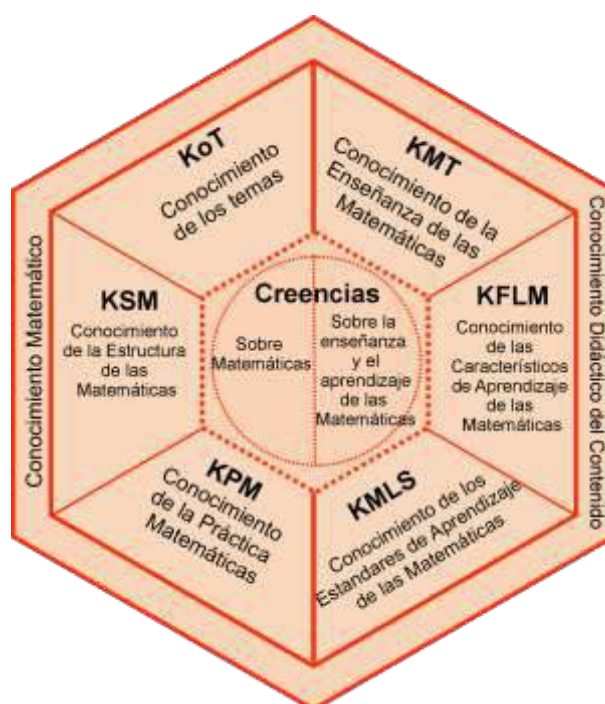


Figura 1. Subdominios del MTSK (Carrillo et al., 2013, p3)

En este trabajo nos centraremos en el Conocimiento Matemático (MK) del profesor de matemáticas que tiene tres subdominios:

Conocimiento de los temas (KoT): En el taller se verán aspectos relacionados al significado de algunos conceptos y se mostrarán ejemplos específicos para indicar características de patrón, secuencia y sucesión.

Conocimiento de la estructura matemática (KSM): El taller busca que, por medio del conocimiento matemático del profesor, este sea capaz de reconocer conceptos como patrón, secuencia y sucesión en forma integrada y así pueda llegar a comprender de manera natural conceptos avanzados como series o integrales, pero desde un punto elemental.

Conocimiento de la práctica de la matemática (KPM): Se verán aspectos ligados a la argumentación o demostración en relación a patrón: por ejemplo, la sintaxis para el manejo de la sucesión.

Los asistentes trabajarán en forma individual y grupal con fichas basadas en ejercicios que han sido extraídos de los textos oficiales del Ministerio Educación del Perú, los mismos que fueron usados en la Educación Básica Regular (EBR) del Perú durante el periodo del 2012 al 2017.

Ficha A

- 

A 1D lattice with 11 sites labeled 0 to 10. Solid arrows point right between adjacent sites, and dashed arrows point left between adjacent sites, both labeled +1.

En forma grupal, responda las siguientes preguntas:

¿Qué tipo de elementos pueden aparecer en una secuencia?

En la ficha B, se pretende usar la conexión entre secuencia y patrón encontrada posiblemente en la definición provisional de la Ficha A, como medio de argumentación para indicar o reconocer una secuencia. Además, se pone en discusión la necesidad de introducir un nuevo objeto: sucesión, o ampliar el concepto de secuencia.

Ficha B

Los siguientes ejercicios han sido extraídos del texto Matemática 2 Primaria y Matemática 3 Primaria del Ministerio de Educación del Perú utilizado durante el periodo del 2012 al 2017.

Resuelva los siguientes ejercicios en forma individual

1. Según la secuencia, rellene los espacios en blanco.



Figura 1. Secuencia (Perú, 2012c, p. 37)

2. Complete la secuencia.



Figura 2. Camiones (Perú, 2012d, p.51)

3. Complete la sucesión.



Figura 3. Camiones (Perú, 2012d, p.144)

En forma grupal, responda las siguientes preguntas:

En el ejercicio 1, si eliminamos las figuras, obtenemos

34 32 28 26

En este caso, ¿hemos obtenido una nueva secuencia? comente su respuesta

En base a los ejercicios 2 y 3, ¿secuencia y sucesión son sinónimos? ¿Por qué?

Finalmente, proponemos la discusión de distintas propuestas de definición de sucesión. Por un lado, la que aparece en los textos oficiales "una sucesión puede ser creciente o decreciente si los números aumentan o disminuyen en una cantidad fija. A esto se llama patrón." (Perú, 2012d, p. 138) y "Una sucesión de números naturales está formada por números naturales ordenados según una determinada ley de formación o patrón numérico". (Perú, 2012f, p. 16).

Por otro lado, mostramos la definición que propone la Real Academia Española (RAE) quien en su página oficial señala que, la sucesión es el "Conjunto ordenado de términos que cumplen una ley determinada".

En esta parte, se va a discutir: ¿qué es una sucesión? o ¿toda sucesión es una secuencia? o ¿toda secuencia es una sucesión?; todo ello, en base a las fichas y las respuestas obtenidas por los participantes.

Adicionalmente, se propone una definición adicional de un texto universitario de matemática, para definir sucesión: "Una sucesión numérica es una aplicación cuyo dominio es el conjunto de los números naturales" (Spivak, 1996, p.613); para discutir la necesidad de introducir el objeto sucesión y encontrar la razón de ser de la sucesión.

Ficha C

Los siguientes ejercicios han sido extraídos del texto Matemática 4 Primaria y 4 Matemática Secundaria del Ministerio de Educación del Perú utilizado durante el periodo del 2012 al 2017

Resuelva los siguientes ejercicios en forma individual

1. Complete la sucesión.

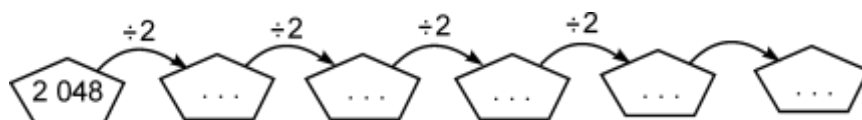


Figura 1. Pentágonos (Perú, 2012e, p. 121)

2. Encuentre la relación y calcule los números de los recuadros.



Figura 2. Insectos (Perú, 2012e, p115)

3. Identifique las sucesiones que son progresiones geométricas.
 - a) 4; 8; 24; 96;...
 - b) 6; 12; 24; 48;...
4. Determine el enésimo término de la progresión geométrica: 4; 1,2; 0,36; 0,108; ...

En forma grupal, responda las siguientes preguntas:

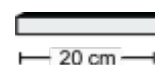
¿Qué entiende por sucesión?

De los ejercicios 1 a 4, ¿cuál(es) no es sucesión o secuencia? ¿Por qué?

De los ejercicios 3 y 4, ¿qué relación existe entre la razón y el patrón?

Ejercicio (Adicional)

1. Se quiere medir el largo del tablero de una mesa. Se cuenta con un listón de esta medida:



- a. ¿Qué podemos hacer para medir el largo de la mesa?
- b. Usamos el listón de madera para medir. Luego, hacemos una marca cada vez que completamos un listón. Al terminar, dibujamos lo realizado. ¿Cuál será la medida de las otras marcas?



Figura 1. Madera (Perú, 2012c, p.37)

- c. ¿Hemos realizado una secuencia? ¿Por qué? ¿Cuál es el patrón?

Resultados esperados

Al finalizar el taller, esperamos que los profesores reconozcan la importancia de las definiciones y su relación con las tareas propuestas, y que sean capaces de distinguir los objetos matemáticos introducidos; por ejemplo, si en un ejercicio se presenta una secuencia o no. Además, que sean capaces de articular los objetos matemáticos tratados por medio de las definiciones que conviven a lo largo de los textos utilizados en el presente taller.

Además de ello, se espera que haya una cierta progresión no solo al momento de desarrollar y/o elaborar los ejercicios planteados; sino también al nivel conceptual, para que de esta manera, los profesores tengan una visión más clara y profunda, para el desarrollo de otros objetos matemáticos, por ejemplo, en el caso de la secundaria serían las progresiones o tasa de interés.

Referencias

- Carrillo, J.; Climent, N.; Contreras, L.C. & Muñoz-Catalán, M.C.(2013) Mathematics Teacher Specialized Knowledge. En: Proceedings Of The Eighth Congress Of The European Society For Research In Mathematics, 8th, Antalya. CERME 8, Antalya, Turquía: CERME 8. 2985-2994.
- Perú, Ministerio de Educación (2009a). *Diseño curricular nacional de la educación básica regular*. Lima.
- Perú, Ministerio de Educación (2012b). *Matemática 1 Primaria*. Lima: Norma.
- Perú, Ministerio de Educación (2012c). *Matemática 2 Primaria*. Lima: Norma.
- Perú, Ministerio de Educación (2012d). *Matemática 3 Primaria*. Lima: Norma.
- Perú, Ministerio de Educación (2012e). *Matemática 4 Primaria*. Lima: Norma.
- Perú, Ministerio de Educación (2012f). *Matemática 5 Primaria*. Lima: Norma.
- Perú, Ministerio de Educación (2012j). *Matemática 4 Secundaria*. Lima: Santillana.

PROPUESTA DE TAREAS Y RECURSOS PARA LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA

Isabel Torres Céspedes

Marisel Beteta Salas

José Carlos León Ríos

iztorres@ulima.edu.pe, mbeteta@ulima.edu.pe, jleonr@ulima.edu.pe

Universidad de Lima, Perú

Resumen

Este taller está dirigido a docentes del nivel secundario. A lo largo del mismo se irán planteando actividades y tareas relacionadas a la geometría. En este trabajo tomamos en cuenta el enfoque del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática (MTKS) y seguimos una metodología cualitativa. El objetivo del taller es ofrecer a los participantes la posibilidad de manipular material concreto para resolver diversas situaciones geométricas. Así mismo se busca generar un espacio de diálogo para analizar los distintos conocimientos que se trabajan con dichas tareas.

Palabras clave: Material concreto, Conocimiento especializado del profesor, Enseñanza y aprendizaje de la matemática en secundaria.

Introducción

Los materiales concretos son objetos que pueden ayudar a construir, entender o consolidar conceptos e incidir en las actitudes de los alumnos (Villarreal y Sgreccia, 2011). Los materiales concretos son objetos de la vida cotidiana usados para el aprendizaje o especialmente para propósitos escolares (Lima, 2011, pág. 18). El objetivo de este taller es explorar con material concreto diversas situaciones que afiancen el conocimiento de la geometría y sus propiedades. En este trabajo tomamos en cuenta el enfoque del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática (MTKS) y seguimos una metodología cualitativa. Finalmente, esperamos promover la reflexión en los docentes para trabajar los distintos objetos matemáticos con recursos que faciliten la comprensión del objeto matemático haciendo conjeturas y validándolas.

Existen diversos recursos y estrategias que pueden ser utilizados como apoyo para la enseñanza de la matemática. La manipulación con material concreto permite explorar el aprendizaje. En este contexto, los actuales escenarios de aprendizaje deberían aprovechar las ventajas del uso de material concreto en las clases de matemática, con la finalidad de crear ambientes de aprendizajes dinámicos y motivadores que propicien de manera más efectiva el aprendizaje del estudiante. Por ello, en el taller que proponemos mostraremos diversas situaciones que permitirán reflexionar sobre diferentes objetos matemáticos en geometría.

Marco teórico

La realización del presente taller tiene como marco teórico el modelo MTSK (por sus siglas en inglés: Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática), propuesto por Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán (2013). Este modelo se centra en la especificidad del conocimiento del profesor de matemáticas respecto de la enseñanza del contenido.

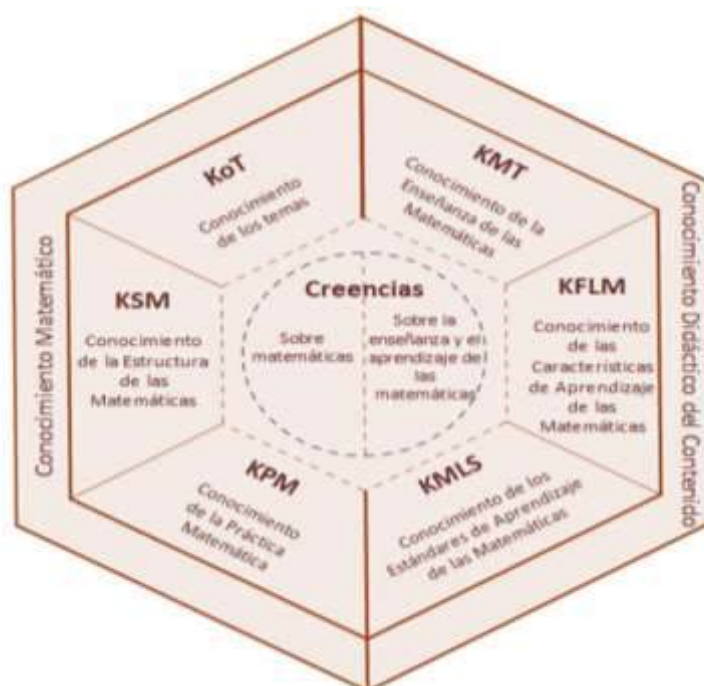


Figura 1. Subdominios del MTSK (CARRILLO et al., 2013)

Tiene dos grandes dominios de conocimiento: conocimiento del contenido matemático (MK, por sus siglas en inglés) y conocimiento didáctico del contenido (PCK, por sus siglas en inglés). Nos centramos en el conocimiento matemático (MK) que tiene como prioridad indagar los conocimientos matemáticos de los profesores de educación secundaria en relación a la geometría plana y del espacio.

El conocimiento matemático (MK) está compuesto por tres subdominios de conocimiento: conocimiento de los temas (KoT, por sus siglas en inglés), conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM, por sus siglas en inglés) y conocimiento de la práctica matemática (KPM, por sus siglas en inglés), tal como se muestra en la siguiente tabla.

Tabla 1

Subdominios del conocimiento matemático (MK).

MK

(Conocimiento matemático)

KoT	KSM	KPM
(Conocimiento del contenido matemático)	(Conocimiento de la estructura matemática)	(Conocimiento de la práctica matemática)
Conocimiento de conceptos y procedimientos matemáticos con sus correspondientes fundamentos.	Considera la idea de conexión y complejidad del contenido matemático. Las conexiones abarcan las interconceptuales (comprenden vínculos entre ideas o conceptos matemáticos distintos) y temporales (enlazan los conocimientos previos y posteriores con el contenido de enseñanza).	Implica el modo de proceder en matemáticas. Incluye el conocimiento de las formas de conocer y crear o producir en matemáticas, el razonamiento y la prueba, saber definir y usar definiciones, elegir representaciones, argumentar, generalizar o explorar, aspectos de la comunicación matemática.
Se concreta en saber matemáticas, conocer definiciones, propiedades, procedimientos, ejemplos específicos, significados y aspectos fenomenológicos asociados al contenido.		

Fuente: elaboración propia. 2018.

Este taller forma parte de un proyecto de investigación en proceso y está dirigido a docentes de nivel secundario (estudiantes entre 13 y 17 años) e investigadores interesados en el tema que deseen profundizar en la problemática o aportar con sus observaciones al mejor desarrollo de la investigación.

Diseño metodológico y desarrollo del taller

El taller está dirigido a docentes del nivel Primario y Secundario. Se trabajará diversas tareas usando material concreto. Los asistentes serán divididos en equipos de trabajo. En todo momento se fomentará la reflexión mediante el análisis y las discusiones grupales.

Asimismo, dado que nuestro estudio es de carácter cualitativo, no se pretende "explicar, controlar y predecir" como en el paradigma positivista, ni "conseguir la emancipación y transformación de la realidad, como pretende el paradigma crítico" (Muñoz Catalán, 2009, p.149). El diseño de la consiste en un estudio de caso, que sigue las características del estudio de caso instrumental de Stake (2005), siendo el caso, el conocimiento especializado que poseen los docentes respecto al desarrollo de tareas que involucren polígonos.

Presentamos, a continuación, las tareas que se proponen para ser trabajadas en el taller.

1. Haciendo uso de los meanos trabajar las siguientes tareas

¿Es posible construir un triángulo con tres cuyas dimensiones sean 10 cm, 12 cm y 25 cm. Construye con ellas un triángulo ¿Qué sucede? ¿Qué puedes concluir?

Con ayuda de tus mecanos construye diversos cuadriláteros y responde:

¿Qué figura representa? ¿Todos los cuadrados son rombos? ¿por qué? ¿Qué propiedades puedes encontrar en los cuadrados? Mencionalas.

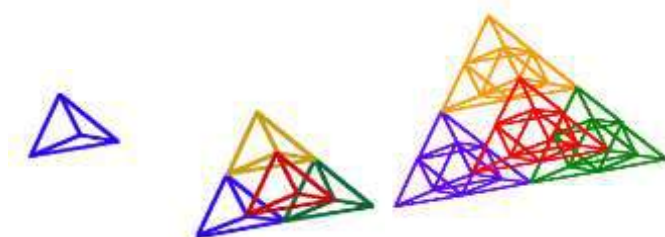
¿Todos los rombos son cuadrados? ¿por qué? ¿Qué propiedades puedes encontrar en los rombos? Mencionalas

Construye las siguientes figuras con ayuda de tus mecanos



¿Cuántos ángulos interiores tiene? ¿Cómo son los ángulos interiores?

- Usando mondadientes y plastilina construye el triángulo de Sierpinski. Resolver las siguientes tareas para encontrar patrones matemáticos.



Número de tetraedros para para n divisiones en su punto medio

ETAPAS (Dividir en puntos medios cada arista)	0	1	2	3		n
Número de tetraedros	1	4	16	64		

Supongamos que la arista inicial del tetraedro mide 16 cm.

ETAPAS (Dividir en puntos 0 1 2 N
medios cada arista)

Longitud de la arista del tetraedro 16 8 4

Supongamos que la arista inicial del tetraedro mide 16 cm

ETAPAS (Dividir en puntos medios cada arista)	0	1	2		n
Área de la enésima cara					

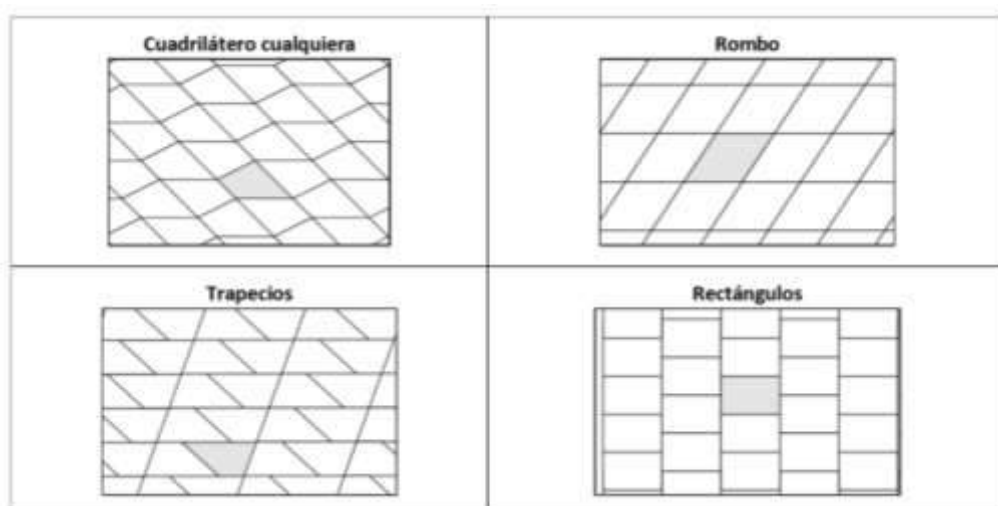
3. Actividad de las teselaciones

a) A continuación, se presentan actividades de formalización matemática:

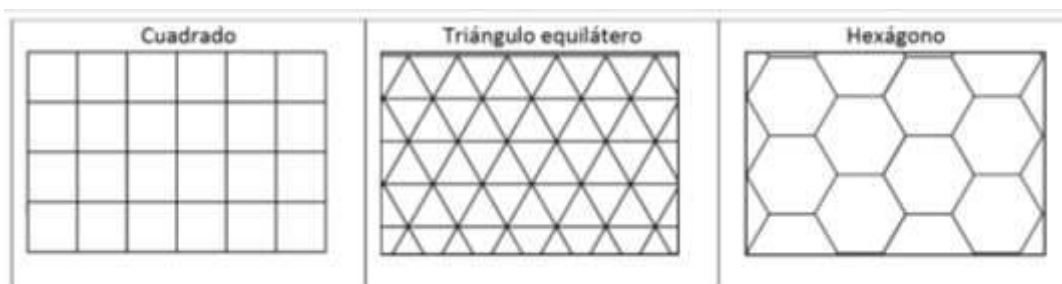
- Teselar el plano con polígonos regulares utilizando regla y compás o procesadores geométricos.
- Utilizar las transformaciones isométricas como herramienta para realizar teselaciones regulares.

ACTIVIDAD 1

1. Se entregan cartulinas para teselar el plano a partir de polígonos. Se explora ¿Cuáles son los polígonos que teselan el plano?



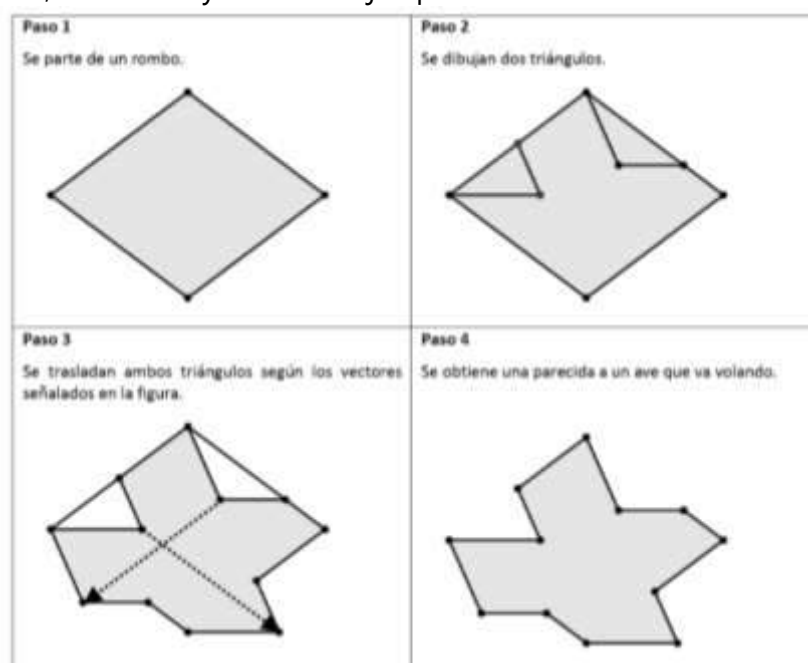
2. Luego de explorar los polígonos que teselan al plano, se explora respecto a los polígonos regulares.



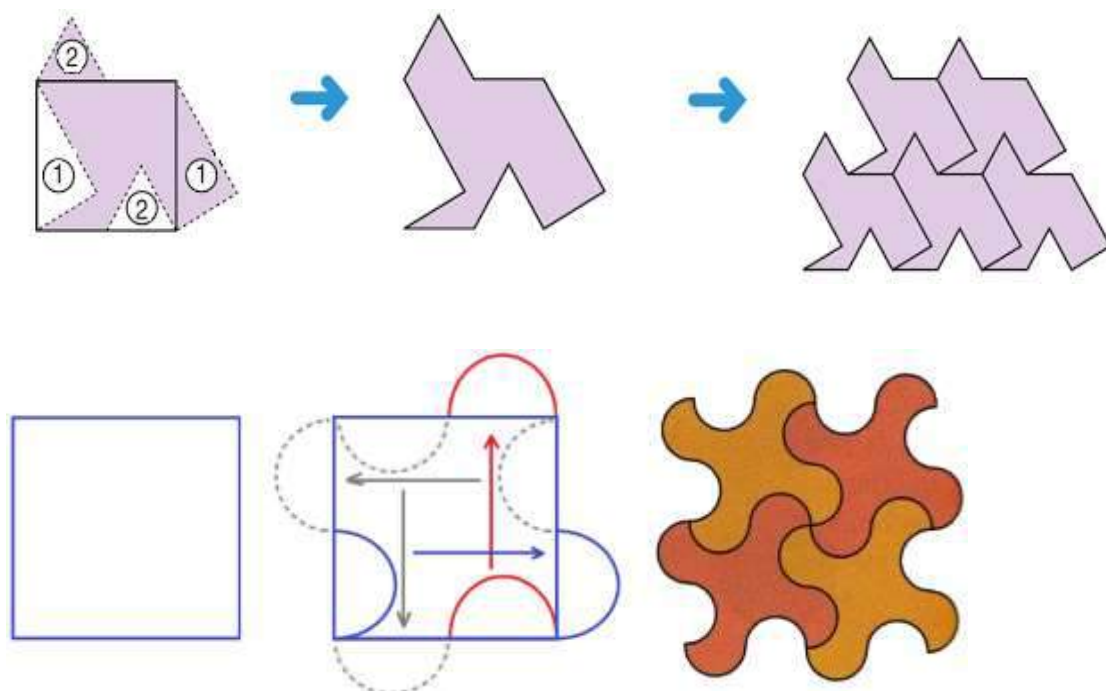
¿Por qué estos polígonos teselan el plano y otros no? Caso del pentágono y heptágono.

ACTIVIDAD 2

1. A partir de una que por sí sola tesela el plano, se remueven partes de ella y reubican de tal manera, que se mantenga el área y no queden espacios vacíos en su interior. Esta nueva figura, por sí sola, también teselaré el plano. La reubicación de las partes de la figura original se logra por combinación de movimientos rígidos, esto es: traslaciones, rotaciones y simetrías. Ejemplo.



2. A partir de una figura de la actividad 1, crear una tesela con movimientos de rotación, translación y simetrías.



3. Duplicar la tesela las veces que sea necesaria para cubrir un plano que estará conformado por una cartulina tamaño A2.

Resultados esperados

Las actividades propuestas en este taller están diseñadas para reflexionar sobre la manera de fomentar el conocimiento del contenido (KoT) y el conocimiento de la práctica matemática (KPM) en especial la manera de explorar una situación matemática, producir una conjetura y buscar la manera de validarla, es decir, la forma de crear y producir matemática a través del razonamiento y la prueba.

Con esto esperamos que se sienten las bases para una reflexión más profunda sobre el modelo teórico MTSK.

Consideraciones finales

Buscamos con estas actividades que el estudiante pueda observar, imaginar y aprender. Acercar a los estudiantes a la matemática en un contexto lúdico y divertido. Favorecer el trabajo en equipo y la participación activa del estudiante. Estimular la reflexión y el análisis y propiciar el desarrollo de habilidades vinculadas a la comunicación y a la comprensión de ideas y nociones matemáticas.

El uso de la modelación matemática en geometría resultó ser una experiencia favorable para el entendimiento de nociones geométricas por parte de los estudiantes, haciendo que adquieran una actitud positiva hacia las tareas que se plantearon. Asimismo, se espera que los

maestros se motiven con las actividades presentadas y vean que el uso de material concreto no solo es exclusivo del nivel primario sino también puede ser usado en el nivel secundario para permitir los alumnos integren, comprendan conocimientos y aprendan a enfrentarse a problemas sin la intervención directa del profesor.

En consecuencia, el uso del material concreto permitió diferenciar mejor los conceptos que se trabajaron en el taller.

Referencias

- Carrillo, J.; Climent, N.; Contreras, L.C. & Muñoz-Catalán, M.C.(2013) Mathematics Teacher Specialized Knowledge. En: Proceedings Of The Eighth Congress Of The European Society For Research In Mathematics, 8th, Antalya. CERME 8, Antalya, Turquía: CERME 8. 2985-2994.
- Flores, J. V. & Gaita, C. (2014). Situación actual de la Educación Matemática. en el Perú. *Revista de matemática, ensino e cultura*, 9(15), 82-95. Recuperado de <http://www.rematec.net.br/index.php/inicio/issue/current>
- Lima, M. (2011). El material didáctico y concreto para desarrollar destrezas con criterio de desempeño en el bloque curricular geométrico del octavo año de educación básica en el colegio experimental universitario "Manuel Cabrera Lozano" de la ciudad de Loja 2010-2011. (Tesis de licenciatura) Loja: Universidad Nacional de Loja.
- Muñoz-Catalán, M. C. (2009). El desarrollo profesional en un entorno colaborativo centrado en la enseñanza de las matemáticas: el caso de una maestra novel (Tesis doctoral, Universidad de Huelva, España). Recuperada de <http://goo.gl/OA4ydJ>. Huelva, España: Universidad de Huelva.
- Rojas, N., Flores, P. & Carrillo, J. (2015). Conocimiento especializado de un profesor de matemáticas de educación primaria al enseñar los números racionales. *Bolema - Mathematics Education Bulletin*, 29(51), 143–166. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a08>
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15 (2), 4-14.
- Stake, R. E. (2005). Qualitative Case Studies. En N. K. Denzin y Y. S. Lincoln (Eds.), *The Sage handbook of qualitative research*. Third edition (pp. 443-66). Thousand Oaks, CA: SAGE Publications Inc. Strauss.
- Villarreal, S., & Sgreccia, N. (2011). Materiales didácticos concretos en Geometría en primer año de secundaria. *Revista de didáctica de las Matemáticas*, 73-94. <http://www.juntadeandalucia.es/averroes/~04001497/PROFESORADO/omnipoliedro.htm>
<http://www.alu.ua.es/c/cmgc/omnipoliedro.htm>

RECURSOS TECNOLÓGICOS-MATEMÁTICOS PARA FORMAR DOCENTES DIGITALES

Zenón Eulogio Morales Martínez

pcmazmor@upc.edu.pe, morales.ze@pucp.edu.pe

Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas
Institución Educativa Agroestudio, Lima, Perú

Resumen

El presente taller capacitará a los docentes participantes en el uso de diversos recursos tecnológicos aplicados a la enseñanza de las matemáticas. Estos recursos servirán de gran apoyo como recursos de comunicación y de formación de aprendizajes. Teniendo en cuenta que nuestros alumnos son nativos digitales (Prensky, 2011) y teniendo una abundancia de recursos de esta era digital, presentaremos un glosario y una ecología digital donde los participantes podrán capacitarse en recursos de libre acceso, creando un Laboratorio de Matemáticas con Mentimeter, Kahoot, Socrative, Google Forms, Wolfram Alpha, Symbolab, Geogebra 2D, Geogebra CAS, Geogebra 3D y Phet Colorado. Esperamos que este taller-inducción a la tecnología matemática logre una aproximación de docentes digitales y que sus aulas se vean transformadas en una nueva cultura matemática, porque según D'Ambrosio (2012) los maestros debemos "mudar nuestro modo de pensar [...] es más importante, que los alumnos hagan cosas nuevas, de nuevas maneras".

Palabras clave: Docentes digitales, tecnología educativa, enseñanza de las matemáticas, innovación.

Introducción

La tecnología está llegando a todas las áreas de nuestras vidas, y en la educación, los docentes debemos incorporarla con la intención de lograr mejores aprendizajes, más dinámicos, y que enciendan la emoción por aprender, dado que nuestros alumnos han nacido en esta era digital.

Sobre el nuevo perfil del docente, diversas instituciones como la UNESCO (2008) plantean que:

las nuevas tecnologías (TIC) exigen que los docentes desempeñen nuevas funciones y también, requieren nuevas pedagogías y nuevos planteamientos en la formación docente. Lograr la integración de las TIC en el aula dependerá de la capacidad de los maestros para estructurar el ambiente de aprendizaje de forma no tradicional, fusionar las TIC con nuevas pedagogías y fomentar clases dinámicas en el plano social, estimulando la interacción cooperativa, el aprendizaje colaborativo y el trabajo en grupo. (p. 7)

De ahí la siguiente afirmación: "...el docente se convierte en piedra angular para la innovación de la enseñanza y el aprendizaje mediante el uso de las TIC. En él recae en gran medida la

responsabilidad de sugerir formas creativas y novedosas de experiencias de aprendizaje que se conviertan en desafíos para los estudiantes y que desarrollen en ellos las competencias instrumentales, tecnológicas, cognitivas, críticas y sociales que constituyen la cultura digital que se requiere en esta sociedad del conocimiento...”, (Orta, Ojeda, 2009).

La mayor parte de los docentes no utilizan software interactivo para el desarrollo de los aprendizajes de sus respectivas áreas. Por ejemplo, su ausencia es notoria en el aula de innovación de la institución y si entran con sus alumnos, es sólo para ver videos de la clase. Esto puede explicarse a varios factores, por ejemplo, su formación pedagógica tradicional, el conformismo con su trabajo, falta de capacitación en tecnologías e indiferencia de los docentes a la tecnología como herramienta educativa.

Finalmente, podemos concluir que es prioritario en la actualidad el uso de la tecnología para lograr mejores resultados en el ámbito educativo, ya que nuestros usuarios finales son parte de una nueva generación arraigada al uso de la tecnología. Y que los docentes deben asumir su compromiso de actualizarse con las nuevas herramientas que ofrece el campo tecnológico.

Las tecnologías facilitan el fortalecimiento del modelo pedagógico centrado en el estudiante, según se muestra en la propuesta de Brunner (2000):

Tabla 1. El tránsito de la enseñanza tradicional a la enseñanza tecnológica

Tránsito de la:	A la:
Enseñanza tradicional	Aprendizaje como interacción entre personas
Secuencialidad	Hipermedios
Instrucción	Construcción de conocimientos
Enseñanza centrada en el profesor	Aprendizaje centrado en el alumno
Disposición de materiales	Aprender a aprender
Salón de clases	Espacios de red
Educación etaria	Aprendizaje a lo largo de la vida
Estandarización	Personalización
Profesor-trasmisor	Profesor-facilitador

Nota: Adaptado de Brunner (2000)

El uso de recursos tecnológicos en el aula de matemáticas permite el aprendizaje colaborativo entre los estudiantes, ellos podrían realizar las tareas en forma grupal apoyadas en un software matemático; se consolida la construcción de conocimientos apoyada en la tecnología, el alumno de la era digital encuentra en la tecnología un apoyo para aprender a aprender.

Rodríguez, et al (2014) señala que para que ocurra la innovación y transformación en el aula, es considerar moverse desde un modelo de enseñanza centrado en el profesor hacia uno centrando en el alumno. Se sustenta en la implementación “de una dinámica presencial

tradicional, enriquecida tecnológicamente”.

Allca (2018) recomienda a los docentes de matemática, el empleo de las “diversas formas de los materiales virtuales como recursos de aprendizaje” por el efecto innovador y de motivación hacia los estudiantes. Así mismo recomienda a los estudiantes a “utilizar y formar comunidades virtuales de aprendizaje de matemática, así como intercambiar estrategias interactivas con el propósito de alcanzar grandes resultados y aprendizajes óptimos que favorezcan su escolaridad”.

Objetivos del taller

El presente taller denominado: “Recursos tecnológicos-matemáticos para formar docentes digitales” es una capacitación docente para la especialización de docentes en el uso de las TIC aplicadas a la enseñanza de las matemáticas y presenta algunas experiencias desarrolladas con docentes en el posgrado de una universidad pública de Perú.

Objetivo general:

- Capacitar docentes de matemáticas en las principales herramientas tecnológicas creando un Laboratorio de Matemática que permita la comunicación y creación de aprendizajes, en forma colaborativa para generar metodologías dinámicas de enseñanza-aprendizaje.

Objetivos específicos:

- Presentar una taxonomía de los recursos tecnológicos aplicados a la enseñanza de las matemáticas.
- Capacitar a docentes de matemáticas en las principales herramientas tecnológicas con situaciones aplicables al aula de matemáticas en diversos temas de números y operaciones, situaciones algebraicas y situaciones geométricas.
- Aplicación de los recursos tecnológicos en la dimensión de resolución de problemas en contextos cotidianos.

Metodología del Taller

El taller consta de cuatro partes de acorde a los objetivos planteados:

1. Presentación de la taxonomía de los recursos digitales con el uso del recurso Genially (<https://www.genial.ly/es>).
2. Capacitación en el uso de principales recursos de comunicación que permiten generar “lluvia de ideas” o “encender la emoción” o “activar conocimientos previos”, estos forman el “cuarteto comunicador”: Mentimeter (<https://www.mentimeter.com/>), Kahoot (<https://kahoot.com/>), Socrative (<https://socrative.com/>), Google Forms (<https://www.google.com/intl/en-GB/forms/about/>)
3. Capacitación en el uso de recursos de resolución matemática, permiten resolver ecuaciones, inecuaciones de todo nivel, aplicaciones al cálculo diferencial e integral: Wolfram Alpha,

(<https://www.wolframalpha.com/widgets/gallery/view.jsp?id=3b94c1326fd215d148c8b0d0ef0cc82a>), Symbolab (<https://es.symbolab.com/>).

4. Capacitación en el uso de recursos matemática dinámica, mediante Geogebra 2D, Geogebra CAS, Geogebra 3D (<https://www.geogebra.org/download>) y Phet Colorado (https://phet.colorado.edu/es_PE/simulations/category/math).

La primera sesión del taller abordará los partes 1, 2 y 3; la segunda sesión abordará la parte 4.

A continuación, se presenta una breve descripción de uno de los recursos tecnológicos a tratar en este taller:

Tabla 2. Ficha técnica recurso digital

Datos Generales			
Nombre del recurso:	Autor:	Audiencia:	Nivel educativo:
Geogebra	Markus Hohenwarter	20 participantes	EBR
Objetivo(s):	Contenidos que incluye:	Competencias que desarrolla:	Resultado de aprendizaje que logra:
Capacitar a los docentes en el uso del recurso tecnológico	Funciones algebraicas Geometría plana y geometría del espacio.	Integrar las diversas herramientas tecnológicas conocidas como las TIC a la docencia e investigación	Dominio del recurso tecnológico y su aplicación en el aula de clases, para facilitar el aprendizaje de las matemáticas, en entornos colaborativos.
Creación del recurso			
Software empleado	Hardware empleado	Plataforma de publicación en Internet	URL
Recurso en línea	-Computador -Dispositivo móvil	World Wide Web (www)	https://www.geogebra.org/
Requerimientos para el uso			
- Conexión a Internet - Disponibilidad de datos en dispositivo móviles			
Idiomas			

- Español

- Inglés

Sugerencias para el docente

- Revisar las distintas ventanas del recurso tecnológico.
- Comprobar el ingreso correcto en la ventana de entrada.
- Comprobar el uso del comando de rastros.
- Comprobar la realización de las actividades propuestas en esta capacitación.

Actividad propuesta en Geogebra 2D

Determine el área de la región determinada por las funciones

$$f(x) = \operatorname{sen} x, \quad g(x) = \cos(x); \quad x \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right]$$

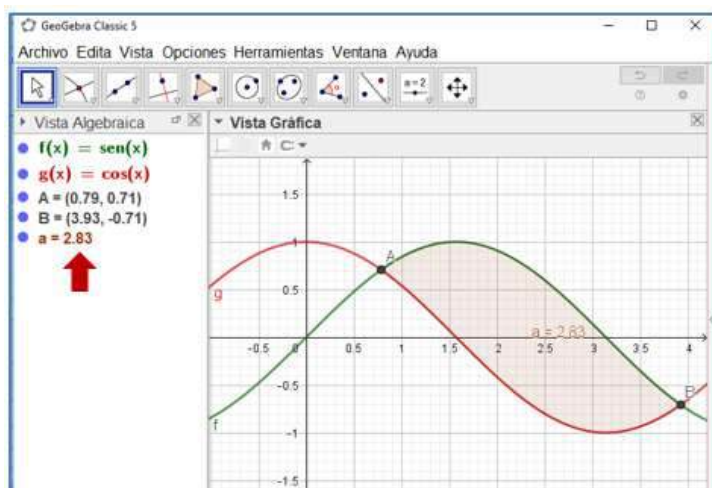


Figura 1. Actividad para la segunda sesión: Geogebra 2D

Actividad complementaria: Investigación con el uso de GEOGEBRA

Analizaremos el uso del recurso tecnológico en apoyo de la investigación en educación matemática, en un trabajo publicado por la PUC-SP: Software GeoGebra: investigação, exploração e experimentação no ensino e aprendizado de matemática para alunos do ensino fundamental.

Autor: Aline Gonçalves de Farias Fagundes

Recuperado de: <https://revistas.pucsp.br/IGISP/article/view/38595>

Resultados esperados

En el presente taller, se espera que los docentes participantes logren utilizar la tecnología como un apoyo en sus clases de matemáticas porque

"no se trata apenas de introducir nuevos instrumentos, es necesario cambiar nuestro modo de pensar. Tenemos que integrar la tecnología de una forma que no solo permita que los alumnos hagan cosas "viejas" (como la escritura o investigación) de nuevas maneras, es mucho más importante todavía, permitir que nuestros alumnos hagan cosas nuevas, de nuevas maneras y consigan tener una educación diferente y mejor gracias a la tecnología" (Prensky, 2012)

Esperamos que, al culminar el taller, los docentes:

- Comprendan que la diversidad de recursos tecnológicos aplicados a la enseñanza de las matemáticas se agrupa en una taxonomía, que nos permita elegir el recurso adecuado a nuestra práctica educativa.
- Estén capacitados en el uso de las principales herramientas tecnológicas aplicadas al aula de matemáticas en diversos temas como situaciones algebraicas, situaciones geométricas y otras que los participantes hayan requerido.
- Logren aplicar los recursos tecnológicos en la dimensión de resolución de problemas en contextos cotidianos.

Consideraciones finales

El Ministerio de Educación (Minedu, 2016) de nuestro país nos propone como guía de nuestras actividades educativas al Currículo Nacional de la Educación Básica, en el cual la competencia "Se desenvuelve en los entornos virtuales generados por las TIC" con responsabilidad y ética, menciona que el estudiante:

de "Se desenvuelve en los entornos virtuales al gestionar estrategias de personalización de estos. Organiza su espacio virtual para optimizar la construcción de su conocimiento y desarrolla estrategias para gestionar actividades en las redes sociales y comunidades virtuales a partir de las consecuencias en la construcción de vínculos. Emplea estrategias de creación de objetos virtuales para gestionar las dimensiones de significados personales y sociales". (p. 80)

Ante esta propuesta, los docentes deben capacitarse para cumplir de forma efectiva esta competencia y para lograr ser docente alfabetizados tecnológicamente, un requisito fundamental para se docente del siglo XXI.

Referencias

Allca Quispe, F. P. (2018). Uso de la Web Khan Academy y el enfoque de resolución de problemas en los estudiantes del segundo grado de secundaria de la I.E. N° 5127 Mártir José Olaya, Ventanilla - 2016. (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle, Lima, Perú. Recuperado de: <http://repositorio.une.edu.pe/bitstream/handle/UNE/1968/TM%20CE-Em%203433%20A1%20-%20Allca%20Quispe.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

- Brunner, J. (2000). Globalización y el futuro de la educación: tendencias, desafíos, estrategias. Documento presentado en el Seminario sobre Prospectiva de la Educación en América Latina y el Caribe, Chile, 23 al 25 de agosto de 2000. Recuperado de: [http://mt.educarchile.cl/archives/Futuro_EDU% 25 UNE SCO-2000.pdf](http://mt.educarchile.cl/archives/Futuro_EDU%25%20UNE%20SCO-2000.pdf)
- D'Ambrosio, U. (2012). *O estado do mundo e a Educação Matemática: Reflexões sobre o Futuro*. Conferencia Inaugural de la 26° Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. RELME-26. Universidade Federal de Ouro Preto. 24 al 28 julio 2012. Belo Horizonte. Estado de Minas Gerais. Brasil.
- Minedu (2016). Currículo Nacional de la Educación Básica. Recuperado de: <http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-2016.pdf>
- Orta, M. y Ojeda, A. (2009). Retos de la incorporación de las tecnologías de información y comunicación en los procesos educativos. Aseguramiento de la Calidad en la Educación y en el Trabajo, S.C. México. Recuperado de: http://www.ciencias.ucr.ac.cr/sites/default/files/6_Orta-tecnologias_IC.pdf
- Prensky, M. (2011). *Enseñar a nativos digitales*. Ediciones SM, 2011.
- Rodríguez, J.; Light, D.; Pierson, E. (2014). Khan Academy en Aulas Chilenas: Innovar en la Enseñanza e Incrementar la Participación de los Estudiantes en Matemática, artículo del Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación. Recuperado de: [file:///C:/Users/ZENON/Downloads/ 540% 20\(4\) .pdf](file:///C:/Users/ZENON/Downloads/540%20(4).pdf)
- UNESCO (2008). Estándares de competencias en TIC para docentes. Recuperado de: [http://portal.unesco.org/es/ev.php-URL_ID=41553&URL_DO=DO_TOPIC&URL_SECTION= 201.html](http://portal.unesco.org/es/ev.php-URL_ID=41553&URL_DO=DO_TOPIC&URL_SECTION=201.html)

Solución de Inecuaciones Irracionales

Recurso digital: **Wolfram Alpha**

Recuperado de:

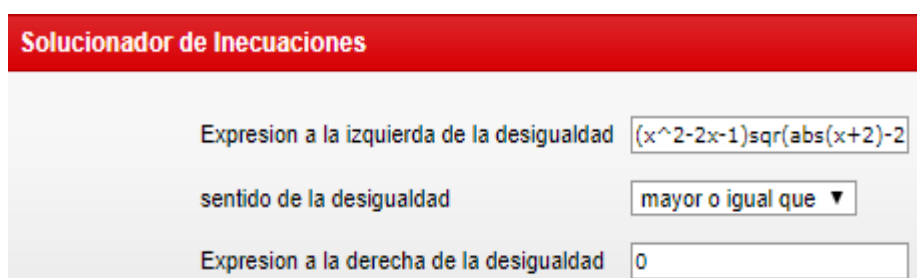
<https://www.wolframalpha.com/widgets/gallery/view.jsp?id=3b94c1326fd215d148c8b0d0ef0cc82a>

Objetivo: Uso del recurso digital online para comprobar resultados de resoluciones matemáticas aplicadas a las ecuaciones e inecuaciones algebraicas.

Nivel educativo: educación primaria, educación secundaria y primer nivel de educación superior.

INSTRUCCIONES:

1. Abrir el recurso digital, se trabajará en forma online. Digite la expresión algebraica a resolver teniendo en cuenta el uso correcto de los paréntesis, () y los comandos principales: sqr (raíz cuadrada) y abs (valor absoluto).



Solucionador de Inecuaciones

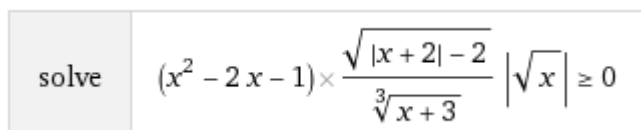
Expresion a la izquierda de la desigualdad

sentido de la desigualdad

Expresion a la derecha de la desigualdad

Figura 2. Ventana del solucionador de inecuación, Wolfram Alpha.

2. El recurso digital muestra la representación de la expresión algebraica, puede editarse si no corresponde a la expresión correcta (*Input representation*)



solve $(x^2 - 2x - 1) \times \frac{\sqrt{|x+2|} - 2}{\sqrt[3]{x+3}} \left| \sqrt{x} \right| \geq 0$

3. El recurso digital muestra las soluciones en el campo de los números reales en el registro simbólico: (*Solutions over of reals*)

$$x = 0$$

$$x \geq 1 + \sqrt{2}$$

4. El recurso digital muestra las soluciones en el campo de los números reales en el registro gráfico: (*Number line*)



5. El conjunto solución es: $x \in [1 + \sqrt{2}, +\infty[\cup \{0\}$

ACTIVIDAD-2

Laboratorio Virtual aplicado a la Función Cuadrática

Recurso digital: **Phet, Universidad de Colorado, USA**

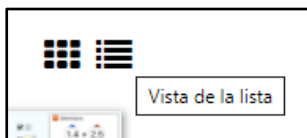
Recuperado de: <https://phet.colorado.edu/en/simulations/category/math/mathconcepts>

Objetivo: Uso del recurso digital online para comprobar propiedades de las funciones algebraicas, tales como traslación horizontal, traslación vertical, dominio-rango y otras.

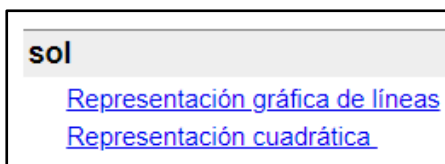
Nivel educativo: educación primaria, educación secundaria y primer nivel de educación superior.

INSTRUCCIONES:

1. Abrir el recurso digital en forma online y dar click en VISTA DE LISTA (esquina superior derecha)



Elegir la opción de Representación cuadrática, a partir del listado que aparece.



2. Dar clic sobre la imagen para iniciar la manipulación de este Laboratorio virtual:

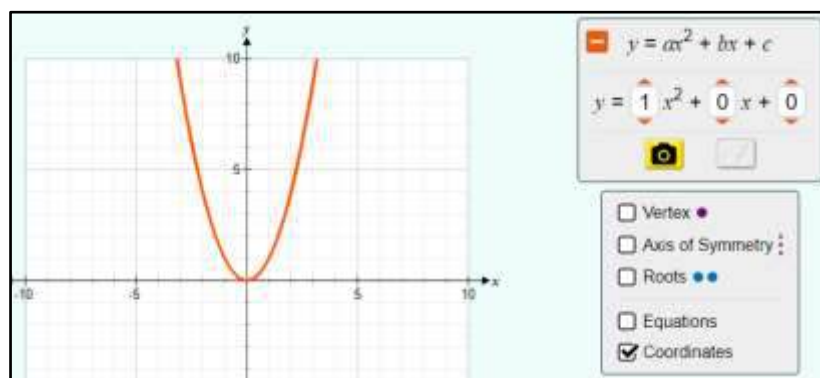
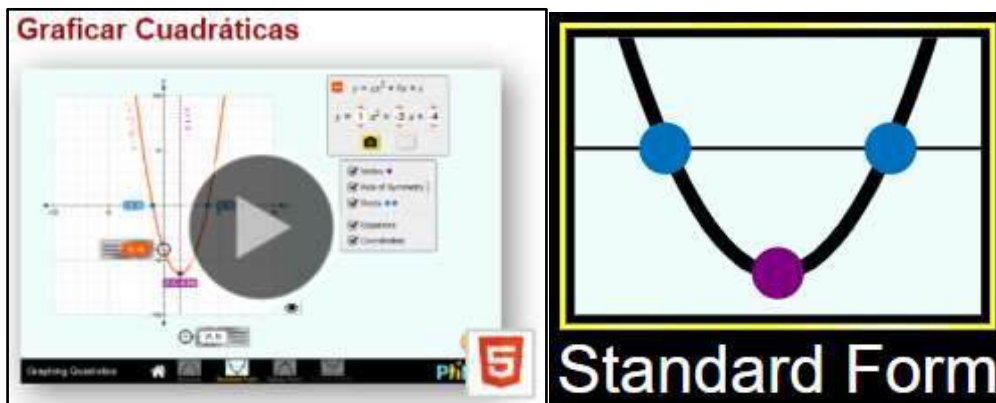


Figura 3. Laboratorio virtual para Representación cuadrática,
Recurso digital Phet, Universidad de Colorado.

CONSTRUINDO O PENSAMENTO PROBABILÍSTICO: O JOGO DO FRANC-CARREAU

Cileda de Queiroz e Silva Coutinho*

Auriluci de Carvalho Figueiredo**

cileda@pucsp.br, aurilucy@uol.com.br

Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo*, Brasil

Universidade Metropolitana de Santos**, Brasil

Resumen

O objetivo do minicurso é discutir aspectos didáticos da construção do conceito de probabilidade, tendo como contexto a articulação entre os enfoques clássico e frequentista, usando como ferramenta a simulação computacional construída com o software GeoGebra. Consideraremos a apresentação e interpretação do modelo de pensamento probabilístico proposto na Taxonomia SOLO para discutir aspectos da resolução do jogo Franc-carreau. O minicurso está dividido em etapas que envolvem: estabelecer hipóteses para a probabilidade e observar o resultado, discutir a estabilização da série de frequências relativas acumuladas, determinar a probabilidade segundo o enfoque clássico e analisar os resultados observados para construção do pensamento probabilístico. Diante das atividades desenvolvidas esperamos que os participantes logrem a realizar as simulações de forma autônoma, assim como o cálculo a priori do valor da probabilidade procurada por meio da probabilidade geométrica, utilizando a confrontação dos resultados como forma de validação.

Palabras clave: Probabilidade geométrica, Geogebra, simulação computacional, jogo Franc-carreau

Introdução

O desenvolvimento do pensamento probabilístico é, nos dias de hoje, um ponto crucial no ensino e na aprendizagem da matemática da escola básica. No Brasil, desde a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental (Brasil, 1997; Brasil, 1998), particularmente os destinados ao Ensino Médio (Brasil, 2000; Brasil, 2002 e Brasil, 2006) o ensino da probabilidade tem tido um lugar bem determinado nos currículos escolares. No entanto, enquanto parâmetros, tais documentos não eram de caráter obrigatório, o que fazia com que, muitas vezes, não fossem seguidos. Podemos assim observar resultados de pesquisas que indicam a pouca familiaridade dos alunos com temas relativos à probabilidade. O mesmo pode ser observado na formação de professores, tanto inicial como continuada, o que faz com que se construa um ciclo perverso para a construção do pensamento probabilístico. Consideraremos a apresentação e interpretação do modelo de pensamento probabilístico proposto na Taxonomia SOLO, em termos do que significam para o ensino e a aprendizagem da probabilidade, conforme Mooney, Langral e Hartel (2014). Segundo esses autores,

A taxonomia SOLO incorpora cinco modos de funcionamento: sensorimotor (desde o

nascimento), icônico (a partir de 18 meses), simbólico concreto (a partir de 6 anos), formal (a partir de 14 anos) e pós-formal (a partir de 20 anos). O surgimento e desenvolvimento desses modos de funcionamento é tal que os modos anteriores são incorporados nos modos posteriores. Além disso, dentro de cada modo, os alunos percorrem três níveis cognitivos - não-estrutural, multi-estrutural e relacional -, em que cada nível assume o anterior e representa uma mudança na complexidade do pensamento dos alunos. No nível não-estrutural do pensamento, o aluno focaliza um único aspecto relevante de uma tarefa ou idéia. Um aprendiz no nível multi-estrutural reconhece vários aspectos de uma tarefa ou idéia, mas é incapaz de consolidá-los. No nível relacional, o aluno pode integrar os aspectos da tarefa ou idéia de maneira coerente. Existem também dois níveis que caracterizam o pensamento que muda entre os modos; no nível pré-estrutural, um aprendiz funciona de maneiras características do modo anterior e, no nível abstrato estendido, um aprendiz funciona de maneiras características do modo seguinte. Mooney, Langral e Hartel (2014, p499).

No presente minicurso, discutiremos aspectos da construção do conceito de probabilidade por alunos do Ensino Médio (15 a 17 anos de idade) à luz dos preceitos da taxonomia SOLO, quando o contexto é o da simulação computacional, com auxílio do software GeoGebra.

O jogo a ser utilizado será o do *Franc-carreau* (Badizé, Jacques, Petitpas e Pichard, 1996), proposto pelo matemático e naturalista francês George Louis Leclerc (1707 – 1788), Conde de Buffon, que consiste no lançamento de uma moeda sobre um piso de azulejos de forma quadrada.

Finalidade, desenho e implementação do minicurso

Nesta seção, objetivo do minicurso é discutir aspectos didáticos da construção do conceito de probabilidade, tendo como contexto a articulação entre o enfoque clássico e o enfoque frequentista e usando como ferramenta a simulação computacional construída com o *software* GeoGebra. O minicurso destina-se a professores que lecionam matemática na escola básica assim como em cursos de formação de professores em nível superior.

Na primeira parte do minicurso será desenvolvida a primeira atividade, na qual os participantes jogarão efetivamente a moeda com o objetivo de estabelecer hipóteses para a probabilidade de se observar o resultado *Franc-carreau*.

No segundo momento, os participantes passarão à simulação computacional com auxílio do software GeoGebra (necessidade de laboratório), no qual discutirão sobre a estabilização da série de frequências relativas acumuladas nos termos da definição proposta por Ventsel (1973) em sua obra *Théorie des Probabilités*, para quem a probabilidade não pode ser outra que não o número ao redor do qual os valores da série das frequências se estabilizam. Nos termos atuais: $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} Fr_n(A)$.

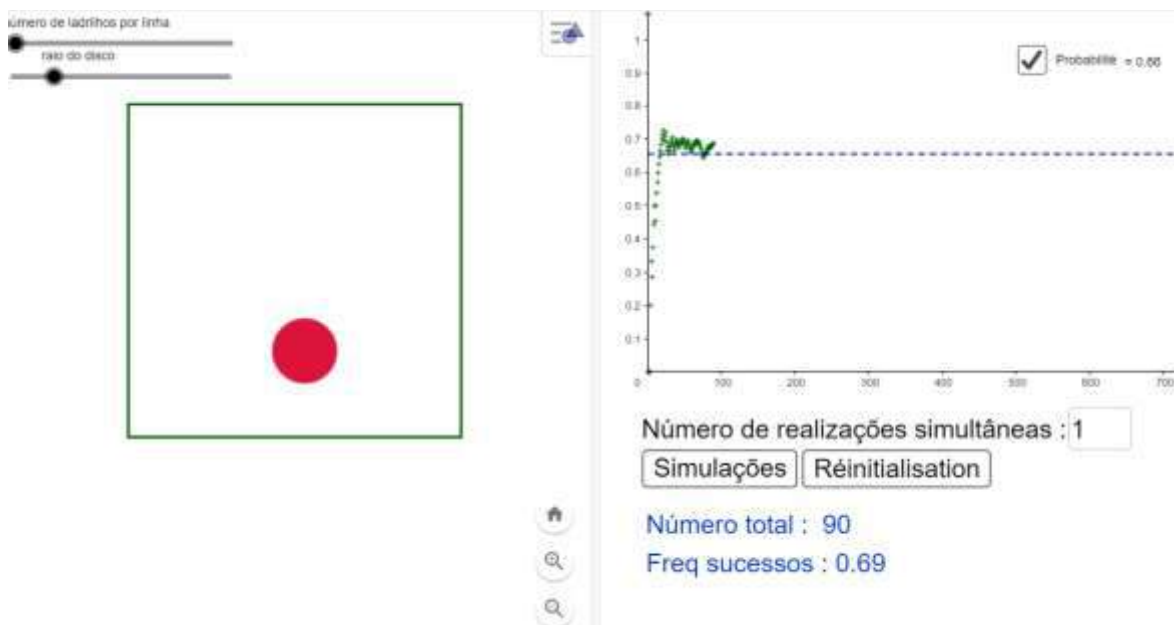


Figura 7. Simulação do jogo Franc-carreau e gráfico da série de frequências resultante das simulações

Fonte: os autores

Vários pesquisadores propõem o uso do computador para o ensino e aprendizagem de conceito que mobilizam probabilidade como meio de entender os conceitos abstratos ou difíceis para minimizar as dificuldades dos alunos diante de situações que envolvem probabilidade e com isso melhorar habilidades dos alunos (Mills, 2002; Gürbüz, 2008). Batanero e Diaz (2007) enfatizam que os alunos realizem simulações para ajudá-los a resolver problemas simples de probabilidade, e Borovcnik e Kapadia (2009) afirmam que a simulação, quando combinada com o uso da tecnologia, é a estratégia mais apropriada para focar melhor nos conceitos e reduzir a cálculos técnicos.

Na terceira parte da oficina os participantes discutirão a determinação da probabilidade segundo o enfoque clássico ou laplaciano, determinando sua estratégia pelo raciocínio propiciado pela probabilidade geométrica (razão entre as áreas das figuras consideradas). Será oferecido na tela do GeoGebra um quadrado representando um ladrilho do jogo e perguntado aos participantes qual o procedimento para se obter a posição *Franc-carreau*. Na sequência, solicita-se que construam um círculo dados dois pontos, representando a moeda. Clicando com o botão direito do mouse sobre o ponto que representa o centro do círculo, escolher "exibir rastro". Solicita-se então que desloquem o círculo dentro do quadrado observando o rastro do ponto que representa o centro de forma a que possam fornecer uma hipótese sobre a determinação da probabilidade procurada.

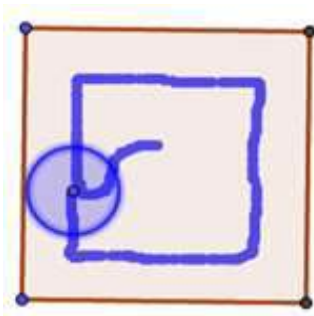


Figura 8. Raciocínio para determinação da probabilidade a priori

Fonte: os autores

No segundo encontro serão discutidos os resultados observados no encontro anterior à luz dos elementos apontados na Taxonomia SOLO para construção do pensamento probabilístico, segundo o qual esperamos, no minicurso, que os participantes desenvolvam elementos de pensamento multi-estrutural e relacional (Mooney, Langral e Hartel (2014, p.502), e também segundo resultados de pesquisas que temos observados, tais como Rodrigues (2018). Citamos aqui Mooney, Langral e Hartel para melhor explicar os tipos de pensamento aos quais nos referimos:

Pensamento Probabilístico Multi-estrutural: o pensamento do estudante é quantitativo e proporcional

Nesse nível o pensamento do estudante exibe:

- Faz uso de razões, contas, probabilidades ou apostas em julgamentos de situações probabilísticas
- Cria espaços amostrais para experimentos de um ou dois estágios sistematicamente
- Fornece exemplos de situações aleatórias ou métodos de geração de acaso
- Reconhece mudanças na probabilidade e independência de eventos com e sem reposição
- Faz previsões que algumas vezes está relacionada com estratégias representativas

Pensamento Probabilístico Relacional: O pensamento do estudante mostra-se em interconexão com ideias probabilísticas

Nesse nível o pensamento do estudante exibe:

- Raciocínio com probabilidades
- Determina probabilidades para situações complexas incluindo situações não semelhantes e não equiprováveis
- Gera espaços amostrais simples para experimentos de dois ou três estágios sistematicamente
- Conecta espaços amostrais com probabilidades

- Examina a distribuição de resultados sem reverter as estratégias de representatividade
- Mostra uma apreciação da aleatoriedade não sendo influenciado pela ordem ou mudança de resultados

Esperamos também discutir-se-á escolhas de abordagem efetiva para sala de aula, com propostas para que os participantes possam utilizar os elementos desenvolvidos ao longo do minicurso em sua prática docente com alunos com idades entre 14 e 17 anos.

Resultados Esperados

Esperamos, ao final da oficina, que os participantes logrem a realizar as simulações de forma autônoma, assim como o cálculo a priori do valor da probabilidade procurada por meio da probabilidade geométrica, utilizando a confrontação dos resultados como forma de validação (etapa fundamental nas dialéticas de ação, formulação, validação propostas por Brousseau (1986) em sua Teoria das Situações.

As etapas de ação e formulação se desenvolvem automaticamente ao propormos o problema aos participantes, organizados em duplas ou grupos, conforma o número deles, a partir da busca individual de conhecimentos para a construção de uma estratégia e da troca com os parceiros para a consecução dessa estratégia.

No que se refere à simulação, faremos a apresentação passo a passo, pode se tratar de um material completamente inédito aos participantes, ilustrando os primeiros lançamentos e o raciocínio para se obter uma série de frequências acumuladas, dialogando com os participantes para que possam sugerir os próximos passos e assim observar os resultados da simulação que se percebe por apreensão perceptiva (nos termos da Teoria das Representações Semióticas (Duval, 2003) e estudado em relação à estatística na pesquisa de Vieira (2008) por meio do gráfico construído no Geogebra, conforme Figura 3.

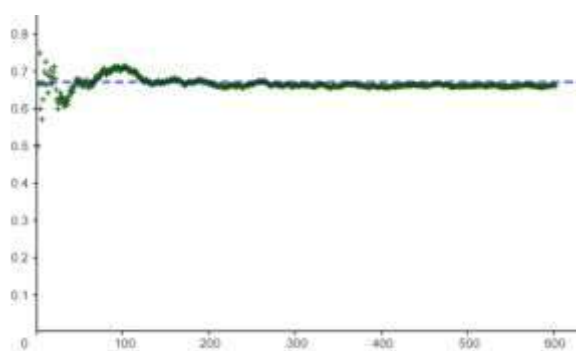


Figura 9. Estabilização da série de frequências após 600 lançamentos da moeda

Fonte: os autores

A partir da apreensão perceptiva da figura construída com uso do recurso “rastros” do ponto que representa o centro do círculo, esperamos que os participantes cheguem à expressão construída a partir da figura 4, a partir da qual $P(FC) = (\text{área de EFGH})/(\text{área de ABCD})$.

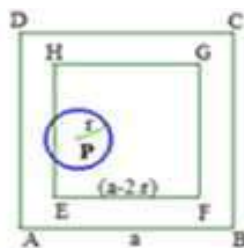


Figura 10. Construção da expressão analítica para determinação da probabilidade Franc-carreau

Fonte: os autores

Tais resultados são coerentes com a mobilização do pensamento probabilístico segundo o nível formal da taxonomia SOLO.

Considerações Finais

O presente minicurso teve por objetivo discutir os aspectos didáticos da abordagem do conceito de probabilidade por meio da simulação computacional, visando o confronto entre o enfoque frequentista e o clássico como ferramentas de validação, segundo as dialéticas propostas na Teoria das Situações Didáticas. Tal abordagem pretendeu fornecer aos professores participantes elementos para o enriquecimento de suas práticas docentes quando do trabalho com seus alunos em nível de ensino médio, ou seja, idades de 14 a 17 anos. Seguimos assim os resultados internacionais indicando a simulação computacional como um caminho fértil para o desenvolvimento do conceito de probabilidade devido às diversas possibilidades de minimização de obstáculos didáticos advindos de procedimentos mecanizados. O jogo do *Franc-carreau* fornece um contexto desafiador aos alunos, envolvendo um jogo de azar ao mesmo tempo que envolve elementos da probabilidade geométrica, com destaque para a razão entre áreas de quadrados, que é um conhecimento já estável para alunos nessa faixa etária.

Dessa forma, acreditamos ser frutífera tal abordagem.

Referencias

- Badizé M., Jacques A., Petitpas M. & Pichard J.-F. (1996). Le jeu du Franc-carreau – une activité probabiliste au Collège. Rouen : IREM de Rouen.
- Batanero, C., & Diaz, C. (2007). Probabilidad, grado de creencia y proceso de aprendizaje [Probability, degrees of belief and the learning process]. XIII Jornadas Nacionales de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. Granada.
- Borovcnik, M., & Kapadia, R. (2009). Research and developments in probability education. *International Electronic Journal of Mathematics*, 4(3). Disponível em: www.iejme.com/032009/IEJME_p00_introd_E.pdf.
- Brasil, (1997). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Ministério da Educação e do

- Desporto. Secretaria de Educação Fundamental Brasília: MEC/SEF, 142p.
- Brasil. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília, DF: MEC/SEF.
- Brasil. (2000) *Parâmetros Curriculares Nacionais, Ensino Médio: Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias*. Brasília: MEC/SEM, 58 p.
- Brasil. (2002) *Parâmetros Curriculares Nacionais, Ensino Médio +: Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias*. Brasília: MEC/SEM, 141p
- Brasil. (2006) *Orientações curriculares para o Ensino Médio: Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias*. Brasília: MEC/SEB, 135 p
- Brousseau, G. (1986) *Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques*. *Recherches em Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33-116.
- Edward S. Mooney, Cynthia W. Langrall, and Joshua T. Hertel. (2014) A Practitioner Perspective on Probabilistic Thinking Models and Frameworks. In Egan J. Chernoff, Bharath Sriraman (eds) *Probabilistic Thinking: Presenting Plural Perspectives*. Springer: Dordrecht.
- Duval, R. (2003). Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In S. D. A. Machado (Org.), *Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica* (pp. 7-10). Campinas: Papirus.
- Gürbüz, R. (2008). Olasılık konusunun öğretiminde kullanılabilecek bilgisayar destekli bir materyal [A computer aided material for teaching 'probability' topic]. *Mehmet Akif Ersoy University Journal of Faculty of Education*, 8(15), 41-52.
- Mills, J. (2002). Using computer simulation methods to teach statistics: A review of the literature. *Journal of Statistics Education*, 10(1). Disponível em: www.amstat.org/publications/jse/v10n1/mills.html
- Rodrigues, M. R. (2018). *A Urna de Bernoulli como modelo fundamental no ensino de probabilidade*. Tese (Doutorado). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo. Retirado em 10 de agosto de 2019 de: <https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11197>
- Ventsel, H. (1962). *Théorie des Probabilités* (reimpressão em 1973). Moscou: Editora MIR.
- Vieira, M. (2008). *Análise Exploratória de Dados: uma abordagem com alunos do Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo. Retirado em 10 de Agosto de 2019 de <https://sapientia.pucsp.br/bitstream/handle/11347/1/Marcia%20Vieira.pdf>

VISUALIZACIÓN DE SÓLIDOS POR SECCIONES TRANSVERSALES USANDO GEOGEBRA

Nancy Saravia Molina

Elizabeth Advíncula Clemente

nsaraviam@pucp.edu.pe, eadvincula@pucp.edu.pe

Instituto de Investigación sobre Enseñanza de la Matemáticas, IREM-PUCP, Perú

Resumen

En este taller nos interesa compartir una experiencia en aula en la que usamos el GeoGebra como una herramienta que favorece la visualización de sólidos formados por secciones transversales, cuya construcción resulta complicada tanto para los estudiantes como para los docentes al trabajar con lápiz y papel en un entorno estático, como es el caso de la pizarra u hojas de papel. Propondremos actividades para que los participantes trabajen con diversas herramientas del GeoGebra y puedan realizar construcciones dinámicas, y a partir de la manipulación e interacción con ellas elaboraren y validen sus conjeturas acerca de las características propias de los sólidos mencionados. Asimismo, nos interesa generar un espacio para discutir sobre las ventajas y desventajas que ofrecen las herramientas del GeoGebra en la visualización de objetos matemáticos y reflexionar sobre su incorporación en nuestras clases.

Palabras clave: Visualización, sólidos, secciones transversales, GeoGebra.

Introducción

En el curso de cálculo integral cuando trabajamos volúmenes de sólidos, usando el método de secciones transversales, observamos que la visualización de estos sólidos no es fácil para los estudiantes debido a que nos limitamos a representar una figura tridimensional en un plano como es el caso de la pizarra y representamos figuras estáticas que no permiten mostrar fácilmente las características de los mismos. En nuestra búsqueda de herramientas que nos ayuden a visualizar estos sólidos y permita a los estudiantes la comprensión de la generación de los mismos, encontramos recursos tecnológicos que nos ayudan como es el caso del GeoGebra, que es un software libre que nos permite construir sólidos y visualizar sus principales características al manipularlos e interactuar con ellos.

Enfoque teórico

En la actualidad, la visualización en el aprendizaje de las matemáticas viene siendo reconocida como una componente importante en la resolución de problemas, así como en la realización de demostraciones (Battista, 2007; Presmeg, 2006, Phillips et al., 2010 y Rivera, 2011).

Según Arcavi (2003, p. 217) "la visualización es la capacidad, el proceso y el producto de la

creación, interpretación, uso y reflexión sobre retratos, imágenes, diagramas, en nuestras mentes, en el papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas previamente desconocidas y comprensiones avanzadas". Coincidimos con esta definición pues en los problemas que nos interesa abordar en nuestro taller es muy importante contar con un esquema o representación gráfica que nos permita reconocer las características de los sólidos que se obtienen al seccionarlos usando distintas formas de secciones transversales y cómo estos cambios en las secciones transversales afectan los volúmenes de los sólidos en cuestión.

Desde el punto de vista de Duval (1999), la representación y la visualización son el centro de la comprensión en matemáticas, y por tal, es fundamental analizar en qué medida estos elementos interactúan para producir aprendizaje. Asimismo, señala que el uso de representaciones semióticas es esencial para acceder a los objetos matemáticos; cuya comprensión involucra distinguir un objeto de su representación. Duval (2016) también señala que la conversión requiere el uso interactivo de dos registros de representación semiótica o más, pero para garantizar la comprensión es necesaria la coordinación de representaciones formuladas en diferentes registros.

Por otro lado, consideramos que el *GeoGebra* es un artefacto, que en términos de Rabardel (1995) podría convertirse en un instrumento a través de un proceso de génesis instrumental, el cual permite identificar los esquemas de utilización que construyen y movilizan los sujetos cuando interactúan con el *GeoGebra* al resolver problemas matemáticos, elaborar y verificar conjeturas. En este sentido, el *GeoGebra* facilita la visualización, el descubrimiento y el reconocimiento de propiedades invariantes en los objetos matemáticos involucrados (Madama y Curbelo, 2012) así como la comprensión de las características propias de los sólidos seccionados por distintas secciones transversales debido al dinamismo y flexibilidad que presenta este software para realizar construcciones y modificaciones.

Diseño e implementación del taller

Las actividades propuestas en este taller tienen por objetivo que los docentes de matemática resuelven problemas relacionados con sólidos generados por secciones transversales, reconociendo las propiedades de dichos sólidos a partir de la exploración, manipulación, elaboración y validación de conjeturas, haciendo uso del *GeoGebra*.

Este taller se desarrollará en una sesión de 90 minutos, en un laboratorio de computación donde cada participante desarrollará las actividades propuestas con apoyo del *GeoGebra*. En primer lugar, realizarán un trabajo individual y luego se realizará una discusión grupal para intercambiar estrategias de solución y diversos modos de validación de conjeturas.

En un primer momento, los participantes tendrán 20 minutos para desarrollar la actividad 1, de manera individual, explorando las vistas y herramientas del *GeoGebra* que considere necesarias para realizar las construcciones correspondientes. Luego, tendrán 15 minutos para socializar sus resultados con todo el grupo. En un segundo momento, tendrán 20 minutos para desarrollar en parejas la actividad 2 sobre la construcción de los sólidos por secciones transversales. Luego, cada pareja tendrá 25 minutos para compartir sus resultados a todo el

grupo. En los últimos 10 minutos reflexionaremos sobre las ventajas y desventajas que ofrece el *GeoGebra* respecto a la visualización de sólidos construidos por secciones transversales y cómo esto favorece la resolución de problemas que involucran a dichos sólidos.

A continuación, mostramos las actividades diseñadas para ser trabajadas con los docentes participantes.

Actividad 1: Construcción de semicircunferencias que representan funciones

- a) Construya una circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radio 9 unidades.
- b) Construya el arco superior de la circunferencia y denótelo como f .
- c) Ubique un punto sobre el arco superior de la circunferencia y denótelo con la letra A , y deslícelo sobre el arco f .
- d) Construya el arco inferior de la circunferencia, denótelo como g .
- e) Ubique un punto sobre el arco inferior de la circunferencia y denótelo con la letra B , y deslícelo sobre el arco g .
- f) Construya un segmento perpendicular al eje X que una los puntos A y B , y deslice dicho segmento usando el deslizador y la animación.
- g) Comente lo que observa.
- h) Responda lo siguiente:
 - h1) ¿Qué hizo para resolver esta actividad?
 - h2) ¿Qué conceptos matemáticos uso para resolver esta actividad?
 - h3) ¿Qué capacidades matemáticas podría desarrollar un estudiante a través de esta actividad?

Actividad 2: Construcción de sólidos con base elíptica

- a) Construya una elipse con ejes mayor y menor de 5 y 4 unidades, respectivamente.
- b) Construya un sólido con secciones transversales perpendiculares al eje mayor de la base elíptica que son cuadrados con un lado contenido en la base del sólido.
- c) Construya un sólido con secciones transversales perpendiculares al eje mayor de la base elíptica que triángulos rectángulos isósceles con un cateto contenido en el plano de la base del sólido.
- d) Construya un sólido con secciones transversales perpendiculares al eje mayor de la base elíptica que son semicírculos con su diámetro contenido en la base del sólido.
- e) Comente los cambios que observa en el sólido al variar las secciones transversales.
- f) Responda lo siguiente:
 - f1) ¿Qué hizo para resolver esta actividad?

f2) ¿Qué conceptos matemáticos uso para resolver esta actividad?

f3) ¿Qué capacidades matemáticas podría desarrollar un estudiante a través de esta actividad?

Resultados esperados

Al realizar las actividades propuestas con un grupo de docentes observamos que los participantes en su mayoría lograron realizar las construcciones pedidas, pero al inicio tuvieron dificultades para familiarizarse con las herramientas del *GeoGebra*. Cabe resaltar que algunos docentes evidenciaron dificultades con el objeto matemático sólidos generados por secciones transversales, pero realizar las construcciones les permitió descubrir y validar las propiedades que presentan dichos sólidos. Asimismo, podemos comentar que los docentes lograron trabajar en el registro gráfico tridimensional al construir el sólido y en el registro algebraico al determinar su volumen.

Entre los resultados que esperamos en nuestro taller, tenemos los siguientes:

- Que los profesores conozcan y adquieran una herramienta, como el GeoGebra, que puedan utilizar en sus clases de manera que facilite el aprendizaje de sus estudiantes respecto a los sólidos generados por secciones transversales, pues la visualización geométrica de estos objetos facilita la comprensión de los conceptos matemáticos involucrados.
- Que los profesores usen de manera adecuada las herramientas deslizador y rastro que nos ofrece el GeoGebra, los cuales forman una pieza fundamental en la construcción y visualización de sólidos. El rastro permite la visualización de la construcción del sólido de manera progresiva y esto facilita la comprensión de dicho objeto.
- Que los profesores manipulen los sólidos construidos ubicándolos en diferentes posiciones del espacio, lo cual favorece la comprensión de estos objetos matemáticos y sus propiedades.

Consideraciones finales

A modo de cierre podemos comentar lo observado en el desarrollo de las actividades propuestas en este taller, con docentes de educación superior.

- Para construir las secciones transversales sobre la base del sólido es necesario que se tenga la idea de cómo construir las secciones en el espacio usando el GeoGebra, para lo cual es necesario dar coordenadas correctas y diferenciar si trabajamos en el plano o en el espacio. Esat fue una dificultad para algunos docentes.
- El software GeoGebra nos facilita la visualización del sólido, pero el conocimiento matemático debe tenerlo claro el docente para poder construir las secciones transversales en una base del sólido dada. Al respecto, las construcciones de algunas secciones transversales resultaron más complejas que otras.
- El GeoGebra es un recurso o herramienta que el docente puede usar para facilitar la

comprensión de conceptos matemáticos que resultan abstractos e incomprensibles para los estudiantes en un primer momento. En este punto podemos resaltar el potencial de las herramientas punto en objeto, arrastre y animación.

Finalmente, este taller está orientado a profesores tanto del nivel secundaria como del superior ya que buscamos contribuir con la enseñanza de las superficies por secciones transversales, incorporando el uso del GeoGebra y reflexionando sobre la potencialidad de las herramientas que ofrece, a fin de promover el desarrollo de habilidades tales como explorar, descubrir, elaborar, refutar y verificar conjeturas, encontrar contraejemplos, comprobar propiedades y realizar generalizaciones.

Referencias

- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 215-241.
- Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. Lester, (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843-908). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st Annual Meeting North American Chapter of the International Group of PME*, 3-26.
- Duval, R. (2016). Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas. En Duval R. y Sáenz-Ludlow A. (Eds.), *Comprensión y Aprendizaje en matemáticas: Perspectivas Semióticas Seleccionadas*, Capítulo 2, pp. 61-94. Colombia.
- Madama, M. & Curbelo, M. (2012). *Visualizar, conjeturar y demostrar utilizando el software GeoGebra*. Acta de la Conferencia Latinoamericana *GeoGebra*, 109-116.
- Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 205-235). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.
- Phillips, L.M., Norris, S.P., & Macnab, J.S. (2010). Visualization in mathematics, reading and science education. Dordrecht, The Netherlands: Springer.
- Rabardel, P. (1995). *Los hombres y las tecnologías. Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos*. Traducido por M. Acosta. Colombia: Universidad Nacional de Santander. Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas.
- Rivera, F. D. (2011). Toward a visually-oriented school mathematics curriculum. Research, theory, practice, and issues. Dordrecht: Springer.

USO DE SCRIPTS PARA CREAR ACTIVIDADES AUTOEVALUABLES EN GEOGEBRA

Marco Gutiérrez Montenegro

vgutierrez@itcr.ac.cr

Instituto Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica

Resumen

Actualmente con el programa GeoGebra es posible generar aplicaciones dinámicas, accesibles y rápidas de elaborar en prácticamente todas las áreas de la enseñanza de la matemática. ¿Pero cómo podemos aprovechar el programa GeoGebra para diseñar actividades de autoevaluación de forma dinámica y aleatoria? El objetivo de este taller es aplicar algunos elementos básicos de programación con guiones o scripts para desarrollar actividades que logren evaluar contenidos matemáticos, pero de forma dinámica y aleatoria. Los participantes de este taller aprenderán a generar preguntas aleatorias con parámetros, gráficos aleatorios, uso de contadores y botones de acción. Para el logro del objetivo planteado en el taller, el ponente explicará de manera detallada todos los pasos a seguir en la construcción de varias actividades, ayudando a los participantes para realizar las tareas, cada una de ellas ejemplificadas durante la sesión y mediante una guía que se podrá descargar en formato digital.

Palabras clave: GeoGebra, guión, aleatorio, autoevaluación

Introducción

El programa GeoGebra puede utilizarse de muchas maneras en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para demostración y visualización, ya que puede proporcionar diferentes representaciones, como una herramienta de construcción, ya que permite la creación de formas, para la investigación, para descubrir relaciones matemáticas, ya que puede ayudar a crear un adecuado ambiente para el aprendizaje y además para la preparación de materiales didácticos donde se potencia la interactividad y dinamismo.

Sin embargo, es posible utilizar GeoGebra como una herramienta para crear actividades que generen de manera aleatoria preguntas sobre temas específicos y que a su vez se logre controlar los éxitos y los intentos hechos por un usuario. Además, es posible lograr que estas mismas actividades generen dichas preguntas asociadas a un elemento gráfico, inclusive manipulable. Estas actividades se pueden generar mediante la estructura de guiones o scripts incorporados en el programa GeoGebra.

Un guión o script es una secuencia de comandos, que son ejecutados uno tras otro. Los guiones de GeoGebra permiten crear construcciones muy simples de usar y de muy alta

interactividad.

Los empleos más habituales de los guiones son:

- Control de respuestas ingresadas en un campo de texto.
- Creación de nuevas tareas o desafíos tras la pulsación de un botón o por generación aleatoria o establecida dentro de un conjunto previamente diseñado.
- Inicio de animaciones o de desenvolvimiento de nuevas secciones de la construcción al completarse una tarea.

En relación con los guiones, en el GeoGebra existen dos lenguajes disponibles para estas opciones: GeoGebraScript y JavaScript. En este taller interesa centrar la atención en el primero. El lenguaje GeoGebraScript se define básicamente como un conjunto de comandos de GeoGebra que son ejecutados en un determinado orden. Bajo este lenguaje, los guiones son escritos al modificar las propiedades de los objetos (puntos, rectas, casillas de control, deslizadores, botones, entre otros) que se construyen en la Vista Gráfica del software, específicamente usando las opciones ofrecidas por la pestaña Programa de guion (Scripting) (ver Figura 1).

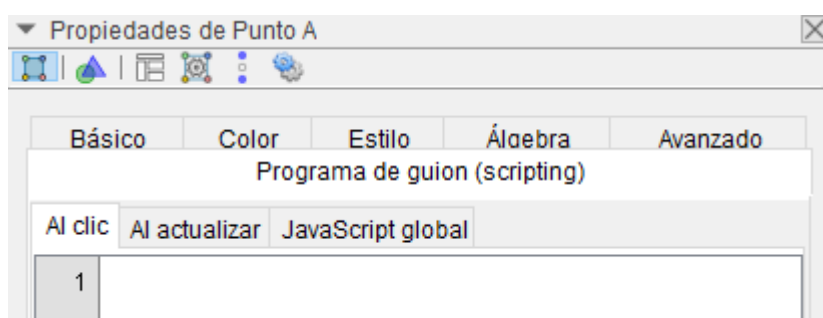


Figura 1: Propiedades de objeto

La ejecución de los guiones depende de la situación en la que sean escritos. Por ejemplo, la opción "Clic" indica que el guion se ejecutará al hacer clic sobre el objeto que posea la cualidad. La segunda opción, "Al actualizar" indica que el guion se ejecutará cuando algún valor o propiedad del objeto varíe. Por ejemplo, si el objeto es un punto, el guion será ejecutado cuando éste varíe sus coordenadas. En el caso de ser un deslizador, el guion se ejecuta cuando este objeto cambie su valor.

Lo fundamental para su diseño es conocer elementos básicos de programación para crear la estructura de los guiones que al final corresponden a pequeños programas que escribimos y ejecutamos en el software.

Para la creación de actividades autoevaluables se requiere fundamentalmente los objetos como casillas de entrada de texto, casillas de control, creación de variables, uso de listas para seleccionar elementos aleatorios, uso de condicionales, textos dinámicos, lógica de la programación de contadores y la incorporación de botones donde escribimos los comandos del guión para la ejecución de las diferentes acciones de dichos objetos.

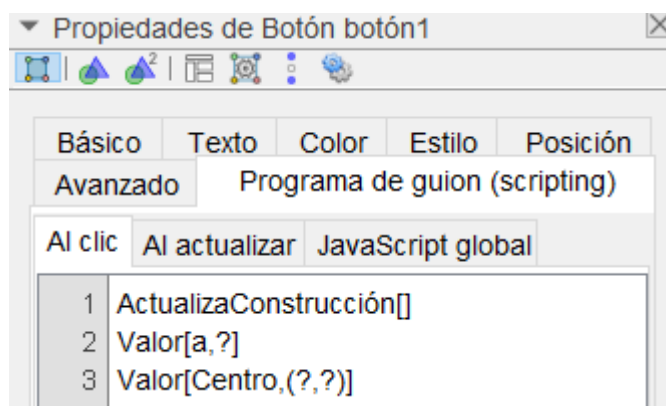


Figura 2: Programa de guion script

Finalidad, diseño e implementación del taller

El desafío del taller es construir con el programa GeoGebra actividades que generen preguntas y gráficos aleatorios donde el usuario sea capaz de responder a cada situación dada y que, a su vez, el programa pueda validar dichas respuestas e indicar si es o no correcta, así como los casos de éxitos en respuestas correctas y cantidad de intentos de cada actividad.

En este taller vamos a proponer el diseño de actividades dinámicas que permitan al usuario elegir dónde hacerlas, cómo hacerlas (con el ordenador, con el móvil, con una tableta) y además que ellos que son los verdaderos protagonistas del aprendizaje decidan en qué momento dejar de hacerlas pues ya han conseguido las destrezas en un grado adecuado.

En el diseño de las actividades utilizaremos principalmente las vistas algebraica y gráfica de GeoGebra con sus menús gráficos, así como los objetos propios de estas vistas para los que vamos a modificar sus propiedades (color de texto, fondo, estilo, ...), utilizaremos valores lógicos para mostrarlos o no y les asignaremos acciones a ejecutar. Todo ello combinado con el uso básico de Látex, manejo de listas, comandos como Ejecuta[], Secuencia[], Zip[], TablaTexto[], AleatorioEntre[], ActualizaConstrucción[], Valor[], entre otros.

El taller se realizará siguiendo la siguiente secuencia:

1. Explicación breve del ambiente gráfico de GeoGebra.
2. Exposición de las principales herramientas y comandos utilizados en el taller.
3. Explicación del funcionamiento de guiones mediante la programación en la línea de comandos y botones.
4. Uso de casillas de entrada de texto para ingresar datos.
5. Lógica de programación de un contador.
6. Diseño varias actividades autoevaluables sobre: operaciones algebraicas, funciones, cálculo y geometría vectorial.

Para la implementación de las distintas actividades del punto 6 el expositor dirigirá el taller realizando paso a paso cada una de las tareas propuestas y cada participante podrá seguir las mismas actividades con la ayuda de una guía que podrá descargar digitalmente.

En la guía se incorporarán las instrucciones paso a paso, así como la sintaxis de cada comando y líneas de código de programación que se deben incorporar en el guión script para aquellos que por alguna razón se puedan atrasar por la no habitualidad del programa o uso de comandos específicos incorporados en el programa. (Ver figura 3).

Pasos para construir la actividad con GeoGebra

1. Abra un nuevo archivo en el programa.
2. Desactive los ejes y la cuadrícula de la Vista Gráfica.
3. En **Entrada** ingresamos uno a uno los siguientes comandos, y cada uno lo ejecutamos presionando la tecla ENTER

```
Lista1 = Secuencia(i,i,-10,-1,1)
Lista2 = Secuencia(i,i,1,10,1)
Lista3 = Unión(Lista1, Lista2)
```

4. En este paso se deberán generar cuatro valores aleatorios, éstos serán tomados de **Lista3**. Escribimos los siguientes comandos en **Entrada**. Cada vez que se escriba un comando se ejecuta presionando ENTER.

```
a = ElementoAleatorio(Lista3)
b = ElementoAleatorio(Lista3)
c = ElementoAleatorio(Lista3)
d = ElementoAleatorio(Lista3)
```

Figura 3: Guía de pasos para la construcción

Resultados esperados

Al finalizar el taller se espera que los participantes logren:

1. Conocer las herramientas de las que dispone GeoGebra para dinamizar construcciones e interactuar con los usuarios.
2. Dinamizar actividades mediante textos y objetos dinámicos.
3. Utilizar las herramientas para crear autoevaluaciones (actividades que devuelven al alumno mensajes sobre los avances conseguidos a medida que se realizan).
4. Implementar guiones para la programación de comandos específicos de GeoGebra.
5. Programación de botones que dinamizan las autoevaluaciones.
6. Uso de casillas de entrada de textos vinculadas a objetos.

Es importante resaltar que los participantes podrán conocer los elementos básicos en la creación de este tipo de actividades, lo que les permitirá conocer de cómo sacar provecho al programa GeoGebra para la creación de nuevos recursos para sus alumnos.

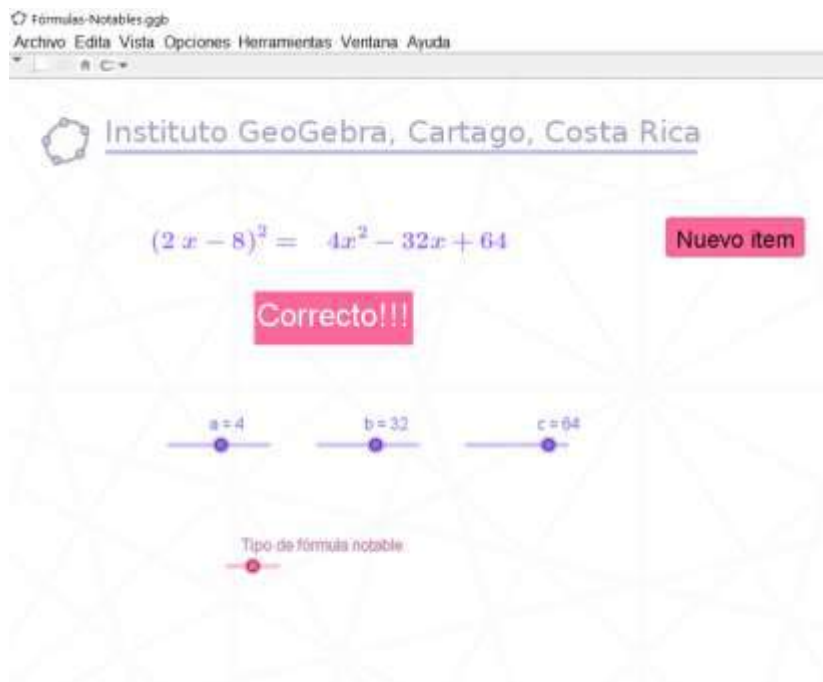


Figura 4: Actividad de autoevaluación de fórmulas notables

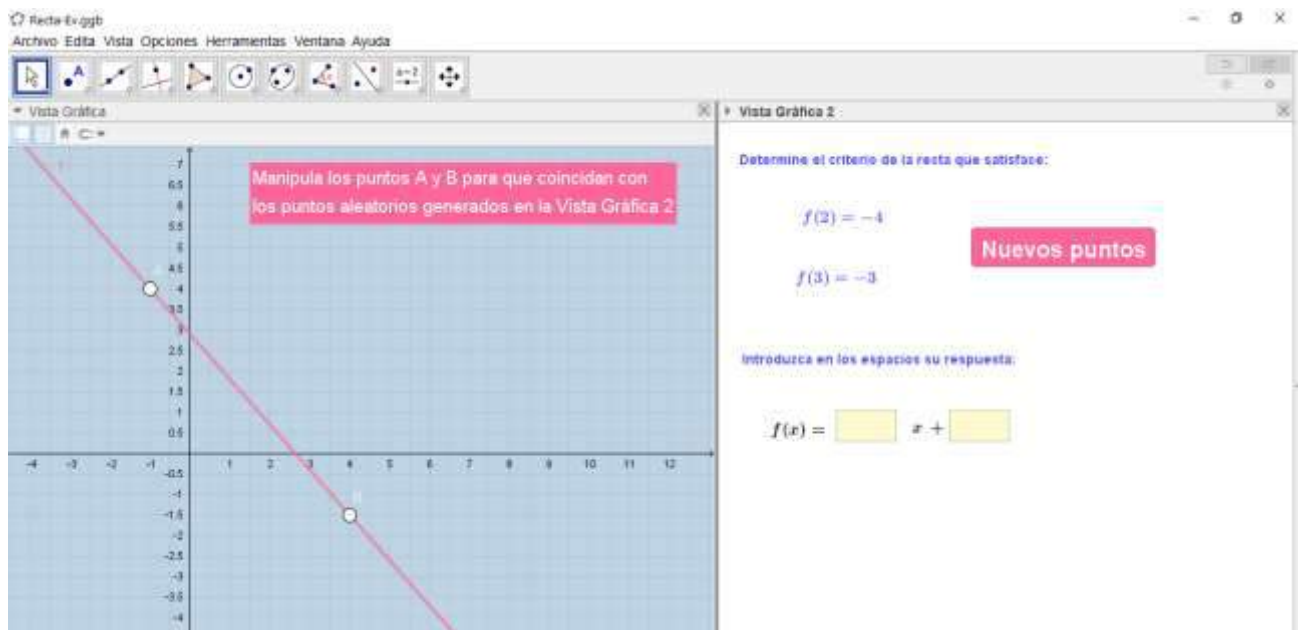


Figura 5: Actividad de autoevaluación de función lineal

Consideraciones finales

Las TIC brindan una serie de posibilidades de gran transcendencia en los procesos de enseñanza aprendizaje de la matemática, para lo cual es relevante que las y los docentes estén preparados para su empleo, que el uso de las tecnologías por parte del docente facilite los procesos propios del aprendizaje de la matemática como el cálculo numérico o la visualización, la conjetura, la demostración, comprobación.

El programa GeoGebra ha sido una de las herramientas más utilizadas por profesores e investigadores en educación matemática a nivel mundial, por lo que se ha convertido en un recurso importante por su versatilidad y de fácil manejo.

Un docente competente digitalmente debe conocer sus posibilidades y así poder utilizarlo para facilitar la enseñanza de la matemática y en este caso en particular conocer opciones para poder crear actividades para que sus alumnos puedan practicar sobre los conceptos estudiados mediante recursos autoevaluables, lo que permitirá también una interacción entre alumnos y profesores.

Referencias

- Brzezinski, T. (2018). Using GeoGebra to Differentiate Ss' Discovery Learning Ex's. *En* <https://www.geogebra.org/m/p4jvchbz>.
- Castillo, B. & Prieto G. (2018). El uso de comandos y guiones en la elaboración de simuladores con GeoGebra. *Revista Iberoamericana de educación matemática, No. 52, España*.
- Gutiérrez, Marco. (2018). Evaluaciones Dinámicas con GeoGebra. *En* <https://www.geogebra.org/u/institutogeogebatec#materials/created>.
- Gascón, J. (1994). El papel de la Resolución de Problemas en la Enseñanza de las Matemáticas. *Educación Matemática, Vol. 6, No. 3, México*.

LA FORMULACIÓN DE PROBLEMAS: HERRAMIENTA UTILIZADA EN EL AULA PARA EL DESARROLLO DE HABILIDADES MATEMÁTICAS A LO LARGO DE LA ESCOLARIDAD

Percy Merino*

Olimpia Castro*

Carlos Torres**

Sahara Doria**

pmerino@minedu.gob.pe, olimpiacastro@hotmail.com, cartorres@minedu.gob.pe,
sdoria@minedu.gob.pe

Oficina de Medición de la Calidad de los aprendizajes- MINEDU, Perú*
Instituto de Investigación sobre Enseñanza de la Matemáticas, IREM-PUCP, Perú**

Resumen

De los resultados obtenidos en la Evaluación Censal de Estudiantes (ECE), se ha logrado obtener una aproximación de los logros y dificultades que tienen los estudiantes para formular o crear problemas matemáticos. Desde este escenario, el taller busca evidenciar cómo la formulación de problemas permite desarrollar la intuición y creatividad de los estudiantes, sus habilidades para establecer relaciones, interpretar condiciones, argumentar sus posturas y, además, usar de manera flexible sus conocimientos matemáticos. El taller está dirigido a docentes de primaria y secundaria, tendrá un carácter activo, participativo y práctico. En grupos, los participantes identificarán la estructura que debe tener todo problema, las diversas situaciones que pueden ser utilizadas en el aula para formular un problema, atendiendo a los procesos cognitivos que se ponen en juego al crear y resolver problemas, a partir de las evidencias que se tienen en las evaluaciones estandarizadas.

Palabras clave: Formulación, problemas, creatividad, habilidades.

Introducción

En la actualidad, la formulación de problemas adquiere una especial importancia en el proceso de la enseñanza aprendizaje de la Matemática, Ayllón y Gómez (2014), refieren que las tareas de formulación, permiten el incremento del conocimiento matemático, la motivación, la creatividad, la disminución de la ansiedad hacia las matemáticas, la superación de errores matemáticos y la posibilidad de que los docentes utilicen estas tareas como instrumento evaluador. En ese mismo sentido, Malaspina (2013), identifica a la formulación de problemas como una herramienta que fortalece las capacidades para resolver problemas; formular interrogantes; identificar problemas e investigar sobre ellos; establecer conexiones con otros conocimientos, desarrollar la creatividad de los estudiantes y fortalecer su autoestima. Fernández (2007), afirma que la formulación o creación de problemas ayuda a los estudiantes

a descubrir su error e identificarlo para evitarlo en la construcción de nuevos conocimientos, generando reflexión sobre el error cometido, y disminuyendo en el docente su ignorancia sobre las dificultades que pueden tener sus estudiantes frente a una tarea matemática.

Desde este escenario, se reconoce que las tareas vinculadas a la formulación de problemas desarrollan “niveles elevados de razonamiento que hacen posible la construcción de un conocimiento matemático” (Ayllón y Gómez, 2014), y permiten evidenciar la comprensión de diversas nociones matemáticas de los estudiantes (Malaspina, 2013). Christou, Mousoulides, Pittalis y Pitta-Pantazi (2005), mencionan, además, que la formulación de problemas, moviliza procesos cognitivos cuando los estudiantes tienen que editar, seleccionar comprender y organizar la información involucrada en una situación, así como, al traducir esta información de una forma de representación a otra.

Por otro lado, la Evaluación Censal de Estudiantes (ECE) da a conocer al sistema educativo peruano, las dificultades que evidencian los estudiantes al finalizar el 4.º grado de primaria y el 2.º grado de secundaria de la educación básica. Respecto a la formulación de problemas, el Ministerio de Educación del Perú (2017a, 2017b) afirma que los estudiantes presentan diversas dificultades para desarrollar este tipo de tareas que involucran, utilizar la información que se ofrece al formular el problema, establecer relaciones coherentes entre las variables que se involucran en el proceso de formulación e identificar los elementos que permiten construir un problema (como la información, requerimiento, el entorno matemático y el contexto) propuestos por Malaspina (2013), entre otras dificultades.

Las siguientes son las principales dificultades que se evidencian en la formulación de problemas, desde los resultados de la ECE:

- No toman en cuenta la información propuesta.
- Se vinculan a nociones matemáticas muy sencillas para el grado evaluado.
- No identifican los elementos que conforman un problema.
- Tendencia a establecer relaciones entre variables que son explícitas o se obtienen de una lectura directa.
- Tendencia a utilizar más a los números naturales
- No discriminan la información que es relevante para resolver el problema.
- Asumen que las respuestas a los problemas siempre tienen que ser cuantitativos y no cualitativos.

A partir de los hallazgos encontrados en la ECE se puede generar espacios de reflexión del por qué los estudiantes no logran obtener desempeños aceptables al formular problemas: ¿por qué podría estar ocurriendo esto?, ¿qué dificultades se presentan en el proceso de enseñanza aprendizaje?, ¿qué oportunidades tienen los estudiantes para formular y no solo resolver problemas?

Finalidad, diseño e implementación del taller

La finalidad del taller es que los docentes evidencien la importancia que tiene la formulación de problemas en el desarrollo de las habilidades y conocimientos matemáticos de sus estudiantes, generando, como docentes, situaciones en el aula que estimulen a sus estudiantes a crear, argumentar, razonar, problematizar, identificar sus errores y cuestionar sus creencias, vinculando lo aprendido con una matemática útil, pero a la vez significativa para su vida.

Este taller estará dirigido a docentes de primaria y secundaria (de preferencia desde el 4.º grado de primaria hasta 3.º de secundaria) que se formarían en grupos de trabajo (de hasta 4 participantes) y estará centrado en la participación activa de los asistentes luego de presentar evidencias teóricas que sustentan la importancia de la formulación de problemas en el proceso de aprendizaje. Luego, los docentes identificarán los elementos que constituyen un problema, según Malaspina (2013), un problema matemático tiene cuatro elementos fundamentales: la información, conformada por los datos y condiciones que establecen en el problema; el requerimiento, que es lo que se pide encontrar; el contexto, que puede ser intra matemático o extra matemático y el entorno, constituido por los conocimientos matemáticos que pueden utilizar los estudiantes al resolver un problema. Fernández y Barbarán (2017), consideran, por ejemplo, que situaciones que presentan información incompleta favorecen el aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos, ya que el estudiante hace uso de procesos metacognitivos y es consciente de las relaciones que intervienen en su resolución, además, le ayuda a descubrir el error y a identificarlo para evitarlo en la construcción de nuevos conocimientos.

Posteriormente, se presentará a los docentes diversas situaciones que pueden ser utilizadas en el aula para formular problemas. Según, Fernández (2007) estas situaciones pueden ser las siguientes:

- a) **Generativas:** centradas en el razonamiento lógico, y no en cantidades ni operaciones.
 - **Sin números:** refuerza la relación entre los hechos y los supuestos. Ejemplo: Al comprarse una pelota, ¿qué pasó con su dinero?
 - **Para deducir ideas:** se brinda información para realizar deducciones. Ejemplo: Tiene monedas de $S/2$ y de $S/5$. ¿Quién puede comprar más cosas?
 - **Cualitativas:** busca que el estudiante pregunte por información, hasta resolver el problema. Ejemplo: Luis realizó compras. ¿Cuánto dinero le queda?
 - **Enunciados abiertos:** se brinda información a partir de una foto, un esquema, una oración, etc. y el estudiante debe redactar un problema que la emplee.
- b) **De estructuración:** en ellos los estudiantes crean y resuelven problemas a partir de los elementos que la componen. Es decir, en estas situaciones los estudiantes pueden identificar los cuatro elementos fundamentales de todo problema.
 - **Una respuesta dada:** por ejemplo, inventa un problema cuya respuesta sea 12 tarjetas.
 - **Una expresión matemática:** por ejemplo, inventa un problema que se use $450 - 90$ en su solución.

- **Cumpliendo dos condiciones:** por ejemplo, inventa un problema...
 - Con información de un cartel y cuya respuesta sea $S/20$.
 - En el contexto de un partido de vóley y con la operación $25 - 12$.
- c) **Enlaces:** permiten manejar la información de manera diversa y conectar las partes del problema para generar otro abordaje. Por ejemplo, preguntar a partir de un enunciado y una operación.

Luego, se presentarán variadas situaciones que han sido propuestas en la Evaluación Censal de Estudiantes, con el objetivo de concretizar los principales aspectos mencionados anteriormente, es decir, identificar la estructura de un problema, distinguir los tipos de problema que se pueden crear e interpretar las condiciones que les permitirá formular, tanto al docente como al estudiante, un problema. Asimismo, en el desarrollo del taller, los participantes podrán interactuar y poner en práctica su experiencia para analizar las habilidades y procesos cognitivos que se pondrían en juego al encomendar una tarea de formulación o creación de problemas a sus estudiantes, y asimismo, valorarán el papel que tienen las evaluaciones estandarizadas, en el desarrollo de aprendizajes sólidos, atendiendo a los procesos cognitivos implicados, conociendo sus concepciones o creencias, identificando sus dificultades y orientando de manera adecuada el error, visto como una oportunidad de aprendizaje.

En la figura 1, se muestra un ejemplo de una situación propuesta en la ECE y que podría ser utilizada para desarrollar habilidades en la formulación de problemas.

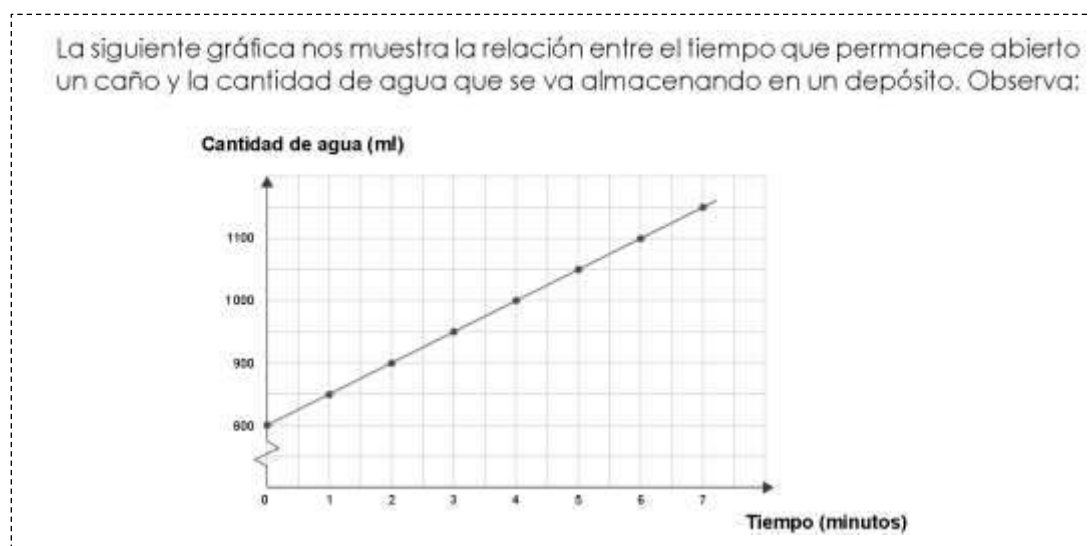


Figura 1. Obtenido del Informe Docente de Matemática
ECE 2015- 2. ° Secundaria

En la situación mostrada, se le pide al docente que identifique los elementos y condiciones que se encuentran inmersas en dicha situación. Luego, se le pide que identifique cuáles podrían ser las posibles nociones matemáticas que estarían vinculadas a la misma (por ejemplo, funciones, proporcionalidad, patrones, etc.), así como, los procesos cognitivos que el estudiante podría desarrollar a partir de las consignas dadas al momento de estructurar la formulación del problema. Atendiendo a las habilidades que se quieren desarrollar en los estudiantes y a los conocimientos que se quieren involucrar en la tarea, se les pide realizar actividades para crear situaciones a partir:

- De una respuesta dada.
- Dada algunas condiciones adicionales.
- De argumentos o justificaciones vinculadas a la situación.
- De una pregunta incompleta.
- De una expresión matemática dada.
- De una modificación de los datos o condiciones inicialmente propuestas.

Finalmente, de actividades similares, el docente podrá reflexionar su práctica pedagógica, la relevancia y la pertinencia de su intervención en el proceso de aprendizaje del estudiante, y la importancia que tiene su labor en una adecuada y oportuna retroalimentación ante las posibles dificultades que tengan sus estudiantes al formular y resolver sus problemas.

Resultados esperados

Concluido el taller, los participantes serán capaces de:

- Valorar la importancia de la formulación de problemas en el proceso de aprendizaje, desde el desarrollo de la creatividad en sus estudiantes, pasando por el uso y la conexión de diversos conocimientos hasta llegar a calar en sus motivaciones e intereses.
- Identificar los elementos que estructuran la formulación o creación de un problema e interpretar la relación entre estos.
- Identificar las diversas situaciones que propician condiciones adecuadas para la formulación de problemas en sus estudiantes.
- Desarrollar habilidades que le permitan enriquecer sus conocimientos didácticos y disciplinares a través de la formulación de problemas.
- Concientizar sobre la importancia que tiene la formulación de problemas al generar espacios para problematizar desde situaciones cotidianas, lo que fortalece el sentido y el propósito de una matemática significativa y útil para la vida de los estudiantes.

Consideraciones finales

Este taller puede dar un valioso aporte a los docentes en formación como en servicio, ya que permitirá equiparar la importancia de la resolución respecto a la formulación de problemas, siendo estos complementarios y necesarios para el desarrollo autónomo de habilidades y conocimientos en los estudiantes.

La formulación de problemas nos permite tener una mirada más cercana del enfoque de Resolución de Problemas ya que representa la naturaleza integradora de la matemática, al problematizar para crear y resolver situaciones en diversos contextos.

La formulación de problemas debe ser un proceso inmerso en la resolución de estos, ya que desde las estrategias que se buscan para resolverlos se pueden crear nuevas situaciones que permiten controlar y dar soluciones a los problemas originales.

La formulación de problemas permite el desarrollo de la creatividad, la habilidad para plantear y hacer uso intencional de sus conocimientos, así como, evidenciar los errores originados por sus creencias, concepciones y las diversas dificultades que aparecen a lo largo de la escolaridad.

Referencias

- Fernández, J. (2007). Apúntate un tanto y tanea el punto. *Resolución de problemas Matemáticos* (pp, 85-102). Recuperado el 10 de abril de 2018 en <http://www.grupomayeutica.com/documentos/24%20MEC-APUNTATE%20UN%20TANTO%20Y%20TANTEA%20EL%20PUNTO-UIMP.pdf>
- Fernández, J. A. & Barbarán, J. (2017). *El desarrollo de competencias matemáticas a través de modelos de situaciones problemáticas Educación y Futuro: Revista de investigación aplicada y experiencias educativas*, 36, (pp, 153-176). Recuperado el 10 de abril de 2018 en https://www.researchgate.net/publication/318113418_El_desarrollo_de_competencias_matematicas_a_traves_de_modelos_de_situaciones_problematicas
- Ministerio de Educación [Minedu]. (2017a). *¿Qué logran los estudiantes en Matemática?. 2.º y 4.º grados de primaria*. Lima: Autor. Recuperado el 3 de abril de 2018 en: <http://umc.minedu.gob.pe/wp-content/uploads/2017/04/Informe-para-Docentes-Matem%C3%A1tica-ECE-2016.pdf>
- Ministerio de Educación [Minedu]. (2017b). *¿Qué logran los estudiantes en Matemática?. 2.º grado de secundaria*. Lima: Autor. Recuperado el 3 de abril de 2018 en: <http://umc.minedu.gob.pe/wp-content/uploads/2017/04/Informe-para-Docentes-Matem%C3%A1tica-ECE-2016-2.%C2%B0-grado-de-secundaria.pdf>
- Ministerio de Educación [Minedu]. (2018). *¿Qué logran los estudiantes en Matemática?. 4.º grado de primaria*. Lima: Autor. Recuperado el 5 de mayo de 2019 en: <http://umc.minedu.gob.pe/wp-content/uploads/2019/04/Informe-Matem%C3%A1tica-ECE2018-4P.pdf>

- Ministerio de Educación [Minedu]. (2018). *¿Qué logran los estudiantes en Matemática?. 2.º grado de secundaria*. Lima: Autor. Recuperado el 5 de mayo de 2019 en: <http://umc.minedu.gob.pe/wp-content/uploads/2019/04/Informe-Matem%C3%A1tica-ECE2018-2S.pdf>
- Ayllón, M. (2012). *Invencción-Resolución de Problemas por alumnos de Educación Primaria*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada. <https://hera.ugr.es/tesisugr/2116633x.pdf>
- Ayllón, M. F. & Gómez, I. A. (2014). *La invención de problemas como tarea escolar*. *EA, Escuela abierta: revista de Investigación Educativa*, (17), 29-40. Recuperado el 29 de marzo de 2019 en: <file:///I:/LaInvenccionDeProblemasComoTareaEscolar-4801331.pdf>
- Malaspina, U. (2007). *La creación de problemas de matemáticas en la formación de profesores*. Recuperado el 10 de abril de 2018 en: <file:///H:/Relme32/formulaci%C3%B3n%20deproblemas%20malaspina.pdf>
- Malaspina, U. (2013). *La creación de problemas de matemáticas en la formación de profesores. VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*. Montevideo. Retrieved from <http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/729.pdf>
- Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D., & Sriraman, B. (2005). An empirical taxonomy of problem posing processes. *ZDM*, 37(3), 149-158.
- Silver, E. (1994). On mathematical problem posing. *For the learning of mathematics*, 19-28.
- Silver, E. (2013). Problem-posing research in mathematics education: looking back, looking around, and looking ahead. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 157-162.
- Silver, E., Mamona, J., Leung, S., & Kenney, P. (1996). Posing mathematical problems: an exploratory study. *Journal for research in mathematics education*, 27(3), 293-309.
- Cai, J., Moyer, J. C., Wang, N., Hwang, S., Nie, B., & Garber, T. (2013). Mathematical problem posing as a measure of curricular effect on students learning. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 57-69.

CRIAÇÃO DE APLICATIVOS NA PERSPECTIVA DA MATEMÁTICA INCLUSIVA

Elton de Andrade Viana

Maximiliam Albano Hermelino Ferreira

Ana Maria Antunes de Campos

Ana Lucia Manrique

eltondeandradeviana@gmail.com, maximiliam.ahf@gmail.com,
camp.ana@hotmail.com, analuciamanrique@gmail.com

Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC-SP, Brasil

Resumen

O objetivo geral é compartilhar a potencialidade do MIT App Inventor para o desenvolvimento de aplicativos para uso no ensino e na aprendizagem de matemática. Já os objetivos específicos são (1) investigar aplicativos previamente criados quanto as suas necessidades e potencialidades no trabalho didático com uma perspectiva inclusiva; (2) criar um aplicativo utilizando o ambiente MIT App Inventor para posterior utilização em uma situação didática de ensino e aprendizagem de matemática com uma perspectiva inclusiva. O referencial teórico assumido na oficina é o desenho universal para aprendizagem e o referencial metodológico a abordagem de uma aprendizagem centrada no estudante. A partir de uma sessão de exploração e investigação de aplicativos e outra de criação de aplicativos, os resultados esperados são o desenvolvimento de novas práticas no campo do ensino e da aprendizagem e a criação de um aplicativo com fins didáticos que possa ser utilizado em uma situação didática.

Palavras-chave: Celular, Desenho Universal para Aprendizagem, Educação Matemática, MIT App Inventor.

Introdução

Nos últimos anos, a tecnologia se constituiu um eixo importante de estudo e pesquisa na Educação Matemática. Temos observado atualmente que o cruzamento dos resultados de tais estudos e pesquisas com os que se desenvolvem no campo da Educação Matemática Inclusiva se destaca como um importante caminho investigativo.

A necessidade de uma difusão do conhecimento já produzido na fronteira entre tecnologia e diversidade humana é o que justifica o oferecimento de uma oficina que não apenas divulgue resultados de pesquisas já realizadas nessa fronteira, mas também permita a introdução,

aprofundamento e consolidação de habilidades e competências na área da didática da matemática a partir de uma perspectiva inclusiva.

Assim, é com essa proposta que a oficina aqui apresentada, se mostra como uma possibilidade de favorecer aos participantes um momento de reflexão de como as práticas no ensino fundamental podem atender a diversidade humana a partir da utilização de recursos e estratégias já validadas no meio científico como favorecedores da aprendizagem de matemática.

Dentre os recursos e estratégias que se destacam atualmente na Educação Matemática, encontramos no que comumente é conhecido como Novice Programming Environment (NPE) a possibilidade de promovermos algumas horas de reflexão pertinentes no contexto das diferenças e de uma abordagem inclusiva. Logo, apresentamos como proposta uma oficina que se fundamente na possibilidade didática do NPE como um ambiente promissor na Educação Matemática.

Novice Programming Environment

Já no início da década de 1980, Papert (1980) denominou o medo generalizado da matemática, que muitas das vezes têm a intensidade de uma fobia real, como mathophobia. Uma das discussões fortemente descrita por esse autor é que esse medo não é nato no ser humano, mas desenvolvido, já que as crianças começam como amantes da matemática e do aprendizado (mathophile), e com o largo dos anos, se tornam pessoas que têm medo de ambos (mathophobe).

No entanto, Papert (1980) defende que a presença do computador no ensino e na aprendizagem da matemática pode neutralizar esse fenômeno, pois a presença dessa tecnologia pode constituir uma epistemologia cultural menos desassociada, onde em um polo se concentra a matemática como ciência e em outro os estudos das humanidades.

É com a perspectiva de uso do computador, o que podemos anunciar como uma relação com a tecnologia, que a utilização e diferentes recursos se apresentam como uma possibilidade de potencializar uma aproximação positiva e menos negativa entre o estudante e a matemática. Dentre os recursos ultimamente estudados, a literatura tem destacado o que podemos entender como ambientes de programação para iniciantes.

Tais ambiente, comumente conhecidos como Novice Programming Environment (NPE), podem ser definidos segundo Jacques (2017) como ambientes de codificação de computador que utilizam gráficos e blocos visuais de código para a criação de programas. Uma particularidade do NPE, é que são ambientes que têm como usuários crianças, jovens e adultos que não se classificam como programadores, até porque muitos não consideram seguir uma carreira na ciência da computação, e o empenho em programar nesse tipo de ambiente é muito mais para desfrutar de um processo criativo de projetar, a fim de interagir com entusiasmo e compartilhar local e remotamente o que é produzido (Good, 2011).

Existem diferentes NPEs disponíveis no mundo, sendo alguns deles amplamente utilizados, provocando uma evolução substancial e significativa no ambiente de programação. Alguns

dos mais conhecidos são os identificados em Good (2018): Scratch, Alice, Looking, Glass, Greenfoot e Flip.

Após uma análise de cada um desses NPEs identificados como os mais conhecidos, Good (2018) observou que os ambientes diferem em termos de público que pretende alcançar como usuário e também no relacionamento com as linguagens de programação existentes, no entanto, concluiu que todos, apesar de suas diferenças, oferecem benefícios notavelmente semelhantes quanto a finalidade para a qual a programação pode ser usada, já que

“none of the programming environments are designed to be truly general purpose, rather their aim is to provide a ‘motivational hook’ which can encourage learners to engage with programming more as a means to an end, rather than an end in itself.” (p. 27).

Na Educação Matemática, o NPE também se constitui um importante tópico de pesquisa nos últimos anos (Benton, 2016; Jacques, 2017; Souza, 2016), no entanto, observamos que o NPE MIT App Inventor, que cria aplicativos para utilização em celulares com sistema operacional Android, tem se destacado em algumas pesquisas já concluídas (Cioruta et al., 2018; Elias et al., 2017; Gökçe et al., 2017; Prabowo et al., 2019)

O MIT App Inventor está disponibilizado no formato de uma plataforma de programação intuitiva (Figura 1), onde por meio de uma interface baseada na ideia de um ambiente de desenvolvimento, consiste em duas partes: a seleção de componentes do aplicativo e a definição do comportamento do aplicativo (Pokress & Veiga, 2013). Após o desenvolvimento, é possível executar o aplicativo em celulares com sistema operacional Android (Figura 2).

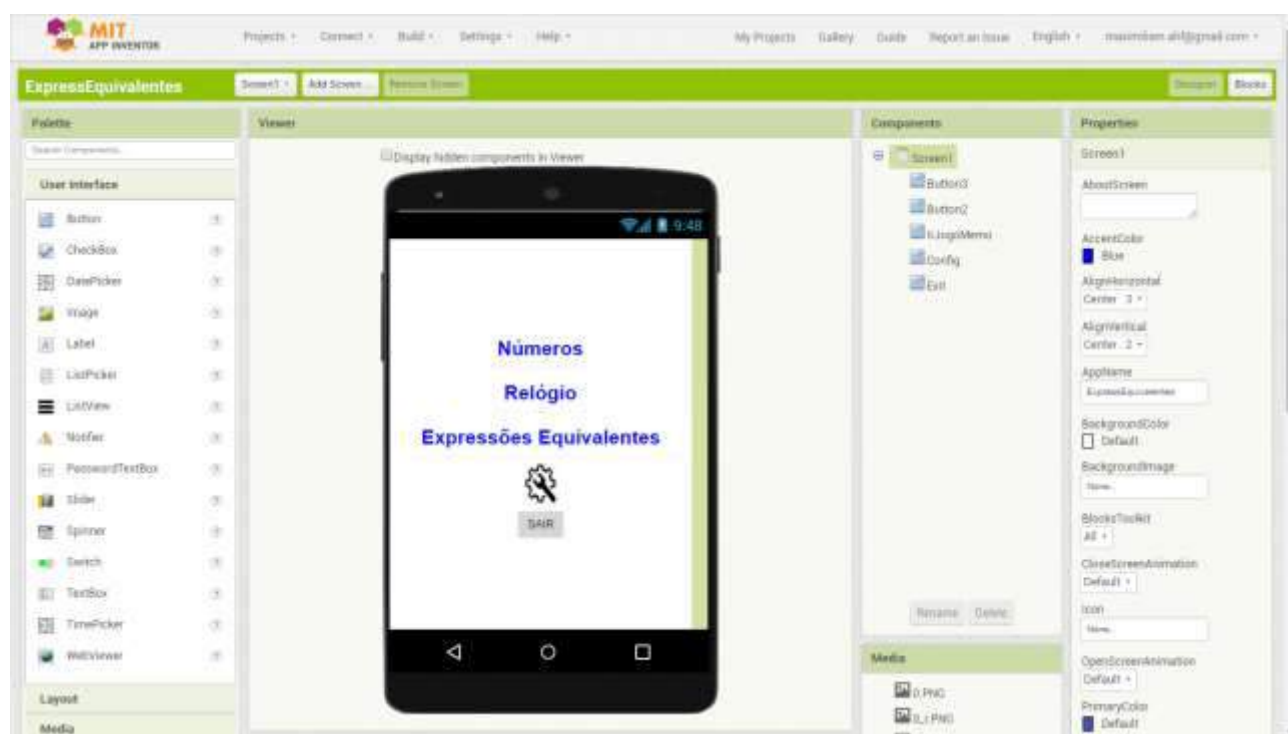


Figura 1. Ambiente MIT App Inventor

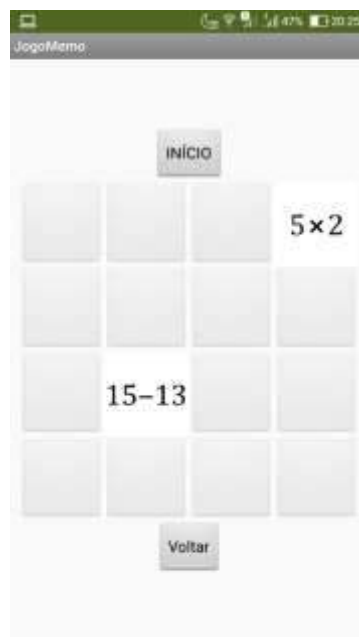


Figura 2. Aplicativo produzido pelos autores no MIT App Inventor

A criação do MIT App Inventor se deu por meio de um projeto educacional na empresa multinacional de serviços online e software dos Estados Unidos Google LLC, e o responsável foi o Prof. Hal Abelson, do Massachusetts Institute of Technology (MIT). A primeira versão do MIT App Inventor foi lançada em 2009, no entanto, desde 2011, a plataforma está alojada no Center for Mobile Learning (CML) do MIT (Herro et al., 2015; Pokress & Veiga, 2013).

Segundo Pokress & Veiga (2013), oito países se destacam nos servidores como os que mais utilizam o MIT App Inventor, sendo o Brasil um desses países (Tabela 1).

Tabela 1

Principais países com usuários ativos do MIT App Inventor

País	Porcentagem de usuarios ativos semanais identificados nos servidores
Estados Unidos	18%
Reino Unido	17%
Taiwan	7%
Itália	6%
Espanha	5%
Brasil	5%
Alemanha	4%
Japão	3%

Fonte: Pokress & Veiga (2013).

As principais características do MIT App Inventor já citadas na literatura (Herro et al., 2015; Pokress & Veiga, 2013) são: (1) a plataforma é gratuita e intuitiva: a programação visual gratuita permite criar aplicativos para celular juntando blocos como se fossem peças de quebra-cabeça; (2) os testes em tempo real e desenvolvimento incremental: possibilidade de ver e testar as criações enquanto são desenvolvidas; (3) a comunidade de usuários: estudantes, professores, desenvolvedores, entusiastas e empresários desenvolvem aplicativos de forma colaborativa; (4) o código aberto: qualquer pessoa pode modificar, personalizar e estender a funcionalidade do sistema; e (5) o foco em um único sistema operacional: os aplicativos são executados apenas no sistema Android, favorecendo mais funcionalidade ao usuário final.

A partir da revisão de literatura aqui apresentada, entendemos que uma oficina que apresenta como principal proposta promover uma reflexão sobre o NPE pode acompanhar a tendência de estudos e pesquisas em desenvolvimento na Educação Matemática no âmbito internacional, o que nos direciona à uma proposta que permita um aprofundamento de um NPE em específico e que, como já citamos, tem se destacado em pesquisas já concluídas na Educação Matemática, no caso, o ambiente em específico é o MIT App Inventor.

Objetivos

O objetivo geral da oficina é compartilhar com os participantes do X Congreso Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas (X CIEM), a potencialidade didática do MIT App Inventor para o desenvolvimento de aplicativos para uso no ensino e na aprendizagem de matemática.

Como objetivos específicos definimos (1) investigar aplicativos previamente criados quanto as suas necessidades e potencialidades no trabalho didático com uma perspectiva inclusiva; (2) criar um aplicativo utilizando o ambiente MIT App Inventor para posterior utilização em uma situação didática de ensino e aprendizagem de matemática com uma perspectiva inclusiva.

Referencial teórico

Adotamos como referencial teórico o que comumente tem se denominado como Desenho Universal para Aprendizagem (DUA). O DUA é uma abordagem que tem como objetivo oferecer a mesma oportunidade de aprendizagem para todos os estudantes. Tal abordagem, é atualmente estudada com profundidade por alguns pesquisadores, como por exemplo o Prof. Dr. Tom Hehir na Harvard University, se constituindo como um tema amplamente explorado na literatura científica (Rose et al., 2002).

O DUA se fundamenta em três princípios que orientam o desenho, a seleção e a aplicação de ferramentas, métodos e ambientes de aprendizagem, princípios que assumimos aqui como referencial teórico importante na criação de aplicativos com fins didáticos e na perspectiva inclusiva. Os princípios do DUA são definidos em: (1) Fornecer múltiplos meios de engajamento (o 'porquê' da aprendizagem); (2) Fornecer múltiplos meios de representação (o 'o quê' da aprendizagem); (3) Fornecer múltiplos meio de ação e expressão (o 'como' da aprendizagem).

Referencial metodológico

O referencial metodológico que assumimos na oficina é o que Horn (2015) entende como uma aprendizagem centrada no estudante. Para esse autor, a aprendizagem que pretende protagonizar o estudante no processo é resultado da relação entre duas ideias: o ensino personalizado e a aprendizagem baseada na competência.

No que se refere a ideia do ensino personalizado, a presente oficina propõe o oferecimento do que estamos aqui a denominar como roteiros de aprendizagem. Cada participante poderá escolher dentre três roteiros de aprendizagem que se diferenciam quanto a complexidade das atividades propostas e linguagem adotada. A personalização é um elemento importante e que entendemos ser fundamental para atendermos o aspecto inclusivo da oficina.

Já na ideia de uma aprendizagem baseada na competência, a oficina tem como proposta a realização de atividades através de agrupamentos produtivos, onde por meio de processos investigativos que valorizam as habilidades e competências já desenvolvidas pelos diferentes participantes, as atividades serão fundamentadas em um trabalho colaborativo.

Desenvolvimento da oficina

A oficina é dividida em duas sessões, sendo uma sessão para exploração de aplicativos com finalidade didática e outra para produção de aplicativos.

Na primeira sessão, será realizada uma comunicação sobre as possibilidades didáticas do MIT App Inventor na criação de aplicativos para utilização em situações de ensino e aprendizagem da matemática, além de também apresentar o que são os princípios do DUA e como tais princípios se contextualizam na criação de aplicativos que alcancem a diversidade humana nas aulas de matemática, com uma perspectiva inclusiva de trabalho didático.

Após esse momento, temos como proposta que os participantes, em grupos colaborativos de trabalho, acessem um conjunto de aplicativos criados através do MIT App Inventor e que foram produzidos no âmbito do Grupo de Pesquisa Professor de Matemática: formação, profissão, saberes e trabalho docente, da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP)

Atualmente, o grupo de pesquisa, em que os aplicativos foram desenvolvidos, tem se ocupado em criar aplicativos que não apenas tenham a finalidade de se constituírem como recursos que contribuam para o ensino e a aprendizagem de matemática, mas também tenham como princípio o DUA na sua produção, fortalecendo a perspectiva inclusiva na sua produção.

Os aplicativos que serão apresentados e explorados pelos participantes integram um processo de desenvolvimento técnico de aplicativos elaborado e seguido pelo nosso grupo de pesquisa e que é constituído por duas fases, uma de especificação e outra de definição. No momento, estamos na fase de especificação, que por sua vez, é composta por sete etapas que se repetem em dois ciclos distintos, sendo o primeiro ciclo para a criação de um protótipo de aplicativo e o segundo para a criação de uma versão completa de aplicativo (Figura 3)

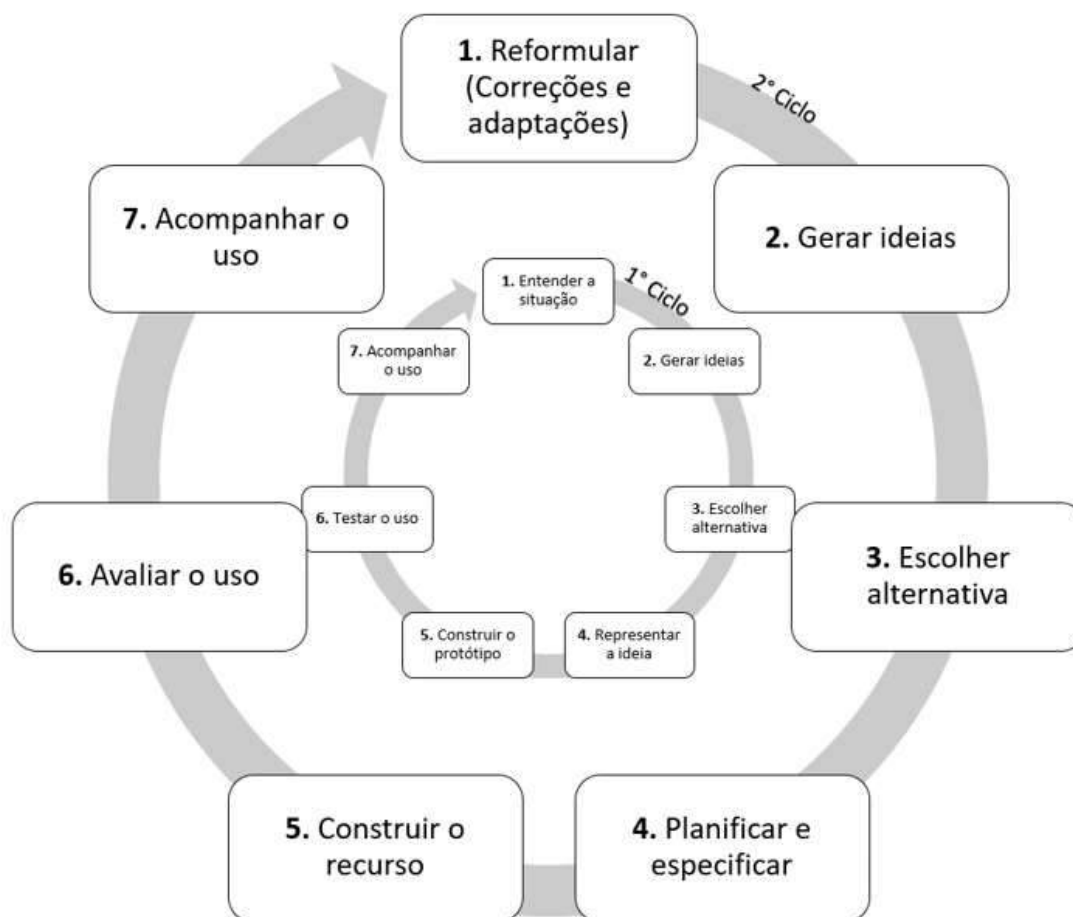


Figura 3. Ciclos e etapas seguidos para a criação dos aplicativos que serão explorados

Os aplicativos que serão explorados na oficina serão identificados como sendo um protótipo de aplicativo, isto é, um produto adquirido no primeiro ciclo do processo, ou como uma versão completa de aplicativo, ou seja, um aplicativo resultado do primeiro e segundo ciclo. Essa informação é importante, já que os participantes, no momento em que explorarem ambos, os protótipos de aplicativos e as versões completas de aplicativos, se ocuparão de uma investigação em grupo para responder um formulário no formato Check-List e que terá como proposta identificar como os princípios do DUA são ou não observados em cada aplicativo.

Terminaremos a primeira sessão com um compartilhar das observações de cada grupo de trabalho, contribuindo assim para a valorização das verificações que foram realizadas segundo as habilidades e competências já desenvolvidas pelos diferentes participantes da oficina.

Na segunda sessão, serão apresentados quatro roteiros de aprendizagem, sendo que cada roteiro tem como proposta principal transmitir instruções básicas sobre como utilizar o MIT App Inventor para a criação de aplicativos que, posteriormente, possam ser utilizados no ensino e na aprendizagem de matemática com uma perspectiva inclusiva.

Cada roteiro de aprendizagem é auto-instrutivo e mantém um nível de complexidade distinto tanto na linguagem utilizada para fornecer a instrução como nos tipos de aplicativos que propõe. Cada um dos participantes irá escolher um roteiro de aprendizagem, e utilizando os

computadores com acesso à internet, utilizarão o MIT App Inventor para a criação do aplicativo que é proposto no roteiro de aprendizagem selecionado.

A segunda sessão terminará com um compartilhar dos aplicativos criados e uma roda de conversa que terá como finalidade uma avaliação das atividades desenvolvidas durante a oficina, destacando os elementos positivos e negativos identificados pelos participantes.

Infraestrutura necessária para a realização da oficina

Os recursos a serem utilizados na realização das atividades propostas na oficina são computadores devidamente instalados, com acesso à internet e sistema operacional Windows atualizado. A disponibilização dos computadores, assim como também a quantidade suficiente de equipamentos, é efetivada pela instituição onde a oficina se desenvolverá. É necessário ainda que a instituição disponibilize os equipamentos preferencialmente em uma sala com um projetor audiovisual devidamente instalado para ser utilizados pelos proponentes.

Cada participante utilizará tanto os computadores com acesso à internet, como seus respectivos celulares para a realização das atividades propostas na oficina.

Agradecimentos

Agradecemos à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e à Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP) pelo apoio dado para o desenvolvimento da oficina aqui apresentada.

Referências

- Benton, L., Hoyles, C., Kalas, I., & Noss, R. (2016). Building mathematical knowledge with programming: insights from the scratchmaths Project. In: Constructionism in Action 2016: Conference Proceedings, (pp. 26-33). Suksapattana Foundation: Thung Khru, Thailand.
- Cioruta, B., Coman, M., & Cioruta, A. (2018). Using app inventor as tool for creating mathematics applications for mobile devices with Android OS. *Asian Journal of Research in Computer Science*, 2 (2), 1-11. [doi:10.9734/AJRCOS/2018/44283](https://doi.org/10.9734/AJRCOS/2018/44283)
- Elias, A. P. A. J., Rocha, F. S. M., & Motta, M. S. (2017). Construção de aplicativos para aulas de matemática no ensino médio. In: VII Congresso Internacional de Ensino da Matemática. Ulbra: Canoas, Rio Grande do Sul, Brasil. Recuperado de: <http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vii/paper/viewFile/6698/3059>
- Gökçe, S., Yenmez, A. A., & Özpinar, I. (2017). An analysis of mathematics educations students' skills in the processo f programming and their practices of integrating it into their teaching. *International Education Studies*, 10 (8), 60-76. [doi:10.5539/ies.v10n8p60](https://doi.org/10.5539/ies.v10n8p60)

- Good, J. (2011). Learners at the wheel: novice programming environments come of age. *International Journal of People-Oriented Programming*. 1 (1), 1-24. [doi:10.4018/ijpop.2011010101](https://doi.org/10.4018/ijpop.2011010101)
- Good, J. (2018). Novice programming environments: lowering the barriers, supporting the progression. In: Goschnick, S. (Ed.). *Innovative methods, user-friendly tools, coding, and design approaches in people-oriented programming*. Hershey, Estados Unidos. pp. 1-41. [doi:10.4018/978-1-5225-5969-6.ch001](https://doi.org/10.4018/978-1-5225-5969-6.ch001)
- Herro, D., McCune-Gardner, C., & Boyer, D. M. (2015). Perceptions of coding with MIT App Inventor: pathways for their future. *Journal for computing teachers. Journal for Computing Teachers winter 2015*. p. 30.
- Horn, M. B. (2015). *Blended: usando a inovação disruptiva para aprimorar a educação*. Porto Alegre: Penso.
- Jacques, L. A. (2017). *Using app inventor to explore low-achieving student's understanding of fractions*. Tesis de Doctorado no publicada, Clemson University. Carolina do Sul, Estados Unidos.
- Papert, S. (1980). *Mindstorms: children, computers and powerful ideas*. New York: Basic Books.
- Pokress, S. C., & Veiga, J. J. D. (2013). *MIT App Inventor: enabling personal mobile computing*. Recuperado de <https://arxiv.org/pdf/1310.2830.pdf>
- Prabowo, A., Rahmawati, U., & Anggoro, R. P. (2019). Android-based teaching material for statistics integrated with social media whatsapp. *International Journal on Emerging Mathematics Education*, 3 (1), 93-104. [doi:10.12928/ijeme.v3i1.11961](https://doi.org/10.12928/ijeme.v3i1.11961)
- Rose, D., Meyer, A., Strangman, N., & Rappolt, G. (2002). *Teaching every student in the digital age: universal design for learning*. Association for Supervision and Curriculum Development, Alexandria, VA.
- Souza, E. C. (2016). *Programação no ensino de matemática utilizando Processing 2: um estudo das relações formalizadas por alunos do ensino fundamental com baixo rendimento em matemática*. Tesis de Maestría no publicada, Universidade Estadual Paulista. Bauru, Brasil.

EDUCACIÓN FINANCIERA EN LA ESCUELA PRIMARIA

Celso Ribeiro Campos

Andréa Pavan Perin

crcampos@pucsp.br, andreapavanperin@gmail.com

Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil

Faculdade de Tecnologia de São Paulo, Brasil

Resumen

El objetivo de este taller es traer algunas actividades que promuevan una mejor comprensión de la importancia de la Educación Financiera (EF) en la escuela primaria y, al mismo tiempo, traer un conocimiento más específico sobre la educación financiera, que entendemos como fundamental para un aprendizaje efectivo de la EF. Con este fin, desarrollamos siete actividades que buscan profundizar el conocimiento sobre los conceptos de EF y alfabetización financiera, así como discutir ideas sobre cómo trabajar con niños actividades que involucren consumo y consumo, la importancia del ahorro, el concepto de inversión entre otros. También traemos una reflexión sobre la relación de la caridad con la EF, ya que lo discutimos desde el punto de vista de la religión. Nuestra expectativa es contribuir a aumentar el conocimiento sobre los conceptos de EF y permitir a los maestros trabajar con este tema en el aula.

Palabras clave: Educación financiera, alfabetización financiera, escuela básica, formación de maestros.

Introducción

La Educación Financiera (EF) se introdujo oficialmente en Brasil mediante la creación de la Estrategia Nacional para la Educación Financiera (ENEF) en 2010, siguiendo las recomendaciones de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE). La ENEF fue creada por el Banco Central de Brasil, en asociación con organizaciones reguladoras financieras, y resultó en la creación de una gran cantidad de material promocional que se distribuyó a las escuelas públicas primarias y secundarias. Recientemente, el desarrollo de una Base Curricular Nacional Común (BNCC) en Brasil ha hecho de la educación financiera un componente obligatorio para la escuela, siendo un tema transversal en la escuela secundaria y subyacente a las matemáticas en la escuela primaria.

Aunque ENEF ha producido material educativo para la educación financiera, hemos observado (COUTINHO & CAMPOS, 2018; CAMPOS, HESS & SENA, 2018; CAMPOS & COUTINHO, 2019) que el enfoque utilizado comprende un sesgo que llamamos de instrumental, que trata al ciudadano como consumidor de productos financieros. Esto se puede ver en la definición de educación financiera de la OCDE:

Proceso mediante el cual las personas y las sociedades mejoran su comprensión de los conceptos y productos financieros para que, con información, capacitación y orientación, puedan desarrollar los valores y las habilidades necesarias para ser más conscientes de las oportunidades y los riesgos dentro de ellos, para que puedan tomar decisiones informadas, saber a dónde acudir en busca de ayuda y tomar otras medidas para mejorar su bienestar (OECD, 2005, p. 26, nuestra traducción, nuestro destacado).

En nuestro entendimiento, la educación financiera debe verse en un contexto de educación para la ciudadanía, que presupone que se debe alentar a las personas a realizar y ejercer sus derechos y deberes en un sentido colectivo e individual, participando activamente en la vida en la sociedad, respetándose el otro, pero también exigiendo respeto mutuo. Así, este concepto de educación trasciende las limitaciones de las asignaturas escolares y se impone como un objetivo más grande y amplio, que se superpone incluso al tiempo, ya que puede y debe ser trabajado desde los niveles más básicos de la vida estudiantil.

Al mismo tiempo, este concepto se aproxima mucho a la idea de Educación Crítica, ya que defiende un entorno pedagógico democrático, que busca el desarrollo, en los estudiantes, de un espíritu crítico, responsabilidad ética y conciencia política.

Al llevar estas ideas al mundo de las finanzas personales, entendemos que la educación financiera es un esfuerzo pedagógico interdisciplinario que debe concienciar a las personas sobre la importancia de una gestión eficiente de sus presupuestos individuales y familiares para advertir sobre las consecuencias del consumismo, publicidad engañosa de productos y servicios, trampas del sistema financiero impuestas por bancos que practican tasas de interés muy altas en préstamos, de las graves consecuencias del sobreendeudamiento y la morosidad que permanecen en niveles altos a lo largo del tiempo, principalmente dañando a las clases sociales más vulnerables, etc.

A través de este razonamiento, vemos que la Educación Financiera trasciende las Matemáticas Financieras, porque no se trata solo de hacer cálculos de cuotas e intereses, sino principalmente de advertir sobre las consecuencias de la mala administración del dinero, a fin de utilizar el conocimiento para promover la alfabetización financiera en un contexto que concierne al aspecto crítico de la Educación Financiera:

Este aspecto asume supuestos de educación crítica, que están presentes en nuestra comprensión de la educación financiera, que esencialmente defiende una postura de valorar la conciencia social y política presente en el conocimiento matemático, particularmente aquellos vinculados a las matemáticas financieras que a su vez conciernen a la educación financiera (CAMPOS & COUTINHO, 2019, p. 68).

El objetivo de este taller es traer algunas actividades que promuevan una mejor comprensión de la importancia de la EF en la escuela primaria. a la vez que brindan un conocimiento más

específico sobre educación financiera, que entendemos que es fundamental para el aprendizaje efectivo de la EF.

Todos estos puntos de vista sobre la esencia de la EF pueden y deben discutirse con los maestros, por lo que proponemos una pregunta como la primera actividad de este taller:

1) ¿Qué es la educación financiera?

El propósito de esta pregunta es observar la comprensión de los docentes y discutir con ellos las diferencias entre sus concepciones, comparándolas con la definición de la OCDE y la nuestra, aprovechando la oportunidad para presentar también el concepto de alfabetización financiera.

La EF em la escuela básica

La educación básica en Brasil se divide en tres partes o ciclos: la escuela primaria, que dura nueve años y comprende los dos primeros ciclos (primeros y últimos años), y la secundaria, que dura tres años y corresponde al tercer ciclo, como se muestra en la figura 1.

Ciclos	Años	Edades correspondientes
Años iniciales de la Escuela Primaria	1º año	6 años
	2º año	7 años
	3º año	8 años
	4º año	9 años
	5º año	10 años
Años finales de la Escuela Primaria	6º año	11 años
	7º año	12 años
	8º año	13 años
	9º año	14 años
Escuela secundaria	1º año	15 años
	2º año	16 años
	3º año	17 años

Figura 1: Organización de la educación básica en Brasil

Con una gama tan amplia de grados y edades, hay muchas posibilidades para cubrir y profundizar la EF dentro de la escuela. Nuestra segunda actividad consiste en una posibilidad de insertar actitudes relacionadas con la diferencia entre consumir en el presente y en el futuro. Para esto, ofrecemos a los estudiantes (que son o serán maestros) un pequeño caramelo hecho de chocolate.



Figura 2: Caramelo de chocolate

Este dulce es parte de la segunda actividad:

2) El caramelo es tuyo y puedes comerlo cuando quieras. Sin embargo, si espera hasta el final de la clase para consumir, ganará una unidad más.

El propósito de esta actividad es mostrar cómo llevar al niño la idea de que la paciencia es una virtud y que será recompensada si puede controlar su impulso al consumo. El consumo y el consumismo son conceptos importantes para la EF.

Conceptos de economía

Algunos conceptos de la economía son importantes para EF, por ejemplo, los relacionados con la escasez, el costo de oportunidad, el ahorro y otros.

La Figura 3 muestra una publicación en una red social de un profesor brasileño de economía sobre el enfoque de los conceptos económicos en la escuela primaria de los Estados Unidos.

Samy Dana
27 de setembro às 23:26 · 🌐

Crianças de 7 e 8 anos na escola pública aqui nls EUA aprendem economia, tem até conceito de custo de oportunidade.

Two groups rely on each other to meet their needs.	
People must make choices about what they buy and use because they cannot have everything.	
The thing you give up to get what you want.	
When a producer focuses on making one product or providing one kind of service	
When we do not have enough of what we want or need	
Keeping money, or not spending it, so you have it later when you need it.	

Figura 3: Conceptos de Economía. Fuente: Facebook (post publico)

En el cuadro presentado en la figura 3, eliminamos las palabras de la columna derecha para que los maestros puedan discutir qué concepto está involucrado en la tercera actividad:

3) ¿Cuáles son los conceptos de economía involucrados en la imagen de la figura 3?

En esta actividad podemos trabajar con la idea de que no podemos tener todo lo que queremos, que el valor de algo viene dado por lo que renuncias para que puedas obtenerlo y que es importante ahorrar dinero para usarlo cuando lo necesites.

¿Pueden los niños aprender a invertir?

Creemos que desde el primer ciclo de la escuela primaria los niños pueden aprender a valorar el dinero, comprender que el dinero es el resultado del trabajo y que la prudencia financiera puede traer recompensas. Pero ¿cómo podrían transmitirse estos conceptos a los niños? En la figura 4, mostramos un comentario hecho en la publicación que se muestra en la figura 3 (se omitió al autor), que dirige la actividad 4 de este breve curso.

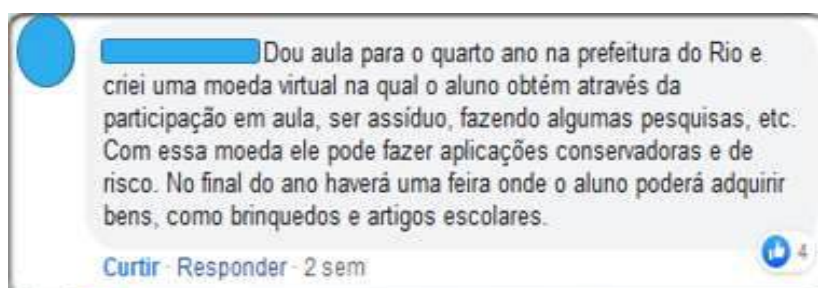


Figura 4: La idea de moneda virtual

Temas relacionados con las monedas virtuales han sido cada vez más comunes en los medios generales, especialmente cuando se trata de economía o finanzas. Con base en la figura 4, elaboramos la cuarta actividad de este taller:

4) ¿Cómo crees que es posible hacerlo viable una moneda virtual en el aula? ¿Qué criterio adoptarías para que los estudiantes extraigan estas monedas? ¿Qué tipo de producto/servicio podría comprarle? ¿Qué tipos de aplicaciones financieras podrían simularse con estas monedas?

En esta actividad, instamos a los profesores a pensar en la creación de una moneda virtual, que los alumnos puedan obtener a través de algunos criterios que podrían definirse conjuntamente por profesores y alumnos. Además, suponemos que sería posible simular inversiones para estas monedas, en lo que podría presentarse el concepto de riesgo. Por lo más, podemos discutir con los maestros cómo se podrían usar esas monedas para el consumo.

¿Cómo pueden los niños aprender a ahorrar?

Existe la tradición de recolectar monedas en una hucha o cerdito, que se pueden utilizar para su posterior consumo o ahorro. Algunos experimentos informales que hemos realizado han demostrado que este hábito de recolectar monedas es más efectivo cuando usamos un frasco de vidrio transparente, lo que le permite al niño ver la cantidad de monedas creciendo cuando las inserta en el frasco.



Figura 5: Niña de 11 años separa y cuenta monedas ahorradas en el frasco de vidrio transparente y hace la contabilidad del valor

Fuente: archivo personal de los autores

Una educadora brasileña realiza un modo similar de estimular el ahorro en las redes sociales, que mostramos en la Figura 6, con la identificación bloqueada.

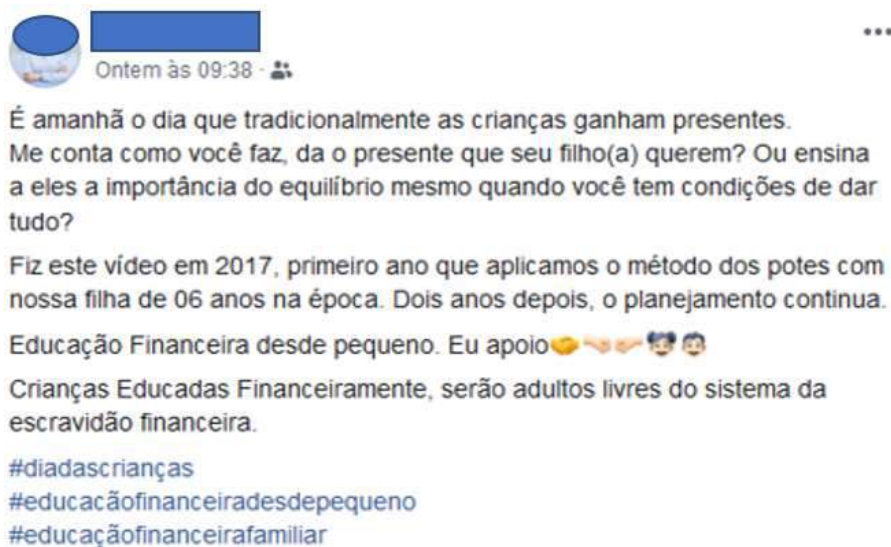


Figura 6: Post en red social a respecto de la educación financiera para niños

En este post la maestra se refiere a un video en el que explica que le enseña a su hija a dividir su asignación en tres recipientes: el primero es para ahorrar, el segundo es para consumir y el tercero es para dar (caridad). En este contexto, elaboramos la actividad 5.

5) ¿Donar/hacer caridad es practicar educación financiera? Justifica tu respuesta.

El propósito de esta pregunta es provocar una reflexión y contrarrestar la idea de recaudar dinero para ahorrar y hacer caridad. El debate de caridad servirá para presentar la próxima actividad.

EF vs. religión

Muchas religiones predicán la caridad como una virtud a ser alentada. Sin embargo, las religiones cristianas a menudo defienden la idea de desapego de los bienes materiales y desapego del dinero. En base a esto, hemos formulado una pregunta para fomentar el debate a este respecto:

6) ¿Es la educación financiera compatible con las religiones?

En el siglo XIII, Santo Tomás de Aquino publicó la *Summa Theologiae*, que detalla los siete pecados capitales, incluida la avaricia, que corresponde a la codicia, el apego excesivo al dinero y las posesiones materiales, el miedo de su falta en el futuro. El contrapunto a la codicia es la caridad, por lo que la importancia de colocar la caridad en el contexto de la EF.

Por otro lado, la parábola de los talentos presentada en la Biblia en los evangelios de Mateo 25:14-30 y Lucas 19:12-27 sugiere que el dinero no debe detenerse, que el dinero debe invertirse para generar más recursos, que los inversores audaces son recompensados. Sin embargo, la historia se cuenta en sentido figurado, como cada parábola, lo que indica que un talento recibido debe ser utilizado y compartido, no guardado.

La alfabetización financiera

Varios autores se ocuparon de la alfabetización financiera, como Orton (2007), Huston (2010), Teixeira (2015) y Sena (2017), entre otros. La comprensión de la alfabetización financiera presentada en Coutinho y Campos (2018) parece ser la más apropiada para nuestra investigación.

- (i) Comprender el funcionamiento básico del mercado financiero y cómo las tasas de interés afectan la vida financiera de los ciudadanos, para bien o para mal, considerando que las personas generalmente no son muy conscientes de cuánto cuesta realmente la tasa de interés.
- (ii) Practicar el consumo consciente, conociendo y evitando el consumismo compulsivo. La educación financiera puede ayudar a los consumidores no solo en sus presupuestos, ahorros e inversiones, sino también en el control de los impulsos asociados con el consumismo compulsivo, desarrollando un consumo consciente asociado con la calidad de los bienes y servicios, los impactos ambientales, etc.
- (iii) Poder aprovechar las oportunidades de financiamiento disponibles.
- (iv) Usar el crédito consciente y sabiamente, buscando evitar el sobreendeudamiento. En otras palabras, esto significa aprender cómo usar los créditos y cómo maximizar los beneficios del acceso a la financiación.
- (v) Comprender la importancia y los beneficios de la planificación y supervisión del presupuesto personal y familiar.

- (vi) Comprender el papel del ahorro como medio para llevar a cabo proyectos y perseguir objetivos personales.
- (vii) Ayudar a difundir buenas prácticas financieras entre familiares y amigos.
- (viii) Desarrollar una cultura de prevención, es decir, planificar el futuro teniendo en cuenta los percances que pueden ocurrir.
- (ix) Ser capaz de organizarse y mantener una buena gestión financiera personal.
- (x) Hacer un plan de jubilación considerando que la esperanza de vida ha aumentado y las personas pasan más tiempo jubiladas (COUTINHO & CAMPOS, 2018, p. 172-173).

La conciencia de la alfabetización financiera nos lleva a la última actividad de este taller:

7) ¿Las preguntas presentadas en este taller ayudan a promover la alfabetización financiera?

El propósito de esta pregunta es cerrar las actividades desde el punto de vista de la alfabetización financiera, discutiendo qué puntos o características de esta alfabetización fueran cubiertos por las actividades.

Consideraciones finales

Asumimos como objetivo de este taller promover una mejor comprensión de la importancia de la EF en la escuela primaria, así como brindar un conocimiento más profundo sobre educación financiera para los maestros. Nuestras actividades se desarrollaron para este propósito, además de presentar a los maestros ejemplos de posibilidades para desarrollar conocimientos básicos de EF con los estudiantes. Se abordaron temas importantes como el consumo y el ahorro en diversas actividades, así como la conciencia de la importancia del dinero y las actitudes que se deben fomentar en los niños. Además, buscamos mostrar algunos conceptos de economía que nos ayudan a comprender mejor el contexto y la importancia de la EF en la vida de todos. También discutimos actividades de clase para simular situaciones de ahorro, inversión y consumo que se pueden practicar incluso en los primeros años de la escuela primaria.

Otro aspecto que abordamos fue el vínculo entre la EF y la religión y propusimos una reflexión sobre las enseñanzas cristianas relacionadas con el dinero, discutiendo temas sensibles para los más religiosos.

Finalmente, trajimos el concepto de alfabetización financiera para discutir con los maestros los aspectos que se cubrieron en las actividades. Entre los elementos enumerados en referencia a la educación financiera, las actividades brindaron la oportunidad de analizar el consumo y el consumismo, los beneficios del ahorro y la inversión, la cultura de la gestión financiera, la planificación, etc.

Entendemos que a medida que los maestros se den cuenta de la importancia de la EF, conozcan sus conceptos principales y comprendan cómo ocurre la alfabetización financiera, no solo podrán usar algunas actividades propuestas en su trabajo diario, sino que también crear otras actividades apropiadas para los niveles de educación en los que operan.

Referencias

- Campos, C. R. & Coutinho, C. Q. S. (2019). O juro real no contexto da educação financeira crítica. *Tangram – Revista de Educação Matemática*, Dourados, v. 2, n. 2, 67-86.
- Campos, C. R., Hess, A. & Sena, R. M. (2018). Teaching financial mathematics through a critical approach in a university environment. In Jurdak, M.; Vithal, R. (ed.). *Sociopolitical dimensions of mathematics education: from the margin to mainstream*. 1ª ed. Cham, Switzerland: Springer International, 113-132.
- Coutinho, C. Q. S. & Campos, C. R. (2018). Perspectivas em didática e educação estatística e financeira: reflexões sobre convergências entre letramento matemático, matemacia, letramento estatístico e letramento financeiro. In: OLIVEIRA, G. P. (org.). *Educação matemática: epistemologia, didática e tecnologia*. Campinas: Livraria da Física, 143-180
- Houston, S. (2010). Measuring financial literacy. *Journal of Consumer Affairs*, 44 (Summer), 296-316.
- OECD. (2005). *Improving Financial Literacy: Analysis of Issues and Policies*. Paris: Secretary-General of the OECD.
- Orton, L. (2007). *Financial Literacy: Lessons from international experience*. Canadian Policy Research Network - CPRN Research Report (September).
- Sena, F. D. L. (2017). *Educação financeira e estatística: estudo de estruturas de letramento e pensamento*. Disertación (maestría en Educación Matemática). São Paulo: PUC-SP.
- Teixeira, J. (2015). *Um estudo diagnóstico sobre a percepção da relação entre educação financeira e matemática financeira*. Tesis (doctorado en Educación Matemática). São Paulo: PUC-SP.

VIGILANCIA EPISTEMOLÓGICA DE FORMA Y MEDIDA EN GEOMETRÍA

Victor Barrial Sandoval

vbarrialsandoval@gmail.com

Universidad Nacional del Callao, Perú

Resumen

El presente taller tiene como objetivo analizar las dificultades que presentan los docentes del nivel escolar cuando realizan actividades de aprendizaje sobre la semejanza en la geometría euclidiana, abordaremos dos conceptos importantes de fundamentos matemáticos: Las figuras semejantes y las figuras congruentes aplicadas a triángulos, curvas, polígonos y algunos sólidos. Los docentes participantes podrán generalizar formalmente la definición de semejanza y congruencia la cual en forma tradicional solo la tenemos definida para triángulos. Esta forma tradicional es la que se emplea del Libro VI de los Elementos de Euclides. En el taller partimos de la demostración de la semejanza de segmentos, de cuadrados, de circunferencias y de algunos sólidos. Tomando algunas actividades del libro de Lages (2001) y resolveremos ejercicios de olimpiadas ONEM e Internacionales. Al concluir esperamos que la noción de Semejanza y Congruencia se aplicada de una forma más universal en las aulas de matemática.

Palabras clave: semejanza, congruencia, demostración, didáctica.

Introducción

En experiencias anteriores durante el desarrollo de los cursos de capacitación que se desarrolló en la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática (FCNM) de la Universidad Nacional del Callao (UNAC) en Convenio con la Dirección Regional de Educación del Callao (DREC), se ha podido constatar que no siempre los docentes participantes son conscientes que entre la matemática y la versión didáctica de la matemática hay una distancia, muchas veces enorme, y que inclusive, la evolución vertiginosa de la matemática académica, frecuentemente, no se toma en cuenta en su versión didáctica, entonces frente a esta situación se propone realizar un trabajo basado en demostraciones y definiciones formales en el tema de semejanza y congruencia de figuras planas, partiendo de esta experiencia vamos a realizar una "Vigilancia Epistemológica de Forma y Medida en Geometría", el cual es el título de nuestro taller. Analizando esta situación, vamos a comparar la diferencia entre la definición de Euclides que data desde hace más de 2300 años en su obra los Elementos de Euclides, en su libro VI, donde comienza con la siguiente definición:

"Figuras rectilíneas semejantes son aquellas cuyos ángulos son iguales y los lados que comprenden ángulos iguales son proporcionales".

En el libro XI, donde comienza a ser estudiada la geometría del espacio ocurre una nueva definición: *“se llaman figuras sólidas semejantes a las figuras limitadas por un número igual de figuras planas semejantes”*. (Lages, 2001).

En virtud del desarrollo de la matemática presentaremos una definición más formal y adecuada del tópico de semejanza del libro de Verástegui (2012).

Objetivos del taller

El presente taller denominado: “Vigilancia Epistemológica de Forma y Medida en Geometría” es una capacitación docente para la especialización de docentes en el uso de los principios matemáticos de la geometría, evidenciando el lenguaje matemático idóneo para su construcción y formulación de estrategias didácticas en los problemas de construcción.

Objetivo general:

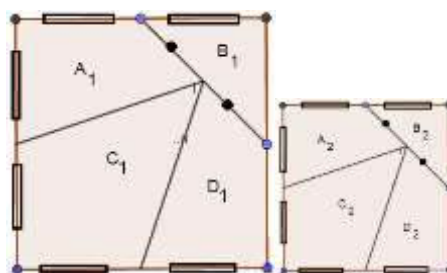
- Capacitar docentes de matemáticas en las principales herramientas matemáticas para el análisis de la semejanza y la congruencia de figuras geométricas.

Objetivos específicos:

- Analizar y comparar la definición de Euclides para la semejanza y la definición moderna.
- Dar argumento matemático a muchas ideas intuitivas de semejanza tales como: “Dos figuras son semejantes si tienen la misma forma, pero distinto tamaño”.
- Demostrar teoremas fundamentales a partir de la definición de semejanza.
- Dar herramientas de construcción para la resolución de ejercicios en congruencia de triángulos.

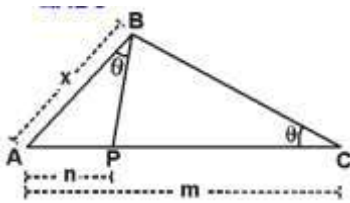
Diseño e implementación del taller:

1. A partir de dos hojas en forma de cuadrado de lados de distinta medida, vamos a generar polígonos semejantes y congruentes, además de los polígonos semejantes vamos a calcular la constante de proporcionalidad.



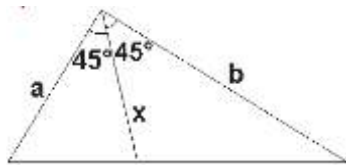
2. Vamos revisar la definición clásica de Euclides para la semejanza de figuras planas y aplicadas a triángulos.
3. Demostraremos algunos teoremas donde se usa semejanza de triángulos.

3.1. En la figura mostrada $\overline{BP}$ es ceviana interior, si la $m\angle ABP = m\angle ACB$.



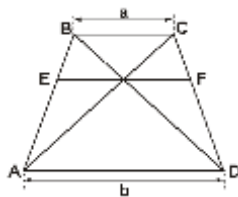
Se cumple: $x^2 = m \cdot n$

3.3. En la figura. Mostrada



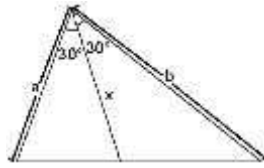
Se cumple: $\frac{\sqrt{2}}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

3.5. En un trapecio, si por el punto de intersección de las diagonales se traza una paralela a las bases, $\overline{EF} \parallel \overline{BC} \parallel \overline{AD}$



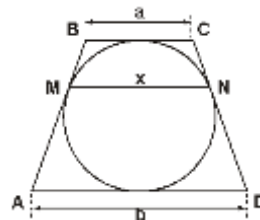
3.6. Se cumple: $\frac{2}{EF} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

3.2. En la figura. Mostrada



Se cumple: $\frac{\sqrt{3}}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

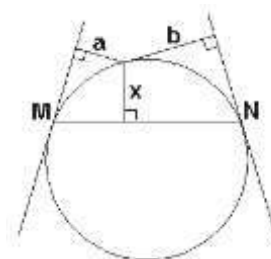
3.4. En todo trapecio isósceles circunscrito a una circunferencia cuyas bases miden a y b. M, N puntos de tangencia



Se cumple: $\frac{2}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

3.7. **Teorema de PAPUSS:** El cuadrado de la distancia de un punto del arco de una circunferencia a su cuerda correspondiente es igual al producto de las distancias de dicho punto a las tangentes trazadas por los extremos de la cuerda.

Si M y N son puntos de tangencia



Se cumple: $x^2 = a \cdot b$

4. Daremos paso a la definición matemática moderna de semejanza:

Sean F y F' figuras, del plano o del espacio, y r un número real positivo.

Se dice que F y F' son semejantes, con razón de semejanza r, cuando existe una correspondencia biyectiva $\sigma: F \rightarrow F'$, entre los puntos de F y los puntos de F' , con la siguiente propiedad:

Si X, Y son puntos arbitrarios de F y $X' = \sigma(X), Y' = \sigma(Y)$ son sus correspondientes en F' entonces: $(X'Y') = r(XY)$

La correspondencia biyectiva de $\sigma: F \rightarrow F'$, con esta propiedad de multiplicar la distancia por un factor constante r , se llama semejanza de razón r entre F y F' . Si $X' = \sigma(X)$, se dice que los puntos X y X' son homólogos.

5. Usando la definición de semejanza, mostraremos la definición formal de figuras congruentes:

Una semejanza de razón 1 se llama isometría. Por lo tanto, una isometría

$\sigma: F \rightarrow F'$ Es una correspondencia biyectiva tal que, para puntos cualesquiera X, Y en F , la distancia de $X' = \sigma(X)$ a $Y' = \sigma(Y)$ es igual a la distancia de X a Y .

Cuando existe una isometría entre dos figuras F y F' se dicen que son congruentes.

La congruencia entre dos objetos geométricos se sustenta en la definición de la medida de segmentos, de modo que tomados dos puntos de un objeto si se toman los puntos correspondientes a estos en el otro objeto, y estos tienen la misma medida, y esto se cumple para cualquier par de puntos, entonces, los dos objetos son congruentes. (Jara, 2015)

6. Usando la definición formal de semejanza demostraremos los siguientes teoremas:

6.1. Dos segmentos de recta dados son semejantes (de la misma manera se prueba que dos semirectas cualesquiera son semejantes)

6.2. Toda semejanza transforma puntos colineales en puntos colineales.

6.3. Dado una semejanza $\sigma: F \rightarrow F'$, de razón r , transforma:

A) Todo segmento de recta contenido en F en un segmento de recta contenido en F'

B) Un círculo de radio a contenido en F en un círculo de radio $r.a$ contenido en F'

C) Puntos interiores a F en puntos interiores a F'

D) Puntos de contorno de F en puntos de contorno de F'

6.4. Mostraremos algunos criterios de construcción para resolver ejercicios de congruencia de triángulos. Formaremos grupos de 4 o 5 personas para analizar los ejercicios propuestos en las fichas.

6.5. Mostraremos a los profesores asistentes ejercicios de congruencia de triángulos y de semejanza de triángulos que se hallan evaluado en olimpiadas matemáticas de ONEM u olimpiadas internacionales. Formaremos grupos de 4 o 5 personas para analizar los problemas de olimpiadas matemáticas:

La primera sesión del taller abordará los partes 1, 2 y 3; la segunda sesión abordará la parte 4, 5 y 6.

Resultados esperados: En el presente taller, se espera que los docentes participantes logren utilizar las técnicas de construcción para resolver problemas complejos de congruencia de triángulos y le sirva como un apoyo en sus clases de matemáticas porque

Razonar en geometría es razonar con figuras mal hechas (Hilbert, 1899)

La geometría es el arte de pensar bien y dibujar mal (Poincare, 1879)

Esperamos que, al culminar el taller, los docentes:

- Logren comprender la naturaleza matemática de la semejanza y congruencia de figuras geométricas.
- Comprendan la diferencia entre postulados, definiciones y teoremas.
- Reconozcan los criterios de construcción para la resolución de ejercicios en triángulos congruentes.
- Que noten con naturaleza la diferencia entre congruencia e igualdad de las figuras geométricas.
- Se motiven a investigar mayor cantidad de ejercicios de olimpiadas matemáticas y puedan mostrarlo a sus estudiantes en su práctica docente.

Consideraciones finales

El Ministerio de Educación (Minedu, 2016) de nuestro país nos propone como guía de nuestras actividades educativas al Currículo Nacional de la Educación Básica, en los estándares de aprendizaje, competencias, capacidades y desempeños del área de matemática para quinto de secundaria, en el cual la competencia resuelve problemas de forma, movimiento y localización en una de sus capacidades: modela objetos con formas geométricas y sus transformaciones, propone que el estudiante debe ser capaz de:

Construir un modelo que reproduzca las características de los objetos (Semejanza de figuras), su localización y movimiento, mediante formas geométricas, sus elementos y propiedades; la ubicación y transformaciones en el plano.

Ante esta propuesta, los docentes deben capacitarse para cumplir de forma efectiva esta competencia y para lograr ser docente especialista en el área, un requisito fundamental para ser docente del siglo XXI.

Referencias

Verástegui T. I. (2012). *Geometría básica* (2a ed.), MOSHERA S.R.L. 2012.

Lages E. (2001). *Medida y Forma en Geometría*, HOZLO S. R. L. 2001.

Minedu (2016). Currículo Nacional de la Educación Básica. Recuperado de: <http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-2016.pdf>

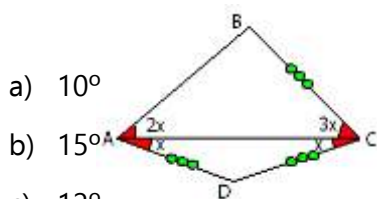
Jara, R. (2015). Análisis de los diferentes significados de la igualdad en el contexto de la geometría euclidiana en el nivel secundaria – 2015 (Tesis de maestría). Pontificia universidad católica del Perú, Lima, Perú. Recuperado de: http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/bitstream/handle/20.500.12404/6752/JARA_SANCHEZ_RUBEN_ANALISIS.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Anexos

- ✓ **Recursos:** Proyector, Ecran, Pizarra, Tizas de colores, Mota, Hojas de colores, Hojas blancas, Reglas, Fichas de ejercicios.

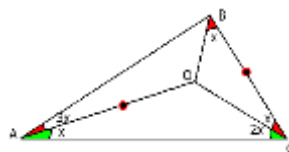
A continuación, se presenta una ficha de ejercicios de gran importancia para el tratado de los problemas.

1. Del gráfico mostrado, calcula: "x"



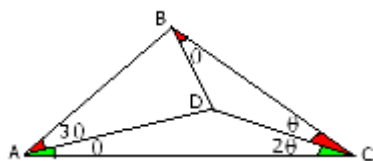
- a) 10°
- b) 15°
- c) 12°
- d) 20°
- e) 25°

2. De la figura mostrada, calcula "x" si $AO=BC$.



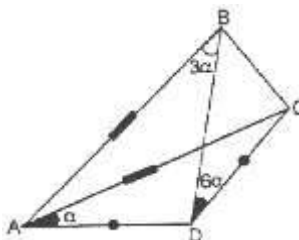
- a) 5°
- b) 10°
- c) 15°
- d) 20°
- e) 30°

3. En la figura: $AD=BC$. Calcular " θ ".



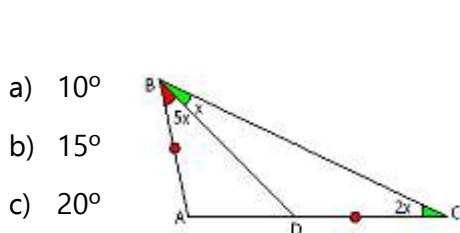
- a) 10°
- b) 15°
- c) 20°
- d) 30°
- e) $22,5^\circ$

4. De la figura, calcula: " α ", si $AB=AC$ y $AD=DC$.



- a) 10°
- b) 15°
- c) 20°
- d) 30°
- e) 37°

5. Del gráfico mostrado, calcula: "x"



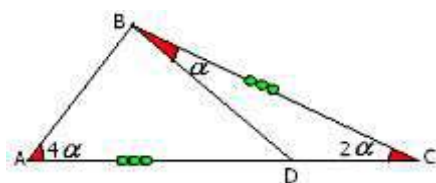
- a) 10°
- b) 15°
- c) 20°
- d) 5°
- e) 15°

6. De la figura mostrada, calcula " α "



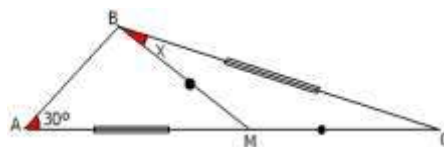
- a) 20°
- b) 10°
- c) 15°
- d) 18°
- e) 5°

7. Del gráfico mostrado, calcula: " α "



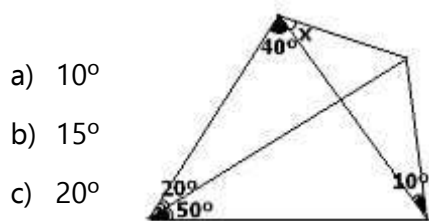
- a) 5° b) 10° c) 15°
d) 20° e) 30°

8. De la figura, calcula " x " si $AM=BC$ y $BM=MC$



- a) 20° b) 30° c) 50°
d) 45° e) 60°

9. Del gráfico, calcular " x "

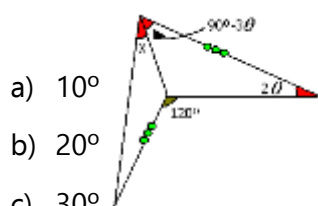


- a) 10°
b) 15°
c) 20°
d) 30°
e) 36°

10. En un triángulo ABC isósceles ($AB=BC$) se traza la ceviana $\overline{AF}$ tal que $BF=AC$. Si la $m\angle ABC=20^\circ$ entonces ¿cuál es la $m\angle BAF$?

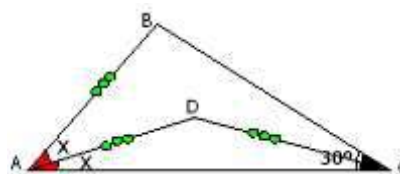
- a) 5° b) 10° c) 15°
d) 20° e) 30°

11. Del gráfico, calcula: " x "



- a) 10°
b) 20°
c) 30°
d) θ
e) 2θ

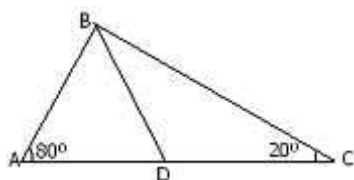
12. Del gráfico, calcula: " x "



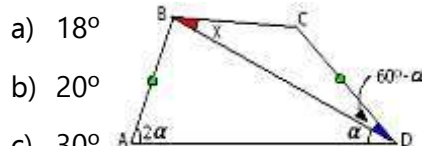
- a) 22° b) 12° c) 15°
d) 20° e) 30°

13. Del gráfico, calcula la $m\angle CBD$, si $AB=CD$

- a) 5°
b) 10°
c) 15°
d) 20°
e) 30°



14. Del gráfico, calcula: " x "



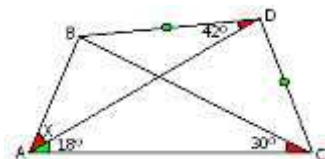
- a) 18°
b) 20°
c) 30°
d) 37°
e) 45°

15. En un triángulo ABC, $m\angle BAC = 30^\circ$, $m\angle BCA = 15^\circ$. Se toma un punto "P" exterior y relativo a $\overline{BC}$ tal que $PC = AB$ y $m\angle BCP = 45^\circ$. Calcula la $m\angle PBC$.

- a) 15° b) 18° c) $22^\circ 30'$
d) 30° e) 40°

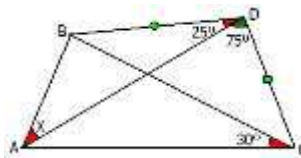
17. De la figura mostrada, calcula: "X"

- a) 15°
b) 22°
c) 28°
d) 30°
e) 36°



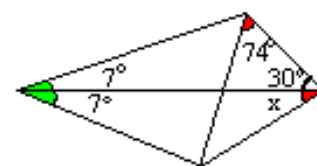
16. Del gráfico, calcula: "x"

- a) 18°
b) 20°
c) 25°
d) 30°
e) 45°



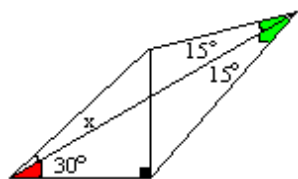
18. De la figura mostrada, calcula: "x"

- a) 20°
b) 23°
c) 35°
d) 45°
e) 37°



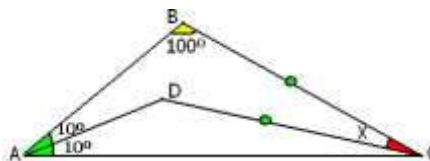
19. Del gráfico mostrado, calcula: "x"

- a) 53°
b) 23°
c) 35°
d) 15°
e) 37°



20. Del gráfico mostrado, calcula: "x"

- a) 10° b) 20° c) 30°
d) 40° e) 60°

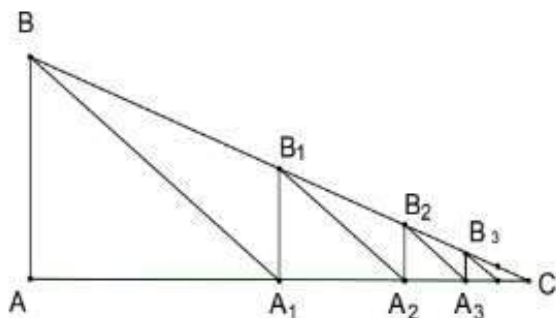


Problemas de olimpiadas:

ONEN 2006 fase 2 – nivel 3

En el diagrama, ABC es un triángulo rectángulo con catetos $AB=3$ cm y $AC=8$ cm. A_1 es punto medio de AC y los segmentos $BA_1, B_1A_2, B_2A_3, \dots, B_8A_9$ son paralelos entre sí. Además los segmentos $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_9B_9$ son perpendiculares a AC. Encuentra el valor de:

$$2^9(BA_1 + B_1A_2 + \dots + B_8A_9)$$



ONEN 2007 fase 1 – Nivel 2

En el interior de un triángulo ABC se toma el punto E tal que $AE=BE$ y $AB=EC$. Si $m\angle ABE = x = m\angle ECA$; $m\angle EAC = 2x$ y $m\angle EBC = 5x$, calcula el valor de x.

- A) 10° B) 12° C) 15°
D) 18° E) 20°

ONEN 2007 fase 2 – nivel 3

Las longitudes de los lados de un triángulo ABC son $AB=7$, $BC=9$ y $AC=12$. $\vec{L_1}$ es la bisectriz interior del ángulo A y $\vec{L_2}$ la bisectriz exterior del ángulo C. M y N son los pies de las perpendiculares trazadas desde B a $\vec{L_1}$ y $\vec{L_2}$ respectivamente. Calcula la longitud de MN.

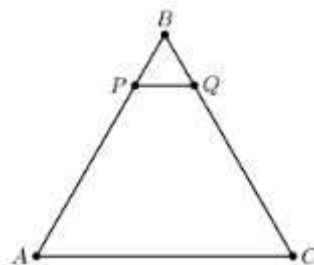
- A) 2 B) 5 C) 7 D) 8 E) 14

ONEN 2017 fase 3 – nivel 2

En un cuadrilátero ABCD se cumple que $m\angle BAD = 60^\circ$, $m\angle ABC = 100^\circ$, $AB=BC$ y $AD=BC+CD$. Calcule la medida del ángulo $\angle ACD$

ONEN 2018 fase 2 – nivel 2

En la figura mostrada, ABC es un triángulo equilátero de perímetro 90 cm. Además, los segmentos PQ y AC son paralelos. Calcule la suma de los perímetros de los polígonos PBQ y APQC en cm), si se sabe que estos números están en la relación de 3 a 14



Internacionales

(Canarias, 2003)

Las alturas del triángulo ABC se cortan en el punto H. Se sabe que $AB = CH$. Determinar el valor del ángulo BCA.

(Rumania 1968)

Demuestra que solo existe un triángulo cuyos lados vienen dados por tres enteros positivos consecutivos y un ángulo es dos veces otro ángulo.

Links:

1. <https://www.ugr.es/~anillos/textos/pdf/2014/Geometria3.pdf>
2. <http://www.unicauca.edu.co/eventos/index.php/educoloquio/2016/paper/viewFile/396/213>
3. <https://onemperu.wordpress.com/pruebas/>

VISUALIZACIÓN DE CUADRILÁTEROS: MEDIACIÓN DEL SOFTWARE GEOGEBRA

Cecilia Gómez Mendoza*

Flor Isabel Carrillo Lara**

Rocío Figueroa Vera**

Gustavo Rodríguez T.***

cegomez@villacaritas.edu.pe, f.carrillo@pucp.edu.pe, rfigueroa@villacaritas.edu.pe,
gustavo.rodriguez@stgeorges.edu.pe

Colegio Villa Caritas, Perú*

Instituto de Investigación sobre Enseñanza de la Matemáticas, IREM-PUCP, Perú**

Saint George College, Perú***

Resumen

El taller tiene como objetivo desarrollar el proceso de visualización a partir del estudio de cuadriláteros en el registro figural dinámico, en la formación de profesores del nivel secundario y superior. Como marco teórico utilizamos la Teoría de Registros de Representación Semiótica, focalizando nuestro interés en los tratamientos en el registro figural. El desarrollo del taller seguirá la siguiente metodología de trabajo: construyen cuadriláteros empleando GeoGebra, mediante el uso de la función "arrastre" observan y analizan su configuración y propiedades, y lo expresan empleando el lenguaje verbal y/o simbólico. Se espera que los participantes desarrollen y coordinen su aprehensión perceptiva y operatoria empleando para ello, diferentes tratamientos en el registro figural dinámico, con ayuda del ambiente de geometría dinámica (AGD) GeoGebra.

Palabras clave: Visualización, cuadriláteros, reconfiguración, GeoGebra.

Introducción

A partir de las dificultades y errores que observamos en los estudiantes cuando desarrollan problemas de Geometría, surge nuestro interés en diseñar actividades con el fin de desarrollar el proceso de visualización, en el estudio de cuadriláteros, cuando se utiliza el registro figural dinámico en un grupo de profesores de educación secundaria, ya que son ellos los que van a trabajar directamente con los estudiantes, presentar el contenido y diseñar sus estrategias de enseñanza. Nos basamos en la Teoría de Registro de Representación Semiótica y su ampliación a la visualización de Duval (2011). En ese sentido, el autor afirma que la deconstrucción dimensional constituye el proceso central de la visualización en geometría que se da con el desarrollo de la aprehensión perceptiva y operatoria, en el registro figural en coordinación con la aprehensión discursiva.

En esa misma línea de pensamiento, las investigaciones realizadas en el área de Educación Matemática en Geometría por Almeida (2007), Flores y Moretti (2006) y Salazar (2018) muestran que existe la necesidad de desarrollar en los sujetos habilidades visuales que les

permitan ver en una representación la forma y posición, a fin de que pueda descomponer una figura en subfiguras para luego asociarlas. Según los autores, la falta de estas habilidades origina errores en la resolución de problemas de geometría; además, propician interferencias entre el objeto matemático y su representación; es decir, se da mayor importancia a lo visual que a lo conceptual. Con respecto a la influencia de los ambientes de geometría dinámica (AGD), Laborde (1994) y Larios (2006) señalan que su empleo influye en la lectura espacial del objeto geométrico representado; es decir, facilita la identificación de todas las propiedades del objeto. Además, Salazar (2009), Vara y Salazar (2018) afirman que una de las funciones que caracteriza a estos ambientes es la función "arrastre", cuyo uso proporciona diferentes posiciones y configuraciones de una misma figura, además de permitir realizar tratamientos de manera diferente a los que se efectúan en ambientes no dinámicos, a partir de ello, la autora define el registro figural dinámico.

Por todo lo expuesto, en este taller proponemos dos actividades: la primera sobre paralelogramos y la segunda sobre configuraciones y reconfiguraciones.

Diseño e Implementación del taller: Visualización de cuadriláteros

Para el diseño de nuestro taller se consideran las actividades 1 y 2 de Gómez (2015), que procedemos a describir. Dichas actividades se realizan en un laboratorio de informática que cuente con el software Geogebra, con un tiempo de duración de 1 hora y 30 minutos horas cada una.

En la primera sesión, organizamos la sesión de la siguiente manera:

- Inducción: 20 minutos
- Explicación y desarrollo de la actividad 1: 40 minutos
- Reflexiones matemática, didáctica y tecnológica: 20 minutos

En la segunda sesión, organizamos la sesión de la siguiente manera:

- Introducción y explicación de la actividad 2: 20 minutos
- Desarrollo de la actividad 2: 40 minutos
- Reflexiones matemática, didáctica y tecnológica: 20 minutos

En la siguiente tabla se presentan la descripción de las actividades.

Cuadro 1: Descripción de las actividades.

Actividad	Nombre	Descripción
1	Paralelogramo	En la primera actividad movilizan conocimientos previos como el Teorema de los puntos medios y propiedades sobre la congruencia de lados y ángulos internos opuestos, y la intersección de las diagonales en sus puntos medios, fundamentales para el desarrollo de la siguiente actividad.
2	Configuraciones	En la segunda actividad relacionaron la intersección de dos figuras es un cuadrado, triángulo y un cuadrilátero cualquiera.

Desarrollo de la Inducción del software GeoGebra

Se procederá a reconocer las herramientas básicas del Geogebra, para desarrollar las actividades programadas. A continuación, señalamos las herramientas del AGD.

Cuadro 2: Función de algunas herramientas del Geogebra (Gómez, 2015 p. 16)

Herramienta	Iconos	Construcción
Elige y mueve		Permite trasladar y seleccionar objetos incluso varios a la vez presionando la tecla de Control.
Nuevo punto		Crea un punto en el plano.
Punto de intersección		Selecciona dos objetos, para crear todos los puntos de intersección.
Medio o centro		Marca dos puntos y se traza un punto que equidista y es colineal a los dos puntos.
Recta		Marca dos puntos y se traza la recta que pasa por los dos puntos.
Segmento		Selecciona dos puntos y queda definido un segmento.
Recta perpendicular		Selecciona una recta (semirrecta o segmento) y un punto, donde quedará definida una recta que pase por el punto y perpendicular a la primera recta.
Rectas paralelas		Selecciona una recta y un punto, quedará definida una recta paralela a la primera recta.
Mediatriz		Selecciona segmento o los extremos del segmento, se definirá una recta perpendicular que pasa por el punto medio del segmento.
Polígono		Construye polígono marcando como mínimo tres puntos, se inicia en el primer punto y termina en el primer punto.
Circunferencia (centro, punto)		Traza circunferencia en la pantalla, con punto, arrastre y punto se define el radio de la circunferencia.
Texto	ABC	Permite añadir comentarios, etiquetas y símbolos.

Desarrollo de la Sesión 1

Actividad 1: Paralelogramo

Objetivo: Construir e identificar las propiedades de un paralelogramo en el cuadrilátero inscrito EFGH.

La figura 1 muestra la Actividad 1.

ACTIVIDAD 1

Utilice las herramientas del Geogebra y construya un cuadrilátero ABCD cualquiera. Luego, marque los puntos medios E, F, G y H de los lados AB, BC, CD y DA , respectivamente, y construya los segmentos EF, FG, GH y HE .

☞ Ahora mueva el punto A y responda en la hoja *¿cuál es la naturaleza del cuadrilátero EFGH?* Justifique matemáticamente su respuesta.

Figura 1: Actividad 1 (Gómez, 2015 p. 51)

Resolución matemática esperada:

Los quince profesores construirán el cuadrilátero ABCD y el cuadrilátero inscrito EFGH, siguiendo las instrucciones y haciendo uso de las herramientas del GeoGebra como: punto, segmento, punto medio y polígono, lo que implica que estarían desarrollando su aprehensión secuencial. En la construcción se sigue un orden dimensional, lo que facilita los AGD (Ambientes de Geometría Dinámica). A continuación, arrastrarán el vértice A, que será de apoyo para identificar propiedades conocidas, conocimientos previos, como el paralelismo de sus lados opuestos del cuadrilátero EFGH, lo que significa que estarían desarrollando sus aprehensiones perceptivas. Luego trazarán las diagonales del cuadrilátero ABCD, los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, que les permitirá realizar otras exploraciones a la figura. En este caso esperamos que la figura quede dividida en cuatro triángulos AOB, BOC, COD y DOA, y apliquen el teorema de los puntos medios. Los triángulos serán vistos como unidades figurales que no modifican al cuadrilátero, todas estas acciones se reconocen como modificación mereológica. (Ver Figura 2). Según Flores y Moretti (2006) las modificaciones mereológicas no solo requiere habilidades visuales, también conocimientos matemáticos. En este caso se requiere conocer el teorema de los puntos medios.

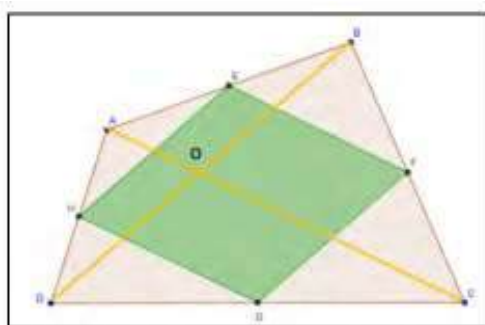


Figura 2: Aprehensión operatoria-actividad 1 (Gómez, 2015 p. 52)

Y en otra acción, pensamos que reconozcan cuatro triángulos superpuestos ABC, ACD, BCD y ABD, porque identifican 4 nuevas subconfiguraciones de la figura original, lo que implica que están desarrollando desde la perspectiva de Duval sus aprehensiones perceptivas.

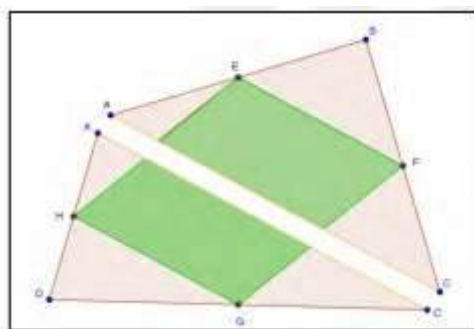


Figura 3: Descomposición mereológica 1-actividad 1 (Gómez, 2015 p. 52)

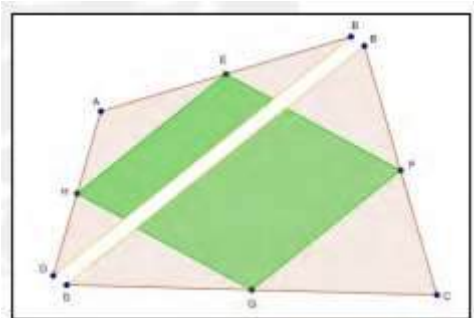


Figura 4: Descomposición mereológica 2-actividad 1 (Gómez, 2015 p. 52)

En el sentido de Duval (1999), se espera que los profesores realicen la articulación de sus aprehensiones perceptiva y operatoria (modificación mereológica de la figura inicial), y desplieguen sus conocimientos matemáticos aplicando el teorema de los puntos medios a los triángulos ABC y ACD (Figura 3), cuyo lado común es el segmento $\overline{AC}$, de tal manera que justifiquen matemáticamente que el segmento $\overline{EF} \parallel \overline{AC}$, y el segmento $\overline{HG} \parallel \overline{AC}$, respectivamente, para relacionar por transitividad el paralelismo de los segmentos: $\overline{EF} \parallel \overline{HG}$. En forma análoga en la figura 4, se espera verifiquen que los segmentos $\overline{EH} \parallel \overline{FG}$. Todo proceso deductivo será expresado a través de la aprehensión discursiva, empleando un discurso matemático, donde se efectúe un cambio de registro, del figural al discursivo. Esperamos que, a partir de la articulación de sus aprehensiones perceptivas, operatoria (mereológica) y discursiva, justifiquen que el cuadrilátero inscrito EFGH, tiene dos pares de lados paralelos y por lo tanto concluir que es un paralelogramo. (Gómez, 2015, p.53)

Desarrollo de la Sesión 2

Actividad 2: Configuraciones

En la actividad 2 se presentan un posible caso que pueden desarrollar los profesores en el experimento.

A continuación, la actividad 2 (Ver figura 5).

ACTIVIDAD 2

Abra el archivo **Actividad_2** en la que los cuadrados ABCD y EFSH son congruentes y el cuadrado EFSH que está inscrito en una circunferencia, gira alrededor del centro del cuadrado ABCD.

Manipule el punto **S** de tal manera que la intersección de las figuras forme la configuración de un triángulo, un cuadrado y un cuadrilátero cualquiera.

¿Cuál es la relación del área formada por la intersección de las figuras con el área del cuadrado ABCD? Justifique su respuesta haciendo uso del Geogebra (puede hacer trazos auxiliares y usar todas las herramientas que conoce, menos la herramienta de medida de área del software).

Figura 5: Actividad 2 (Gómez, 2015 p. 58)

Se muestra a continuación la situación propuesta en la Actividad 2 representado en el software Geogebra, ver la figura 6.

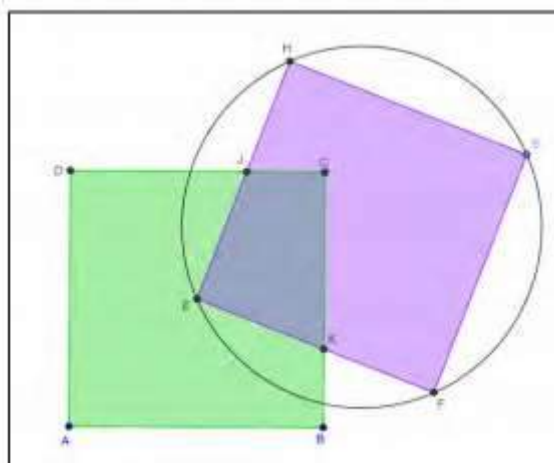


Figura 6: Gráfica de Actividad 2 (Gómez, 2015 p. 59)

Caso 1:

Objetivo: Relacionar el área de intersección de las figuras ABCD y EFSH, cuando forman un cuadrado, con el área del cuadrado ABCD.

Se espera que por medio de los datos de la actividad propuesta y por el planteamiento de la pregunta, los profesores establezcan una figura de partida y una de llegada. Cuando estas figuras se identifican, como afirma Duval, es posible que identifiquen la secuencia de sub-figuras que permitan llegar a la figura final. En este caso los profesores conocen que la figura final de la intersección de las figuras es un cuadrado, es posible que hagan uso del arrastre para acercarse a la configuración de la figura y desarrollen su aprehensión operatoria para realizar modificaciones mereológicas en el cuadrado ABCD. Pensamos que, a partir de sus conocimientos previos de mediatriz de un segmento, recta perpendicular que pasa por el punto medio del segmento, empleen la herramienta mediatriz, realicen modificaciones mereológicas sobre el cuadrado ABCD, trazando las mediatrices L1 y L2 con el uso de las

herramientas del Geogebra de los segmentos $\overline{DC}$, y $\overline{BC}$, respectivamente, dividiendo al cuadrado en cuatro regiones.

Es posible a través de la articulación de su aprehensión percepción identifiquen cuatro regiones cuadradas, que será sustentado con la siguiente propiedad “si una recta es perpendicular a una segunda recta, también es perpendicular a cualquier recta paralela a la segunda recta” con el siguiente discurso, en primer lugar la perpendicularidad de las prolongaciones de las mediatrices, L1 es paralela al segmento $\overline{BC}$ y L2 es perpendicular al segmento $\overline{DC}$ entonces L2 es perpendicular a la recta L1, y luego la intercepción de las prolongaciones de las mediatrices L1 y L2 con los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$ pasan por su punto medio respectivamente. Por lo tanto, concluirán que el cuadrado ABCD queda dividido en cuatro regiones cuadrangulares. Pensamos que aplicando el arrastre a la figura EFSH desde el vértice S hasta que sus lados $\overline{EH}$ y $\overline{EF}$ se superpongan con las mediatrices L1 y L2 comprobarán que la intersección de las figuras coincide con una región cuadrangular, por lo tanto, es un cuadrado que representa la cuarta parte del área del cuadrado ABCD.

En este caso esperamos que la articulación sea global, donde se realice un encadenamiento de pasos deductivos y se establezca una articulación entre las aprehensiones perceptivas, mereológicas y empleando un discurso deductivo.

Resultados esperados

Sesión 1: con respecto a la actividad 1

En la actividad 1-paralelogramo, se espera que los profesores justifiquen matemáticamente que el cuadrilátero formado por los puntos medios de un cuadrilátero es un paralelogramo, recurriendo a sus conocimientos previos de la figura, describiendo sus lados figurales: lados opuestos congruentes y paralelos, y la congruencia de lados opuestos. En otros casos, que recurran a realizar mediciones para confirmar la congruencia de lados y ángulos.

Sesión 2: con respecto a la actividad 2

Con respecto al caso 1, se espera que el profesor haga uso del GeoGebra, específicamente que empleen el arrastre de la figura hasta que según su percepción sea un cuadrado, para luego con el trazo de rectas paralelas confirmar su percepción. En el caso 2, se espera que los profesores coordinen su aprehensión perceptiva, operatoria y discursiva, y en el caso 3, también se espera que coordinen sus aprehensiones perceptivas y operatorios empleando un lenguaje descriptivo en su justificación, el uso de la función “arrastre” les facilitara la reconfiguración de la figura.

Consideraciones finales

Con respecto a las consideraciones finales de las actividades 1 y 2, las agrupamos de la siguiente manera: Reflexión matemática, Reflexión tecnológica y Reflexión didáctica.

Reflexión matemática

En la actividad 1, cuyo objetivo fue justificar matemáticamente que el cuadrilátero formado por los puntos medios de un cuadrilátero es un paralelogramo, los profesores podrán recurrir a sus conocimientos previos de la figura, describiendo sus unidades figurales: lados opuestos congruentes y paralelos, y la congruencia de ángulos opuestos. En otros casos que realicen mediciones para confirmar la congruencia de lados y ángulos.

En la segunda actividad, que consta de tres casos se observó lo siguiente: en el primer caso, los profesores para verificar su percepción, recurren a las herramientas del Geogebra para relacionar las unidades figurales de dimensión 0 y 1 para luego realizar trazos sobre la figura e identificar la relación de unidades figurales de dimensión 2, lo que implica una articulación de sus aprehensiones perceptivas y operatorias, o tal vez solo se apoyen en su percepción; en el segundo caso, a partir de las modificaciones mereológicas realizadas en la figura, relacionen las subfiguras con propiedades de congruencia de triángulos, estableciendo una articulación entre sus aprehensiones perceptivas, operatorias y discursivas, aquí se podría evidenciar claramente una visualización con respecto a la relación de áreas; en el tercer caso, los profesores se realizan reconfiguraciones, sustentado con un discurso que lo asocia a propiedades de congruencia, en esta actividad la función arrastre ayuda a establecer relaciones entre unidades figurales de dimensión 2.

Reflexión tecnológica

Se espera que los profesores sigan las indicaciones de construcción, al emplear las herramientas del Geogebra para limitar las propiedades de la figura que representan. Así como en el análisis de las propiedades de la figura logren identificar y relacionar unidades figurales de dimensión 0, 1 y 2, al realizar trazos adicionales como rectas y segmentos, y determinar la congruencia de dos o más segmentos empleando la herramienta "compás". Finalmente, con el empleo de la función "arrastre" puedan manipular directamente sobre la construcción para relacionar unidades figurales de dimensión 2.

Reflexión didáctica

En la actividad 1, los profesores tendrán un desenvolvimiento de las aprehensiones perceptivas y operatorias, con ayuda de las herramientas y la función arrastre lograron identificar las propiedades del paralelogramo, al relacionar sus unidades figurales, para luego describirlo empleando un lenguaje discursivo y en otros casos un lenguaje formal.

En la segunda actividad, que consta de tres casos se observó lo siguiente: en el primer caso, la mayoría de los profesores para verificar su percepción, recurrieron a las herramientas del Geogebra para relacionar las unidades figurales de dimensión 0 y 1 para luego realizar trazos sobre la figura e identificar la relación de unidades figurales de dimensión 2, lo que implica que hubo una articulación de sus aprehensiones perceptivas y operatorias, otros solo se apoyaron en su percepción; en el segundo caso, todos los profesores, a partir de las modificaciones Mereológicas realizadas en la figura, relacionaron las subfiguras con propiedades de congruencia de triángulos, estableciendo una articulación entre sus aprehensiones perceptivas, operatorias y discursivas, aquí se evidencia claramente que hubo visualización con respecto a la relación de áreas; en el tercer caso, los profesores realizaron

reconfiguraciones, sustentando con un discurso que lo asocia a propiedades de congruencia, en esta actividad la función arrastre ayudó a establecer relaciones entre unidades figurales de dimensión 2.

Referencias

- Almeida, I, Santos, M. C. (2007). A visualização como factor de ruptura nos conceitos geométricos. *XVIII Simpósio Nacional de Geoemtria Descritiva e Desenho Técnico-GRAPHICA*. Artigos. Paraná.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizaje intelectuales*. Traducción realizada por Myriam Vega Restrepo, (1era ed.). Colombia: Artes Gráficas Univalle.
- Duval, R. (2011). *Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas/organização*. Marlene Alves (Trad.). I. ed. San Paulo: PROEM, 2011.
- Flores y Moretti (2006). As Figuras geométricas suporte para aprendizagem em geometria: um estudio sobre a heurística e a reconfiguração. *Revemat*, 1(1), 5-13.
- Gomez, C. (2015). *Proceso de visualización de cuadriláteros: un estudio con profesores de nivel secundario*. (Tesis de maestría en Enseñanza de las Matemáticas). Pontificia Universidad Católica del Perú.
- Laborde, C., Capponi, B. (1994). Aprender a ver e a manipular o objeto geométrico além do traçado no cabri-geometre. *Em Aberto*, 14(62). Recuperado de <http://embareto.inep.gov.br/index.php/emaberto/search/results>
- Larios, V (2006). La rigidez geométrica y la preferencia de propiedades geométricas en un ambiente de geometría dinámica en el nivel medio. *Relime*, 9(3), 361-382. Recuperado de <http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2168369>
- Salazar, J. V. F. (2009). *Génesis Instrumental y Cabri 3D*. (Tesis doctoral en Educación Matemática). Pontificia Universidad Católica de São Paulo, São Paulo, Brasil.
- Salazar J.V.F. (2018) Semiotic Representations: A Study of Dynamic Figural Register. In: Presmeg N., Radford L., Roth WM., Kadunz G. (eds) Signs of Signification. ICME-13 Monographs. Springer, Cham.
- Vara, T. N. P., & Salazar, J. V. F. (2018). Mathematics Education Art and Architecture: Representations of the Elliptic Paraboloid. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 14(2), 643-655. <https://doi.org/10.12973/ejmste/80628>

CREACIÓN DE PROBLEMAS SOBRE COMPOSICIÓN DE FUNCIONES USANDO APPLETS

Elton Barrantes

Maritza Luna

Marco Solorzano

ejbarran@pucp.edu.pe, luna.m@pucp.edu.pe, marco.solorzano@pucp.edu.pe

Instituto de Investigación sobre Enseñanza de la Matemáticas, IREM-PUCP, Perú

Resumen

El presente taller tiene como objetivo principal la creación de problemas usando las TIC. Para esto se crearán applets utilizando el software GeoGebra. Particularmente se trabajará con problemas sobre composición de funciones. Para lograr ese propósito se aplicará la estrategia de creación de problemas por elaboración dada una situación (intramatemática o extramatemática), que comprende de una secuencia de actividades donde se incluye una situación, problema, reflexión didáctica, problema pre o pos (SPRP). Finalmente, los participantes socializarán sobre su experiencia en el taller.

Palabras clave: Creación de problemas, función compuesta, applets, GeoGebra

Introducción

La creación de problemas en los últimos años atrae la atención de diversos investigadores como Singer, Ellerton y Cai (2015), Felmer, Pehkonen y Kilpatrick (2016), entre otros debido a que motiva promover el aprendizaje, el desarrollo del pensamiento matemático y el estímulo de la creatividad en profesores y estudiantes (Malaspina, 2013). Además, el uso de la tecnología puede llegar a ser una poderosa herramienta para que los estudiantes y docentes logren crear diferentes representaciones de ciertas tareas y sirve como un medio para que formulen sus propias preguntas o problemas, lo que constituye un importante aspecto en el aprendizaje de las matemáticas (Barrera & Santos, 2001). Por lo cual, el conocimiento de algunos procesos o applets podrán contribuir como mediador en el proceso de enseñanza y aprendizaje de funciones y en particular de la composición de funciones.

La función compuesta es estudiada en el último año de la secundaria y luego en los primeros ciclos de nivel universitario, para luego utilizar en el cálculo diferencial e integral, donde surgen dificultades por la no identificación de la composición de funciones.

Marco teórico

Para el taller utilizamos algunos planteamientos de la estrategia SPRP (Situación, Problema, Reflexión didáctica, Problema pre o pos) de creación de problemas para fortalecer la articulación entre competencias y conocimientos del profesor de matemáticas propuesta por Malaspina (2017) para la creación de problemas por elaboración dada una situación concreta (Malaspina, Mallar y Font, 2015). La estrategia SPRP que consideramos comprende las siguientes etapas: (1) presentar a los participantes una situación para crear problemas, (2) pedir a los participantes del taller, en parejas, crear y resolver un problema a partir de la situación dada (denominaremos a este problema como PG), (3) pedir que en parejas elaboren una configuración cognitiva de la solución del problema creado, (4) socializar y discutir los problemas creados y sus configuraciones asociadas, (5) solicitar a cada pareja de participantes que cree un nuevo problema relacionado con su PG. (se le denominará NPG). Puede ser – por decisión de la pareja – un Problema-pre, en el sentido de contribuir a comprender mejor y a resolver correctamente PG; o un Problema-pos, en el sentido de ser más retador que PG, que requiera mayor demanda cognitiva que PG. Cada pareja debe explicitar si creó un problema-pre o un problema-pos respecto a su PG. (6) Redactar una solución del problema creado (NPG). (7) Puesta en común del problema creado.

Se utilizarán constructos del EOS para describir algunos objetos matemáticos que intervienen en la creación de problemas como producto de una actividad matemática. Asimismo, considerando la propuesta de Torres (2016) y Malaspina (2017) se consideran los cuatro elementos básicos de un problema matemático: información, requerimiento, contexto (intramatemático o extramatemático) y entorno matemático.

Metodología y diseño de actividades

Este taller se divide en dos momentos, con una duración de 40 minutos cada uno. En primer lugar, se presentan actividades para explorar e instrumentar la creación de applets. En segundo lugar, se propone la creación de problemas por elaboración a partir de una situación dada.

Para las actividades propuestas consideraremos la definición de composición de funciones dada a continuación:

La composición de f con g , denotada por $f \circ g$, es la función cuyo dominio consiste en los elementos $x \in \text{Dom}(g)$ tales que $g(x) \in \text{Dom}(f)$ y cuya regla de correspondencia es $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Si f y g son funciones reales de variable real, entonces la gráfica de $f \circ g$ puede construirse partiendo de las gráficas de f y g como se muestra en la siguiente figura, siguiendo las instrucciones siguientes:

- Tome un número cualquiera $x \in \text{Dom}(g)$.
- Trace la recta vertical que pasa por $(x, 0)$. Esta recta intersecta a la gráfica de g en el punto $(x, g(x))$.
- La recta horizontal que pasa por $(x, g(x))$ intersecta a la recta $L: y = x$ en el punto $(g(x), g(x))$.

Si $x \in \text{Dom}(f \circ g)$ entonces $g(x) \in \text{Dom}(f)$ y la recta vertical que pasa por $(g(x), g(x))$ **intersecará** a la gráfica de f en el punto $(g(x), f(g(x)))$. El punto $(x, f(g(x)))$ se obtiene como el punto de intersección de la recta horizontal que pasa por $(g(x), f(g(x)))$ y la recta que pasa por $(x, 0)$.

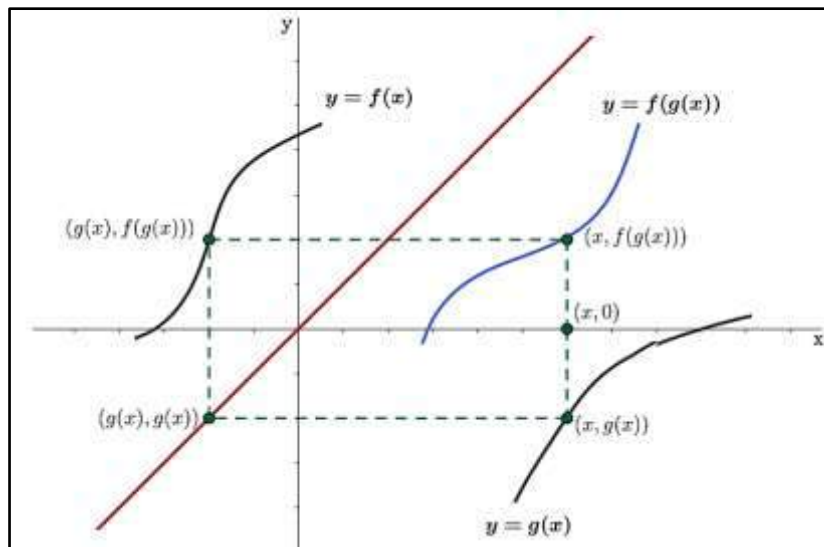


Figura 1. Gráfica de una función compuesta

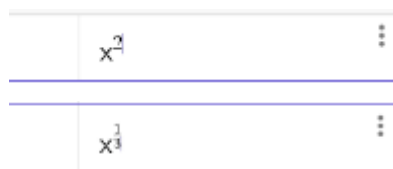
Actividades para explorar la creación de applet

Actividad 1

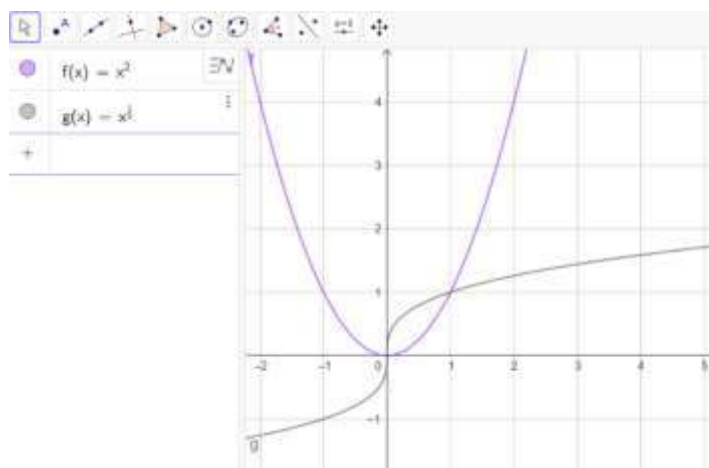
1. Ingrese en la barra de entradas las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^{1/3}$



2. Digite las funciones



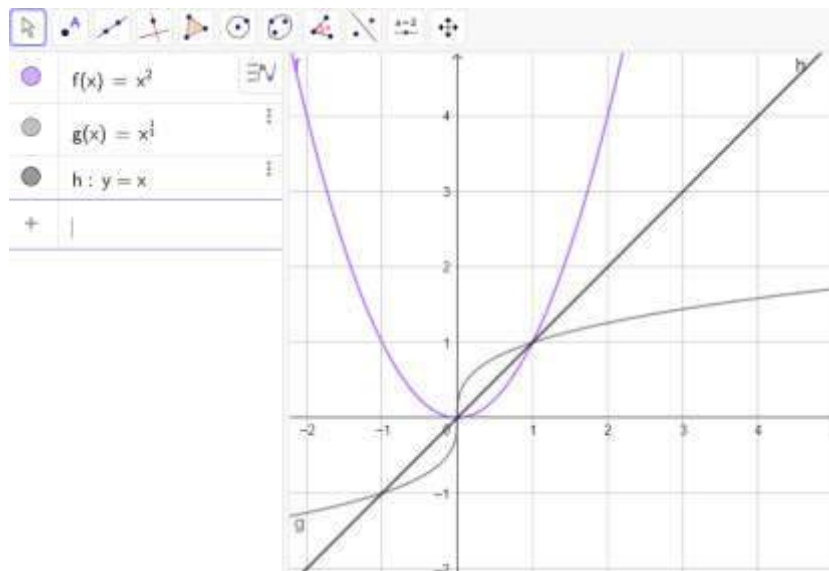
El resultado hasta el momento es



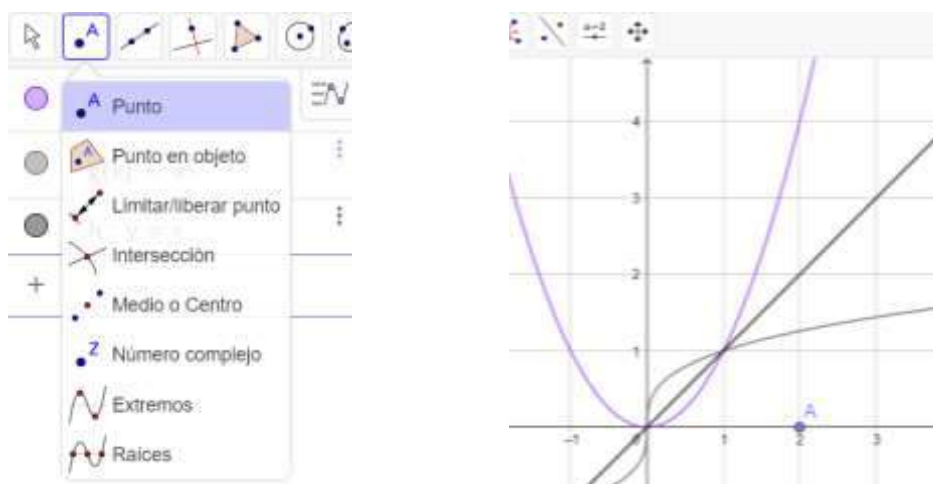
3. Ingrese en la barra de entrada la ecuación $y = x$.

$y = x$

El resultado en este momento es



4. Inserte un punto A sobre el eje X, para ello seleccione punto en la barra de herramientas tal como se muestra en la figura.



5. Traslade verticalmente el punto A hacia la gráfica de g , para ello digite en la barra de entrada

$(x(A), g(x(A)))$

6. Traslade horizontalmente el punto B hacia la recta $y = x$. Para ello digite en la barra de entrada

$$(y(B), y(B))$$

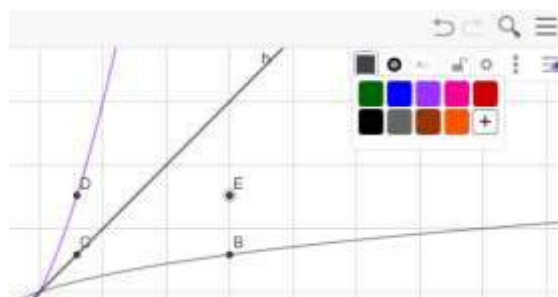
7. Traslade verticalmente el punto C hacia la gráfica de la función f . Para ello digite en la barra de entrada

$$(x(C), f(x(C)))$$

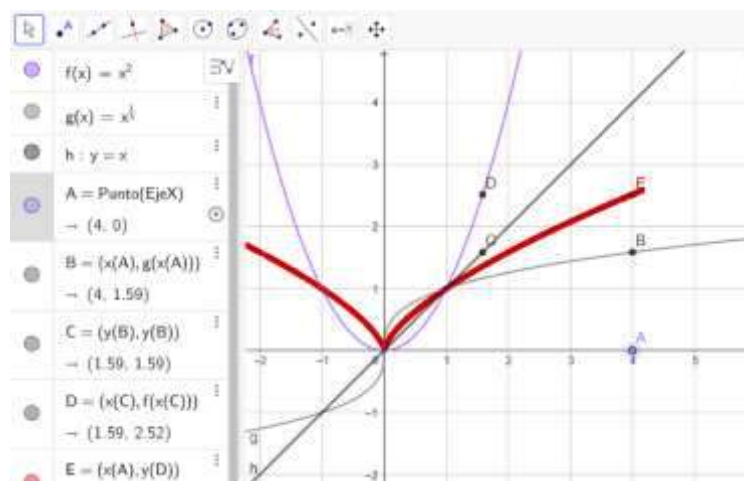
8. Tome un punto con la primera coordenada de A y la segunda coordenada de D.

$$(x(A), y(D))$$

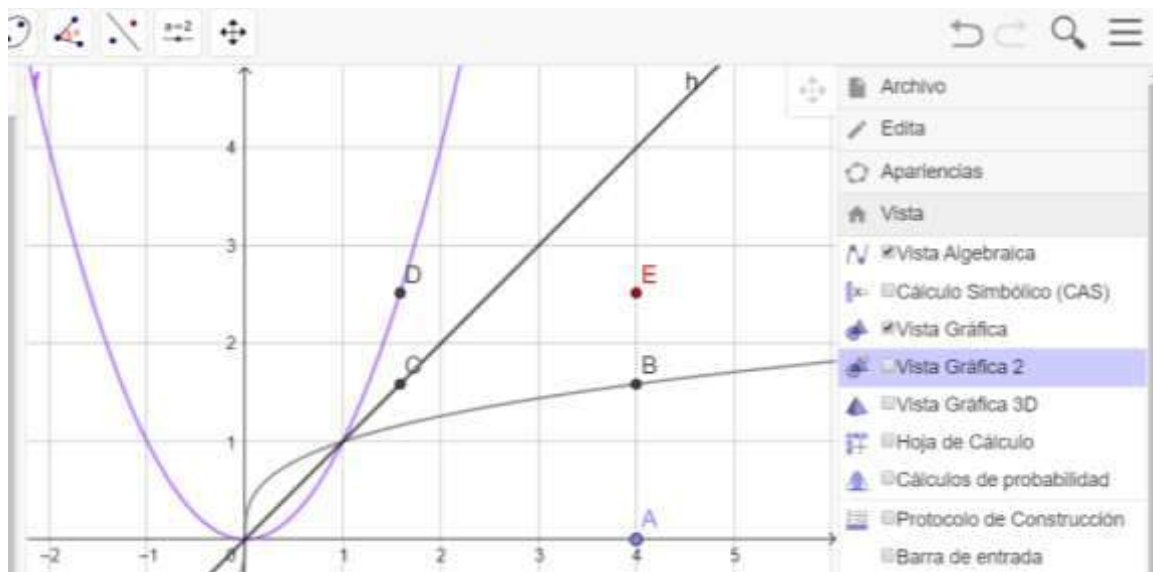
9. El punto E es un punto de la gráfica de la composición de funciones. Cambie de color para identificarlo de los otros puntos.



10. Arrastre el punto A y comente lo que sucede.
11. Seleccione el punto E, haga clic derecho y seleccione la opción rastro. Luego, arrastre el punto A. ¿Qué representa la gráfica obtenida con el rastro?



12. Si desea cambiar las funciones por otras, pero conservar el trabajo de los puntos, haga lo siguiente:
- En la barra de menú, seleccione la Vista Gráfica 2.



- Oculte los ejes coordenados de la Vista gráfica 2. Luego, en la barra de herramientas seleccione Casilla de Entrada, como se muestra en la figura.



- Coloque el puntero del mouse en un lugar de la Vista Gráfica 2, donde desea ubicar la entrada de las funciones. Luego, aparecerá el siguiente cuadro de diálogo.

Casilla de Entrada

Rótulo:

Objeto vinculado:

OK Cancela

- En Rótulo de la Casilla de Entrada, digite $f(x) =$

Casilla de Entrada

Rótulo:

$f(x) =$

Objeto vinculado:

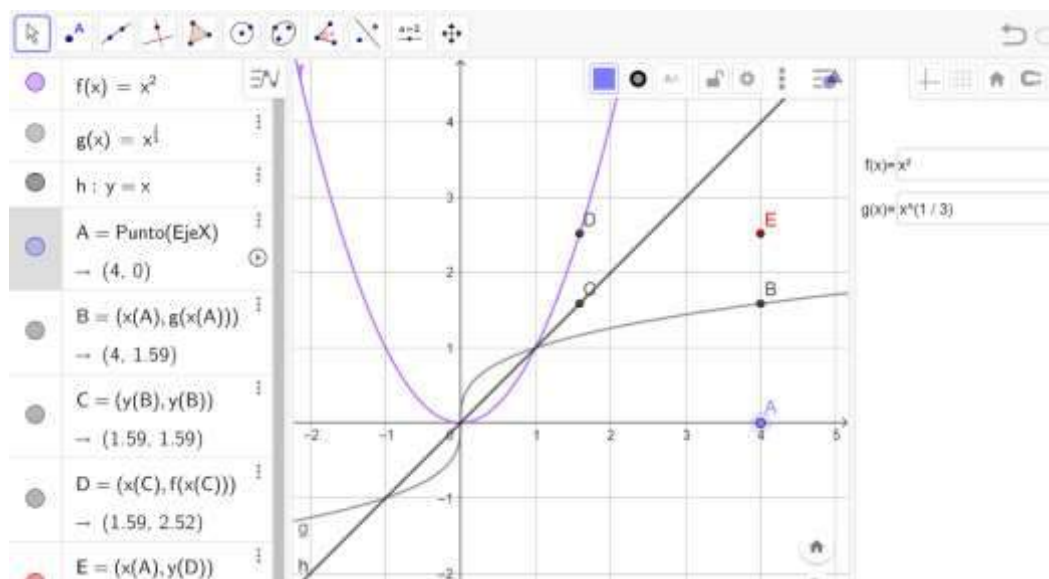
OK Cancela

- Desplace las opciones Objeto vinculado y seleccione $f(x) = x^2$



- Repita el proceso para la función g .

El resultado final será



Actividad 2

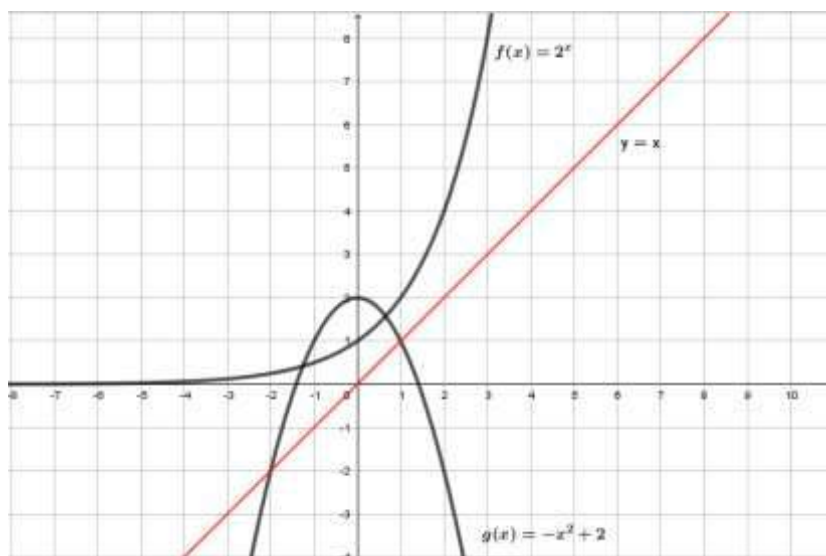
Grafique la función $f \circ g$, siendo $f(x) = \frac{2}{x+1}$ y $g(x) = x^2$. Para ello repita el proceso indicado en la actividad 1.

Creación de problemas por elaboración

Para la creación de problemas seguiremos las siguientes etapas: (1) presentar a los docentes participantes una situación para crear problemas, (2) pedir a los participantes del taller, en parejas, crear y resolver un problema a partir de la situación dada (denominaremos a este problema como PG), (3) pedir que en parejas elaboren una solución para el problema creado, (4) socializar y discutir los problemas creados y sus respectivas soluciones, (5) solicitar a cada pareja de participantes que cree un nuevo problema relacionado con su PG.

Situación dada

Grafique la función $f \circ g$, siendo $f(x) = 2^x$ y $g(x) = -x^2 + 2$. Considere los pasos descritos en la actividad 1.



Finalizar esta parte con la socialización de los problemas nuevos creados por las parejas participantes.

Resultados esperados

Esperamos que los participantes se familiaricen con la creación de applets y logren crear nuevos problemas incorporando las TIC, como es el caso del GeoGebra ya que este ofrece herramientas potenciales para el desarrollo de la creatividad, el razonamiento lógico y la validación de conjeturas.

Consideraciones finales

Consideramos relevante la creación de problemas por parte de los docentes pues a través de esta propuesta desarrolla habilidades matemáticas tales como la exploración, el descubrimiento, la elaboración, refutación y validación de conjeturas.

Referencias

- Barrera, F. & Santos, M. (2001). Students' use and understanding of different mathematical representations of tasks in problem solving instruction. Proceedings of the Twenty Three Annual Meeting North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 1, pp. 459-466. ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.
- Felmer, P., Pehkonen, E. & Kilpatrick, J. (Eds.) (2016). *Posing and Solving Mathematical Problems: Advances and New Perspectives*. New York, NY: Springer
- Hasser, N., La Salle, J. P. y Sullivan, J. A. (1976) Análisis Matemático. Curso de Introducción Vol

1. Editorial Trillas

- Malaspina, U. (2017). La creación de problemas como medio para potenciar la articulación de competencias y conocimientos del profesor de matemáticas. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en, enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html
- Malaspina, U., Mallart, A. & Font, V. (2015). Development of teachers' mathematical and didactic competencies by means of problem posing. En Krainer, K., & Vondrová, N. (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME 9), (pp. 2861-2866). Prague, Czech Republic: ERME.
- Stewart, J. (2008). *Calculus: Early transcendentals*. Thomson Brooks/Cole Sixth edition.
- Singer, F., Ellerton, N. & Cai, J. (Eds). (2015) *Mathematical Problem posing. From research to effective practice*. New York: Springer

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS

Ángel Homero Flores Samaniego*

Isabel Torres Céspedes**

ahfs@unam.mx, isabeltz50@hotmail.com

Colegio de Ciencias y Humanidades-UNAM, México*

Universidad de Lima, Perú**

Resumen

En el presente taller, mediante la resolución de problemas aritméticos, se hará una reflexión sobre la matemática y su naturaleza, al tiempo que se ejemplificará de manera práctica cómo instrumentar en el aula el modelo de intervención didáctica conocido como, Aprender Matemática, Haciendo Matemática. Dicho modelo se centra en establecer las condiciones necesarias para que el estudiante aprenda, en vez de enfocarse en la depuración de las estrategias de enseñanza del profesor, con la esperanza de que el estudiante aprenda. El taller está dirigido, principalmente a profesores de Secundario, pero puede ser interesante para profesores de nivel superior. Se espera que el taller sirva de vehículo para arribar a una docencia más efectiva en la que no se considere la matemática como un cuerpo de conocimiento terminado al que se accede siguiendo instrucciones.

Palabras clave: Resolución de problema, matemática, argumentación.

Introducción

¿Qué es la matemática? ¿Cómo se aprende? ¿Cómo sabemos que un estudiante ha aprendido matemática? Son preguntas básicas que todo docente en la materia debería hacerse y tener una respuesta más o menos consistente.

Un primer acercamiento a la definición de matemática (y que usaremos en el presente taller) es considerarla como el cuerpo de conocimiento sobre números y formas, y las relaciones que hay entre ellos. La matemática ha sido utilizada como herramienta para resolver problemas; como teoría para explicar (o ayudarnos a entender) fenómenos naturales y sociales; como ciencia que se estudia a sí misma; y como lenguaje para comunicar ideas.

Tradicionalmente, la matemática en la escuela se ha visto, en el mejor de los casos, como una herramienta para resolver problemas; en este contexto, el estudiante, sobre todo en los niveles básicos, aprende una serie de instrucciones o algoritmos que le llevarán a usar correctamente la herramienta, aunque los problemas que se resuelven con ella no tengan mucho que ver con la realidad o con cuestiones prácticas, un ejemplo es el caso de los problemas de planteo como el siguiente: las edades de Pedro y Raquel suman 65 años; dentro de cuatro años, la edad de Pedro será el doble de la edad actual de Raquel; ¿qué edad tienen Pedro y Raquel?

Nuestra hipótesis es que si el estudiante, sobre todo en los niveles básicos (primario y

secundario) tiene contacto con la matemática de una manera más integral (como herramienta y teoría principalmente) su entendimiento de la materia se hará más fácil.

La matemática, y cualquier otra disciplina, se aprende haciéndola y reflexionando sobre lo que se hace. El aprendizaje se facilita si este hacer se lleva a cabo en equipo, en el seno de una comunidad de aprendizaje. En el aula, el docente no es quien “enseña” la matemática y después examina a sus estudiantes para “medir” el grado de adquisición de su conocimiento, dando una nota o una calificación que indique qué tanto han aprendido. En un ambiente en el que se aprende haciendo, el docente pone las condiciones necesarias para que se dé el conocimiento; y coordina las acciones de sus estudiantes, aclara dudas, fomenta discusiones entre ellos, y los guía, de modo tal, que adquieren el conocimiento pretendido. El docente es un catalizador que acelera el aprendizaje; y el estudiante, al sentirse parte de una comunidad, trabaja con más seguridad y aumenta su autoestima.

Cuando una persona aprende algo o adquiere un cierto conocimiento, se da un cambio en su discurso y en su proceder; lo anterior se advierte con más claridad cuando hace tareas en las que debe utilizar dicho conocimiento. Por consiguiente, en un aula de matemática que se ha constituido en una comunidad de aprendizaje, el docente no examina a sus estudiantes para determinar el grado de adquisición del conocimiento: son los mismos estudiantes quienes aportan evidencias de su aprendizaje. Las evidencias surgen cuando el estudiante trabaja en una cierta actividad, cuando entabla una discusión con sus compañeros acerca de algún concepto o alguna estrategia a seguir, y en sus producciones escritas. El docente diseña mecanismos para recabar dichas evidencias y utiliza la información obtenida para mejorar su propia docencia, rediseñar las actividades que lo requieran y retroalimentar el conocimiento del estudiante.

En un contexto como el descrito en párrafos anteriores, la asignación de una nota o de una calificación con fines de acreditación adquiere un papel secundario, pues el objetivo principal de la participación de los estudiantes en las actividades es el aprendizaje. Esta asignación puede hacerse siguiendo algunas reglas (como asignación de porcentajes por tipo de actividad) cuyo diseño estaría a cargo de todos los integrantes de la comunidad: la definición de la forma de calificar no sería un acto exclusivo del profesor. De este modo, el proceso de asignar una nota o una calificación no tendría posibilidades de verse como un acto punitivo injusto por parte de los estudiantes.

Ahora bien, tomando en cuenta que la aritmética es la puerta de entrada al estudio de la matemática, creemos necesario que los docentes tengan una idea más clara de su objeto de estudio y el grado de dificultad que puede tener. Como menciona en esta introducción, la matemática es un cuerpo de conocimiento sobre números y figuras en el espacio, para su estudio se le divide en ramas, de las cuales la aritmética es una de ellas. En la práctica, es difícil determinar el dominio específico de una rama de la matemática, por ejemplo, si hacemos aritmética o resolvemos problemas relacionados con ella, ¿podemos hacerlo sin utilizar el álgebra o de algunas generalizaciones que podríamos considerar propias de esa rama de la matemática? ¿Dónde está la frontera entre la geometría y el álgebra? ¿Podemos hablar de la teoría de funciones sin recurrir a conceptos geométricos o al cálculo? ¿Qué diferencia hay entre la aritmética y la teoría de números?

Tomando en cuenta lo anterior, el objetivo de nuestro taller es, mediante la resolución de problemas que se pueden resolver de manera aritmética, hacer una reflexión sobre esta rama de la matemática y su aprendizaje en un contexto escolar.

Diseño metodológico y desarrollo del taller

El taller está dirigido a docentes de Secundario, en particular de Bachillerato (los últimos tres años antes de ingresar a la universidad). Se espera que el docente tenga un buen dominio del álgebra de ese nivel.

Para su desarrollo utilizaremos la metodología del modelo de intervención didáctica, Aprender Matemática, Haciendo Matemática (Flores, 2007) en la que se privilegia el trabajo en equipos pequeños (se recomienda formar parejas) y se fomenta la reflexión mediante el análisis y las discusiones grupales.

Iniciaremos el taller con una breve descripción de la metodología y sus objetivos, y la organización de los equipos.

A continuación, se planteará un problema o una situación a abordar y se dará un tiempo razonable para que los participantes analicen la situación y propongan soluciones. Las propuestas de solución se analizarán de manera grupal. No siempre se llega a una propuesta o a una solución en un tiempo razonable, por lo que, si éste lo permite, también se verán las soluciones o las conclusiones a las que se llegaron con respecto al problema o a la situación dada.

Con este procedimiento es posible hacer la reflexión que se plantea en el objetivo del taller y, en consecuencia, aumentar probabilidad de que los docentes participantes en el taller vean la didáctica de manera distinta.

Presentamos, a continuación, una lista de los problemas que se proponen para el taller.

1. En una clase de bachillerato, la maestra planteó el siguiente problema:

En mi tribu, cuando se colocan de dos en fondo sobra uno, cuando se colocan de tres en fondo sobra uno, cuando se colocan de cuatro en fondo sobra uno, cuando se colocan de cinco en fondo sobra uno, cuando se colocan de seis en fondo sobra uno, y, por fin, cuando se colocan de siete en fondo quedan distribuidos exactamente. ¿Cuántos tribunos hay en mi tribu?

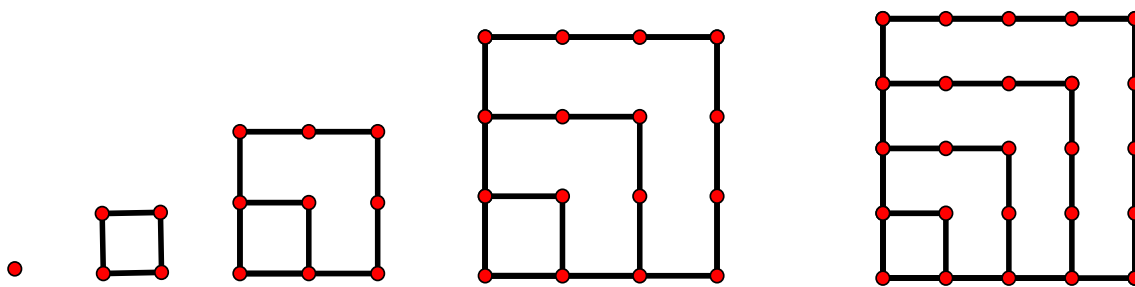
Uno de los estudiantes obtuvo 301 como respuesta, pero la maestra dijo que había muchas más.

¿El resultado es correcto? ¿por qué?

Encuentra otros resultados y explica cómo los obtuviste. ¿Es posible generalizar el resultado? En caso de que la respuesta sea afirmativa, mostrar el caso general y justificar la respuesta.

Explica dos maneras de resolver el problema. Y explica por qué las dos son válidas.

2. Los números cuadrangulares se forman a partir de los vértices de un cuadrado. En la figura tenemos los primeros cinco números cuadrangulares.



El primero es un punto, el segundo (dos puntos en la base) contiene cuatro puntos, y así sucesivamente. ¿Cuántos puntos tendrá el sexto? ¿Cuántos puntos tendrá el n -ésimo número cuadrangular (C_n)? ¿Cómo justificas el resultado?

3. Las ecuaciones diofánticas deben su nombre a Diofanto de Alejandría (290-200 a.C.) y son las ecuaciones lineales de la forma $ax + by = c$ en las que tanto las constantes a , b y c como las incógnitas son números enteros. Explica por qué sí o por qué no las siguientes ecuaciones son diofánticas.

a) $3x + 8y = 4$ b) $3x + 4y = 1$ c) $15x + 25y = 5$.

¿Hay alguna condición para que una ecuación sea diofántica? Explica tu respuesta.

4. En una pista de carreras elíptica dos atletas empiezan a correr al mismo tiempo desde el mismo lugar, uno con una rapidez promedio de 12 km/h, en un carril que tiene una longitud de 402 metros y el otro en un carril de 390, con una rapidez promedio de 12.2 km/h. Si los atletas dan 20 vueltas, ¿cuántas veces están en el mismo punto y cada cuánto tiempo?
5. Se dispone de 3 caños (A,B,C) para llenar un estanque, y un caño (D) para evacuarlo. Si se abre A y B el estanque se llenaría en 8 horas; mientras que A y C lo llenarían en 6 horas. Pero si se abriese los 3 caños, simultáneamente, el tanque sería llenado a 5 horas. Además, el caño D puede desaguarlo en 24 horas. Determinar el tiempo que tardaría el caño A en llenar el estanque si el caño D estuviese abierto .
6. El siguiente texto está encriptado: BWLMBKXWXUBYÑCIRBBYFARBERXHAUX.

En la tabla se muestra parte de la clave para descifrar el texto.

Descifra el texto y explica cómo lo hiciste.

Letra	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
Número	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Regla	0	7	14	21	1	8	15	22	2	9	16
Letra cifrada	A	H	Ñ	U	B	I	O	V	C	J	P

7. La cruz que se muestra tiene la característica de que los números son enteros del 1 al 9 y están colocados de modo que la suma horizontal es igual a la vertical. En este caso la suma es 27.

		6		
		4		
2	1	9	8	7
		3		
		5		

¿Qué otras sumas son posibles? ¿Cómo justificas el resultado?

8. Se tiene una sucesión de seis cuadrados formados por cuadrados unitarios. El primero es el cuadrado unitario; el segundo tiene dos cuadrados por lado; el tercero 3 y así sucesivamente. Si, a partir del tercer cuadrado se quitan los unitarios del centro, de modo que sólo haya cuadrados en los lados, ¿cuántos cuadrados unitarios habrá en el sexto? ¿Cuántos cuadrados unitarios tendrá el cuadrado que tiene n unitarios en la base? Justifica tu respuesta.

La diferencia principal entre los problemas que se trabajarán en el taller y los de planteo como el mencionado en la Introducción, es que, en la resolución de los primeros, no se debe seguir un método rutinario, sino que se pueden resolver de varias maneras, e implican el uso de un razonamiento matemático que dista mucho de seguir una serie de instrucciones.

Finalmente, aunque no se profundizará en la problemática de la evaluación, es importante mencionar que, en el modelo de intervención didáctica, Aprender Matemática, Haciendo Matemática, la evaluación tiene un papel central (Flores y Gómez, 2009). Consideramos que la evaluación debe ser el proceso mediante el cual se recaba información sobre el desempeño del estudiante (aprendizaje incluido), el desempeño del docente y la efectividad de las actividades diseñadas y llevadas al cabo por los estudiantes.

La información, con fines de evaluación, recabada, se procesa con algunos instrumentos de evaluación (principalmente listas de cotejo, matrices de resultados, V heurísticas y rúbricas) y los resultados de su análisis se utilizan para retroalimentar el proceso de aprendizaje del estudiante y el diseño del curso en su totalidad con miras a ediciones posteriores. Los resultados de la evaluación y de la retroalimentación que de ella deriva, incluso, pueden utilizarse para hacer propuestas de modificación del currículo.

Resultados esperados

Esperamos que, durante el desarrollo de las actividades del taller, se origine una discusión en términos de las posibles soluciones de los problemas y en torno a la manera en que se puede instrumentar la metodología de Aprender Matemática, Haciendo Matemática en el salón de clase.

Sobre todo, esperamos que haya observaciones y críticas al modelo hechas desde la perspectiva de los docentes participantes.

Dependiendo del conocimiento disciplinar del participante y de su habilidad para resolver y plantear problemas, se espera que el taller sirva como vehículo para que los docentes amplíen

su concepción de la matemática y su capacidad de resolver problemas, y en particular, su habilidad para plantear problemas que sean un reto y una motivación para sus estudiantes.

En el caso de docentes que desarrollen sus clases de una manera más expositiva y tradicional, esperamos que el taller sirva para considerar la eficacia de su sistema de dar clase y vea alternativas para mejorar el aprendizaje de sus estudiantes.

Consideraciones finales

La docencia tradicional ha privilegiado la enseñanza en detrimento del aprendizaje, en este sentido, decimos que la docencia está centrada o enfocada en la enseñanza; desde una docencia centrada en la enseñanza, resulta más fácil hacer que el estudiante siga una serie de pasos o instrucciones para llegar a ciertos resultados, éste es el sentido que le damos a una clase de matemática cuando al proceso de aprendizaje le llamamos instrucción y al docente instructor. En consecuencia, la mayoría de las estrategias didácticas han derivado en una serie de pasos a seguir para obtener un buen resultado.

La resolución de problemas matemáticos no es la excepción, el magnífico texto de Georges Polya, *How to solve it*, (Polya 1945, 1973) ha derivado en un algoritmo para resolver problemas, incluso se le llama Método Polya para la Resolución de Problemas; lo que la mayoría de los docentes conocen sobre el texto, de unas 250 páginas, es solamente que hay que seguir cuatro pasos: entender el problema; diseñar una estrategia; desarrollar la estrategia; revisar lo hecho.

Con ello, se pierde toda la riqueza del libro que nos habla de la naturaleza de la matemática y del conocimiento matemático.

Si, por el contrario, enfocamos la docencia desde el punto de vista del aprendizaje y de la conformación del aula en una comunidad de aprendizaje, la situación cambia radicalmente. Durante el trabajo en el aula, el estudiante no memoriza algoritmos, sino que, junto con sus compañeros (incluido el docente) analiza situaciones (muchas de ellas problemáticas), las discute y, mediante argumentos válidos, las valida; en el caso de la resolución de problemas, el estudiante se enfrasca en discusiones con sus compañeros sobre la mejor manera de resolverlos y se ve en la necesidad de justificar sus resultados, poniendo en juego su razonamiento matemático.

Es la intención del taller, ejemplificar esto último usando problemas aritméticos.

Referencias

- Academia ADUNI. Colección de Aptitud Académica (2001). *Razonamiento Matemático*. Lumbreras editores.
- Flores, H. (2007). Aprender Matemática Haciendo Matemática: modelo de enseñanza centrado en el estudiante. *Acta Scientiae*. 9(1). 28-40.
- Flores, H y Gómez, A. (2009). Aprender Matemática, Haciendo Matemática: la evaluación en el aula. *Educación Matemática*, 21(2). 117-142.
- Polya, G. (1957). *How to solve it: a new aspect of mathematical method*. (2da. edición), Princenton: Princenton University Press.

CONOCIMIENTOS DIDÁCTICO-MATEMÁTICO DEL PROFESOR DE SECUNDARIA SOBRE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Carlos Omar Cárdenas Estrella

Rosa Cecilia Gaita Iparraguirre

a19960132@pucp.edu.pe , cgaita@pucp.edu.pe

Instituto de Investigación sobre Enseñanza de la Matemáticas, IREM-PUCP, Perú

Resumen

Este taller tiene como finalidad que los participantes reconozcan la diversidad de objetos matemáticos que se movilizan al abordar problemas sobre Sistemas de Ecuaciones Lineales (SEL). Propondremos a los profesores participantes situaciones en contextos intra y extra matemáticos que involucran los SEL. Para el análisis, nos apoyaremos en un significado de referencia institucional, así como algunos indicadores sobre los conocimientos del profesor de matemática, en las dimensiones Matemática (conocimiento común y ampliado) y Didáctica (faceta epistémica y ecológica), referente al objeto en estudio, basados en el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM). Como resultado, esperamos que se reconozcan los diversos contextos en donde aparecen los SEL en la formación de un estudiante de educación secundaria y que ello brinde al docente elementos para el diseño de clases sobre este tema.

Palabras clave: Conocimiento didáctico-matemático, Faceta epistémica, Faceta ecológica, Significado de referencia,

Introducción

En un trabajo previo (Cárdenas, 2018) se realizó un estudio sobre los SEL, en el cual se propusieron indicadores acerca del conocimiento ideal que debería tener un profesor de matemática cuando aborda situaciones relacionadas a este objeto matemático. Dicho trabajo se enmarcó en el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) desarrollado por Pino-Fan y Godino (2015), que organiza el conocimiento del profesor de matemática en tres dimensiones: Matemática, Didáctica y Meta didáctico-matemático y proponen subcategorías, de modo que se permita identificar mejor los conocimientos en las prácticas matemáticas y didácticas que deben desarrollar los maestros.

De otro lado, existen muchos temas en matemática con una gran riqueza que permiten establecer relaciones con otros, o problemas que admiten diversos métodos de solución o representación, los cuales luego deben ser justificados; sin embargo, son escasas las ocasiones en las que en la formación del profesor de matemáticas se discuten estos aspectos. Así, las

justificaciones de los métodos no forman parte del discurso del profesor, pese a que en su formación inicial pudo haber llevado cursos en los que se encuentran dichas argumentaciones como, por ejemplo, un curso de Álgebra Lineal. Además, muchas veces el conocimiento en el horizonte matemático no suele conectarse con el conocimiento común y se asume que ese tránsito es trivial.

Este taller buscará hacer explícito todos los objetos involucrados en las prácticas matemáticas que se desarrollan cuando se abordan problemas que involucran SEL. Esto se hará teniendo en cuenta aspectos ecológicos identificados en el Currículo Nacional en donde se describen estándares y competencias matemáticas. Será fundamental también identificar, como parte del conocimiento didáctico matemático del profesor, en la dimensión epistemológica, los problemas, conceptos, lenguajes, procedimientos, proposiciones y argumentaciones involucrados al abordar situaciones sobre SEL.

Objetivos

El presente taller tiene como finalidad la identificación del conocimiento que tienen los profesores de matemática en servicio de educación secundaria, sobre los SEL, en consideración a las dimensiones Matemática y Didáctica, contempladas por el modelo del CDM. Así mismo, pretende incidir en sus prácticas cuando aborden problemas relacionados con este tema.

En la dimensión Matemática se desea reconocer el Conocimiento Común del Contenido y el Conocimiento Común Ampliado; el primero considera los conocimientos que necesita el profesor para resolver problemas propuestos en los libros o en planes de estudio de un nivel educativo; el segundo, implica los conocimientos que tiene el profesor para relacionar el objeto actual con otros que se ven posteriormente en el plan de estudio.

En la Dimensión Didáctica se considerarán otro tipo de conocimientos relacionados con el diseño, implementación y evaluación de su propio proceso de enseñanza. De las seis facetas que contempla el modelo del CDM se pondrá especial atención a la faceta Epistémica que se relacionará con el conocimiento matemático en la educación secundaria peruana y como se presentan los objetos primarios (los problemas, los lenguajes, los procedimientos, las definiciones, las propiedades y los argumentos). La segunda faceta considerada será la ecológica, la cual será abordada cuando se indague sobre qué tanto conoce el profesor los aspectos relacionados con la organización del plan de estudio en el nivel donde se desarrolla y qué relación tienen los SEL con otros objetos matemáticos. Para ello, se tendrá en consideración el Currículo Nacional (PERÚ, 2016), que organiza los temas por ciclos, niveles y grados.

Así también, se desea que el profesor tenga herramientas adecuadas cuando planifique sus sesiones de clase y de esa manera pueda relacionar objetos previos y posteriores a los SEL, motivando en el alumno el aprendizaje y activando los objetos primarios relacionados a situaciones sobre nuestro objeto, por ejemplo, distinguir diferentes representaciones (verbal, algebraica, gráfica, tabular, figural, matricial), reconocer definiciones, aplicar métodos de solución (los cuales en sí se direccionan a reducir el sistema de ecuaciones para un tratamiento más fácil de entender), aplicar y justificar propiedades (fundamentalmente para SEL de 2 o 3 variables).

Diseño e implementación del taller

Para el diseño del taller nos apoyaremos de algunas cuestiones que proponen Pino-Fan y Godino (2015) y Vasco (2015), así como en situaciones e indicadores identificadas en el trabajo de Cárdenas (2018) sobre los SEL.

Para desarrollar el taller se proponen las siguientes etapas:

Etapas:

Etapas:

Etapa 1: Aplicación de cuestionario

Se brindará un cuestionario introductorio para conseguir información general del profesor acerca de su formación y experiencia docente; saber sobre su conocimiento respecto a los SEL y su relación con otros temas dentro de la matemática o fuera de ella; así como cuánto conoce del Currículo Nacional (PERÚ, 2016) al abordar diversas situaciones. (Anexo 1). Deseamos analizar qué tanta relación tiene su experiencia docente con el conocimiento matemático como ecológico.

Etapas:

Etapa 2: Presentación de actividades

Se presentarán actividades sobre los SEL cuyo objetivo será que los profesores reconozcan el potencial que estas brindan en términos de aprendizajes dada la diversidad de objetos involucrados. Las preguntas están enfocadas a la utilización de su conocimiento matemático sobre situaciones en contextos intra-matemáticos, donde debe considerar cambios de lenguaje, uso de métodos, aplicación y justificación de propiedades (Anexo 2).

Etapas:

Etapa 3:

En la segunda sesión, se discutirá sobre la diversidad de contextos (extra-matemáticos) abordados en la secundaria, donde se hace necesario resolver un SEL, tanto en contextos intra-matemáticos (Aritmética, Álgebra, Geometría) y extra-matemático (Física, Química). (Anexo 3).

Etapas:

Etapa 4:

Se hará un cierre en donde se discutirá sobre la riqueza que presentan los problemas que involucran los SEL para desarrollar la competencia asociada a la resolución de problemas de regularidad, equivalencia y cambio, así como sobre su doble rol: como instrumento y como objeto de estudio.

Resultados esperados

Como ya se mencionó, el taller tiene una doble finalidad; por un lado, identificar el conocimiento didáctico matemático que poseen profesores de matemáticas de secundaria en relación a los SEL y, por otro lado, que los docentes amplíen dichos conocimientos, a partir de la identificación de los objetos primarios y del reconocimiento de los múltiples contextos de uso en donde se requiere resolver un SEL.

Para analizar dicho conocimiento, se tendrán en cuenta los indicadores propuestos por Cárdenas (2018), para identificar el conocimiento matemático común y el conocimiento matemático en el horizonte matemático o ampliado del profesor, siempre relacionado a los SEL. En la tabla 1, se describen las actuaciones que se espera muestren los profesores participantes en el desarrollo del taller.

Tabla 1

Indicadores del conocimiento del profesor sobre sistemas de ecuaciones lineales

INDICADOR	DESCRIPCIÓN
1. Reconoce si un problema requiere de sistemas de ecuaciones lineales.	Identifica si la situación requiere necesariamente del planteamiento de un SEL para su solución.
2. A partir de un enunciado, plantea un sistema de ecuaciones lineales.	Plantea correctamente un sistema de ecuaciones lineales, definiendo incógnitas y coeficientes. Reconoce que ese proceso implica cambiar de una representación no algebraica a una que sí lo es.
3. Resuelve un sistema de ecuaciones lineales, usando algún método.	Emplea un método de solución adecuado para resolver el SEL.
4. Interpreta la solución del sistema de ecuaciones lineales como solución del problema inicial.	Retoma el enunciado inicial e interpreta la respuesta en ese contexto, reconociendo los casos en los que la solución del sistema, no satisface el problema inicial.
5. Identifica diversos temas en los que se requiere resolver un SEL.	Relaciona los SEL con otros temas. Por ejemplo, reconoce que problemas en los siguientes contextos pueden dar origen a un SEL: Conjuntos, Divisibilidad, Proporcionalidad, Regla de Interés, Sucesiones, Polinomios, Fracciones algebraicas, Binomio de Newton, Funciones, Programación Lineal, ángulos, triángulos, Cuadriláteros, Polígonos, Geometría Analítica. También reconoce que pueden ser necesarios en contextos extra-matemáticos tales como Vectores, Cinemática, Estática, Dinámica y Reacciones químicas.
6. Identifica conocimientos de otros temas que usan sistemas de ecuaciones lineales.	Conoce definiciones y propiedades de otros temas intra o extra-matemáticos que necesitan de los sistemas de ecuaciones lineales cuando resuelve situaciones en dichos temas. Por ejemplo, conceptos de programación lineal o geometría analítica.
7. Identifica lenguajes empleados al resolver SEL.	Reconoce los distintos lenguajes involucrados en la solución de un SEL: verbal, algebraico, gráfico, tabular, figural, matricial, etc.
8. Identifica definiciones sobre a SEL.	Reconoce definiciones de temas previos tales como ecuación lineal, intercepto, conjunto solución, así como definiciones

relacionadas con los SEL y con temas que son posteriores a este objeto.

9. Reconoce qué variables didácticas pueden ser modificadas y generar cambios de estrategias en la solución de problemas sobre SEL.	Identifica elementos necesarios al resolver sistemas de ecuaciones lineales, que, al ser modificados, propician situaciones que generen nuevos desafíos. Por ejemplo, los parámetros del sistema (coeficientes de las incógnitas o términos independientes); la cantidad de ecuaciones e incógnitas, para analizar el tipo de sistema mostrado.
10. Reconoce similitudes y diferencias de los métodos de solución de los SEL.	Distingue entre los diversos métodos, como el método de sustitución, igualación, eliminación gaussiana y otros, reconociendo la conveniencia de usar uno de ellos.
11. Justifica los métodos empleados en la solución de problemas sobre SEL.	Justifica los métodos empleados en la solución, a partir de propiedades del álgebra lineal, reconociendo condiciones para la existencia de soluciones del SEL.

Fuente: Cárdenas (2018, p.134)

Consideraciones finales

El trabajo desarrollado pretende mostrar que es indispensable que un profesor de matemáticas posea conocimientos comunes para la resolución de los problemas, en particular para los SEL, pero que además debe tener otros conocimientos propios de su profesión, los cuales están asociados a los conocimientos didáctico-matemáticos.

Finalmente, para complementar este trabajo, sería interesante realizar un trabajo en aula en el que se exploren las facetas cognitiva y afectiva, para ello, se deben elaborar sesiones de aprendizaje con situaciones que requieren de los SEL, en las cuales se identifiquen las dificultades y errores que presentan los estudiantes y de qué manera las interacciones con el profesor permiten afrontarlas. Así, para el desarrollo de las facetas mediacional e interaccional sobre los SEL, se pueden establecer cuáles deben ser las funciones del profesor e identificar recursos que podrían emplearse para el estudio de los SEL.

Referencias

- Cárdenas, C. (2018). *Identificación del conocimiento didáctico-matemático, en la faceta epistémica y ecológica, del profesor de educación secundaria sobre los sistemas de ecuaciones lineales*. Lima: (Tesis de maestría) Pontificia Universidad Católica del Perú. Obtenido de <http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/12090>
- PERÚ, Ministerio de Educación del. (2016). *Currículo Nacional de la Educación Básica*. Lima, Perú: MINEDU. Obtenido de <http://www.minedu.gob.pe/curriculo/>
- Pino-Fan, L., y Godino, J. (2015). Perspectiva Ampliada del Conocimiento Didáctico-Matemático del profesor. *Paradigma*, XXXVI(1), 87-109. Obtenido de <http://revistas.upel.edu.ve/index.php/paradigma/article/view/2662/1274>

Vasco, D. (2015). *Conocimiento especializado del profesor de álgebra lineal: un estudio de casos en el nivel universitario*. Huelva, España: (Tesis de doctorado). Universidad de Huelva. Obtenido de http://rabida.uhu.es/dspace/bitstream/handle/10272/11901/Conocimiento_especializado_del_profesor_de_algebra.pdf?sequence=2

ANEXO 1

CUESTIONARIO INICIAL

1. ¿Cuál es su formación académica?
2. ¿Trabaja o trabajó en colegio, durante cuánto tiempo?
3. ¿Trabaja o trabajó en un centro de educación superior, durante cuánto tiempo?
4. ¿Ha recibido cursos de didáctica o pedagogía en matemática?
5. ¿Qué cursos suele enseñar?
6. Según su experiencia ¿en qué grados se enseña el tema de sistemas de ecuaciones lineales?
7. Según el Currículo nacional, ¿en qué grados debería enseñarse el tema de sistemas de ecuaciones lineales?
8. Sobre los SEL de 2×2 , ¿cuántas soluciones puede presentar? ¿qué métodos se pueden emplear al resolverlo?
9. Señale qué conceptos o conocimientos previos que debería tener un estudiante para estudiar los sistemas de ecuaciones lineales.
10. ¿Considera que los sistemas de ecuaciones lineales tienen relación con otros temas de matemática o de otros cursos? De ser así, indique con cuáles.

ANEXO 2

SESIÓN 1: EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Resolver, graficar e interpretar, los siguientes sistemas lineales de incógnitas x e y :

(a) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2x + y = 10 \\ 2x + 2y = 20 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x + y = 7 \\ 3x + 3y = 5 \end{cases}$

2. Un kilogramo de café de primera calidad y un kilogramo de café de segunda calidad cuesta S/. 26. Se mezcla 10 kg de primera con 20 kg de segunda. Si se hubiera mezclado 20 kg de primera con 10 kg de segunda, el precio medio hubiera sido S/.2 mayor. ¿Cuáles son los precios de un kilogramo de cada calidad? Grafique, si es posible, e interprete la situación.
3. Dos capitales se diferencian en S/.2 000, el primero se impone al 16% anual y el segundo al 10% semestral. Si al cabo de un año los montos son iguales. Hallar los capitales.
4. Si el polinomio: $P(x; y) = 5x^{n+3}y^{m-2}z^{6-n} + x^{n+2}y^{m-3}z^{n+m}$, el $GR_{(x)} - GR_{(y)} = 3$; $GA_{(P)} = 13$. Hallar el valor de **$2m - n$** .
5. La suma de las medidas de 4 ángulos consecutivos de un hexágono es 500° . Hallar el ángulo que forman las bisectrices interiores de los otros 2 ángulos.
6. Dado el sistema lineal de incógnitas x e y , resolver e indicar para qué valores α el sistema mostrado

$$\begin{cases} 3x + 10y = -4 \\ \alpha x + y = 1 \\ x + 3y = -1 \end{cases}$$

- Tiene solución única.
- Tiene infinitas soluciones.
- No tiene solución

7. Resuelva el sistema lineal de incógnitas x ; y e z

$$\begin{cases} 2x - 3y - 2z = 8 \\ 3x + 2y + 5z = -7 \\ 2x + 2y - 3z = 22 \end{cases}$$

ANEXO 3

SESIÓN 2: PROBLEMAS PROPUESTOS

1. A partir de los siguientes casos, exprese un enunciado (representación verbal) de dicho caso:

a. Algebraica:

$$3x + 4y + 5z = 25$$

$$4x + 3y + 4z = 22$$

$$2x + y + 6z = 20$$

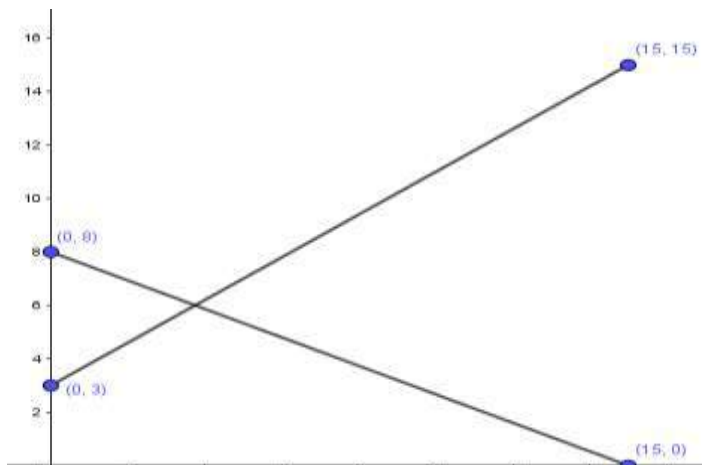
b. Matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{cccc} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \end{array} \right]$$

c. Tabla

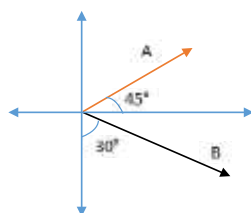
Total puntos	Nº tiros de 2	Nº tiros de 3
17	7	1

d. Gráfico

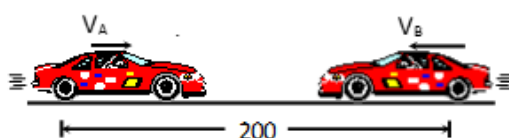


2. Si $2a - 3b = -3$ y que además que $z = \frac{a+b+2i}{a-b-3i}$ es un número real puro, hallar $a-b$
3. Encuentre la ecuación cartesiana de la circunferencia que pasa por los puntos $(3; 1)$, $(1; 6)$ y $(-2; -1)$. Dé como respuesta la suma de las coordenadas de su centro con su radio.

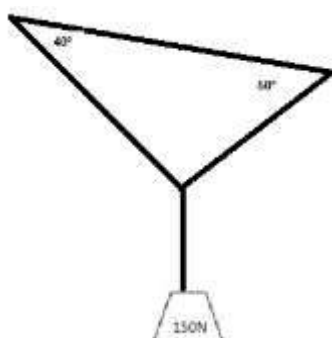
4. Dada la gráfica, encontrar los módulos de los vectores A y B, si la resultante es un vector horizontal en el semi-eje positivo "X" igual a 20 u. ($|A| = 10$ u; $|B| = 15$ u)



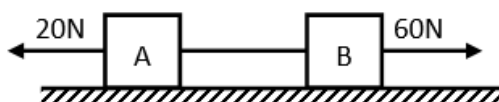
5. Dos móviles están separados inicialmente 200Km y viajan en sentidos opuestos. Si las velocidades son 8 Km/h y 17 Km/h. Hallar la distancia que recorre cada uno y el tiempo que demoran antes del encuentro



6. Un bloque de 150 N de peso se encuentra colgado según el sistema en equilibrio. Hallar la tensión de las cuerdas.



7. Hallar la tensión de la cuerda que une los bloques y la aceleración del sistema si se conoce que la masa del cuerpo A es 9kg y del bloque B es 11kg



8. Balancear con método algebraico la siguiente reacción química:



9. Si dos átomos "A" y "B" tienen igual número de neutrones, la suma de sus protones es 76 y la diferencia de sus números de masa es 4. ¿Cuántos protones tiene "A"?

10. Para cada proposición indique si es VERDADERO o FALSO. Justifique cada uno de los siguientes enunciados:

Para el siguiente sistema de ecuaciones lineales
$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f' \end{cases}$$

- a. Si $\frac{a}{d} \neq \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$, el sistema es compatible determinado.
- b. Si $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$, el sistema es compatible indeterminado.
- c. Si $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$, el sistema es incompatible.

Si se tiene un sistema de "n" incógnitas con "n" ecuaciones.

- d. Cuando el determinante del sistema es diferente de cero, el sistema es compatible determinado.
- e. Cuando el determinante del sistema es igual a cero, el sistema puede ser compatible indeterminado o incompatible.

UNA REFLEXIÓN SOBRE EL USO DE LA GEOMETRÍA DINÁMICA EN EL CONTEXTO ESCOLAR

Guadalupe Morales Ramírez*

Norma Rubio Goycochea**

gmorales28@alumnos.uaq.mx, nrubio@pucp.edu.pe

Universidad Autónoma de Querétaro, México*

Instituto de Investigación sobre Enseñanza de la Matemáticas, IREM-PUCP, Perú**

Resumen

Este taller tiene como objetivo que los profesores de matemáticas de secundaria o nivel medio superior (formación y profesionales) se familiaricen y reflexionen con el uso del software de geometría dinámica, mediante el desarrollo de actividades en el contexto de los teselados. Dichas actividades están orientadas a promover la construcción de teselados regulares aplicando ciertas herramientas del GeoGebra y considerando la conceptualización de las transformaciones isométricas (traslación, rotación y reflexión o simetría axial). Se espera que los profesores reflexionen sobre su práctica, objetos y procesos matemáticos; es decir, sobre aquellos conocimientos didáctico-matemáticos que ponen en juego cuando utilizan herramientas de geometría dinámica en el aula, ya que el uso del software puede favorecer u obstaculizar el proceso de aprendizaje de las matemáticas de sus alumnos.

Palabras clave: Geometría dinámica, Teselados, GeoGebra, Conocimiento Didáctico-Matemático

Introducción

La evolución tecnológica ha venido a transformar prácticas educativas, sobre todo, en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Araya, 2007). En este sentido, la tecnología puede ser una gran herramienta para promover el razonamiento crítico y analítico en los estudiantes. De acuerdo con Ursini (2006) el uso de la tecnología como apoyo para el aprendizaje de las matemáticas, proporciona retroalimentación inmediata, lo que permite al alumno descubrir sus errores, analizarlos y corregirlos. Sin embargo, es necesario que los profesores sean conscientes de los objetos matemáticos que intervienen de manera explícita e implícita cuando incorporan el uso de tecnología digital, ya que son ellos quienes fungen el papel de mediadores entre el alumno y el uso de esta tecnología.

Actualmente las instituciones educativas de los diferentes niveles demandan competitividad a los docentes en el desarrollo de sus prácticas matemáticas, pues se espera que incorporen recursos tecnológicos que faciliten el aprendizaje del alumno, ya que además de dominar

competencias disciplinares también se requiere que amplíen sus conocimientos en la integración de recursos didácticos que fomenten y generen conocimiento en el alumno. De acuerdo con Godino (2009, p.14) “el conocimiento disciplinar no es suficiente para asegurar competencia profesional, siendo necesarios otros conocimientos de índole psicológica (cómo aprenden los estudiantes, conocer los afectos, dificultades y errores característicos). Los profesores deberían ser capaces también de organizar la enseñanza, diseñar tareas de aprendizaje, usar los recursos adecuados, y comprender los factores que condicionan la enseñanza y el aprendizaje”. En el estudio propuesto por Font, V. et al. (2011), plantea una postura sobre las competencias genéricas y específicas que debiera desarrollar el profesor de secundaria de matemáticas, analizadas desde tres niveles de desarrollo. Una de las competencias genéricas que plantean está relacionada con “utilizar la tecnología digital en los ámbitos profesional y social como herramienta para un desempeño profesional adecuado y un desarrollo permanente”. Esta competencia analiza el proceso de incorporación e implementación de la tecnología digital para el desarrollo de materiales didácticos o de referencia en la preparación de las clases de matemáticas del profesor, así como el uso que le da en el aula mediante el desarrollo de actividades y su interacción con los alumnos.

Considerando lo anterior, uno de los recursos digitales que favorece la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas es la geometría dinámica, la cual permite la exploración y manipulación de objetos matemáticos a través de su herramienta de arrastre, permitiendo validar y explorar construcciones para producir y validar conjeturas (Arzarello, F., C. Micheletti, F. Olivero y O. Robutti, 1998; Olivero, 2003). En este sentido, el profesor debe reflexionar sobre su propia práctica matemática cuando integra la geometría dinámica, ya que va más allá de solo realizar construcciones o representaciones geométricas, pues los procesos matemáticos están implicados de forma longitudinal al utilizar este recurso tecnológico. Por tanto, la geometría dinámica viene a ser un medio semiótico que permite movilizar conocimientos con el fin de provocar la interiorización de objetos matemáticos.

En este taller centramos nuestra atención en el software de geometría dinámica GeoGebra, el cual fue implementado poco antes del año 2001 y está constituido principalmente por un “procesador geométrico” y un “procesador algebraico”, capaz de combinar representaciones gráficas, simbólicas y algebraicas. Este software interactivo concentra la geometría con herramientas del álgebra y cálculo generando un ambiente de geometría dinámica; además, puede ser empleado para el estudio de la física, así como otras disciplinas.

El software GeoGebra es útil como herramienta tecnológica digital en los procesos de enseñanza y aprendizaje de matemáticas, ya que permiten la construcción geométrica de algún objeto matemático que el alumno ha interiorizado o que debe de aprender mediante la manipulación y exploración de sus componentes.

El software GeoGebra se caracteriza por lo siguiente:

- Es un software matemático interactivo libre para la educación.
- Se encuentra disponible para múltiples plataformas, en distintas versiones de Windows, Linux, iOS, Android, etc.

- Ofrece hojas de cálculo y vistas que permiten alternar el uso de la aritmética, las representaciones algebraicas y gráficas, así como el cálculo estadístico.

El presente taller pretende crear un ambiente donde los profesores asistentes se familiaricen y reflexionen sobre las implicaciones existentes al momento de incorporar en sus clases el uso de la tecnología digital, en este caso la geometría dinámica (Geogebra). Principalmente, relacionados con aquellos objetos matemáticos previos, intervinientes y emergentes en la construcción de teselados regulares. Para el logro de este propósito se resolverán situaciones, donde se promueve la construcción de teselados regulares utilizando herramientas de transformaciones isométricas (traslación, rotación y reflexión) del Geogebra. Además, se pretende generar un ambiente reflexivo sobre las construcciones que se desarrollen, los objetos matemáticos emergentes e intervinientes en el desarrollo de su práctica matemática y las dificultades que pueden manifestar los alumnos cuando se aplican en el aula de clases.

Consideraciones teóricas

Las instituciones educativas están en continua búsqueda de que sus integrantes sean más competentes en diversas áreas de estudio, principalmente en el campo de las matemáticas, donde el principal actor sea el alumno, quien debe resolver problemas matemáticos que involucren procedimientos e interpretación de datos que los lleve a generar argumentaciones analíticas; es decir, competencias específicas y transversales correspondientes al saber matemático. Actualmente existe un acuerdo generalizado sobre el nivel de competencias que debe tener el profesor de matemáticas, estas competencias deben ser necesarias y suficientes para generar ambientes de aprendizajes enriquecidos por situaciones problemas y recursos didácticos que promuevan un aprendizaje significativo. Para ello, es conveniente describir las prácticas matemáticas como aquellas acciones operativas y discursivas descritas por el individuo o por la institución. Para el caso del profesor, diremos que son prácticas matemáticas personales, pues involucra todo lo que pueda hacer y decir referente al objeto matemático; es decir, el tipo de lenguaje, los procedimientos, las argumentaciones o proposiciones. Mientras que para las prácticas matemáticas institucionales se refiere al sistema de prácticas promovidas al resolver un campo de problemas, que a su vez son compartidas por una comunidad (Godino, Batanero y Font, 2007).

El Conocimiento didáctico matemático del profesor

Para que el profesor reflexione sobre sus propias prácticas matemáticas es necesario que sea consciente de sus conocimientos y de sus habilidades, en este caso, las que pone en juego cuando incorpora herramientas tecnológicas en el desarrollo de sus prácticas matemáticas. Para ello, hemos considerado el modelo del Conocimiento Didáctico Matemático (CDM) del profesor propuesto por Godino (2009) dentro del marco teórico del Enfoque Ontosemiótico (EOS). Dicho modelo constituye seis facetas (epistémica, cognitiva, mediacional, interaccional, afectiva y ecológica) o dimensiones que involucran el proceso de enseñanza y aprendizaje con relación a tópicos específicos de matemáticas. De esta forma asumimos este modelo como:

“la trama de relaciones que se establecen entre los distintos objetos matemáticos primarios (y los procesos de significación), que se ponen en juego en las prácticas operativas y discursivas del profesor, realizadas con el fin de resolver un determinado campo de situaciones

problemáticas para implementar procesos de instrucción eficaces (idóneos) que faciliten el aprendizaje de los estudiantes” (Pino-Fan, Godino y Font, 2011, p. 144).

La faceta epistémica corresponde a distribución a lo largo del tiempo de enseñanza y aprendizaje en relación con el significado institucional implementado (problemas, lenguajes, procedimientos, definiciones, propiedades, argumentos). La dimensión cognitiva corresponde al desarrollo de los significados personales (aprendizajes). Mientras que la faceta afectiva tiene que ver con la distribución de los estados afectivos (actitudes, emociones, afectos, motivaciones) de cada alumno con relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido. La interaccional se centra en las interacciones entre el profesor y los estudiantes orientadas a la fijación y negociación de significados. La faceta mediacional se relaciona con la distribución de los recursos tecnológicos utilizados y asignación del tiempo a las distintas acciones y procesos. Finalmente, la faceta ecológica corresponde al sistema de relaciones con el entorno social, político, económico, etc. que soporta y condiciona el proceso de estudio.

Nuestro interés está centrado en la faceta mediacional sin dejar de lado las otras facetas, ya que son los conocimientos que debe poner en juego el profesor para potenciar las herramientas tecnológicas durante su práctica matemática. En este sentido, debe generar una configuración didáctica que involucre el papel del alumno en relación con el contenido o la tarea a realizar, así como el modo de interacción que se da entre alumno- alumno, alumno-recursos o materiales que se requieren en la resolución de la tarea matemática y el tiempo asignado.

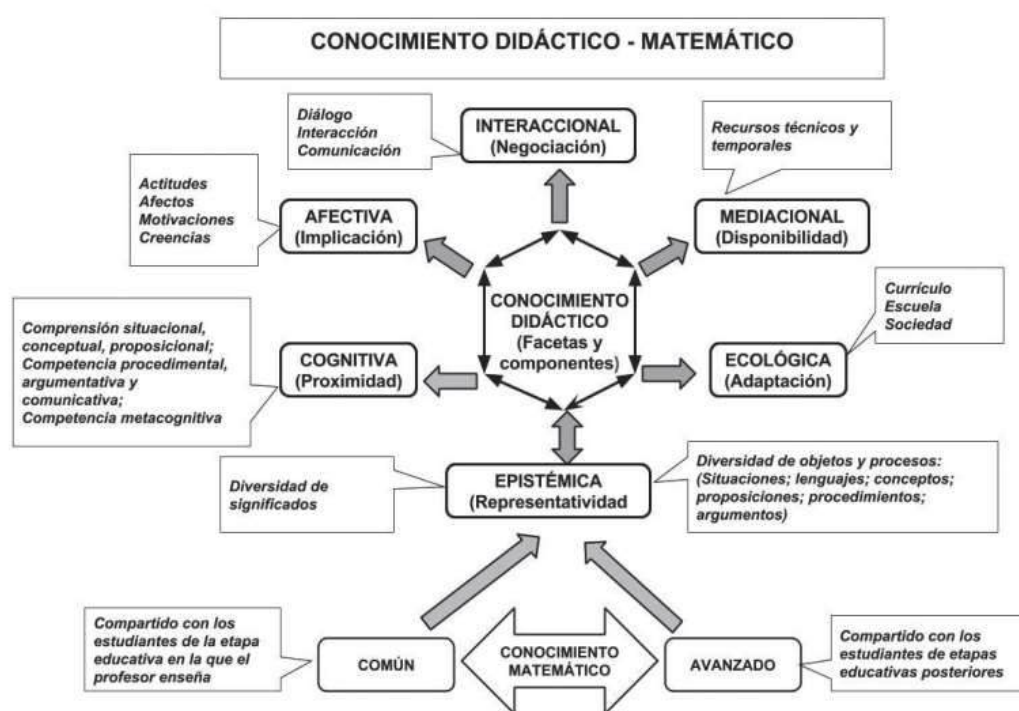


Figura 1: Facetas y componentes del Conocimiento Didáctico Matemático

Fuente: Godino, Batanero, Font y Giacomone (2016, p. 292)

Cabe mencionar que estas facetas se relacionan entre sí y todas forman parte de un conocimiento eficaz del profesor, pues es quien debe movilizar los significados matemáticos a

través de ciertas herramientas sin perder de vista el contenido matemático que involucra el incorporar cualquier recurso tecnológico.

Diseño e implementación del taller

Las actividades a desarrollar por los profesores asistentes al taller, está compuesto por una serie de situaciones que involucra la aplicación de transformaciones isométricas, para la construcción de teselados utilizando polígonos regulares, usando ciertas herramientas del software Geogebra. El taller se ha diseñado para ser desarrollado en dos sesiones de 90 minutos cada una, mismas que serán guiadas por un moderador. En la primera sesión se abordará el desarrollo de actividades por parte de los profesores asistentes con el fin de que ellos se familiaricen con las herramientas necesarias para la construcción de teselados, así como la conceptualización de estas. Mientras que la segunda sesión se centrará en la reflexión de la práctica matemática.

Sesión 1: El desarrollo de tareas sobre la construcción de teselados

Esta primera sesión del taller corresponde a la práctica operativa del profesor mediante la resolución de tareas que involucran el uso del software Geogebra. La primera sesión se divide en dos partes:

- La primera indaga sobre la construcción de teselados regulares utilizando triángulo equiláteros, cuadrados y hexágonos regulares mediante traslación, reflexión o simetría axial y rotación respectivamente. Dichas construcciones se espera que las realicen de manera individual mediante la exploración y manipulación del software, con el fin de que se familiaricen con ciertas herramientas requeridas para la construcción y conceptualicen las transformaciones isométricas.
- La segunda parte de esta primera sesión corresponde al trabajo colaborativo entre profesores, pues se les solicitará que se reúnan en equipos de tres personas para que procedan a realizar la construcción de un teselado semirregular utilizando la combinación de los tres polígonos regulares utilizados en la primera parte (triángulo equilátero, cuadrado, hexágono regular), así como la aplicación de herramientas de transformaciones isométricas correspondientes a comandos del software Geogebra.

Sesión 2: La reflexión de la práctica matemática

La segunda sesión corresponde a la reflexión de la práctica matemática de los profesores asistentes, considerando su respectiva práctica realizada en la resolución de tareas asignados en la sesión anterior y el uso de herramientas del software Geogebra. Para ello, se abordan los siguientes aspectos:

- Se presentará la resolución de cada tarea por parte del moderador relacionando aquellos objetos emergentes e intervinientes en la práctica de construcción, con el fin de que los profesores analicen sobre si estos fueron tomados en cuenta en su práctica matemática.
- Se analizarán los posibles casos de solución sobre la construcción del teselado regular donde se involucraron tres polígonos regulares (triángulo equilátero, cuadrado y hexágono regular) evidenciando los posibles conflictos cognitivos o semióticos, así como aquellas herramientas que fueron necesarias para la construcción del teselado semirregular.

Resultados esperados

Durante el desarrollo del taller, los profesores deberán reflexionar sobre la práctica matemática, así como de los objetos y procesos matemáticos que estuvieron presentes en el desarrollo de las actividades y aquellos que deben tomarse en cuenta cuando se incorpora el uso de la geometría dinámica. Se espera que los participantes reflexionen sobre:

- Valorar la pertinencia y la importancia de integrar geometría dinámica en la resolución de problemas, esto a su vez vinculado con el significado de referencia y pretendido de sus estudiantes.
- Identificar objetos y procesos matemáticos, como el de argumentación e interiorización que se ven favorecidos al incluir el uso de estas herramientas tecnológicas en la enseñanza de las matemáticas.
- Identificar ciertos conflictos epistémicos y semióticos que pudieran tener los alumnos cuando resuelven problemas que involucre la tecnología digital.
- Reflexionar sobre cómo incorporar la herramienta de geometría dinámica (Geogebra), de tal manera que se logren aprendizajes significativos, sin que este sea un obstáculo en la práctica de sus estudiantes.

Reflexiones finales

Este taller puede ser provechoso para los profesores en formación como los que se encuentran en servicio, ya que les permitirá analizar sus propias prácticas y al mismo tiempo valorar sobre qué situaciones incorporar en sus clases de matemáticas utilizando la geometría dinámica. Así como también familiarizarse con las bondades que ofrece el software Geogebra para desarrollar situaciones en el contexto geométrico. Por otro lado, les permitirá tener un camino por el cual sus alumnos logren aprendizajes significativos y a su vez el recurso didáctico aporte creatividad y motivación para que el desarrollo de sus clases. Sin embargo, para ello se requiere que el profesor esté dispuesto a modificar sus prácticas matemáticas y comprometerse con el desarrollo de competencias docentes.

Referencias

- Araya, R. G. (2007). Uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*.
- Arzarello, F., C. Micheletti, F. Olivero y O. Robutti (1998), "Dragging in Cabri and modalities of transition from conjectures to proofs in geometry", *pme*, vol. 22, núm. 2, pp. 32-39.
- Font, V. et al. (2011). Competencias profesionales de los futuros profesores de matemáticas de secundaria. In *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación de la SEIEM. XIV Simposio de la SEIEM* (pp. 333-342).
- Godino, J., Batanero, C. Font, V. (2007). *Un enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39 (1-2), pp. 127-135

- Godino, J. D., Batanero, C., Font, V. y Giacomone, B. (2016). Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 285-294). Málaga: SEIEM.
- Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. Unión. *Revista Iberoamericana de la educación matemática*, 20, 13- 31.
- Olivero, F. (2003), *The Proving Process within a Dynamic Geometry Environment*, tesis de doctorado, University of Bristol.
- Pino-Fan, L., Díaz Godino, J., & Font Moll, V. (2011). Faceta Epistémica del conocimiento didáctico matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, 13(1). Recuperado de <https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/4423/4025>
- Ursini, S., (2006). Enseñanza de las Matemáticas con Tecnología (EMAT), en T. Rojano. Dirección General de Materiales de la Subsecretaría de Educación Básica, de la SEP. *Enseñanza de la Física y las Matemáticas con Tecnología: Modelos de transformación de las prácticas y de la interacción social en el aula* (25-42) México: SEP.

REPORTES DE INVESTIGACIÓN

LA CREACIÓN DE PROBLEMAS EN GESTIÓN DE DATOS Y LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE SECUNDARIA

Augusta Osorio Gonzales*

Sara Mónica Sáenz Chaparro**

Yolanda Gladys Alhuay Albites**

Norma Lidia Olivares Acuña**

arosorio@pucp.edu.pe, monicasaenzcha@gmail.com, yolanda.alhuay@ugel07.gob.pe,
nolivaresa@ugel07.gob.pe

Instituto de Investigación sobre Enseñanza de la Matemáticas, IREM-PUCP, Perú *
I.E. Nicanor Rivera Cáceres (Perú), UGEL 07, Perú**

Resumen

La investigación que les presentamos tiene como cometido llegar a medir el efecto que tiene un proceso de formación profesional en la competencia creación de problemas para la enseñanza de la gestión de datos, en profesores del nivel secundaria. En esta etapa de la investigación, se están analizando los primeros problemas creados por los profesores que se encuentran capacitándose en la competencia Resuelve problemas en gestión de datos e Incertidumbre con uno de los grupos de investigación del IREM-PUCP. Se busca describir las características de estas primeras situaciones problema e ir acumulando información con próximas creaciones para poder determinar una escala de medición que nos permita establecer el grado de desarrollo alcanzado al finalizar el proceso de formación continua.

Palabras clave: Estadística, ciclo PPDAC, creación de problemas

Introducción

El grupo de enseñanza de la Estadística y Probabilidad en la EBR del Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas (IREM -PUCP) de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP), viene laborando desde el 2012 en diferentes proyectos de investigación relacionados con la formación continua de profesores en Estadística y Probabilidad. El trabajo de formación se ha centrado en el nivel primario y ha tenido como fruto un grupo de siete profesores capacitados en estas áreas en la UGEL Arequipa Sur. El paso natural es iniciar el mismo proceso con profesores del nivel secundario, para lo cual se han iniciado durante los 2019 talleres de formación con la participación de un grupo 25 profesores de matemática del nivel secundaria de la UGEL 07.

En los talleres relacionados con la gestión de datos, se ha fortalecido las competencias docentes mediante el desarrollo del pensamiento estadístico, tomando del modelo estadístico de Wild y Pfannkuch (1999), específicamente la dimensión 1 de su propuesta; el ciclo de investigación empírica (PPDAC) constituido por cinco etapas: problema, plan, datos, análisis y conclusiones.

Por otro lado, el Ministerio de Educación, en la competencia 25 del Currículo Nacional de la Educación Básica (2016) menciona las etapas de la investigación escolar, sin usar la denominación de ciclo PPDAC; pero introduce este concepto desde las rutas de aprendizaje ¿Qué y cómo aprenden nuestros estudiantes? Para el VI ciclo de matemática (MINEDU, 2015, p.105).

Con la finalidad de poner en práctica lo aprendido en los talleres del IREM-PUCP, algunos profesores de la UGEL 07 han desarrollado el análisis de una situación planteada en la para lo cual se ha usado como herramienta de análisis el ciclo PPDAC, revisado la coherencia con las capacidades y desempeños involucrados, tomados del Currículo Nacional vigente. A partir de los resultados de este análisis, y tomando en cuenta los aportes del doctor Malaspina (2015), quien manifiesta que la creación de problemas no debe verse como una tarea exclusiva de expertos, ni debe considerarse que los problemas a trabajar en clase son únicamente los que figuran en los libros o en internet, sino que crear problemas se convierte en parte fundamental de la tarea docente; los profesores vieron por conveniente realizar modificaciones a la situación analizada hacer propuestas a partir de ellas.

El grupo de investigación del IREM-PUCP a partir de esta experiencia ha visto por conveniente iniciar una investigación, relacionada con el análisis de los problemas creados por profesores de secundaria luego de recibir talleres de formación en gestión de datos y creación de problemas; talleres que buscaban desarrollar el pensamiento estadístico del profesor de matemática del nivel secundario y como consecuencia de sus estudiantes. Los profesores participantes en esta primera parte de la investigación han creado dos problemas: uno por variación y otro por creación, utilizando como herramienta didáctica el ciclo PPDAC y como estrategia de enseñanza la relación de preguntas claves.

Problema de investigación y aspectos teóricos

La investigación que se está iniciando tiene como objetivo general, medir el grado de desarrollo en la creación de problema de un profesor de secundaria expuesto a un proceso de formación profesional continuo en estadística y creación de problemas sobre gestión de datos. Para poder alcanzar este objetivo general debemos cumplir los siguientes objetivos específicos:

Preparar y aplicar un proceso de formación profesional a un grupo de profesores de secundaria, siguiendo el marco del Pensamiento Estadístico de Wild y Pfannkuch (1999).

Describir las características de los problemas en gestión de datos que van creando los profesores en capacitación, a lo largo de todo el proceso de formación.

Establecer una escala de medición que permita medir el grado de desarrollo en la creación de problemas de estos profesores.

Estamos en la ejecución del primer objetivo específico, el cual tiene una duración de alrededor de tres años, e iniciando el trabajo en el segundo objetivo; ambos objetivos se llevarán a cabo en paralelo.

La propuesta del Pensamiento Estadístico de Wild y Pfannkuch (1999), hace referencia a como se actúa y piensa durante el desarrollo de una investigación donde se hace uso de la gestión

de datos. La dimensión 1 de esta propuesta, el ciclo de Investigación (PPDAC), es el que permite ir organizando la investigación a lo largo de cinco etapas que procuran el desarrollo del pensamiento estadístico, Osorio y Advincula (2019). Consideramos que el uso del ciclo PPDAC permite a los docentes: relacionar los diferentes contenidos que se utilizan en gestión de datos, relacionar estos contenidos con los desempeños propuestos en los estándares nacionales de nuestro país, relacionar entre si las diferentes etapas de una investigación empírica e iniciarse en la creación de problemas.

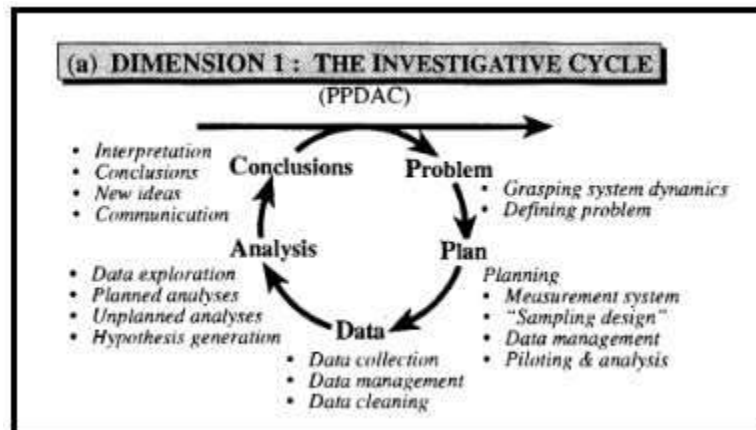


Figura 1. El ciclo de investigación PPDAC

Se ha elaborado una estrategia para que los profesores que se inician en el conocimiento de la herramienta ciclo PPDAC se puedan familiarizar con el rápidamente y también la usen en la creación de sus sesiones de clase. Esta consiste en tener una lista de preguntas clave, en lenguaje cotidiano, que procuren la conexión de cada etapa del ciclo PPDAC con los contenidos y procesos estadísticos que se deben ver en cada etapa (ver figura 2).

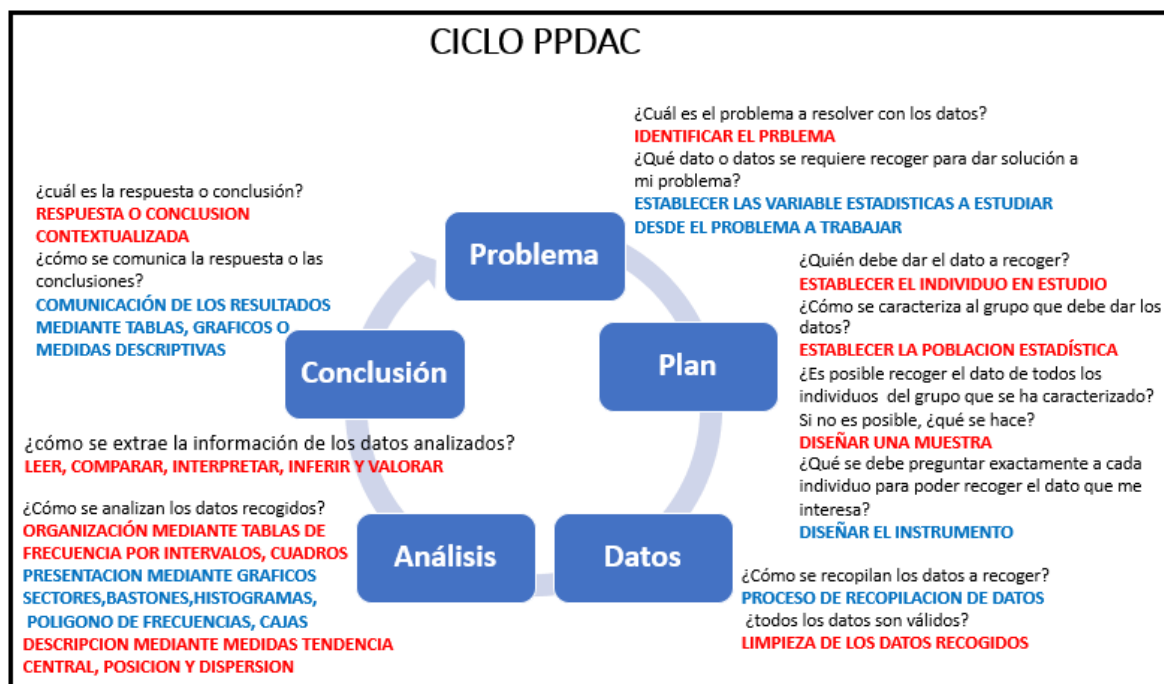


Figura 2. Preguntas claves y su relación con conceptos y procesos estadísticos.

Cada pregunta clave no solo hace conexión con un concepto o proceso estadístico, sino que además permiten que el profesor pueda mantener el hilo de la resolución de la situación problema propuesta a los alumnos en una sesión de aprendizaje.

La idea es que el profesor utilice las mismas pregunta clave o ligeras variaciones de ellas, para que los alumnos puedan realizar el análisis de la situación problema en gestión de datos y los alumnos puedan ir reflexionando sobre los pasos que deben de seguir para lograr su resolución.

Metodología y resultados

Durante los talleres de formación de profesores se dan pauta para utilizar el ciclo PPDAC como una herramienta de análisis de las situaciones propuestas (en libros, cuadernos de trabajo, material de enseñanza o internet) para la enseñanza de estadística en la educación básica.

El fin es determinar, en primer lugar, el grado de estudios al que se dirige la propuesta; luego, utilizarlo para determinar las etapas del ciclo que no son tocadas en la resolución del problema. También se usa para revisar las preguntas que se hacen en la propuesta de la situación problema, pues comparándolas con las preguntas clave, se puede determinar que preguntas clave no se están considerando en la resolución.

Todo esto permitirá a los docentes tener elementos para hacer variaciones de la situación problema analizada y hacer propuesta de mejora de esta, o en algunos casos cambiar el nivel de profundidad que presente la situación analizada. De esta manera, el docente tiene a su disposición una herramienta que le permitirá proponer nuevas situaciones problema a sus alumnos.

El problema original que analizaron los docentes de la UGEL 07 fue la siguiente:

Ana, con mucho esfuerzo, pudo abrir un restaurante. Ahora desea hacer un estudio sobre la ocupación de sus clientes, los platos de comida que prefieren y sus edades.

El primer día tomó los siguientes datos de las primeras 20 personas:

OCUPACIÓN	Cantidad	COMIDA	Cantidad	EDADES	Cantidad
Estudiante	9	Tallarines	6	De 18 a menos de 24	6
Trabajador	8	Arroz con pollo	7	De 24 a menos de 30	4
Casa	3	Cebiche	3	De 30 a menos de 36	2
TOTAL	20	Pescado frito	4	De 36 a menos de 42	3
		TOTAL	20	De 42 a 48	5
				TOTAL	20

Responde:

1. ¿Qué variables estadísticas ha tenido en cuenta para su estudio?
2. ¿Qué porcentaje de las personas prefieren arroz con pollo o cebiche?
3. ¿Por qué crees que agrupó las edades de 6 en 6 para su estudio?

Figura 3. Ficha N° 2 "Resolvamos problemas" 3ro de secundaria (MINEDU, 2017)

Propuesta de la profesora 1.

El problema presentado es creado por variación. Se ha incorporado un problema específico y un propósito (que no existían inicialmente), un cambio de presentación de la situación problemática para una mejor comprensión. Asimismo, se adicionó condiciones y nuevos datos a la información inicial, todo con el fin de presentar al estudiante una situación completa que le permita transitar por los ciclos del pensamiento estadístico.

La variación del problema también exigió que se implemente nuevas preguntas para conducir al estudiante por un camino razonado para la solución del problema presentado.

A continuación, se detalla la justificación de los cambios efectuados en el problema original:

-Para la etapa problema, se incorporó el **problema y el propósito**; el problema para que los estudiantes puedan identificar cual es la necesidad por resolver. También un propósito para darle sentido a la solución del problema en el contexto dado.

-Para la etapa datos, se ha **cambiado** en el problema original la condición de *"el primer día se tomó los datos de las primeras 20 personas"* a *"la información se ha recogido en un día de la semana"*, esto con el objetivo de que la información recogida sea aleatoria y representativa, y no sesgada.

-Se incrementó información de datos recogidos en el número de encuestados de 20 a 32 clientes, porque 20 son los primeros encuestados del primer día; mientras que 32 puede ser el número de encuestados de un día cualquiera de la semana.

El contenido a trabajar ahora es el de medidas de tendencia central y gráfica de histograma para datos agrupados, correspondientes al tercer grado de secundaria.

Entonces la nueva propuesta sería:

Ana con mucho esfuerzo, pudo abrir un restaurante. Ahora desea recoger información sobre las preferencias de sus clientes, porque le preocupa la edad de los clientes que no están conforme con los platos de comida que ofrece, todo ello con el fin de brindar un mejor servicio.

Ana recogió la siguiente información un día de la semana, durante todo el día.

Conformidad de los platos : 40% SÍ 60% NO

COMIDA	Cantidad
Tallarines	6
Arroz con Pollo	7
Cebiche	4
Pescado frito	3
Frijoles/seco	5
Lomo saltado	7
Total	32

EDADES	Cantidad
[18 ; 26[	4
[26 ; 34[	5
[34 ; 42[	8
[42 ; 50[	9
[50 ; 58]	6
Total	32

Responde:

1. ¿Cuál es el problema?
2. ¿Por qué Ana quiere recoger información de sus clientes?
3. ¿Qué variables estadísticas se ha tenido en cuenta para el estudio?
4. ¿Cuál es la muestra? ¿La muestra fue aleatoria?
5. ¿Qué instrumento le permitió a Ana recoger la información? ¿Cuáles serían las posibles preguntas?
6. En el caso de que un cliente, hubiera elegido un plato y escrito su edad, pero no registró su conformidad hacia los platos. ¿Qué decisión tomarías?
7. ¿Cuántos clientes están conforme con el servicio? Y ¿Cuántos no?
8. ¿Cuál es el plato preferido de los clientes? y ¿A qué medida de tendencia central corresponde?
9. ¿Por qué crees que se agrupó las edades de 8 en 8 para su estudio?
10. Elabora una Tabla de frecuencia de las edades de los clientes y determina:
 - a. Las medidas de tendencia central
 - b. Representa los datos en un histograma y analiza los valores de la media, mediana y moda
 - c. ¿Cuál de las medidas de tendencia central representa mejor la edad de los clientes que concurren al restaurante? y ¿Cuál es su valor?
11. ¿Cuáles serían tus conclusiones respecto al problema?

Propuesta de la profesora 2

En el caso de esta profesora, prefirió trabajar una situación problema desde cero. Es decir, crearla sin tomar como punto inicial una situación problema específica. Este es su planteamiento.

Este problema se ha creado con la intención de enfrentar al estudiante a una situación problemática que lo conduzca al desarrollo del pensamiento estadístico a través de preguntas claves pasando por el ciclo del PPDAC. Para la comprensión del problema se ha propuesto una situación problemática donde el estudiante pueda identificar la problemática contextual que consiste en un problema de la realidad general de donde se desprende un problema que puede ser estudiado a través de datos y un tercer elemento que es el propósito. En este problema la problemática contextual está implícita: Estudiantes con bajos promedios. El problema se desprende del general: estudiantes con bajos promedios en el II trimestre del tercer grado A y B de la Institución NRC y el propósito consiste en: motivar a los estudiantes a que mejoren sus logros de aprendizaje. Se ha elegido la variable de estudio "promedio de notas" porque es de interés de los estudiantes y permite involucrarlos en la resolución del problema. El contenido a trabajar es medidas de dispersión correspondiente al tercer grado de secundaria. A continuación, se presenta la situación problemática:

La profesora Belén del tercer grado de secundaria secciones A y B, del área de matemática de la Institución Educativa NRC, después de observar con preocupación los bajos promedios de sus estudiantes en el II trimestre, para motivarlos a que mejoren sus logros de aprendizaje, decide premiar a los tres estudiantes que tuvieron mejor rendimiento, a la sección con más alto promedio y la que tenga notas menos dispersas.

Tabla 1: Notas de los estudiantes del 3ro A con mejor desempeño

	C1	C2	C3	C4	Pro m
Carmen	19	18	15	20	18
Jorge	20	20	16	20	20
Luis	19	14	20	19	18

Tabla 2: Notas de los estudiantes del 3ro B con mejor desempeño

	C1	C2	C3	C4	Pro m
Ana	20	19	19	19	19
Katia	17	18	20	17	18

Tablas 2 y 3: Registro de los logros por sección:

Notas 3ºA	f_i	Notas 3ªB	f_i
[08–10[	3	[11–13[	7
[11–14[	13	[13–15[	10
[14–17[	4	[15–17[	6
[17–20[	5	[17–19[	2
total	25	Total	25

- ¿Cuál es el problema que desea resolver la profesora Belén?
- ¿Cuál crees que podría ser el propósito de recoger esta información para resolver el problema?

- ¿Qué tipo de variables están presente en este estudio?
- ¿Cuál es la población y la muestra en esta situación problemática?
 - ¿Es posible responder el problema observando la tabla 1 y 2 solamente?
 - ¿Qué medida deberías considerar para resolver el problema? ¿Por qué?
 - Promedio o media aritmética
 - Mediana
 - Desviación estándar
 - ¿Cómo representarías los datos de la desviación estándar para ambas aulas?
- Recoger datos o análisis de limpieza de datos.
- ¿Era necesario hacer una recopilación de datos?
- ¿Es el promedio una medida representativa para tomar una decisión?
- ¿En qué ayudaría determinar la desviación estándar?
- ¿Quiénes tuvieron mejor rendimiento en la tabla 1y 2?
- ¿Cuál sección tiene el promedio más alto? ¿Cuál de las secciones tiene notas menos dispersas?
- ¿A quién se otorgará el premio del primer, el segundo y el tercer lugar? ¿A qué conclusión llegas con respecto a las dos aulas?

Lo primero que podemos observar es que en ambas propuestas se han buscado usar todas las etapas del ciclo PPDAC. Las profesoras han hecho uso de las preguntas claves y las han ido adaptando al contexto de la situación problema planteada. También se puede observar que las profesoras han incluido nuevas preguntas que permitan trabajar objetos estadísticos específicos en cada situación problema.

En el caso de la propuesta de variación se puede observar que se ha tenido la intención de mejorar la situación problema original, procurando un problema más claro y se ha incluido un propósito que haga más entendible la propuesta. En el caso de la propuesta de creación se puede observar que la situación problema presenta un contexto próximo a los alumnos, un propósito claro y que el problema a solucionar no enuncia explícitamente el objeto estadístico a trabajar. Este último punto hace que la situación problema se aproxime mejor a la realidad.

Con respecto a los contenidos estadísticos, ambas propuestas se aplican a alumnos del tercer grado de secundaria (15 años). En el caso de la propuesta de creación, se propone trabajar desempeños propios de dicho grado; en el caso de la propuesta de variación, los contenidos mejoran de la propuesta original pero no llegan a medidas de dispersión. Hay que tener en cuenta que en la problemática original los desempeños pertenecían a grados inferiores, a pesar de encontrarse en el cuaderno de trabajo de tercer grado.

En ambos casos las profesoras no solo han presentado la situación problema, sino han especificado toda la solución de esta. Con la solución propuesta podemos revisar el dominio que presentan en el manejo de contenidos y procesos estadísticos. Esto nos da otro aspecto a contemplar en la creación de problema, un problema no solo debe ser creado, sino que debe ser resuelto de forma adecuada por el profesor. Esto debería formar parte de los indicadores del nivel de creación alcanzado.

Veamos un ejemplo, para la propuesta sobre el negocio de Ana, podemos revisar una pregunta propuestas por la profesora 1:

¿Qué variables estadísticas se ha tenido en cuenta para el estudio?		
VARIABLE CUALITATIVA	NOMINAL	PLATOS DE COMIDA
	ORDINAL	----
VARIABLE CUANTITATIVA	DISCRETA	EDAD DE LOS CLIENTES
	CONTINUA	----

Figura 4. Propuesta de la profesora 1 para la pregunta 3.

Podemos observar que ni lo colocado en las tablas de datos de la situación problema propuesta ni lo propuesto en la tabla de la figura 4, cumple con definir adecuadamente las variables estadísticas que solucionarían el problema. Las variables trabajadas se debieron definir como: Plato preferido por un cliente o Plato solicitado por un cliente, y edad de un cliente. Adicionalmente, la situación problema presenta una tercera variable que no ha sido indicada en la tabla de la figura 4, Conformidad de un cliente con el plato de comida elegido. Esta variable es parte importante para alcanzar a describir la edad de los clientes que no están conforme con sus platos de comida. También observamos que en la situación problemática no hay una organización de datos que cruce esas dos variables, Conformidad con el plato de comida y la edad de los clientes, hace falta una tabla adicional donde se consigne esta información para poder hacer conclusiones sobre ella.

Conclusiones

Entre las conclusiones que podemos realizar en base a estas primeras propuestas, están:

- los profesores en capacitación y con la formación alcanzada hasta el momento, tiene la posibilidad de crear situaciones problemáticas que tomen en cuenta todas las etapas del ciclo PPDAC y las preguntas claves relacionadas a ellas.
- La posibilidad de variar o crear problemas va de la mano con el nivel de experiencia del profesor en la creación de problemas en general. La profesora 2 demostró su experiencia en creación de problemas desde el inicio de los talleres de formación.
- Es necesario revisar apropiadamente cada una de las respuestas de los profesores al crear una situación problema, dado que esto nos ayuda a identificar los contenidos que se deben seguir fortaleciendo durante el resto de la capacitación.
- Un primer indicador para identificar el nivel de desarrollo en la creación de problemas sería

los tipos de errores que comete el profesor al solucionar su propia creación.

Esta investigación se encuentra en su etapa inicial, y tenemos mucho interés en poder recopilando evidencias de la creación de problemas en gestión de datos. Esta información alimentará de forma permanente el proceso de formación y hará que el conocimiento de los investigadores de las necesidades de los profesores de secundaria sea mucho más claro.

Referencias

- MINEDU. (2016). *Diseño curricular nacional de educación básica regular*. Ministerio de Educación del Perú - Dirección General de Educación Básica Regular.
- MINEDU. (2015). *Rutas de aprendizaje*. Ministerio de Educación del Perú.
- MINEDU. (2017). *Resolvamos Problemas, Cuaderno de trabajo*. Ministerio de Educación del Perú - Dirección de Educación Secundaria.
- Malaspina, U. (2015). *Creación de problemas: sus potencialidades en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas*. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemáticas, 2016, Año 11 Número 15, pp 321-331. Costa Rica
- Osorio, A., Osorio, M. y Advíncula, E. (2019). El análisis didáctico de situaciones problemáticas para la enseñanza de estadística en la educación básica. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*.
- Wild, C. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical Thinking in Empirical Enquiry. *International Statistical Review* (1999), 67, 3, 223-265.

ENSINO DE MATEMÁTICA A ALUNOS COM ALTAS HABILIDADES/SUPERDOTAÇÃO POR MEIO DA CONSTRUÇÃO DE CENÁRIOS ANIMADOS NO GEOGEBRA

Adrielei Cristine Bueno

Maria Ivete Basniak

adrielicbueno@gmail.com, basniak2000@yahoo.com.br

Universidade Estadual do Paraná, Brasil

Resumen

O presente trabalho objetiva apresentar contribuições do ensino de matemática a alunos com altas habilidades/superdotação por meio da construção de cenários animados no software GeoGebra. Para isto foi proposto que os alunos que frequentam a Sala de Recursos Multifuncional (SRM) de um colégio do Paraná construíssem cenários animados no GeoGebra, envolvendo conteúdos de Matemática que eles não haviam estudado formalmente em sala de aula, como lógica e funções. Por meio do projeto das animações e dos cenários os alunos puderam ter contato, discutir, argumentar e compreender o conteúdo como o de funções, neste caso, antes mesmo de serem estudados na sala de aula regular nos anos em que estão matriculados, alcançando resultados satisfatórios por meio de investigações, explorações, questionamentos e diálogos entre os próprios alunos e entre alunos e pesquisadores, para que construíssem tanto os cenários animados no software GeoGebra como o conhecimento matemático.

Palabras clave: Educação Matemática, Funções, Tecnologia.

Introdução

Altas Habilidades/Superdotação (AH/SD) é uma condição ou comportamento que pode ser desenvolvido. Quando uma pessoa possui AH/SD, ela demonstra desempenho superior em determinada área do conhecimento, o que não significa que ela irá se sair bem em todos os testes de inteligência ou apresente o mesmo desempenho em todas as áreas (Mendonça; Zavitoski; Capellini, 2013). Segundo Renzulli (1978) ser uma pessoa superdotada, não significa necessariamente ter Quociente de Inteligência (QI) alto. Então, há diferentes concepções sobre características de indivíduos que apresentam ou desenvolvem AH/SD. Renzulli (1978) destaca a aptidão acadêmica e o pensamento criativo; Arroyo, Martorrel e Tarragó (2006, citado por Mosquera *et al.*, 2013) destacam que existe um potencial intelectual eminente e um perfil complexo; o caderno Saberes e Práticas da Inclusão (Brasil, 2006), determina que os estudantes com AH/SD são aqueles que apresentam características como alto grau de curiosidade, persistência e autonomia.

Logo, o trabalho com os alunos com AH/SD precisa ser diferente do tradicional, para que sejam exploradas suas capacidades e desenvolvam o raciocínio lógico (Guimarães; Mello, 2006).

Delpretto e Zardo (2010, p. 23) destacam que “projetos de trabalho pela sua natureza flexível, enriquecedora e exploratória, organizados na perspectiva inclusiva, são capazes de instigar a aprendizagem por descoberta e criação”.

Nesse contexto, destacamos que o uso de tecnologias digitais no ensino de Matemática tem revelado grande potencial para essa abordagem de ensino. Segundo as Diretrizes Curriculares da Educação Básica de Matemática do Estado do Paraná (2008, p. 65) existem softwares nos quais os alunos podem explorar e construir diferentes conceitos matemáticos, por meio de experimentações matemáticas, de forma muito natural, porque permitem os alunos realizarem experimentos, testarem hipóteses, esboçarem conjecturas e criarem estratégias para resolver problemas.

Atualmente um dos softwares que se destaca no contexto do ensino da Matemática é o GeoGebra, software livre e gratuito de matemática dinâmica que apresenta como principais características sua dinamicidade e facilidade para realizar construções. Esse software permite a construção de objetos utilizando as ferramentas nele disponíveis ou utilizando comandos inseridos na *caixa de entrada*. Assim, construir objetos matemáticos no GeoGebra, permite que os alunos reflitam sobre representações feitas, o que requer um constante processo de investigação sobre os objetos matemáticos que podem ser utilizados na construção.

Nessa perspectiva, ao realizar a construção de objetos no GeoGebra podem emergir investigações e discussões sobre as características e peculiaridades das ferramentas matemáticas envolvidas. Tais investigações e reflexões podem contribuir de maneira significativa para o processo de ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos. Isto foi o que motivou o presente trabalho que objetiva apresentar contribuições do ensino de matemática a alunos com altas habilidades por meio da construção de cenários animados no software GeoGebra. Para isto foi proposto que os alunos que frequentam a Sala de Recursos Multifuncional (SRM) de um colégio do Paraná construíssem cenários animados no GeoGebra, envolvendo conteúdos de Matemática que eles não haviam estudado formalmente em sala de aula, como lógica e funções, por exemplo. Detalhamos melhor o desenvolvimento do trabalho na seção que segue.

Contexto e caracterização dos alunos com altas habilidades/superdotação

O trabalho foi desenvolvido no Colégio Estadual José de Anchieta, no mesmo prédio do campus da UNESPAR de União da Vitória, que possui uma SRM que atende alunos com AH/SD, dentre os quais há alunos que possuem AH/SD em Matemática. Em 2016, a professora da SRM procurou a primeira autora deste trabalho para solicitar uma parceria entre a universidade e o colégio, para estimular o desenvolvimento destes alunos por meio da proposição de tarefas matemáticas que desafiassem os alunos a resolvê-las. Considerando que já desenvolvíamos animações no GeoGebra utilizando matemática, consideramos ser um meio interessante para estimular o desenvolvimento e a aprendizagem destes alunos. Então, desde agosto de 2017, temos trabalhado com os alunos com AH/SD da SRM deste colégio que estudam no período vespertino, alcançando resultados satisfatórios (Bueno Basniak, 2018).

Em 2019, ampliamos o projeto para os alunos que estudavam no período matutino e, que participavam da SRM no período vespertino. A turma de alunos que participava do projeto em 2018 teve algumas mudanças devido a mudança de ano letivo, sendo que quatro dos alunos continuaram no projeto e outros dois iniciaram sua participação, como detalhado na Tabela 1, em que também são indicados o ano em que os alunos estão matriculados e a área em que possuem AH/SD. Na Tabela 2 são indicados os alunos do período da tarde, os respectivos anos em que estão matriculados e a área em que possuem AH/SD.

Tabela 1

Alunos do período matutino 2019.

Aluno(a)	Ano	Início no projeto	AH/SD
Aluna 1	1º ano Ensino Médio	2017	Exatas
Aluno 2	9º ano	2017	Exatas
Aluno 3	9º ano	2018	Exatas
Aluno 4	8º ano	2019	Exatas
Aluno 5	7º ano	Agosto 2018	Exatas
Aluno 6	7º ano	2019	Exatas

Tabela 2

Alunos do período vespertino 2019

Aluno(a)	Ano	Início no projeto	AH/SD
Aluno 7	9º ano	2019	Exatas
Aluno 8	8º ano	Março 2019 a Abril 2019	Exatas
Aluno 9	8º ano	2019	Exatas
Aluna 10	8º ano	2019	Exatas
Aluno 11	7º ano	2019	Exatas
Aluna 12	7º ano	2019	Exatas
Aluno 13	6º ano	2019	Exatas

Os alunos do período matutino que já participaram do projeto na Iniciação Científica de 2017-2018 conseguiam construir animações com conteúdos de matemática que ainda não tinham tido contato, como sistema cartesiano e lógica com facilidade. Neste sentido, obtivemos resultados positivos quanto à aprendizagem destes conteúdos. Porém, embora os alunos utilizassem funções linear, afim e quadrática em algumas animações, não tínhamos claro se eles haviam compreendido este conteúdo. Como haviam dois alunos novos no período

matutino e todos os alunos do vespertino, resolvemos retomar alguns conteúdos, por meio da construção de cenários animados, tanto com os alunos da manhã como com os alunos da tarde, envolvendo principalmente os conteúdos de plano cartesiano, lógica, círculo, circunferência, função de primeiro grau e segundo grau, exponencial e logarítmica.

Os encontros foram registrados por meio de gravações de áudio e vídeo das telas dos computadores e fotografias de animações e respostas dos alunos em tarefas propostas. Neste relato, focamos as discussões quanto as construções realizadas pelos alunos, do período matutino e vespertino, no primeiro semestre de 2019, dos cenários animados Abelha (Figura 1), Mario Funções (Figura 2) e Skatista (Figura 3) que envolviam conceitos de funções.



Figura 1. Animação da Abelha

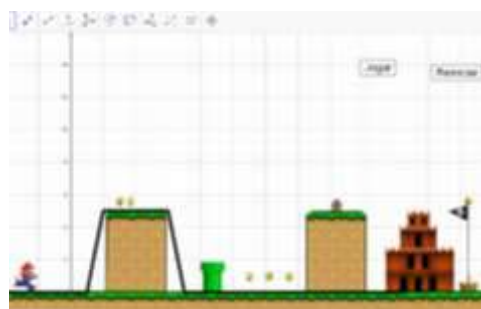


Figura 2. Animação do Mario Funções

Resultados e Discussão

Com os alunos do período vespertino, durante a discussão e sistematização dos conteúdos trabalhados na animação Abelha, solicitamos que a explicassem as ideias e conteúdos empregados na construção. Durante suas explicações, os questionávamos sobre suas estratégias, para que pudéssemos identificar suas compreensões do conteúdo. Depois das discussões sobre cada tópico da construção relacionávamos o que haviam construído no cenário animado com as definições formais relacionadas o conteúdo funções do primeiro grau.

No excerto a seguir os alunos destacam as características das funções crescente, decrescente e constante na animação Abelha, atentando para os valores que podem ser assumidos em ambos os casos para o coeficiente angular, mesmo que não o nomeiem corretamente:

P1: *Como vocês construíram o caminho da Abelha?*

Aluno 5: *Nós fizemos com funções, depois limitamos e unimos. A função constante, crescente e decrescente.*

P1: *Qual a característica da função crescente?*

Aluna 1: *Positiva. Um número positivo multiplicando o x.*

Aluno 5: $f(x) = 4x$ por exemplo. A cada uma unidade no eixo x são quatro no eixo y.

P1: *E a função decrescente é a mesma coisa?*

Aluno 5: *Não.*

P1: Por que?

Aluno 5: Porque na função decrescente a cada uma unidade no eixo x ele diminui unidades no eixo y . Por exemplo a função $g(x) = -3x$.

P1: Como é uma função genérica de primeiro grau?

Aluna 1: $f(x) = ax + b$.

P1: E como é a função crescente de primeiro grau genérica?

Aluno 5: $f(x) = ax$, com " a " sendo maior que zero.

P1: O " a " não pode ser igual?

Aluna 1: Não, porque vai dar zero o resultado.

Aluno 5: Se torna uma função constante.

P1: E a função decrescente?

Aluno 4: $f(x) = ax$, com o " a " é menor que zero.

Quanto a definição de função, que era objeto da animação da Abelha, no excerto a seguir, os alunos explicam porque tiveram que utilizar duas funções para construir o caminho da abelha, discutindo a relação entre as variáveis da função.

P1: E para a Abelha voltar a colmeia, o que vocês fizeram?

Aluno 5: Nós fizemos duas funções porque uma só não deu...

Aluno 2: Eu não consegui fazer todo o caminho em uma função só. Até fiz uma, mas a Abelha ia até o final e não retornava. Então tive que fazer duas funções, porque quando fiz tudo em uma só não deu certo.

P1: Alguém tentou juntar todas as funções em uma só?

Aluno 5: Eu tentei, mas não deu certo, a Abelha só foi até metade. Então tive que fazer outra função.

Aluno 6: Então não posso juntar todas as funções do caminho em uma só?

Aluna 1: Não, porque na coordenada só pode ter um valor para x e outro para y ao mesmo tempo, não pode ter dois.

Aluno 5: A função não pode estar em dois lugares, com duas coordenadas para x , no caso.

Aluna 1: Senão deixa de ser função.

P1: Qual a definição de função?

Aluna 1: Uma relação entre duas variáveis. A cada valor de x se tem apenas um valor em y .

Embora tenham usado duas funções na construção, antes das discussões nem todos os alunos compreenderam porque a primeira estratégia não havia sido aceita pelo software, e que isto era uma questão matemática.

Para iniciar funções de segundo grau foi trabalhado a animação Skatista (Figura 3), sendo entregue aos alunos instruções e questões que solicitavam que explicassem as ideias e conteúdos empregados na construção a partir do que eles realizavam no software. Um dos itens indicava aos alunos como construir um polinômio do segundo grau e na sequência, uma questão os indagava se era possível determinar uma função de primeiro grau que se assemelhasse a função polinomial de segundo grau construída. O Aluno 2 respondeu da seguinte forma:

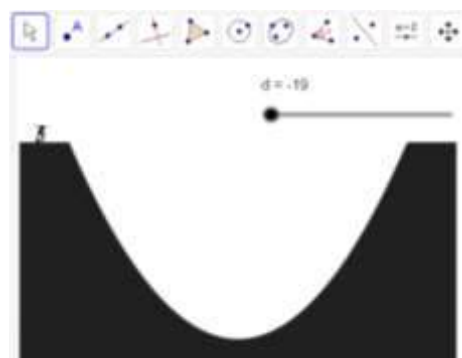


Figura 3. Animação do Skatista

"Não. É possível fazer o percurso com a de 2º grau e com a de primeiro grau, pois as funções de 2º grau são únicas e totalmente diferentes da de primeiro grau". Já o Aluno 5 explica que não conseguiu *"pois a função de 1º grau não é uma curva"*. O que mostra, juntamente com os gráficos construídos no software que os alunos conseguiram diferenciar as funções de primeiro grau e de segundo grau.

Uma das questões seguintes solicitava que os alunos explicassem porque a função escolhida para a rampa do skatista tem um comportamento de decrescimento e crescimento na mesma função. A Aluna 1 respondeu da seguinte maneira: *"Porque é uma função de 2º grau e possui as seguintes propriedades: para cada dois valores de x , há um mesmo valor de y , deixando a função com forma de parábola"*. A aluna já utiliza o nome específico desta curva, e elenca que dois valores do domínio possuem o mesmo valor no conjunto imagem, o que possibilita esse comportamento da função.

Para iniciarmos a função exponencial foram propostos passos para a construção de alguns pontos específicos no plano, seguido de questões que solicitavam que os alunos explicassem as estratégias empregadas na construção explicando a função usada e seus elementos. A Aluna 1 respondeu em relação a função utilizada: *"A base é constante e a variável (x) se encontra no expoente, e conforme alteramos o valor para x , o valor da potência (y) também muda como uma função"*. Assim, por meio da exploração e investigação sobre as coordenadas dos pontos na construção no GeoGebra os alunos conseguiram observar que era possível escrever uma função com características diferentes da função de primeiro e segundo grau e posteriormente definir suas componentes, como a base e expoente.

A próxima questão referente a esta tarefa, solicitava aos alunos que investigassem quais eram os possíveis valores para cada elemento da função. Em resposta a esta questão a Aluna 1 escreveu: *" $f(x) = a^x$, $a \in \mathbb{R}_+^*$, $x \in \mathbb{R}$ "*. Com a construção no GeoGebra os alunos testaram os valores, por meio da ferramenta controles e exploraram as possibilidades de valores, e assim foi possível observar e determinar quais deles eram aceitáveis para cada componente da função exponencial existir. Outra questão indagava os alunos se a função exponencial assumia

valor zero como resultado. Após os alunos observarem o gráfico no GeoGebra e realizarem cálculos, o Aluno 4 que não era possível porque nenhuma potência resultava em zero.

Com os alunos do período vespertino foi construído primeiramente a animação Abelha, e na sequência a Mario Funções. Durante a sistematização da construção da animação Abelha, ao questionar os alunos sobre porque não era possível fazer somente uma função para o caminho de ida e volta para a abelha, verificamos que compreenderam porque explicitaram partes da definição de função para justificar, alegando que não era possível. No excerto abaixo os alunos estabelecem uma relação de equivalência entre os conjuntos, para as coordenadas dos pontos que formam as funções:

P1: *Como foi feito o caminho para a Abelha retornar?*

Aluno 7: *Criando outra função.*

P1: *Por que tiveram que criar outra função?*

Aluno 7: *Uma função não pode ter dois valores [imagens] para o mesmo x .*

Aluno 9: *O retorno, ele "corta" da definição.*

Aluno 7: *Ele não aceita a segunda [função do retorno] porque já tem um x para aqueles valores. Se você coloca um valor para x , ele te responde com um em y [lei de formação]. Se coloca um valor para x , não resulta em dois valores para y .*

Após, discutimos sobre a lei de formação de uma função do primeiro grau ($f(x) = ax + b$) questionando os alunos sobre o que cada coeficiente altera na função.

P1: *O que o coeficiente "a" altera na função?*

Aluna 12: *Angulação, em relação ao eixo x .*

P1: *E o coeficiente "b" altera o que?*

Aluno 13: *O eixo y .*

Aluno 7: *O quanto que sobe ou desce no eixo y .*

Inicialmente, durante as construções os alunos confundiram o coeficiente angular com o valor do ângulo. Somente após a sistematização este conceito foi compreendido pelos alunos como pode ser lido no excerto a seguir:

P1: *O valor do coeficiente angular é o valor do ângulo?*

Aluno 7: *Não, é o valor que multiplicado pelo valor dado de x , encontramos o de y .*

P1: *Não é o valor do ângulo?*

Aluno 7: *Não.*

O conceito de função por partes foi discutido e sistematizado na animação Balão com os alunos e pudemos verificar durante a construção da animação Mário que este conceito foi compreendido, como pode ser observado no excerto abaixo em que os alunos afirmam que somente o intervalo de uma função não é a uma função por partes:

P1: *Como vocês uniram o percurso da Abelha?*

Aluno 9: *Utilizando função por partes.*

P1: *Por que por partes?*

Aluno 9: *Pelas partes das "inteiras".*

Aluno 7: *A constante, a crescente e a decrescente.*

P1: *Somente um único intervalo da função é uma função por partes?*

Aluno 7: *Não.*

P1: *Por que?*

Aluno 7: *Porque não são duas funções juntas. Ela não vai ser constante mais alguma coisa, ela só vai ser constante.*

Já na animação Mario, a Aluna 10 explicitou em sua fala, como pode ser lido no excerto a seguir, ter compreendido quando a função é crescente ou decrescente, associando corretamente o valor do coeficiente angular. Por mais que ela não nomeie o coeficiente angular, mostra compreender como ele altera o gráfico e o comportamento da função.

P3: *Por que ficou assim?*

Aluna 10: *Porque tem o sinal negativo antes do x [$g(x) = -x$], então temos uma função decrescente. Se fosse $f(x) = 3x$ a função seria crescente. Quando o número com o x é positivo a função é crescente. Já quando o número é negativo a função é decrescente.*

Após toda a discussão e sistematização sobre o comportamento das funções de primeiro grau e sua definição, os alunos foram questionados novamente, para que então concluíssemos o que é função, de acordo com as questões levantadas e verificássemos o que havia sido entendido pelos alunos quanto a este conteúdo. O excerto abaixo permite concluir que os alunos, um complementando o outro, conseguem estabelecer o que é uma função:

P1: *Então o que é uma função?*

Aluna 12: *Uma regra que relaciona o conjunto x e o conjunto y .*

Aluna 10: *O valor de y é dependendo do valor de x .*

Aluno 11: *Para cada valor de x se tem um único valor em y , para ser função.*

Aluno 9: *Existem pontos que pertencem a função e pontos que não pertencem a função.*

Depois de construírem as animações Balão e Abelha, o conceito de domínio da função foi sistematizado e os alunos foram convidados a fazer a animação Mario. Durante as explicações dos alunos sobre como construíram essa animação, observamos que compreenderam o conceito de domínio da função, pois os valores correspondem ao intervalo desejado para os pulos do personagem Mario na montanha, como explicam:

Aluna 10: *Agora vamos definir as funções, de um ponto a outro, onde queremos que ela fique.*

P1: *Por que x na definição?*

Aluna 12: *Porque o x é o que “manda” na função [domínio].*

Aluna 10: *O -6 é onde queremos que a nossa função se inicie, e em 0 é onde queremos que ela termine [em relação ao eixo x]. Queremos que essa função fique restringida dentro desse intervalo $[-6 < x < 0]$.*

Aluna 12: *Para os valores de x .*

Verificamos que, tanto os alunos do período matutino quanto do vespertino, se apropriaram de conceitos matemáticos referentes a funções de primeiro grau, pois conseguiam explicar as conjecturas por meio da animação construída no software. Nesse sentido, o software possibilitou aos alunos testarem suas ideias, trocando ideias tanto com os colegas como com as pesquisadoras construindo conhecimento matemático.

Por meio dos excertos pudemos analisamos e identificamos o que foi compreendido, principalmente no que se refere a funções (constante, linear e afim) pelos alunos com a animação por meio do software, em que verificamos apropriações em relação ao domínio, coeficiente angular, linear, função por partes e a definição de função.

Considerações finais

Por mais que todos os alunos que participam do projeto apresentem AH/SD em alguma área do conhecimento humano, com a ampliação da pesquisa pode-se observar a diversidade dos alunos e das turmas. Os grupos são diferentes entre si, eles apresentaram características gerais desiguais, enquanto uma turma é mais agitada e animada a outra é mais calma e silenciosa.

Com o projeto pode-se compreender características importantes dos alunos com AH/SD e que o trabalho desenvolvido com eles precisa ser diferenciado, pois, eles precisam se sentir desafiados e auxiliados no decorrer dos encontros, para que desenvolvam mais suas habilidades, sejam intelectuais ou práticas. O ambiente deve ser instigador e dinâmico, com diálogos e trocas de experiências, para proporcionar o pleno desenvolvimento tanto para os alunos como para os pesquisadores.

Por meio do projeto das animações e dos cenários os alunos puderam ter contato, discutir, argumentar e compreender o conteúdo como o de funções, neste caso, antes mesmo de serem estudados na sala de aula regular nos anos em que estão matriculados, alcançando resultados satisfatórios por meio de investigações, explorações, questionamentos e diálogos entre os

próprios alunos e entre alunos e pesquisadores, para que construíssem tanto os cenários animados no software GeoGebra como o conhecimento matemático.

Referências

- Brasil. (2006). *Saberes e Práticas de Inclusão: desenvolvendo competências para o atendimento às necessidades educacionais especiais de alunos com altas habilidades/superdotação*. Brasília: MEC, Secretaria da Educação Especial.
- Bueno, A. C.; Basniak, M. I. (2018). *Contribuições da construção de animações no software GeoGebra para a mobilização do conhecimento matemático de alunos com Altas Habilidades/Superdotação*. In: IV Encontro Anual De Iniciação Científica. Campus Paranaguá - PR. Anais p. 119, 2018.
- Guimarães, G. R., Mello, R. M. (2006). *Grupo de trabalho sobre altas habilidades/superdotação*. Curitiba: PR.
- Mendonça, L. D.; Zavitoski, P.; Capellini, V. L. M. F. (2013). O que os professores compreendem por altas habilidades/ superdotação? *Anais do VIII Encontro da Associação Brasileira de Pesquisadores em Educação Especial*, Londrina.
- Mosquera, J. J. M.; Stobäus, C. D.; Freitas, S. N. (2013). Altas habilidades/superdotação: abordagem ao longo da vida. *Revista Educação Especial. Santa Maria*. Rio Grande do Sul, v. 26, n. 46, p. 401-420.
- Paraná, Secretaria de Estado da Educação. (2008). *Diretrizes curriculares da educação básica: matemática*. Curitiba: Secretaria do Estado da Educação.
- Renzulli, J. S. (2004). *O que é esta coisa chamada superdotação, e como a desenvolvemos? Uma retrospectiva de vinte e cinco anos*. *Educação*. Porto Alegre, n. 1, p. 75 - 121.

UNA INVESTIGACIÓN CON ENFOQUE EN LAS RELACIONES ENTRE LOS TRASTORNOS Y LA ANSIEDAD MATEMÁTICA

Ana Maria Antunes de Campos

Elton de Andrade Viana

Ana Lúcia Manrique

camp.ana@hotmail.com, eltondeandradeviana@gmail.com, analuciamanrique@gmail.com

Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC-SP, Brasil

Resumen

El artículo tiene por objetivo identificar las relaciones existentes entre los trastornos estudiados en la Educación Matemática brasileña y la temática de la ansiedad, y el problema de investigación es: ¿cuáles son las contribuciones de principales estudios sobre trastornos, ya realizados en la Educación Matemática de Brasil, para investigar sobre la ansiedad matemática? Como marco teórico consideramos los objetivos no cognitivos anunciados en la literatura y la metodología asumida fue el análisis bibliográfico de artículos brasileños que tratan sobre los diferentes trastornos. Además, los resultados revelan contribuciones a la dirección de futuras investigaciones a partir de elementos ya identificados como merecedores de atención al estudiar la ansiedad matemática en el contexto de diferentes trastornos, que se mostraron como (1) factores emocionales y afectivos en la escuela, (2) comportamiento y ansiedades intrínsecas en el proceso educativo, (3) ansiedad en el proceso de investigación y (4) el desarrollo de la confianza.

Palabras clave: Autismo, Educación Matemática, Inclusión, Trastorno Específico del Aprendizaje.

Introducción

En los últimos años, la Educación Matemática se constituyó en su carácter multidisciplinario, como un área de investigación muy fértil en el tema de Educación Especial y Educación Inclusiva. Este fenómeno se observa tanto en Brasil como en otros países, destacando su importancia en una reflexión internacional, como proponemos en este reporte de investigación.

En Brasil, hemos observado en la Educación Matemática un interés en temas relacionados con diferentes trastornos en el campo de la Educación Inclusiva, siendo uno de los trastornos más estudiados, lo que se conoce como autismo (Delabona, 2016; Flôres, 2018; Gaviolli, 2018; Praça, 2011; Takinaga, 2015; Viana, 2017).

La persona con autismo, tiene dificultades para procesar el lenguaje humano y en la relación con su entorno. Por lo general, el diagnóstico del autismo se ha orientado a partir de dos manuales, la quinta edición del Manual Diagnóstico y Estadístico de Trastornos Mentales (DSM-V), publicado por la Asociación Americana de Psiquiatría (APA), y también la Clasificación Estadística Internacional de Enfermedades y Problemas Relacionados con la Salud (CIE) organizada por la Organización Mundial de la Salud (OMS).

Con la entrada de la nueva versión del DSM, el autismo ha sido catalogado como un Trastorno del Neurodesarrollo, introduciendo un nuevo término: Trastorno del Espectro Autista (TEA).

Según el DSM-V, también es un Trastorno del Neurodesarrollo, el Trastorno Específico del Aprendizaje, el cual tiene como característica principal “[...] las dificultades persistentes para aprender aptitudes académicas esenciales [...] que surgen durante los años escolares (es decir, el período de desarrollo)” (Asociación Americana de Psiquiatría, 2014, p. 68).

El DSM-V también puntualiza que el inicio, el reconocimiento y el diagnóstico del Trastorno Específico del Aprendizaje normalmente se producen durante los años de la educación primaria y es necesario especificar las áreas académicas alteradas: dificultades en la lectura, dificultad en la expresión escrita y dificultad matemática.

En este reporte de investigación, nuestra intención es traer al área de Educación Matemática información relevante sobre un tema que fluye en la literatura científica entre el autismo y el Trastorno Específico del Aprendizaje: la ansiedad. Así, la presente investigación tiene como objetivo identificar las relaciones existentes entre los trastornos estudiados en la Educación Matemática brasileña y la temática de la ansiedad.

Formulación del problema de investigación

En el autismo, la ansiedad se ha destacado como un tema importante en los estudios realizados internacionalmente, y una de las preguntas sin respuesta es la posible relación entre la ansiedad y el autismo. Una de las dificultades con respecto a la relación entre el autismo y la ansiedad es la falta de consenso que explique si los síntomas de ansiedad se conceptualizan mejor como las características principales del autismo, como una comorbilidad o incluso como una variante de la ansiedad en la persona autista (Kerns & Kendall, 2012; Wood & Gadow, 2010).

Como consecuencia de esta dificultad, entender la ansiedad como intrínsecamente entrelazada con las características principales del autismo o como una vulnerabilidad distintiva del autismo es un tema complejo que los médicos e investigadores siguen persiguiendo por igual. (Kerns & Kendall, 2014).

En el contexto del Trastorno Específico del Aprendizaje, podemos observar que la ansiedad es un tema discutido históricamente en ediciones anteriores de DSM-V. El capítulo del DSM-V que cubre el Trastorno Específico del Aprendizaje también cubrió en ediciones anteriores del manual el tema de la ansiedad como uno de los trastornos a diagnosticar. El capítulo ha sufrido cambios desde la tercera edición del manual, que puntualiza como uno de los trastornos, el Trastorno de Ansiedad Infantil, lo que demuestra la preocupación de APA con el tema.

En la actualidad, el DSM-V ha reorganizado el manual destacando el tema de la ansiedad en su propio capítulo separado del capítulo sobre Trastornos del Neurodesarrollo, llamándolo Trastornos de Ansiedad. Ahora, como capítulo exclusivo, la ansiedad se discute con especial atención, y se indica en el DSM-V como uno de los tipos de Trastornos de Ansiedad, que se denomina Trastorno de Ansiedad por Separación, que tiene como uno de los criterios diagnósticos para su identificación una alteración que "[...] causa malestar clínicamente significativo o deterioro en lo social, académico, laboral u otras áreas importantes del funcionamiento" (Asociación Americana de Psiquiatría, 2014, p. 191).

En la Educación Matemática, los estudios se han destacado en los últimos años por la atención prestada al tema de la ansiedad en la vida académica de los estudiantes y dieron pie a denominación *ansiedad matemática*. La ansiedad matemática se caracteriza por la aversión y el miedo a las matemáticas (Carmo et al., 2019; Fragoso, 2001), y las reacciones descritas como preocupación, impotencia y miedo a las matemáticas (Santos, 2017; Mendes & Carmo, 2014), causando desmotivación, desinterés, abandono y escape de actividades matemáticas, lo que a veces dificulta el proceso de aprendizaje en un sentido general.

La ansiedad matemática interfiere con el aprendizaje satisfactorio y, por lo tanto, con el rendimiento académico de los estudiantes, por lo que tienden a dar una respuesta negativa a los estímulos numéricos que modifican el estado cognitivo, fisiológico y conductual del estudiante.

En vista de la discusión sobre la ansiedad en la literatura científica, tanto en el contexto del autismo como en el Trastorno Específico del Aprendizaje, y considerando que nuestro desempeño en la ciencia se muestra en el área de la educación, entendemos que la ansiedad matemática es un estudio digno de nuestra atención al tratar con ambos problemas relacionados con el autismo y los trastornos identificados en el campo de aprendizaje. Por lo tanto, se pudo identificar la necesidad de responder una pregunta que se constituyó como un problema en nuestro reporte de investigación: ¿cuáles son las contribuciones de principales estudios sobre trastornos, ya realizados en la Educación Matemática de Brasil, para investigar sobre la ansiedad matemática?

Marco teórico

Reflexionando sobre la necesidad de una resignificación de los roles ejercidos tanto por los investigadores como por los docentes en la investigación realizada en la Educación Matemática, Cai et al. (2018) afirman que "[...] el objetivo de cada lección de matemáticas es ayudar a todos los estudiantes a alcanzar un conjunto de objetivos de aprendizaje cognitivo y no cognitivo" (p. 516, traducción propia). La importancia dada a los factores no cognitivos se ha observado recientemente en la Educación Matemática, y es precisamente en este tema que se necesitan esfuerzos para satisfacer las necesidades actuales de la enseñanza (Cai et al., 2017).

El aprendizaje relacionado con las matemáticas involucra objetivos cognitivos (por ejemplo, dominio de problemas, comprensión de enunciados, análisis e interpretación de datos) y objetivos no cognitivos (por ejemplo, auto concepto, autoeficacia, perseverancia, persistencia, coraje, motivación, confianza y otros componentes que no son explícitos en el proceso). La

comprensión de tales objetivos es digna de atención en la Educación Matemática, ya que el proceso de aprendizaje va mucho más allá de la resolución de problemas.

Dicho esto, el proceso de aprendizaje matemático debe analizar no solo los aspectos matemáticos y educativos, sino también los procesos didácticos y psicológicos. En este sentido, el profesor debe prepararse para situaciones inusuales, tanto desde el punto de vista pedagógico como desde el punto de vista de las actitudes de los alumnos en el aula.

Es en los objetivos no cognitivos que encontramos elementos que se acercan mucho a los indicados en la literatura como componentes de la ansiedad matemática, por lo que es a partir de esta construcción que asumimos como marco teórico en nuestra investigación los objetivos no cognitivos descritos por Cai et al. (2017; 2018).

Método

Para responder nuestro problema de investigación, consideramos los artículos científicos publicados en el ámbito de la Educación Matemática y en revistas brasileñas. Las revistas científicas brasileñas se clasifican según diferentes criterios que indican el nivel de calidad de la revista. Cada nivel se denomina *Qualis*. Según el *Relatório da Área de Ensino*, resultante de la evaluación cuatrienal 2013-2016 de la institución brasileña *Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior* (Capes), el *Qualis* puede ser A1, A2, B1, B2, B3, B4, B5 y C, considerando que el *Qualis A1* es lo que indica una mayor calidad.

Así, se realizó un análisis bibliográfico en las revistas *Qualis A1* y *A2* (cuatrienio 2013-2016) del *Área de Ensino*, particularmente aquellas relacionadas con la Educación Matemática. El primer criterio para la identificación de artículos fue la presencia en el texto, de los términos *matemática* y *transtorno*, y el segundo criterio la disponibilidad de publicación en portugués. Luego de ello, leímos y seleccionamos los artículos que mostraron potencial para responder nuestro problema de investigación.

En total, se encontraron trece artículos, entre estos artículos, solo siete estaban disponibles en internet para consulta. Dicho esto, para esta investigación analizamos solo los artículos disponibles para consulta. Los artículos fueron publicados entre los años 2012 a 2019.

El análisis de las revistas en las que se publicaron los artículos mostró que la revista *Bolema - Boletim de Educação Matemática* tiene un número significativo de cuatro artículos, en comparación con las otras revistas *Qualis A1* y *A2* en el área de la Educación Matemática donde se identificaron los artículos: uno artículo en la revista *Educação Matemática em Revista*, uno en la revista *Educação Matemática em Revista - RS* y uno en la *Revista de Educação, Ciências e Matemática*.

Otra observación importante fue que, los artículos son tres sobre intervención (Fleira & Fernandes, 2019; Nunes & Geller, 2016; Moro et al., 2017); dos relacionados con la memoria (Costa et al., 2012; Corso & Dornelles, 2012); uno sobre la educación ambiental (Cassiano & Melo, 2014) y uno relacionado con la biografía (Borges et al. 2014).

Respuesta al problema de la investigación

La educación matemática debe, por un lado, proporcionar estudios relacionados con aspectos cognitivos, es decir, aprendizaje conceptual, resolución de problemas y lenguaje matemático. Por otro lado, también debe incluir el precepto de que, sin aspectos no cognitivos, es decir, perseverancia, persistencia, coraje, motivación y otros elementos, difícilmente podemos llegar a un estudio directamente relacionado con las necesidades reales de los tiempos contemporáneos.

Los efectos de las habilidades cognitivas y no cognitivas en la vida de los estudiantes son críticos, ya que consisten en evaluaciones de características tales como habilidades sociales, estabilidad emocional y persistencia. Estos factores influyen en los resultados de la vida, incluidos el nivel educativo, la carrera y la salud (Cai et al., 2017).

Dicho esto, analizamos con base en el marco teórico aquí asumido los artículos encontrados. En el análisis, identificamos tres artículos (Moro et al., 2017; Cassiano & Melo, 2014; Nunes & Geller, 2016) que buscan reflexionar sobre el uso de estrategias diferenciadas para enseñar y aprender a estudiantes con Trastorno por Déficit de Atención/Hiperactividad (TDAH). Moro et al. (2017), discutiendo intervenciones para estudiantes con TDAH, destaca la necesidad de desarrollar un programa que incluya factores emocionales y afectivos, que entendemos como aspectos no cognitivos del aprendizaje.

Observamos que la preocupación en este conjunto de tres artículos no es lo que actualmente se clasifica en los manuales, ya sea como TEA o como Trastornos Específicos de Aprendizaje, ya que el TDAH es otro trastorno diagnosticado por separado de estos. Sin embargo, encontramos algunos elementos destacados y que dirigen la mirada hacia aspectos no cognitivos, y que se presentan como dignos de atención, como los factores emocionales y afectivos en la escuela.

Por otro lado, Borges et al. (2014) tiene como objetivo en su investigación, presentar la trayectoria de vida del educador matemático Ubiratan D'Ambrósio a través de entrevistas con el profesor. Se puede ver que una de las preocupaciones de D'Ambrósio es en el artículo con el proceso de aprendizaje del estudiante, considerando mucho más el comportamiento, la angustia y los problemas no cognitivos intrínsecos al proceso educativo, que consideramos como otro elemento importante en futuros estudios sobre ansiedad matemática. Aquí también observamos elementos que abordan los aspectos no cognitivos y que pueden ayudarnos a reflexionar sobre la ansiedad matemática, aunque no se menciona directamente en este estudio.

El artículo de Fleira y Fernandes (2019), con el objetivo de presentar un análisis de investigación sobre las prácticas matemáticas de un estudiante autista de catorce años, informa las dificultades encontradas en la primera sesión de la investigación, debido a la ansiedad del investigador y del estudiante autista. Aquí encontramos otro elemento importante: la ansiedad en el proceso de investigación. Fleira y Fernandes (2019) señalan que el estudiante no quería abandonar su rutina, ya que era necesario invertir primero en un enfoque, explicando la importancia de la actividad y solo después, con su aceptación, ir a los objetivos de la investigación.

Observamos en la investigación de Fleira y Fernandes (2019) los aspectos no cognitivos presentes en el procedimiento de investigación adoptado, lo que contribuye en gran medida a una reflexión sobre cómo se puede resaltar la ansiedad en la investigación del educador matemático, lo que requiere una mirada más cuidadosa a las estrategias y métodos de investigación, y ellos están influenciados por aspectos como la ansiedad.

Por último, Costa et al (2012) presentan una revisión de la literatura sobre los procesos cognitivos involucrados en la representación de hechos básicos aditivos en la memoria a largo plazo. La investigación involucra tanto a estudiantes en desarrollo como a estudiantes con discapacidades de aprendizaje. Según los autores, el uso de un determinado procedimiento matemático depende del objetivo que implica el cálculo, en el que el niño puede ser más rápido, más preciso o más seguro para aplicar un determinado procedimiento.

Los autores, al revisar los estudios teóricos y experimentales, tenían como objetivo encontrar una explicación de "[...] cómo ocurre el desarrollo de los procedimientos y estrategias utilizados por los niños [...] para realizar cálculos simples y su progreso para generar confianza en la recuperación de los hechos básicos" (Costa et al., 2012, p. 1162, traducción propia). Aunque no destaca, observamos la confianza como un aspecto no cognitivo explorado en esta investigación, que destaca otro elemento digno de atención en la Educación Matemática: el desarrollo de la confianza.

Todos los artículos analizados desde nuestro marco teórico presentan aproximaciones, aún tímidas, de aspectos no cognitivos. A pesar de discutir algunos elementos que abordan estos aspectos, no encontramos un trabajo que involucrara trastornos y con una reflexión sobre la ansiedad matemática. Lo que observamos en los artículos son estudios que presentan elementos que abordan los aspectos no cognitivos, y describimos en este artículo como: (1) factores emocionales y afectivos en la escuela, (2) comportamiento y ansiedades intrínsecas en el proceso educativo, (3) ansiedad en el proceso de investigación y (4) el desarrollo de la confianza.

Finalmente, encontramos como respuesta a nuestra pregunta, que aunque no se constituye como una discusión primaria, la ansiedad matemática ha ganado espacio para la reflexión académica con los elementos presentes en las investigaciones, y que se muestran, como lo indica nuestro marco teórico, como aspectos no cognitivos. Estos aspectos no cognitivos contribuyen principalmente en la dirección de las investigaciones en la Educación Matemática a elementos ya identificados como merecedores de atención cuando se estudia la ansiedad matemática dentro de los diferentes trastornos actualmente investigados.

Conclusiones

Los resultados en nuestro reporte de investigación indican que el proceso de aprendizaje matemático debe analizar diferentes aspectos, así como los no cognitivos, ya que estos son los que más se acercan al tema de la ansiedad matemática. Por lo tanto, en el campo de las interacciones, la ansiedad matemática es un tema digno de atención en la educación matemática.

Observamos como una limitación del presente trabajo, el número de artículos considerados para el análisis, ya que un análisis más profundo de todos los artículos ya publicados en Brasil permitiría una reflexión más amplia dentro de nuestra área de investigación.

Como sugerencia, enfatizamos que se necesita más investigación sobre la relación entre los trastornos y la ansiedad en la Educación Matemática, para traer la ansiedad matemática como una discusión primaria, lo que representa una maduración de lo que la investigación actual ya señala a través de elementos que hacen posible dirigir los próximos caminos definidos por los investigadores.

Agradecimientos

Agradecemos a *Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior* (CAPES), al *Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico* (CNPq) y a *Pontifícia Universidade Católica de São Paulo* (PUC-SP) por el apoyo dado para el desarrollo de la investigación que presentamos en este reporte de investigación.

Referencias

- Asociación Americana de Psiquiatría. (2014). *Manual diagnóstico y estadístico de los transtornos mentales: DSM-5*. Madrid, España: Editorial Médica Panamericana.
- Borges, R. A. S., Duarte, A. R. S., & Campos, T. M. M. (2014). A Formação do Educador Matemático Ubiratan D'Ambrosio: trajetória e memória. *Bolema*, 28 (50), 1056-1076. [doi: 10.1590/1980-4415v28n50a03](https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a03)
- Cai, J., Morris, A., Hohensee, C., Robison, S. H. V., & Hiebert, J. (2017). Clarifying the Impact of Educational Research on Students' Learning. *Journal for Research in Mathematics*. 48 (2), 118–123.
- Cai, J., Morris, A., Hohensee, C., Robison, S. H. V., & Hiebert, J. (2018). Reconceptualizing the roles of researchers and teachers to bring research closer to teaching. *Journal for Research in Mathematics*. 49 (5), 514-520.
- Carmo, J. S., Gris, G., & Palombarini, L. S. (2019). Mathematics anxiety: definition, prevention, reversal strategies and school setting inclusion. In: Kollosche, D.; Marcone, R.; Knigge, M; Penteado, M.G.; Skovsmose, O. (Eds.) *Inclusive mathematics education: state-of-the-art research from Brazil and Germany*. Suíça: Springer, pp. 403-418.
- Cassiano, K. F. D., & Melo, C. F. S. (2014). A saúde humana como eixo da educação ambiental: impactos do uso de agrotóxicos e sua relação com o TDAH. *Revista de Educação, Ciências e Matemática*, 4 (1), 85-97.
- Corso, L. V., & Dorneles, B. V. (2012). Qual o papel que a memória de trabalho exerce na aprendizagem da matemática? *Bolema*, 26 (42), 627-648.
- Costa, A. C., Rohde, L. A., & Dorneles, B. V. (2012). Desenvolvimento de fatos numéricos em

- estudantes com transtornos de aprendizagem. *Bolema*, 26 (44), 1151-1170.
- Delabona, S. C. (2016). A mediação do professor e a aprendizagem de geometria plana por aluno com transtorno do espectro autista (síndrome de asperger) em um laboratório de matemática escolar. Tesis de Maestría no publicada, Universidade Federal de Goiás. Goiânia, Brasil.
- Fleira, R. C., & Fernandes, S. H. A. A. (2019). Ensinando Seus Pares: a inclusão de um aluno autista nas aulas de Matemática. *Bolema*, 33 (64), 811-831.
- Flôres, G. G. C. (2018). *A construção de mosaicos no plano por um aluno com transtorno do espectro autista*. Tesis de Maestría no publicada, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, Brasil.
- Fragoso, W. C. (2001). O medo da matemática. *Revista Educação*, 26 (02), 95-109.
- Gaviolli, I. B. (2018). *Cenários para investigação e educação matemática em uma perspectiva do deficiencialismo*. Tesis de Maestría no publicada, Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, Brasil.
- Kerns, C. M., & Kendall, P. C. (2012). The presentation and classification of anxiety in autism spectrum disorder. *Clinical Psychology: Science & Practice*, 19, 323-347. [doi:10.1111/cpsp.12009](https://doi.org/10.1111/cpsp.12009).
- Kerns, C. M., & Kendall, P. C. (2014). Autism and anxiety: overlap, similarities, and differences. In: Davis III, T. E.; White, S. W.; Ollendick, T. H. (Eds.). *Handbook of autism and anxiety*. Nova York: Springer, pp 75-90.
- Mendes, A. C., & Carmo, J. S. (2014). Atribuições dadas à matemática e ansiedade ante a matemática: o relato de alguns estudantes do ensino fundamental. *Bolema*, 28, 368-?
- Moro, J. B., Campos, J. A. P. P., & Galvani, M. D. G. (2017). A interface entre a Educação Especial e Educação Matemática: a inclusão de um aluno com Transtorno de Déficit de Atenção e Hiperatividade (TDAH) nas aulas de Ciências e Matemática no Ensino. *Educação Matemática em Revista*, 55, 32-39.
- Nunes, C. S., & Geller, M. (2016). Reflexões sobre o processo de aprendizagem matemática no atendimento educacional especializado. *Educação Matemática em Revista*, 2, (17), 107-120.
- Praça, E. T. P. O. (2011). *Uma reflexão acerca da inclusão de aluno autista no ensino regular*. Tesis de Maestría no publicada, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, Brasil.
- Santos, F. H. (2017). *Discalculia do desenvolvimento*. São Paulo: Pearson Clinical Brasil.
- Takinaga, S. S. (2015). *Transtorno do espectro autista: contribuições para a educação matemática na perspectiva da teoria da atividade*. Tesis de Maestría no publicada, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, Brasil.
- Viana, E. A. (2017). *Situações didáticas de ensino da matemática: um estudo de caso de uma aluna com transtorno do espectro autista*. Tesis de Maestría no publicada, Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, Brasil.

Wood, J. J., & Gadow, K. D. (2010). Exploring the nature and function of anxiety in youth with autism spectrum disorders. *Clinical Psychology: Science and Practice*, 17, 281-292. [doi:10.1111/j.1468-2850.2010.01220.x](https://doi.org/10.1111/j.1468-2850.2010.01220.x).

TEORÍAS DE MAESTROS SOBRE EVALUACIÓN, EN EL ÁREA DE MATEMÁTICA

Rodri Demus De la Cruz Rodríguez*

Luis Manuel Casas García**

rodridemus@gmail.com, luisma@unex.es

IE Simón Bolívar, Perú*

Universidad de Extremadura, España**

Resumen

En el presente reporte de investigación se da cuenta de las teorías que poseen profesores de matemática de educación básica regular respecto a la evaluación en el área de matemática, para ello se tomó como marco teórico las teorías implícitas y el enfoque formativo de evaluación para obtener la información se empleó entrevistas y se observó las clases maestros. Para el análisis de la información obtenida se empleó el software cualitativo WebQDA en base a los resultados encontrados damos cuenta que los maestros aun realizan prácticas evaluativas tradicionales y que sus teorías que poseen están encaminadas hacia el constructivismo por lo que en este trabajo se confirma que no solo los maestros en formación, sino que los maestros en actividad creen que son constructivistas pero al momento de realizar su trabajo dentro del aula y sobre todo al evaluar los aprendizajes de sus estudiantes actúan de manera conductista.

Palabras clave: *Teorías, profesores, matemática, evaluación.*

Introducción

Como parte de la reforma educativa, en el Perú en el año 2019 el Ministerio de Educación encargó la implementación del Currículo Nacional de la Educación Básica a los líderes pedagógicos de todas las instituciones educativas a nivel nacional, sin embargo, resulta que al ponerlo en práctica maestros y directores se han visto en contradicciones por el hecho de que la gran mayoría de maestros y directores no se están capacitados para poner en práctica los planteamientos del currículo. Parte de este cambio implica que el maestro de matemática debe actuar bajo la teoría socio constructivista, adoptar en su práctica pedagógica el enfoque de resolución de problemas, evaluar de manera formativa y desarrollar competencias en sus estudiantes.

Tal como lo señalan De la Cruz y Luengo (2018) esto ha traído como consecuencia de que el maestro crea que es constructivista, pero al momento de enfrentarse al aula de clase y evaluar los aprendizajes de sus estudiantes actúan de manera conductista lo cual recrea en el mismo una contradicción entre lo cree y lo que hace, es decir el maestro de matemática aun lo que hace es evaluar resultados e incorpora de manera muy pobre el desarrollo de la competencia matemática. Vista la gran dificultad que implica poner en práctica las sugerencias del Ministerio de Educación, en este trabajo se da cuenta de las teorías que poseen los maestros de matemática en actividad respecto a la evaluación en el área de matemática.

Problema de investigación, aspectos teóricos y metodológicos

En la publicación de Hidalgo y Murillo (2017) se realiza una minuciosa revisión de diversas publicaciones con el fin de determinar las diversas concepciones relacionadas a la evaluación de los aprendizajes de los estudiantes y encuentran que la temática aún sigue siendo investigada por reconocidos y experimentados investigadores dándose cuenta que el profesorado aún sigue realizando la evaluación como para valorar el aprendizaje con fines de promoción, para rendir cuentas tanto a los estudiantes como a los padres de familia, entre otros aspectos.

Tanto es así que en diferentes países se sigue investigando esta temática tomando diversos enfoques teóricos y metodológicos como para acceder a las teorías que poseen los maestros tanto en formación como en actividad. Una primera investigación quizá la pionera es la de Buendía, Carmona, González y López (1999) quienes a través de una batería de preguntas relacionadas con las dimensiones de evaluación realizan entrevistas y encuentran que el proceso de evaluación se realiza siguiendo las recomendaciones del paradigma conductista.

En el proceso de entender esta temática encontramos el trabajo de Marcelo (1987) que aborda el pensamiento y decisiones de la planificación de la enseñanza encadenando múltiples investigaciones con el fin de acceder al conocimiento del maestro, otro trabajo es de Marrero (1988) quien sienta de alguna manera la base para el estudio de las teorías que poseen los docentes a nivel implícito dando una clasificación particular de ellas, luego Pozo, Scheuer, Mateos y Pérez Echeverría (2006) enuncia una clasificación interesante de teorías para acceder al pensamiento docente por lo que en este trabajo se considera esta clasificación como soporte teórico conjuntamente con el enfoque formativo de la evaluación que propone el Currículo Nacional de la Educación Básica de Perú.

Pozo, Scheuer, Perez, Mateos, Martín y De la Cruz (2006) plantean el enfoque de las teorías implícitas, la teoría directa, la teoría interpretativa, la teoría constructiva y la teoría posmoderna. La teoría implícita directa ve a la evaluación como rendición de cuentas basada en resultados, la teoría implícita interpretativa conduce a que en el proceso de la evaluación es ver como el individuo se apropia de los contenidos, la teoría implícita constructiva apunta a que en la evaluación se recree y se construya ciertas capacidades como para gestionar el propio proceso de aprendizaje en tanto que para la teoría implícita posmoderna ve a la evaluación como un proceso innecesario ya que en esta teoría el estudiante tendría la capacidad de elegir lo que le gusta por lo tanto tiene que hacerlo bien.

El Currículo Nacional de la Educación Básica (2016) indica que para evaluar los aprendizajes a los estudiantes se debe emplear el enfoque formativo el mismo que sustenta que, "la evaluación es un proceso proceso sistemático en el que se recoge y valora información relevante acerca del nivel de desarrollo de las competencias en cada estudiante, con el fin de contribuir oportunamente a mejorar su aprendizaje" (p.177). También en este documento se señala que:

Una evaluación formativa enfocada en competencias busca, en diversos tramos del proceso:

- Valorar el desempeño de los estudiantes al resolver situaciones o problemas que signifiquen retos genuinos para ellos y que les permitan poner en juego,

integrar y combinar diversas capacidades.

- Identificar el nivel actual en el que se encuentran los estudiantes respecto de las competencias con el fin de ayudarlos a avanzar hacia niveles más altos.
- Crear oportunidades continuas para que el estudiante demuestre hasta dónde es capaz de combinar de manera pertinente las diversas capacidades que integran una competencia, antes que verificar la adquisición aislada de contenidos o habilidades o distinguir entre los que aprueban y no aprueban (p.177).

En tanto las orientaciones para evaluar que se señalan en el Currículo Nacional de la Educación Básica (2016) señalan que se debe evaluar las competencias encaminadas cada vez hacia un nivel de complejidad en donde se deben observar la combinación de todos los elementos de la competencia. En tanto para que se evalúe, a los estudiantes para lograr la autonomía en su aprendizaje tomando conciencia de lo que necesitan aumentando así de esta manera la confianza en sí mismos lo que finalmente les debe conllevar a asumir mayores retos en su vida. A nivel del profesorado se debe evaluar para atender a las características de los educandos y así de esta manera brindar la retroalimentación oportuna que cada estudiante necesita de acuerdo a sus características. Como se evalúa en el currículo se precisa que se debe partir entendiendo la competencia, analizando el estándar de ciclo, eligiendo y diseñando situaciones significativas de contexto, para luego utilizar criterios adecuados en la construcción de instrumentos.

Las preguntas ¿Qué se evalúa?, ¿para que se evalúa?, ¿Cómo se evalúa? presentes en el Currículo Nacional de la Educación Básica, Tejada (1997) y De la Torre (1994) lo complementan con las siguientes cuestiones ¿quién debe evaluar?, ¿con que evaluar?, ¿Cuándo evalúa?. De aquí que se entiende que ¿para qué? es la finalidad de la evaluación, ¿qué? sería el objeto de evaluación, ¿cómo? relacionado con los modelos de evaluación, ¿quién? serían los sujetos o agentes que realizan la evaluación, ¿con qué? que serían los instrumentos de evaluación, y ¿cuándo? relacionado al momento aplicar la evaluación.

Para el trabajo se empleó un enfoque cualitativo (Creswell y Plano, 2007) en cuyo análisis cualitativo se categorizó la información obtenida en las entrevistas para luego realizar las representaciones gráficas.

En el estudio participaron cinco maestros de matemática pertenecientes a Instituciones Educativas de Jornada Escolar Completa de la UGEL Otuzco, departamento de La Libertad. La obtención de los datos se realizó mediante entrevistas cuyas preguntas estuvieron relacionadas con las dimensiones básicas de la evaluación propuestas por (Tejada, 1997, De la Torre, 1994) además se incluyó una pregunta sobre la evaluación formativa quedando el guion de preguntas estructurado de la siguiente manera: ¿qué es la evaluación formativa en matemáticas?, ¿que evalúa usted a sus estudiantes?, ¿Qué evalúa a sus estudiantes?, ¿Cómo evalúa a sus estudiantes?, ¿Quiénes deben evaluar a los estudiantes?, ¿con que evalúas a tus estudiantes?, ¿Cuándo evalúas a tus estudiantes?. Posteriormente para contrastar la información, también se realizó visitas a las aulas para observar las clases y registrar las ocurrencias y mediante saturación teórica se comparó con la información obtenida en las

entrevistas.

La sistematización de la información tanto de las entrevistas como del registro de observaciones se hizo mediante el software informático para análisis cualitativo WebQDA (Neri de Souza, Costa y Moreira, 2011). El tratamiento de la información con WebQDA consistió en ingresar los audios de las entrevistas y las transcripciones en formato Word de los registros de observación mediante fuentes internas, luego se codificó generando las respectivas categorías de investigación, las clasificaciones de las subcategorías y todas las consultas que eran punto de apoyo para dar respuesta a la pregunta de investigación. En seguida se exportó a partir del WebQDA matrices triangulares en formato webqda para a continuación realizar las Redes Asociativas Pathfinder empleando Goluca (Godinho, Luengo y Casas, 2007).

Finalmente se procedió a realizar el análisis tomando en cuenta las categorías de la investigación, las redes construidas con Goluca y la sistematización de ideas obtenidas a partir de la información del registro de observaciones y de las entrevistas.

Resultados obtenidos

De la sistematización de las entrevistas mediante WebQDA y Goluca se obtuvo las siguientes Redes Asociativas Pathfinder. La figura 1 correspondiente a las categorías de la investigación para la teoría directa y figura 2 para teoría constructiva.

Para la teoría implícita interpretativa y posmoderna no se consideró necesario elaborar su Red Asociativa Pathfinder por el mismo hecho de que en este trabajo interesaba mostrar las teorías relacionadas con el conductismo y el constructivismo ya que son aquellas que nos dan una información más exacta sobre lo que sabe el maestro respecto a la evaluación.

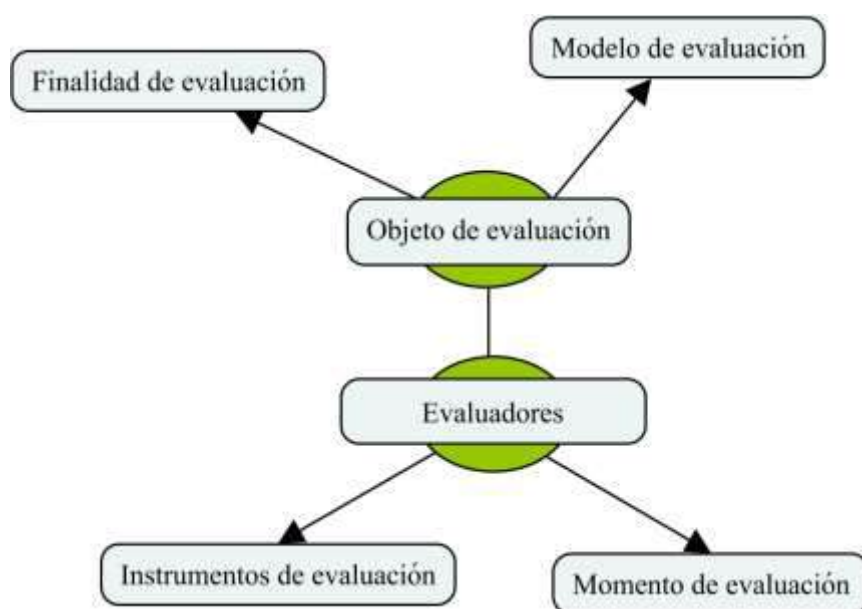


Figura 1. Red Asociativa Pathfinder para la teoría directa

En la figura 1, encontramos que los maestros muestran relevancia con respecto al objeto de evaluación y los agentes que lo realizan lo cual permite comprender que los maestros aun ven como objeto de evaluación el contenido que ellos imparten en el aula y consideran que los evaluadores deben ser quienes impartieron el conocimiento dentro de las aulas. En la Red

Asociativa Pathfinder la flecha de llegada a las otras categorías indican que las teorías de los maestros como fin siguen pensando que se evalúa con fines de certificación, como modelo siguen cuantificando la evaluación de los aprendizajes, siguen aplicando como instrumentos exámenes escritos de desarrollo y como momento lo siguen haciendo al cierre de un periodo a mediano o largo plazo.

Las evidencias encontradas en este grupo de maestros coinciden con los de resultados obtenidos por Remesal (2011) que señala que aún existe una gran dificultad en poner practica maneras innovadoras de evaluar, también coinciden con los obtenidos por Monteagudo, Molina y Miralles (2015) que indica que el profesorado aun evalúa de manera tradicional, de igual manera se relacionan con los de Moreno y Ortiz (2008) al señalar que la evaluación aún se centra en los conocimientos del estudiante.

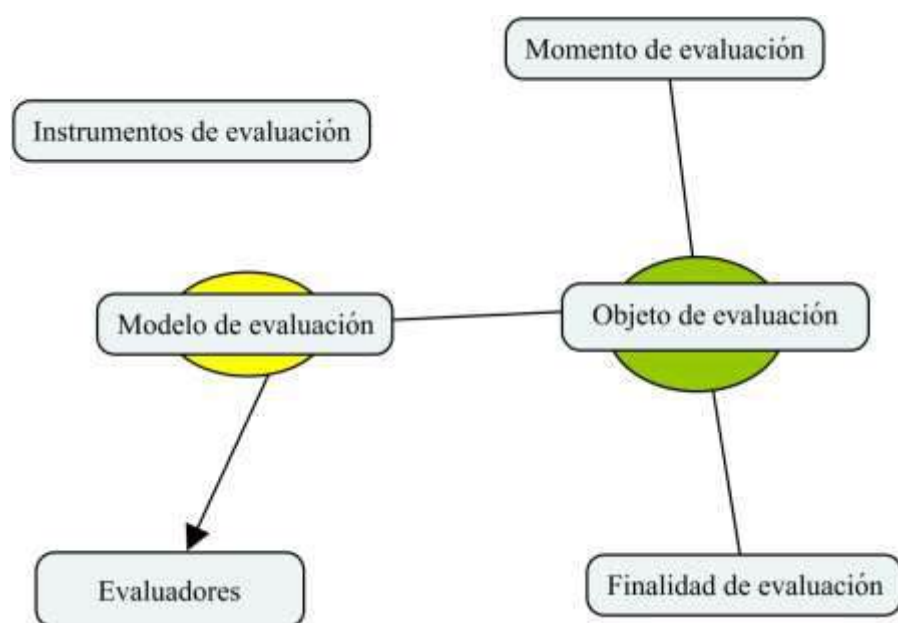


Figura 2. Red Asociativa Pathfinder para la teoría constructiva

En la figura 2, apreciamos que las teorías encontradas en los maestros giran en torno al modelo y objeto de evaluación es decir ya entienden que se deben evaluar entendiendo la competencia a evaluar y sus componentes. Del modelo de evaluación se relaciona los agentes encargados de evaluar por lo que aquí ya se concibe la idea de que el estudiante también es agente de su propia evaluación, se relaciona el objeto con el momento y la finalidad de la evaluación por lo que las teorías de estos maestros ya están encaminadas a que la evaluación tiene que ser permanente y sistemática. Lo particular en la figura 2, es que no se relaciona los instrumentos con las otras categorías lo cual podría darnos entender que la evaluación al ser permanente y sistemática solo bastaría con observar lo que está sucediendo como para ver si el individuo está o no desarrollando competencias.

Estos hallazgos encontrados son comparables con los obtenidos Gil (2014) que indica que los maestros se inclinan sus concepciones en altos porcentajes hacia la teoría constructiva y tienen en cuenta al momento de evaluar los procedimientos y estrategias que emplea el estudiante, al mismo tiempo también podemos comparar nuestros resultados con los de Pontes, Poyato, López y Oliva (2016) que indica que la teorías que posee el magisterio se inclinan hacia un

enfoque innovador próximo al constructivismo.

En el proceso de sistematización de las entrevistas y de las observaciones realizadas a los maestros hemos visto que todos se inclinan hacia el constructivismo o al conductismo en una u otra categoría, pero no todas las categorías hacia una misma teoría por lo que resulta necesario hacer un análisis global como para realizar la comparación entre las categorías de la investigación, las teorías que poseen los maestros y la teoría presente en el Currículo Nacional de la Educación Básica.

Tabla 1

Comparación de las categorías, su relación con las teorías de los maestros y el Currículo Nacional de la Educación Básica

Categorías de investigación	Maestros en investigación	Currículo Nacional de la Educación Básica
¿Qué es la evaluación formativa?	Es la que permite observar las dificultades que tienen los estudiantes y a partir de ellas reforzarlas.	Proceso sistemático en el que se recoge y valora información relevante acerca del nivel de desarrollo de las competencias en cada estudiante, con el fin de contribuir oportunamente a mejorar su aprendizaje.
Finalidad de la evaluación ¿Para qué?	Verificar si se aprendido los contenidos trabajados.	Para lograr la autonomía del estudiante al tomar conciencia. Para atender a la diversidad y brindar retroalimentación oportuna.
Objeto de evaluación ¿Qué?	Los conocimientos y el logro de capacidades.	Las competencias a través de la movilización de sus capacidades que la componen.
Modelo de evaluación ¿Cómo?	Cuantiando los resultados obtenidos.	Se entiende que es cualitativo ya que empieza comprendiendo la competencia, analizando los estándares, diseñando situaciones significativas de contexto, empleando criterios de evaluación para construir instrumentos
Evalúadores ¿Quién?	El maestro.	Alumnos, estudiantes y agentes externos.
Instrumentos de evaluación ¿Con qué?	Emplean listas de cotejo y pruebas de desarrollo.	A través de evidencias que impliquen en los estudiantes la realización de tareas auténticas las que se pueden valorar con diversos instrumentos.
Momento de evaluación	Lo realizan al finalizar un periodo, en algunos casos en el proceso,	Proceso permanente y sistemático que se puede realizar durante todo el proceso.

¿Cuándo?	pero con fines de control de aula.

Fuente: entrevistas, registro de observaciones y Currículo Nacional de la Educación Básica

La tabla 1, permite dar cuenta que los maestros no tienen conocimiento pleno de las teorías que sustentan el Currículo Nacional de la Educación Básica esto debido a que la gran mayoría de líderes pedagógicos tampoco lo tienen claro hacia dónde vamos. En las observaciones realizadas hemos visto que los maestros se encuentran mecanizados a un trabajo de sesiones dadas desde la plataforma de la Jornada Escolar Completa en su mayoría los imprimen sin realizarla ningún tipo de adaptación en muchos de los casos para presentar a los coordinadores pedagógicos, pero en el aula realizan todo lo contrario y que solo se preparan o improvisan cuando les visita el coordinador de área, el director o algún especialista de UGEL.

Consideraciones finales

El desarrollo de esta investigación ha permitido confirmar que no solo los maestros en formación inicial sino también los maestros en actividad creen que son constructivistas y al enfrentarse a la práctica pedagogía y evaluar los aprendizajes a sus estudiantes actúan de manera conductista por lo que se hace necesario capacitar a los maestros en estrategias innovadoras de enseñar y evaluar a los estudiantes, como también realizar acompañamiento permanente en las aulas por parte de maestros expertos en el tema como para generar una cultura de cambio en el profesorado.

Este trabajo resulta ser un buen punto de partida como para seguir explorando el conocimiento de la evaluación formativa en otras realidades tanto en maestros en formación inicial como en aquellos que imparten clases en las aulas, se podrían volver a observar las clases de los mismos maestros, así como de aquellos maestros reconocidos en el medio y a partir de ello hacer que los docentes con menor experiencia y que desconocen los planteamientos del Currículo Nacional de la Educación Básica vayan asimilando los nuevos paradigmas que resultan útiles para el desarrollo de competencias.

Otro punto importante que surge a partir de los resultados de esta investigación es que para que la educación siga avanzando se tiene que trabajar no solamente con el estudiante y el docente, sino también con la familia y los equipos directivos ya que como muy bien se sabe para desarrollar competencias implica el trabajo del conocimiento, las actitudes y los procedimientos.

Referencias

- Buendía, L., Carmona, M., González, D., & López, R. (1999). Concepciones de los profesores de los profesores de educación secundaria sobre evaluación. *Educación XX1*, 2(1), 125-154.
- Creswell, J., & Plano, V. (2007). *Designing and conducting mixed methods research*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.
- De la Cruz, R., & Luengo, G. (2018). Teorías Implícitas sobre Evaluación en Matemáticas que posees los Maestros en Formación inicial. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 31(1), 880-888.
- De La Torre, S. (1994). Innovación curricular. Proceso, estrategias y evaluación. Madrid: DyKinson, S.L.
- Gil, P. (2014). Concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje del alumnado del Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria de la Universidad del País Vasco. *Magister*, 26, 67-74.
- Godinho, V., Luengo, R., & Casas, L. (2007). *Implementación del software GOLUCA y aplicación al cambio de redes conceptuales*. Informe para la obtención del "Diploma de Estudios Avanzados", Universidad de Extremadura, España.
- Hidalgo, N., & Murillo, F. (2017). Las Concepciones sobre el Proceso de Evaluación del Aprendizaje de los Estudiantes. *REICE. Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*, 15(1), 107-128. doi:10.15366/reice2017.15.1.007.
- Marcelo, C. (1987). *El pensamiento del profesor*. Barcelona: CEAC.
- Marrero, J. (1988). Teorías implícitas y la Planificación de la enseñanza. *Actas del II Congreso sobre Avances en el Estudio del Pensamiento del Profesor* (pp. 137-144). Sevilla: Universidad de Sevilla, Servicio de Publicaciones.
- MINEDU (2016). *Curriculo Nacional de la Educación Basica*. Lima: Ministerio de Educación.
- Monteagudo, J., Molina, S. y Miralles, P. (2015). Opiniones sobre evaluación de los profesores de segundo ciclo de ESO de geografía e historia en España: El caso de la Región de Murcia. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 20(66), 737-761.
- Moreno, I., & Ortiz, J. (2008). Docentes de educación básica y sus concepciones acerca de la evaluación en matemática. *Revista Iberoamericana de Evaluación Educativa*, 1(1), 140-154.
- Neri de Souza, F., Costa, A., & Moreira, A. (2011). Questionamento no processo de análise de dados qualitativos com apoio de software WebQDA. *EduSer-Revista de Educacao*, 3(1), 19-30.
- Pontes, A., Poyato, F., López, L. y Oliva, J. (2016). Concepciones sobre evaluación en la formación inicial del profesorado de ciencias, tecnología y matemáticas. *Revista Iberoamericana de Evaluación Educativa*, 9(1), 91-107.
- Pozo, J., Scheuer, N., Perez, M., Mateos, M., Martín, E., & De la Cruz, M. (2006). *Nuevas formas de pensar la enseñanza y el aprendizaje: las concepciones de profesores y alumnos*.

Barcelona: Grao.

Remesal, A. (2011). Primary and secondary teacher's conceptions of assessment: A qualitative study. *Teaching and Teacher Education*, 27(2), 472-482.

Tejada, J. (1997). *La evaluación de programas*. Barcelona: Ed. Departament de Pedagogia i Didáctica UAB.

LA CREACIÓN DE PROBLEMAS EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES

Carina Saire Huamani

cjsaire@gmail.com

Instituto de Investigación sobre Enseñanza de la Matemáticas, IREM-PUCP, Perú

Resumen

Nuestra investigación se relaciona con la formación de docentes de matemática de educación secundaria bajo el modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico Matemáticas, Godino et al (2017), busca fortalecer los conocimientos matemáticos y didácticos de los profesores en relación con la función afín y lineal. Nuestras primeras actividades incorporan el uso de las TIC y la creación de problemas como medio para fortalecer los conocimientos común y ampliado de los docentes en el objeto indicado. Seguimos una metodología cualitativa pues nos interesa describir las características de los problemas creados por los profesores durante las actividades.

Palabras clave: *Función lineal, Función afín, creación de problemas.*

Introducción

En este artículo compartimos algunos resultados de la segunda etapa de nuestro proyecto de investigación Análisis de idoneidades en procesos de enseñanza y aprendizaje de las funciones afines y lineales, diseñados e implementados por profesores de secundaria en ejercicio, el cual se encuentra aún en desarrollo. Este proyecto es financiado por la Dirección de Gestión de la Investigación de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP), resultado de ser ganador del Concurso Anual de Proyectos (CAP) 2018 versión grupo de investigación; siendo nuestro grupo DIMAT perteneciente al IREM-PUCP. A través de este proyecto queremos hacer aportes significativos para los programas de formación de profesores de matemáticas de educación secundaria, en una perspectiva que integra enfoques actuales teóricos y metodológicos de la educación matemática. Trabajamos, específicamente, con el objeto matemático funciones afines y lineales, debido a su gran importancia en la educación básica y su trascendencia en cuanto a aspectos del pensamiento matemático y la modelación en general.

Problema de investigación

El Diseño curricular Nacional (2016) en la competencia Resuelve problemas de regularidad equivalencia y cambio, específicamente para el segundo año de secundaria (alumnos de 14 años), se plantea el desarrollo de diversos contenidos temáticos en los que destaca la función

lineal y afín. Elegimos este objeto matemático porque los docentes de educación secundaria presentan dificultades conceptuales (Sánchez, 2016) y confusión al resolver problemas relacionados con este contenido, información que corroboramos cuando aplicamos una prueba diagnóstica a los docentes con los que venimos trabajando.

Las funciones nos permiten modelar diversas situaciones de la vida cotidiana y es por ello que se debe valorizar dicho contenido, ya que es fundamental para la comprensión de nuestra realidad. Además, en el Diseño Curricular (2016), en las orientaciones de enseñanza aprendizaje se sugiere que el estudiante debe aprender haciendo, siendo el aprender y el hacer dos procesos indisolubles. Construir el conocimiento en contextos reales implica que el estudiante utilice la capacidad reflexiva y crítica, aprendan a partir de su experiencia identificando el problema e investigando sobre él. En el presente trabajo de investigación se desarrolla este punto a través del enfoque de creación de problemas en la que se busca que el maestro propicie que sus estudiantes creen sus propios problemas, lo que le impulsará a reflexionar y aprenderá haciendo.

Dentro de nuestro trabajo se realizó un diagnóstico sobre el dominio del concepto matemático función lineal y lineal afín en profesores de secundaria y se observó que tenían ciertas dificultades al resolver ejercicios y problemas con dicho contenido matemático; lo cual era preocupante ya que si un maestro posee escaso dominio del tema que imparte no logrará realizar un trabajo eficiente. Por tal motivo en el presente proyecto se aplicó dos talleres a diferentes grupos de docentes en Lima y provincia. En el primer taller trabajaron los requerimientos previos para abordar dicho objeto matemático, afianzar la parte teórica de las funciones lineales y afines en diversas actividades mediante la herramienta Geogebra. En el segundo taller "Creación de problemas sobre función lineal y lineal afín" se trabajó la creación de problema por elaboración. En el presente reporte nos abocaremos a este segundo taller.

Marco teórico

Malaspina (2014), indica que la creación de problemas es parte fundamental de la tarea docente pues le ayuda a los profesores a adecuar sus materiales a la realidad y a mejorar la motivación de sus estudiantes. Indica también que es necesario que los maestros incentivemos la creatividad en nuestros estudiantes, no solo la de resolver problemas de diversas e ingeniosas formas sino propiciar en ellos la creatividad proactiva, e indica que se puede desarrollar la capacidad creativa en los estudiantes al hacer que ellos creen sus propios problemas. Con lo cual se genera que aprendan matemática para la vida pues encontrarán sentido a esta materia pues está presente en la vida cotidiana. Como podemos evidenciar la creación de problemas es fundamental en los procesos de enseñanza aprendizaje de nuestros estudiantes, por ello es necesario que los maestros desarrollemos dicha capacidad para poder incentivar a nuestros estudiantes.

El autor indica que la creación de problemas matemáticos es un proceso a través de cual se genera un nuevo problema e indica que puede ser: (1) a partir de un problema dado (problema por variación). (2) a partir de una situación (elaboración de un problema). En el taller de creación de problema de nuestra investigación nos hemos abocado al inciso (1). Ya que

pretendemos desarrollar la capacidad de creación de problemas en maestros del nivel secundario en ejercicio, sin experiencia.

Antes de desarrollar en que consiste elaborar un problema a partir de una situación, es importante tener claro los elementos fundamentales de un problema que según Malaspina (2014) son: (1) Información, que son los datos cuantitativos o relacionales que se dan en los problemas. (2) El requerimiento, es lo que solicita el problema y puede ser de carácter cualitativo o cuantitativo. (3) Contexto, que puede ser de carácter intra matemático; es decir que dicho problema se enmarca en el entorno netamente matemático o extra-matemático, que es un problema vinculado a la realidad. (4) Entorno matemático, hace referencia a los conceptos matemáticos que se utilizaran para resolver el problema.

El autor ha venido desarrollando dos estrategias de trabajo para el desarrollo de la habilidad de crear problemas, EPP y SPP. La primera de estas estrategias está dirigida a la elaboración de un problema mediante la variación de un problema inicial y la segunda a la creación de un problema desde una situación particular. En nuestro taller hemos utilizado la primera parte de la estrategia EPP, en que se parte de un problema propuesto en un episodio de clases y se solicita a cada participante resolver el problema del episodio. Luego elaborar un nuevo problema que podría facilitar la resolución de este, un problema pre; para poder compartir dichas propuestas y establecer de forma grupal el problema más adecuado para el cometido propuesto.

Aspectos metodológicos

Para poder elaborar el taller de Creación de problemas, (1) se desarrolló la parte teórica de la creación de problemas, es decir; los elementos de un problema, los problemas por variación, y elaboración y algunos ejemplos para que los participantes del taller tengan algunas referencias para poder participar adecuadamente. (2) se les presentó un problema inicial, un episodio de clase, en el cual se solicitaba a los participantes que plantearan sus soluciones.

El profesor David, en una de sus clases sobre funciones, propuso el siguiente problema a sus alumnos del segundo grado de educación secundaria:

María quiere saber cuál de las compañías telefónicas le ofrece una tarifa mensual más conveniente:

Tarifa de la compañía telefónica ALFA:

Por uso del servicio: 5 soles por un mes (para hacer llamadas se hace un pago adicional).

Por cada segundo de conversación telefónica: 3 céntimos (0,03 soles)

Tarifa de la compañía telefónica BETA:

Por cada segundo de conversación telefónica: 4 céntimos (0,04 soles)

¿En qué caso(s) le conviene a María optar por la compañía telefónica ALFA? Ilustrar gráficamente.

Fig. 1. Episodio de clase. Fuente propia

(3) Posteriormente, se les pidió elaborar un problema que facilite la comprensión del problema inicial, el problema pre. (4) Formados en grupos de cuatro profesores, se intercambian los

problemas realizando una coevaluación de estos, para posteriormente decidir el problema más adecuado para ser el problema pre del equipo. (5) Se pasa a una etapa de intercambio entre los grupos, para que cada grupo resuelva el problema de otro grupo. (6) Se solicita a algunos de los grupos que han solucionado un problema propuesto, que expongan sus apreciaciones de este. Hay que resaltar que en el desarrollo de este taller el capacitador y sus colaboradores deben estar pendientes a las dudas y se debe realizar un monitoreo continuo. Para finalizar se realizan algunas observaciones finales sobre los trabajos realizados y se resalta la importancia de la creación de problemas en la labor docente y en el proceso de enseñanza aprendizaje de los estudiantes.

El taller de creación de problemas fue trabajado con los profesores de educación secundaria de los lugares donde se aplicó la prueba diagnóstica que se realizó en noviembre del 2018 y dentro de lo posible contando con el mismo grupo de profesores participantes, sin descartar la participación de otros docentes interesados. Los grupos pertenecían a diferentes provincias del país y tuvieron en promedio una participación de 15 profesores por taller. En total se han atendido a cinco grupos de profesores entre febrero y julio del 2019.

Resultados obtenidos

Los primeros resultados que obtuvimos durante el taller fueron procedentes de la solución del problema propuesto en el episodio de clases realizada por los participantes del taller. Lo que se esperaba como solución ideal del problema del episodio era la definición de la función para cada una de las tarifas incluyendo el dominio de la función, un método para hallar el punto de cruce de la representación gráfica de las dos funciones y un solo gráfico con las dos representaciones gráficas que respalde la respuesta solicitada en el problema. El resultado implicaba la determinación de una función lineal y una función afín, el igualar las funciones y hallar el punto de cruce en 500 segundos y tabular algunos puntos para poder ayudarse con el gráfico de las dos representaciones para el análisis de la mejor tarifa.

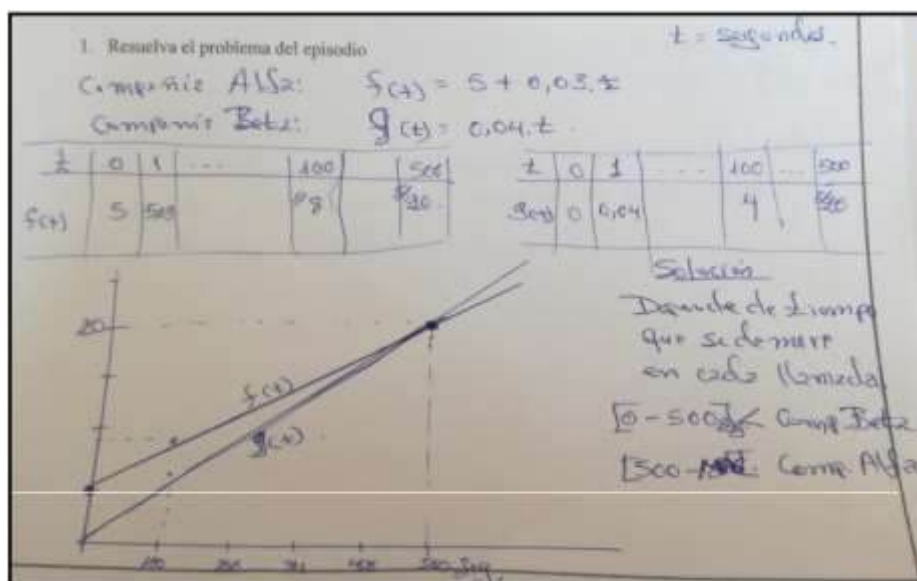


Fig. 2. Solución ideal del episodio de clase. Profesor del grupo 1.

Luego de revisar la respuesta de los profesores participantes de los talleres de creación de problemas, pudimos comprobar que solo el 10% de los profesores llegaron a dar la solución ideal con la respuesta esperada, a pesar de que fueron 30% de los profesores los que hicieron bien todos los pasos anteriores a la respuesta. Tenemos entonces profesores que no se equivocaron en la respuesta, sino que no la contextualizaron.

El 78% de los profesores hicieron correctamente el modelamiento de las dos funciones, pero solo uno de todos ellos incluyó el dominio en las funciones. El 40% de los profesores graficaron adecuadamente las dos rectas, pero solo el 24% había determinado el punto de intersección de las rectas. Un 25% de los profesores no graficaron y el otro 35% graficó de manera incorrecta, tuvimos profesores que graficaron las representaciones como rectas paralelas o graficaron las rectas en forma de aspa o hicieron curvas o solo graficaron una recta.

El segundo análisis se refiere al tipo de problema diseñado por cada uno de los docentes como un problema pre al problema del episodio.

Hay que tener en cuenta que existe una trayectoria del tema función lineal y función afín, que permite ir pasando de un conocimiento a otro de manera que se construya una secuencia sólida de aprendizaje. Para poder llegar al tema de la comparación de la representación gráfica entre dos funciones, una lineal y una afín, deberíamos haber trabajado previamente con la representación gráfica de una función lineal, luego la representación gráfica de una función afín, posteriormente con la comparación de la representación gráfica de una función constante y una lineal, la comparación de la representación gráfica de dos funciones lineales y finalmente la comparación de una representación gráfica de una función lineal y una afín.

Un problema preámbulo para el problema del episodio debería estar circunscrito a retroceder a lo más a la comparación de la representación gráfica anterior, dos funciones lineales. Y lo más cercano a la comparación de la representación gráfica propuesta en el episodio podría ser simplificar los valores de las funciones propuesta en el problema o incluir preguntas que permitan seguir los pasos de la resolución.

Al revisar los problemas propuestos por los profesores podemos ver varios tipos de problema pre, veamos los que llegan a un problema pre cercano al del episodio:

- Cinco (7%) profesores agregaron preguntas que permitían hacer el análisis del problema, cuatro de ellos con el mismo problema y un profesor, además, cambia los valores constantes de las funciones a valores naturales.
- Trece (20%) profesores simplifican las funciones cambiando los valores constantes decimales por valores naturales. En algunos casos, los valores naturales que toman son pequeños y en otros casos grandes; esto depende del contexto. En algunos casos los contextos varían y en otros mantiene el contexto del episodio.
- Cinco (7%) profesores cambian a dos funciones lineales en el mismo contexto o en uno variado.
- Siete (10%) profesores plantean un problema idéntico variando ligeramente los valores de las constantes, pero manteniéndolos en decimales.

Al revisar los problemas propuestos por los profesores podemos también observar problemas que están muy lejanos al problema propuesto o son más difíciles:

- Siete (10%) profesores cambian a dos funciones afines, haciendo el problema más complejo que el presentado.
- Tres (5%) profesores cambian las funciones por dos funciones constantes o solo una afín.
- Catorce (21%) profesores agregan una pregunta donde buscan aplicar ambas funciones en unos puntos específicos incluyendo el punto de intersección.
- El resto de profesores o no plantean un problema o lo hacen en otro tema o solo piden modelar.

Notamos que los profesores ante la propuesta de preparar un problema que facilite a los alumnos la solución del problema del episodio, toman diferentes decisiones en función al punto en la trayectoria del contenido que buscan fortalecer.

El 35% de los profesores analizados, piensan que la dificultad para establecer una comparación entre la representación gráfica de dos funciones, una lineal y una afín, puede ser apoyada en algunos casos al plantear un problema muy lejano del original o más difícil. O que aplicando ecuaciones se facilitará el problema del episodio.

La idea de proponer un problema pre es justamente ir solo a una o dos etapas atrás en la trayectoria del contenido siempre y cuando estas ya se hallan revisado previamente con los alumnos. Este caso se encuentra solo en el 44 % de los profesores analizados.

Consideraciones finales

Desde los resultados vistos en este primer análisis de los problemas creados por los profesores, podemos establecer las muchas deficiencias que se pueden ir identificando, para ser examinadas en futuros trabajos de investigación.

En primer lugar, la necesidad de trabajar las trayectorias de conocimientos, los profesores deben poder establecer de forma uniforme las trayectorias necesarias en la enseñanza de los alumnos, partiendo de los desempeños propuestos por el Minedu, para cada competencia. De esta manera, podrán graduar los desempeños identificando la progresión del contenido.

En segundo lugar, la mejora del dominio de los conceptos. Los profesores tienen algunos conocimientos, pero no lo suficientemente fortalecidos, por ello es que eventualmente cometen errores que se esperarían en sus alumnos. Es necesario buscar las fuentes exactas de esta falta de dominio.

Esta investigación continua con una etapa de observación de las sesiones de clase, la cual esta en pleno desarrollo. Esperamos que los resultados de esta nueva etapa brinden más luces sobre los problemas que aquejan a los profesores analizados, y en que grado el taller de creación de problemas a contribuido en su trabajo en el aula.

Referencias

- Godino, J.D, Batanero, C, Font, V. & Giacomone, B. (2017). Enfoque Ontosemiótico de los Conocimientos y Competencias del Profesor de Matemáticas. *Bolema*, 31(57), 90 – 113
- Malaspina, U. (2014). Reflexiones y propuestas en Educación Matemática. IREM Departamento de Ciencias, Sección Matemáticas PUCP, Lima Perú, Moshera
- Ministerio de Educación (2016). Diseño Curricular Nacional. Lima, Perú. Recuperado de: file: <http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-de-la-educacion-basica.pdf>
- Sánchez, D. (2016). Conceptualización de la función lineal y afín: Una experiencia de aula (tesis de maestría). Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.

UNA ESTRATEGIA DE INVENCION DE PROBLEMAS PARA ESTIMULAR EL DESARROLLO DE LA COMPETENCIA DE ANÁLISIS DIDÁCTICO EN PROFESORES DE MATEMÁTICA

Carlos Torres

Uldarico Malaspina

ctorresn@pucp.pe , umalasp@pucp.pe

Instituto de Investigación sobre Enseñanza de la Matemáticas, IREM-PUCP, Perú

Resumen

El estudio se diseñó e implementó una estrategia para mejorar la competencia de análisis didáctico de los profesores de matemática mediante tareas relacionadas a la invención de problemas. La estrategia involucra una fase de reflexión didáctica que se asocia a la reflexión sobre las prácticas matemáticas y permite promover la competencia de análisis didáctico. Para este propósito, se desarrolló un taller de invención de problemas dirigido a profesores de matemática del nivel secundario y se analizó los problemas creados como producto del taller. Algunos resultados del estudio evidencian que esta estrategia permite movilizar la competencia de análisis didáctico dado que la reflexión hecha por el profesor contribuye a formular mejores problemas con énfasis didácticos en el ámbito de la enseñanza y aprendizaje de la matemática.

Palabras clave: Resolución de problemas, invención de problemas, análisis didáctico, formación de profesores

Introducción

La invención de problemas o problem posing (en lengua inglesa), en el campo de la enseñanza de la matemática, ha sido largamente reconocido como una actividad intelectual importante para el desarrollo de investigaciones científicas (Cai, et al., 2015). Esta importancia se ha reflejado en el desarrollo de investigaciones empíricas, de las cuales se destaca aquellas cuyo foco de estudio es la competencia de análisis didáctico en el profesor de matemáticas mediante la invención de problemas (Malaspina, Mallart, & Font, 2015).

Desde una perspectiva global, las actividades o tareas de invención de problemas exigen que una persona ponga en juego sus conocimientos matemáticos. Sin embargo, si el problema propuesto tiene como propósito contribuir al conocimiento matemático del estudiante – o más específicamente, a comprender y resolver problemas matemáticos más complejos – entonces el conocimiento didáctico matemático del profesor debe intervenir. Este aspecto se relaciona al manejo de la competencia de análisis didáctico del profesor, el cual ha sido ampliamente estudiado dentro del enfoque teórico ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS) (Breda, Pino-Fan, & Font, 2016)

Del mismo modo, Stahnke, Schueler y Roesken-Winter (2016) presentan una revisión de investigaciones empíricas sobre el profesor de matemáticas, y que en una de sus conclusiones se menciona que las investigaciones revisadas muestran que los profesores tienen dificultades para analizar las tareas matemáticas (y su potencial educativo) que sus estudiantes proponen. Con el propósito de tratar estas dificultades, es fundamental para los profesores, tener la habilidad de analizar sus propias tareas matemáticas y, en ese sentido, consideramos que nuestra investigación provee una propuesta para ello, mediante una estrategia de invención de problemas con una fase de reflexión didáctica.

Marco teórico y aspectos metodológicos

Enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS)

Adoptamos el EOS como marco teórico dado que estamos interesados en estudiar las competencias del profesor cuando se realiza análisis de las actividades matemáticas que desarrollan. Asimismo, creemos que es relevante el uso de un marco que nos brinde categorías para analizar tanto el conocimiento matemático como el conocimiento didáctico del profesor. En el EOS, el conocimiento didáctico-matemático se entiende como el conocimiento más profundo de la matemática y su enseñanza, el cual el profesor de matemática debe tener para diseñar, implementar y evaluar los procesos complejos de la enseñanza de la matemática. También, un importante constructor teórico del EOS para el análisis de los objetos matemáticos, como los conceptos, procedimientos, proposiciones y argumentos, son las configuraciones epistémicas y cognitivas, los cuales explicaremos a continuación.

De acuerdo a Godino, Batanero y Font (2007), cuando una persona desarrolla prácticas matemáticas y las evalúa, él o ella tiene que activar una mixtura de aspectos compuestos por algunos o todos los objetos matemáticos, el cual supone: situaciones problemáticas, lenguajes, proposiciones, definiciones, procedimientos, y argumentos. Estos objetos se interrelacionan, formando configuraciones definidas como una red de objetos que intervienen y emergen del sistema de prácticas; tales configuraciones son configuraciones epistémicas (CE) cuando se refieren a las redes de objetos considerando desde una perspectiva institucional, y son configuraciones cognitivas (CC) cuando se refieren a las redes de objetos considerados desde una perspectiva personal. El análisis de estas configuraciones nos permite obtener una descripción más completa de los elementos relacionados a un problema matemático y su solución, el cual denominamos *anatomía de la solución de un problema*.

Invención de problemas y la competencia del análisis didáctico del profesor de matemática

Es necesario mencionar que hay diversas posturas respecto a lo que se entiende por actividades que promuevan la invención de problemas, las cuales se enfocan en los escenarios, estrategias o procesos cognitivos (Cai, et al., 2015). En nuestro estudio, adoptamos la propuesta de Malaspina (2015), quien afirma que la invención de problemas es un proceso por el cual se obtiene un nuevo problema, ya sea modificando un problema dado, el cual supone que el nuevo problema se obtiene por *variación* de un problema dado. Del mismo modo, este investigador propone que los problemas matemáticos tienen cuatro elementos fundamentales: información, requerimiento, contexto y entorno matemático. De este modo, la invención de

problemas por variación supone modificaciones cuantitativas o cualitativas de uno o más de estos elementos.

El enfoque teórico sobre invención de problemas fomulado por Malaspina (2015) se complementa con la estrategia propuesta en Malaspina, Mallart y Font (2015), el cual se implementó en talleres con profesores en formación y en servicio, en procesos de formación docente o profundización de conocimientos didáctico-matemáticos, cuyo propósito fue estimular la habilidad de inventar problemas por variación. En resumen, este estudio involucró la implementación de la estrategia EPP, que supone un Episodio, un problema denominado Pre y un problema denominado Pos (Malaspina, Mallart & Font, 2015; Malaspina, Torres & Rubio, 2019), considerando la invención de problemas por variación, donde se ha llegado a tener indicios que los profesores de matemática carecen de una competencia de análisis didáctico para formular problemas con propósitos didácticos. Así, dado la importancia que en los profesores de matemática se desarrolle esta competencia, en particular cuando crean problemas matemáticos con énfasis didáctico, en nuestro estudio, implementamos la estrategia EPP para la invención de problemas considerando una fase (R) de refelexión metacognitiva y didáctica, por lo que denominados a esta estrategia ERPP.

En la nueva estrategia ERPP, se incluye una fase donde los profesores deben elaborar CC de sus soluciones al problema presentado en el episodio (problema del episodio (PE)) y – basado en ello – reflexionar sobre sus prácticas matemáticas. Para implementar esta nueva estrategia, proponemos cuatro etapas, que se desarrollan en talleres de invención de problemas:

- Fase 1: Se presenta un episodio de clase que muestra una escena de clase en el que se propone un problema a los estudiantes y sus comentarios sobre la resolución a este problema. Estos comentarios revelan dificultades que pueden tener los estudiantes frente el PE.
- Fase 2: Cada uno de los participantes del taller resuelve el PE y reflexiona sobre la actividad matemática necesaria para resolverlo mediante el uso de la CC.
- Fase 3: Cada uno de los participantes inventa un problema, denominado problema pre, cuya característica principal recae en que su resolución facilita la comprensión y solución del PE.
- Fase 4: Cada uno de los participantes, inventa otro problema pre luego de analizar y reflexionar en el problema pre previamente creado y a la CC relacionado su solución.

En nuestro estudio, no implementamos la fase que involucra la invención del problema pos que se presenta en la estrategia EPP.

Método

En esta investigación, utilizamos un estudio de casos con 16 profesores de matemática en servicio del nivel secundario, quienes participaron en un taller de invención de problemas. Cabe precisar, que nuestro estudio es exploratorio, descriptivo y analítico, tomando como unidad de análisis los problemas creados por los participantes en el taller. Del mismo modo, analizamos estos problemas utilizando herramientas del EOS, los cuales son las CE y CC para las prácticas asociadas a la invención y resolución de problemas. El uso de la CE y la CC es una metodología

previamente utilizada y sustentada en algunas investigaciones realizadas bajo el marco del EOS (e.g. Badillo, Font, & Edo, 2015) con el propósito de examinar las prácticas matemáticas de los estudiantes.

Taller de invención de problemas sobre funciones cuadráticas

En la presente investigación, implementamos la estrategia ERPP en el Taller de invención de problemas sobre funciones cuadráticas, cuyo propósito se relaciona a estimular el desarrollo de la habilidad de inventar problemas por variación de un problema dado. Centramos nuestra atención en la invención de problemas pre, dado que este requiere de criterios didácticos de la persona que propone el problema, por tanto, estos problemas pre deben tener características que faciliten la comprensión y resolución de un problema previamente dado.

En las siguientes líneas, resumimos la dinámica del taller de invención de problemas. El taller se compone de cuatro sesiones.

- Primera sesión: se aplicó un test sobre funciones cuadráticas y se presentó la CE de un problema sobre función afín, cuyo objetivo era iniciar a los participantes en la elaboración de sus CC.
- Segunda sesión: Los participantes del taller elaboraron sus CC asociados a la resolución del PE. Del mismo modo, reflexionaron en torno a sus prácticas matemáticas de resolución, mediante un cuestionario previamente elaborado.
- Tercera sesión: Se presentó el episodio de clase. Los participantes resolvieron el PE y elaboraron su CC de la resolución de este problema (CCPe). Se socializó la solución del PE y los objetos matemáticos de algunas CCPe elaborados por los participantes. Seguidamente, se solicitó crear y resolver un problema pre (P1) considerando las reacciones de los estudiantes al problema del episodio, también se solicitó elaborar la CC del problema creado (CCPp1). Luego, cada participante reflexionó en forma individual en torno a su práctica matemática de invención. Para reforzar la reflexión didáctica, los participantes formaron parejas para discutir sobre los problemas pre creados y sus CCPp1. Este análisis se realizó considerando una comparación entre CCPe y la CCPp1 por cada participante. A continuación, se socializaron algunos problemas creados y los resultados de su proceso de reflexión con la intención de ampliar el análisis de problemas con énfasis didáctico entre los asistentes.
- Cuarta sesión: Se solicitó a los participantes a crear un problema pre (P2) asociado a la reflexión realizada del P1 y su CCPp1. Después de un determinado tiempo, los participantes en forma individual y en parejas, reflexionaron en torno a su problema P2 creado. Como culminación del taller, se socializó algunos problemas creados.

A continuación, presentamos el episodio de clase y el EP, junto con las reacciones de estudiantes que se enfrentan a la resolución de dicho problema.

Mr. Pérez, en una clase de funciones, propuso el siguiente problema a sus estudiantes del tercer grado de educación secundaria:

Encuentra un par de números cuya suma sea 43 y su producto sea el máximo posible.

Resuelve el problema y explica tu procedimiento en forma detallada.

Luego de unos minutos, algunos estudiantes comentaron:

- Pedro: Los números son 21 y 22
- Isabel: El producto máximo no se puede saber
- Santiago: ¿Para qué me sirve resolver este problema?

En nuestro estudio adoptamos una solución expert para el problema del episodio, y la CE de tal solución se elaboró con el objetivo de tenerlo como referencia para analizarlo y compararlo con el CC de la solución de cada participante al problema P1 (CCPp1) (ver Figura 1).

Solución experta y CE del problema del episodio (CEPe)

La solución experta para este problema implica definir una función que permita obtener un par de números cuya suma es conocida y su producto debe ser máximo. Así, se define la función $f(x) = x(43 - x)$ donde " x " y " $43 - x$ " son los números cuyo producto deber ser máximo. Por tanto, los números son ambos iguales a $43/2$ y su producto es $1849/4$. Por otro lado, también se puede encontrar esta respuesta asociando el número al valor de la abscisa que maximiza la función f . En tal sentido, también es aceptable utilizar el vértice para encontrar el máximo de la función que sería el producto solicitado. Otra estrategia de solución consiste en relacionar el vértice de la parábola que representa a f , así este vértice sería el punto de coordenadas $(43/2, 1849/4)$. Esta última estrategia hace uso de la representación gráfica de la función.

Para la elaboración de la CE de la solución del PE, se encontró diversos elementos asociados a los objetos matemáticos. Así, se obtuvo: el lenguaje utilizado (verbal, simbólico y representaciones gráficas), la información, el requerimiento, el contexto y el entorno matemático del problema se muestran de forma explícita; los conceptos involucrados (función cuadrática, ecuación lineal, máximo de una función cuadrática, vértice, parábola, gráfico de funciones) y la proposición emergente: La función dada por $f(x) = x(S - x)$ tendrá máximo para $x=S/2$. Además, se describe el procedimiento y los argumentos refuerzan la validez de la proposición dada, el cual deriva en la conclusión para la solución del problema.

Análisis de los datos

En relación a solución del PE, se observó que la mayoría de profesores considera la función cuadrática como objeto asociado al problema y esto se acerca a lo planteado en la solución experta. Del total de participantes, solo 12 de ellos resolvieron el problema correctamente. También, se destaca que, si bien 10 participantes definen la variable en la solución del problema, 12 de ellos explicitan la función a maximizar. Por otra parte, para hallar el valor máximo de la función, 5 utilizan la estrategia de completar cuadrados, mientras que 5 lo hacen utilizando el algoritmo para hallar el vértice de la función cuadrática y, como consecuencia, estudiar su máximo correspondiente. Algunos asistentes (3) resolvieron el problema apoyados en una tabla de valores, pero hubo un participante que usó la tabla en forma parcial, para tener una idea de la secuencia numérica asociada al problema. Precisamente, el uso de las tablas conllevó a algunos participantes (4) a realizar sus análisis en el conjunto de los números naturales y no llegar a la respuesta correcta.

Analizando cualitativamente las CCPe elaboradas por los asistentes, se observa que la mayoría reconocieron los objetos matemáticos presentes, por lo menos en forma parcial. Sin embargo, solo algunos de los participantes lograron elaborar con mayor certeza los objetos denominados proposiciones y argumentos. De la misma forma, la falta de solidez en sus proposiciones y/o argumentos se corresponde con una falta de práctica en el análisis de su quehacer matemático, y por extensión podemos afirmar que carecen o no muestran la competencia de análisis didáctico.

Por cuestiones de espacio, solo presentaremos el caso de un profesor participante que en adelante llamaremos T11 y cuyos resultados se muestran a continuación.

Caso de estudio: Profesor T11

Para el análisis de las configuraciones y la reflexión sobre las prácticas matemáticas de solución e invención para este caso, utilizamos un esquema (Figura 1) acorde a la estrategia ERPP. En este esquema se muestra la interacción entre diferentes configuraciones, ya sea epistémicas o cognitivas, para estudiar la competencia matemática (M) o competencia de análisis didáctico (D) del profesor en servicio. En tal sentido, por nuestros intereses, nos enfocamos en estudiar las interacciones que involucran la competencia de análisis didáctico (D).

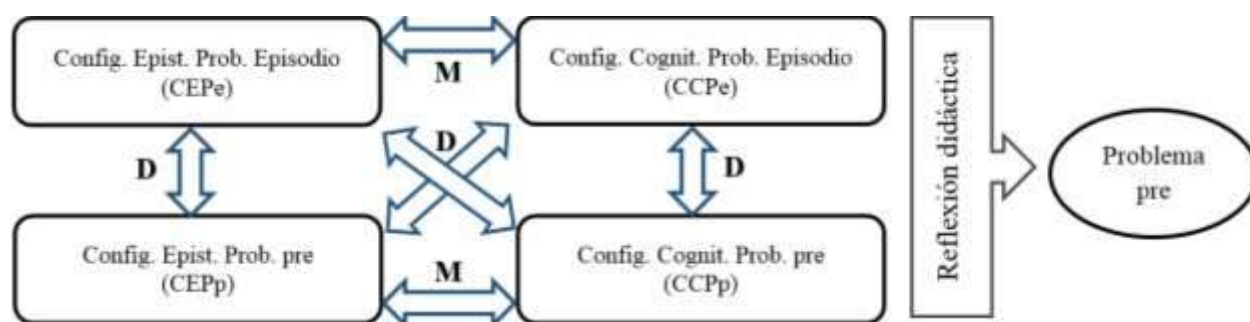


Figura 1. Diagrama para comparar las configuraciones

Como ejemplo de un problema pre, presentamos el primer problema pre (Pp1) creado por T11.

Determina las parejas de números cuya suma sea, respectivamente, 1, 2, 3,..., 10; pero de tal manera que el producto de las componentes de dichas parejas sea el máximo posible. (a) A partir de lo observado, ¿puedes indicar cuáles son las características que, en cada caso, debe cumplir la pareja de números? (b) Si tuvieras que formular cada producto como una función, exprésala.

Junto al problema creado, T11 propuso una posible solución que nos permitirá profundizar en aspectos no tan explícitos del problema. Asimismo, el profesor elaboró la CCPp1. Finalmente, respondió al cuestionario sobre la práctica matemática de invención. Por limitaciones de espacio, presentamos la CEPp1 de la solución experta al problema pre (P1).

Tabla 1. Configuración epistémica de la solución experta del problema pre creado por el profesor T11 (CEPp1)

Objetos matemáticos	Especificaciones																																				
Lenguaje	Términos y expresiones: suma, número, tabla, valores prueba, pareja de números, producto, infiere, suma dada, función, maximizar, completar cuadrados, mitad, número real, función producto - Representaciones verbales: Función, maximizar, producto, suma, número real, completar cuadrados, función producto. - Representaciones simbólicas $f(x) = x(1 - x)$, $g(x) = x(6 - x)$, $f(x) = x(m - x)$, $f(x) = -\left(x - \frac{m}{2}\right)^2 + \frac{m^2}{4}$, $x = \frac{m}{2}$, $x = 3$, $x = \frac{1}{2}$ - Representaciones gráficas Para la suma 4<table><tr><td>Pareja</td><td>(1;3)</td><td>(2;2)</td><td>(2,25;1,75)</td><td>(2,5;1,5)</td><td>(3;1)</td></tr><tr><td>Suma</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td></tr><tr><td>Producto</td><td>3</td><td>4</td><td>3,9375</td><td>3,75</td><td>3</td></tr></table>Para la suma 5<table><tr><td>Pareja</td><td>(1;4)</td><td>(2;3)</td><td>(2,50;2,50)</td><td>(2,75;2,25)</td><td>(4;1)</td></tr><tr><td>Suma</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td></tr><tr><td>Producto</td><td>4</td><td>6</td><td>6,25</td><td>6,1875</td><td>4</td></tr></table>	Pareja	(1;3)	(2;2)	(2,25;1,75)	(2,5;1,5)	(3;1)	Suma	4	4	4	4	4	Producto	3	4	3,9375	3,75	3	Pareja	(1;4)	(2;3)	(2,50;2,50)	(2,75;2,25)	(4;1)	Suma	5	5	5	5	5	Producto	4	6	6,25	6,1875	4
Pareja	(1;3)	(2;2)	(2,25;1,75)	(2,5;1,5)	(3;1)																																
Suma	4	4	4	4	4																																
Producto	3	4	3,9375	3,75	3																																
Pareja	(1;4)	(2;3)	(2,50;2,50)	(2,75;2,25)	(4;1)																																
Suma	5	5	5	5	5																																
Producto	4	6	6,25	6,1875	4																																
Situación problema	Información: La suma de dos números es, respetivamente, 1, 2, 3, 4,..., 10. El producto de dos números es, en cada caso, el máximo. Requerimiento: Determina las parejas de números cuya suma se conoce. ¿Cuáles son, en cada caso, las características que debe cumplir la pareja de números? Contexto: Intra matemático Entorno matemático: Funciones																																				
Conceptos	Máximo, suma, función cuadrática, número real, completar cuadras, producto																																				
Proposiciones:	- Elaboramos una tabla con algunos valores de prueba para conjeturar algunas ideas. - Los números que cumplen las condiciones del problema son iguales																																				

a la mitad de la suma dada.

- Completamos cuadrados para maximizar la función.

Procedimientos

- Se dio lectura al problema para determinar la información y el requerimiento.
- Se elaboró una tabla de valores prueba para inducir algunas conjeturas respecto del requerimiento del problema.
- Se formuló algunas funciones con algunos valores de la tabla previamente elaborada.
- Se propuso una conjetura que fue demostrada utilizando la técnica de completar cuadrados y permitió responder a la segunda pregunta.

Argumentos

Tesis 1

De la lista de valores mostrados en las tablas, se infiere que los números que cumplen las condiciones del problema son iguales a la mitad de la suma dada.

Argumento

Se deduce utilizando el razonamiento inductivo que la mitad de la suma dada representa el valor de los números pedidos. Este análisis se realizó en base al patrón que se encontró en la tabla de valores prueba.

Tesis 2

Los números cuya suma se conoce y su producto es el máximo deben ser iguales, más todavía son iguales a la mitad de la suma dada.

Argumento

Este argumentos se justifica mediante la técnica de completar cuadrado para f

$$f(x) = x(m - x)$$

$$f(x) = -\left(x - \frac{m}{2}\right)^2 + \frac{m^2}{4}$$

Además, el valor del máximo se obtiene mediante la ecuación del eje de simetría de la parábola correspondiente a esta función.

Por limitaciones de espacio, mostramos el análisis CEPe y CEPp1 para el participante T11.

Análisis de la CEPe y CEPp1

Del análisis de la CEPe y CEPp1, se observa que la información es similar y que solo fue variada en el sentido cuantitativo. Si bien es cierto que la cantidad de parejas de números es mayor, la bondad se evidencia en que son números más manejables para un estudiante de educación básica. De la misma forma, el requerimiento sufrió una modificación, puesto que en el Pp1 se

muestran dos preguntas que invitan al estudiante a la reflexión sobre sus resultados. Una característica resaltante es la continuidad del contexto intramatemático en ambos problemas.

Para responder al requerimiento del PE se hace necesario utilizar expresiones algebraicas, sin embargo, en el problema pre no es necesario utilizar este recurso, salvo en el último apartado en el que se señala la generalización utilizando funciones. Esta sería una ventaja desde el punto de vista didáctico para llegar a resolver el PE, sin hacer uso de la función cuadrática.

Respecto al lenguaje, en general se rescata el uso de representaciones gráficas: el gráfico de la parábola para el problema del episodio y la tabla de valores para el problema pre creado. Asimismo, en ambas situaciones se distingue la idea de máximo. Así se hace explícito el uso de la función cuadrática en el problema pre respecto al PE. A diferencia del problema pre, en el PE se hace necesario utilizar ecuaciones lineales para formalizar y dar rigor a la solución del problema. Respecto a los conceptos considerados en ambas configuraciones, se nota la coincidencia en muchos de ellos, como es el caso de los conceptos de función, función producto, la idea de máximo de una función, completar cuadrados, entre otros. Las proposiciones en el PE son más formales y de mayor rigurosidad. En el problema pre, la característica fundamental de las proposiciones es de menor nivel de formalidad, de tal modo que permite utilizar el razonamiento inductivo y deductivo con facilidad. Como muestra para destacar este razonamiento, se tiene la elaboración de una tabla de valores prueba para procurar destacar un patrón que permitirá fácilmente resolver el PE.

Con relación a los procedimientos, se destaca el uso de estrategias similares, en el sentido de que ambos problemas exigen la identificación de la información principal y los requerimientos. Sin embargo, en el problema pre, la situación se vuelve más intuitiva ya que no se necesita formular una regla de correspondencia para resolverlo, salvo el requerimiento explícito. Ciertamente, en el PE también se puede prescindir de este, pero por razones de efectividad.

Los argumentos para el PE son más rigurosos y formales, ya que hacen uso de conceptos más cercanos al entorno de la función cuadrática como, por ejemplo, concavidad de una parábola, vértice de una función cuadrática. Por otro parte, en el problema pre, los argumentos son más cercanos a un razonamiento inductivo, puesto que se pretende llegar a elaborar una técnica que facilite, de forma directa, la solución del PE. Para este último caso, el uso de una tabla de valores permitirá conjeturar la regla práctica que emerge como consecuencia del análisis de los valores dados y que es uno de los propósitos del problema.

Acercamiento a un problema didácticamente bueno del problema creado por variación cuantitativa

Se solicitó al profesor T11 reformular su problema pre P1, considerando un análisis didáctico del proceso de invención de problemas mediante el uso de configuraciones de objetos y reflexiones sobre prácticas de solución e invención (que se asocia a la CCPe y la CCPp1). Así, el profesor T11 propuso un problema pre P2 que fue sometido a una triangulación de investigadores para su valoración didáctica. A continuación, se muestra P2:

Determina las parejas de números naturales cuyas sumas sean 5 y 6, respectivamente, de tal manera que el producto de las componentes de las parejas sea el máximo posible. Elabora una tabla para los siguientes casos: (a) Para el caso cuya suma es 6, ¿cuáles son

las componentes de la pareja de números cuyo producto es máximo? (b) Para el caso cuya suma es 5, ¿existe una sola pareja de números cuyo producto es máximo? Explica tu respuesta. (c) Si consideramos que existe una única pareja de números no naturales cuya suma es 5 y cuyo producto es máximo y no es un número natural, ¿cuáles son tales números? (d) Elabora una estrategia para la obtención del producto máximo, en el caso que la suma de las componentes de las parejas sea un número par. ¿Esta estrategia es diferente en el caso que la suma sea un número impar? Explica tu respuesta. (d) Formula el producto de dos números cuya suma es 5 como una función f de una variable real x .

De la valoración por juicio de expertos, se tiene indicios para afirmar que el P2 elaborado por T11 tiene características de un problema pre, pues facilita conjeturar un patrón que permita llegar a la solución del problema del episodio. Se observa también que está bien pensado y pautado para conseguir posteriormente una resolución profunda del problema del episodio. Así, el apartado (c) es una particularización, frente al apartado (d) que invita a la generalización. El apartado (e) sería un simple ejercicio que ayuda mucho a pensar cómo solucionar el problema del episodio de clase

Consideraciones finales

Este estudio incorporó al proceso de invención de problemas una estrategia que incorpora constructos teóricos del EOS y propone utilizar alguna de sus herramientas para analizar las prácticas matemáticas del profesor de matemática. Como consecuencia de su implementación, se ha llegado a tener evidencia que la competencia de análisis didáctico se muestra incipiente y que urge desarrollarla. Ciertamente, nuestra postura sobre la concepción de análisis didáctico (Torres & Malaspina, 2018) complementa la propuesta de Tichá and Hošpesová (2013) – *the subject-didactical competence and the competence of reflection*, ya que consideramos una estrategia en particular para la invención de problemas junto con reflexiones individuales y grupales sobre el problema creado. A esto último denominamos fase de reflexión didáctica y que junto con el uso de la CE y CC ha permitido mejorar la competencia de análisis didáctico. Por tanto, es necesario profundizar este estudio para implementar la estrategia ERPP en procesos formativos de profesores de matemática.

Referencias

- Badillo, E., Font, V., & Edo, M. (2015). Analyzing the responses of 7 – 8 year olds when solving partitioning problems. *International Journal of Science and Mathematics Education* 13, 811 – 836.
- Breda, A., Pino-Fan, L., & Font, V. (2016). Establishing criteria for teachers' reflection on their own practices. En Csíkos, C., Rausch, A., & Szitányi, J. (Eds.), *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 283). Szeged, Hungary: PME.
- Cai, J., Hwang, S., Jiang, C, & Silber, S. (2015). Problem-Posing Research in Mathematics Education: Some Answered and Unanswered Questions. En F. M. Singer, N. F. Ellerton, & J. Cai (Eds.), *Mathematical problem posing: From research to effective practice* (pp. 141-174). New York, NY: Springer.

- Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.
- Malaspina U., Torres C., Rubio N. (2019) How to Stimulate In-Service Teachers' Didactic Analysis Competence by Means of Problem Posing. En: Liljedahl P., Santos-Trigo M. (Eds.) *Mathematical Problem Solving*. ICME-13 Monographs. Springer, Cham
- Malaspina, U. (2015). Creación de problemas: sus potencialidades en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Conferencia dada en el CIAEM XIV. Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, Mexico: IACME. Recuperado de from: http://xiv.ciaemiacme.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/1485/607
- Malaspina, U., Mallart, A. & Font, V. (2015). Development of teachers' mathematical and didactic competencies by means of problem posing. En Krainer, K., & Vondrová, N. (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 9)*, (pp. 2861-2866). Prague, Czech Republic: ERME
- Stahnke, R; Schueler, S., & Roesken-Winter, B. (2016). Teachers' perception, interpretation, and decision-making: a systematic review of empirical mathematics education research. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 482(1), 1-27.
- Tichá, M., & Hošpesová, A. (2013). Developing teachers' subject didactic competence through problem posing. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 133-143.
- Torres, C. & Malaspina, U. (2018). Improving in-service teachers' problem posing skill by means of didactic reflection. In E, Berqvist, M. Österholm, C. Granberg, & L. Sumpter (Eds). *Proceedings of the 42nd Conference International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, p. 176). Umeå, Sweden: PME.

ERRORES QUE COMETEN LOS ESTUDIANTES DE TERCER AÑO DE SECUNDARIA EN LA RESOLUCIÓN DE INECUACIONES LINEALES CON UNA VARIABLE

Rolando Ruiz Carbajal

licrolando2@gmail.com

Pontificia Universidad Católica del Perú

Resumen

La presente investigación tiene como objetivo analizar los errores que cometen los estudiantes de tercer año de educación secundaria de la I.E. "Fe y Alegría" n.º 37 en la resolución de inecuaciones lineales con una variable. Para este estudio, utilizamos la clasificación de errores propuesta por el autor de esta investigación, el cuál ha sido elaborada tomando como marco teórico el Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) propuesto por Socas (1979) y la clasificación de errores propuesta por los siguientes autores: Radatz (1979), Mosvshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987), Esteley y Villarreal (1990,1996), Astolfi (2000), Brousseau (2001), Caputo y Macías (2006), Abrate, Pochulu y Vargas (2006), Saucedo (2007). Al final de la investigación se hace una descripción de los errores más frecuentes que cometen los estudiantes de acuerdo a la tipología de errores planteadas.

Palabras clave: Error, desigualdades, inecuaciones lineales, tipología de errores.

Introducción

Según el Diseño Curricular Nacional de la Educación Básica 2016, el desarrollo de competencias en el área de matemática se dará a través de la resolución de problemas; para lo cual el estudiante debe tener los conocimientos matemáticos necesarios. El aprendizaje de los conocimientos matemáticos necesarios para la resolución de problemas se logra con ciertas dificultades, las cuales son evidenciadas a través de errores cuando los estudiantes solucionan problemas. Por lo que es necesario conocer la naturaleza de los errores de nuestros estudiantes para tomar las medidas pertinentes y minimizar esta dificultad.

El presente trabajo de investigación muestra los errores que cometen estudiantes de tercer año de educación secundaria en la resolución de inecuaciones lineales, los cuales fueron analizados y clasificados según la tipología de errores elaborado por el autor de la investigación. Esta tipología de errores fue elaborada tomando como marco teórico Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) propuesto por Socas (1979) y la clasificación de errores propuesta por los siguientes autores: Radatz (1979), Mosvshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987), Esteley y Villarreal (1990,1996), Astolfi (1999), Brousseau (2001), Caputo y Macías (2006), Abrate, Pochulu y Vargas (2006) y Saucedo (2007).

Para concluir, presentamos algunas consideraciones finales de nuestro trabajo de investigación, entre ellas que de acuerdo a la tipología planteada por el autor de la tesis, los estudiantes de tercer año de educación secundaria de la I.E. "Fe y Alegría" n.º 37, cometen errores muy frecuentes en el siguiente orden: por no lograr comprender y traducir una expresión matemática (lenguaje literal, representación algebraica y representación gráfica) a otra; por el desconocimiento teórico y dominio de fórmulas y propiedades; por no comprender los símbolos y términos matemáticos de desigualdad ($<$, $>$, $\leq$, $\geq$) e intervalos ($[]$, $\langle \rangle$) y su relación entre ellos; cometen errores en el procedimiento o de cálculo elemental; por no tener los conocimientos previos; por realizar inferencias inadecuadas en el razonamiento lógico y por no verificar sus resultados.

Antecedentes de la investigación

A continuación, describiremos algunas investigaciones realizadas sobre los errores que se cometen al resolver inecuaciones lineales y a las conclusiones que arribaron.

Bazzini (1999) citado en Borello y Lezama (2009), afirman que generalmente, los estudiantes se limitan a resolver inecuaciones lineales como si se tratase de ecuaciones lineales, hay una confusión entre conceptos de ecuación y desigualdad, entre las cuales se establecen analogías incorrectas; indicando que, para resolver desigualdades, se aplican los mismos modelos de las ecuaciones, obstaculizando así el correcto aprendizaje de lo que son las inecuaciones. Otra razón por la que se cometen errores es la no comprensión de los símbolos de desigualdad tal como indican Borello y Lezama (2009) y Maroto (2013), estos autores concluyen que los estudiantes aprenden las desigualdades de manera mecánica o memorística sin entender las propiedades que se aplican y muestran confusión en las interpretaciones de los símbolos $>$, $<$, $\geq$ y $\leq$. De la misma manera Vrancken, Engler y Muller (2010), Garrote, Hidalgo y Blanco (2004) muestran que al momento de resolver inecuaciones cometen errores al aplicar propiedades de desigualdad ($x < a$ y $a > x$) y al momento de interpretar la solución de una inecuación. Finalmente citamos a Torrealba (2014) y Pirela (2015), donde en sus investigaciones evidencian que los estudiantes evaluados tienen dificultades y presentan errores en la resolución de inecuaciones lineales en una variable por ejemplo, no justifican los pasos y no logran interpretar a través de intervalos el conjunto solución de una inecuación lineal.

Justificación del estudio

El contenido de inecuaciones lineales con una variable es un tema que se empieza a estudiar desde el sexto grado de nivel primario, aprendiendo a identificar condiciones de desigualdad expresadas con los signos " $>$ " y " $<$ ". En primer año de secundaria, deben identificar desigualdades de la forma $x > a$ o $x < b$; y en segundo de secundaria, desigualdades e inecuaciones lineales de la forma $ax > b$ o $ax < b$, $\forall a \neq 0$. En tercero de secundaria, los alumnos deben estudiar las inecuaciones lineales de las formas: $ax \pm b < c$, $ax \pm b > c$, $ax \pm b \leq c$ y $ax \pm b \geq c$, $\forall a \neq 0$; y en cuarto de secundaria inecuaciones de las formas: $ax + b < cx + d$, $ax + b > cx + d$, $ax + b \leq cx + d$ y $ax + b \geq cx + d$; $\forall a, c \neq 0$, tal como indica el Currículo Nacional de Educación Secundaria (2016) del Perú, en el área de Matemática ciclo VII (3.º y 4.º de secundaria), bajo la competencia "Resuelve problemas de equivalencia y cambio". Como podemos observar el aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones lineales

es de manera progresiva, además el desempeño de grado a desarrollarse para el tercer año de educación secundaria en el que se considera inecuaciones lineales, según la programación curricular 2016, indica de la siguiente manera:

Selecciona y combina estrategias heurísticas, métodos gráficos, recursos y procedimientos matemáticos más convenientes para determinar términos desconocidos, simplificar expresiones algebraicas, y **solucionar ecuaciones cuadráticas y sistemas de ecuaciones lineales e inecuaciones**, usando productos notables o propiedades de las igualdades. Reconoce cómo afecta a una gráfica la variación de los coeficientes en una función cuadrática. (MINEDU, 2016, p. 260)

Como podemos observar, las inecuaciones lineales servirán a los estudiantes para aprender nuevos contenidos como sistemas de inecuaciones lineales y, posteriormente, programación lineal. También es importante para calcular dominio y rango de funciones, como indica Borello y Lezama (2011).

Otra de las importancias del porqué es necesario estudiar las desigualdades e inecuaciones lineales es porque tiene aplicación en el estudio de robótica educativa, programa que hoy en día se viene implementando en 20 732 instituciones educativas desde el 2011. Por ejemplo, para realizar la programación de la figura n.º 1, indica que, si el robot detecta un objeto a una distancia **menor** a 50 cm, este se apagará y si no el motor del robot seguirá encendido



Figura n.º 1: Programa de funcionamiento del motor de un robot controlado con un sensor.

Fuente: Introducción al plan de lecciones de robótica: Uso de la aplicación de programación EV3.

Por otro lado, organizaciones como The National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2009) enfatizan que los estudiantes de los grados 9 a 12 deben aprender a representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos, en especial comprender el significado de formas equivalentes de expresiones, ecuaciones, inecuaciones y relaciones.

Por todo lo antes mencionado, podemos indicar que el aprendizaje del objeto matemático de inecuaciones lineales es pertinente y relevante; por ello, en la presente investigación, pretendemos identificar los errores que presentan los estudiantes que cursan el tercer año de educación secundaria cuando resuelven inecuaciones lineales en una variable, ya que, por los antecedentes señalados anteriormente, se identifica como una problemática fundamental para

el desarrollo de los procesos matemáticos de los estudiantes, siendo a su vez un prerrequisito para aprender nuevos contenidos matemáticos, tanto en la educación secundaria como en el nivel superior.

Pregunta de investigación

¿Cuáles son los errores que comete un grupo de estudiantes de tercer año de educación secundaria de la I.E. "Fe y Alegría" n.º 37 en la resolución de inecuaciones lineales con una variable?

Objetivos de la investigación

Objetivo general

Analizar los errores que comete un grupo de estudiantes de tercer año de educación secundaria de la I.E. "Fe y Alegría" n.º 37 en la resolución de inecuaciones lineales con una variable.

Objetivos específicos

1. Elaborar una tipología de los errores más comunes que cometen los estudiantes de educación secundaria en la resolución de inecuaciones lineales con una variable tomando como referencia la comparación de las tipologías revisadas.
2. Identificar los errores que comete un grupo de estudiantes de tercer año de educación secundaria de la I.E. "Fe y Alegría" n.º 37 en la resolución de inecuaciones lineales con una variable a través de una prueba diagnóstica.
3. Describir los errores que comete un grupo de estudiantes de tercer año de educación secundaria de la I.E. "Fe y Alegría" n.º 37 en la resolución de inecuaciones lineales con una variable, según la tipología propuesta.

Marco teórico

Para nuestro estudio, revisamos aspectos del Enfoque Lógico Semiótico de Socas (1979) y la clasificación de errores de diferentes autores: Radatz (1979), Mosvshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987), Esteley y Villarreal (1990,1996), Astolfi (1999), Brousseau (2001), Caputo y Macías (2006), Abrate, Pochulu y Vargas (2006) y Saucedo (2007).

El Enfoque Lógico Semiótico (ELOS), es una teoría en construcción que viene desarrollando el Grupo de Pensamiento Algebraico de la Universidad de La Laguna, bajo la coordinación de Socas. Este enfoque, según Socas (2007), se caracteriza por orientar la investigación hacia la elaboración de dos modelos de competencias: el formal y el cognitivo, para entender y actuar en fenómenos y situaciones problemáticas que se dan en el microsistema educativo en relación con la construcción del conocimiento algebraico, en nuestro caso, errores en la resolución de inecuaciones lineales.

Clasificación de los errores en el aprendizaje de las matemáticas

Identificar los diferentes errores que se presentan en el aprendizaje de las matemáticas nos podrá permitir orientar la atención al objetivo de nuestra investigación sobre los errores que

se cometen en la resolución de las inecuaciones lineales. A continuación, presentamos las relaciones que existen entre los investigadores luego de realizar un cuadro comparativo de las dificultades y errores descritas por: Socas (1997), Radatz (1979), Mosvshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987), Esteley y Villarreal (1996), Socas (1997), Astolfi (1999), Brousseau (2001), Caputo y Macías (2006), Abrate, Pochulu y Vargas (2006), Saucedo (2007). Por ejemplo:

- Todos los autores, excepto Brousseau (2001), consideran que el estudiante cometerá errores en el aprendizaje de las matemáticas cuando:
 - No logra la comprensión y traducción del lenguaje literal al lenguaje matemático (simbólico).
 - No es capaz de realizar una correcta inferencia lógica o un razonamiento lógico.
- Solo Radatz (1979) no considera que el estudiante podría cometer error por un procedimiento de cálculo elemental; mientras que los demás autores sí lo consideran pertinente.
- Todos los autores, excepto Socas (1997), sostienen que los estudiantes cometen errores cuando tienen un desconocimiento de la teoría, de fórmulas y propiedades relacionadas con el objeto matemático.
- Radatz (1979); Socas (1997); Caputo y Macías (2006); Abrate, Pochulu y Vargas (2006) señalan que otra de las causas del porqué un estudiante comete errores en el aprendizaje de las matemáticas es porque tuvo un deficiente aprendizaje de conocimientos previos.
- Mosvshovitz et. al (1987), Esteley y Villarreal (1990,1996) y Saucedo (2007) señalan que el estudiante podría cometer errores cuando no verifica la solución obtenida, ya que si contrasta la solución podría revertir el error.
- Mosvshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987), Esteley y Villarreal (1990,1996) y Saucedo (2007) sostienen que un estudiante cometerá errores cuando al resolver un problema, o hace uso parcial o mal uso de los datos de la información.

De acuerdo al análisis y comparación realizada, observamos, la categorización de errores más comunes en el aprendizaje de las matemáticas, en ello observamos las coincidencias y discordancias en los errores, realizadas por los diferentes autores, en base a ello proponemos realizar el análisis de errores cometidos en la resolución de inecuaciones lineales bajo las seis primeras tipologías de errores más comunes, las cuales planteamos en la siguiente tabla, enunciándolos de la siguiente manera.

Tabla n.º 1. Tipologías de errores más comunes que se cometen en la resolución de Inecuaciones lineales con una variable en estudiantes de tercer año de educación secundaria.

Clasificación de errores	Descripción	Tipo de error

1. Error en la comprensión y traducción de una expresión matemática (lenguaje literal, representación algebraica y representación gráfica) a otra.	a) El estudiante no comprende los símbolos y términos matemáticos de desigualdad $<, >, \leq, \geq$ e intervalos $[], \langle \rangle$ y su relación entre ellos. b) El estudiante tiene dificultad en la traducción del lenguaje literal al lenguaje matemático o del lenguaje matemático a otro distinto.	E1
2. Error en la inferencia o en el razonamiento lógico	El estudiante infiere conclusiones y justificaciones inadecuadas de proposiciones, inventa nuevas reglas o deriva la validez de las que conoce de otras situaciones para el caso que está tratando.	E2
3. Error en el procedimiento o de cálculo elemental	El estudiante comete errores en las operaciones básicas de cálculo. Por ejemplo, comete errores al realizar operaciones con fracciones, al usar leyes de signos.	E3
4. Error en el desconocimiento teórico y dominio de fórmulas y propiedades	El estudiante desconoce o emplea incorrectamente los conceptos, las propiedades y definiciones sobre desigualdades e inecuaciones lineales.	E4
5. Error por no tener los conocimientos previos	El estudiante no posee los conocimientos previos sobre los contenidos y conceptos a tratar. Por ejemplo, para inecuaciones el estudiante debe conocer propiedades de desigualdades y operaciones con intervalos, pero no las recuerda.	E5
6. Error al no verificar la solución.	La falta de comprobación de sus resultados lo llevaría a dar respuestas equivocadas.	E6

Fuente: Elaboración propia

Estas 6 tipologías de errores han sido seleccionadas teniendo en cuenta las coincidencias de los errores más comunes en el aprendizaje de las matemáticas, categorizadas por los diferentes autores en sus investigaciones. Ahora nosotros las utilizaremos para identificar y analizar los errores que cometen los estudiantes de tercer año de educación secundaria en la resolución de inecuaciones lineales con una variable.

Metodología

En cuanto a la metodología de investigación que utilizamos en el presente trabajo será de tipo cualitativo descriptivo, ya que nos interesa describir los errores que los estudiantes cometen con frecuencia al momento de resolver inecuaciones lineales con una incógnita.

Sujetos de investigación

Las actividades propuestas, fueron realizadas en la I.E. "Fe y Alegría" n.º 37 ubicada en el AAHH. Enrique Montenegro del distrito de San Juan de Lurigancho perteneciente a la jurisdicción de

la UGEL 05. La I.E. De acuerdo a la estadística 2017 presentada por el área de matemática los estudiantes presentan dificultades en el rendimiento académico de las matemáticas. Nuestro estudio ha sido realizado con treinta y cinco estudiantes entre varones y mujeres de trece y catorce años de edad, los cuales ha sido seleccionada de manera intencionada de las secciones "B", "C" y "D" del tercer año de secundaria de la I.E. "Fe y Alegría" n.º 37. Cabe mencionar, que los estudiantes ya desarrollaron el contenido intervalos en la segunda unidad del primer bimestre y el tema de desigualdades e inecuaciones en la tercera unidad que corresponde al segundo bimestre, es decir, revisaron el tema de desigualdades e inecuaciones antes de la aplicación de cuestionarios n.º 1 y 2.

Diseño y aplicación de los cuestionarios y entrevistas

Diseño y aplicación del cuestionario n.º 1

La elaboración del cuestionario n.º 1, se realizó tomando en cuenta lo siguiente:

- La clasificación de errores planteadas por el autor de la tesis.
- Los contenidos de tercer grado de educación secundaria según el Diseño Curricular Nacional 2016 del área de Matemática.

La clasificación de errores planteada por el autor detalla los errores asociadas a los contenidos de inecuaciones lineales, como son tipos de intervalos, operaciones con intervalos, propiedades de desigualdades, inecuaciones lineales. El cuestionario n.º 1, ha sido elaborado teniendo en cuenta la tipología de error planteada, con la intención de recoger información acerca de los errores más frecuentes que cometen los estudiantes cuando resuelven inecuaciones lineales con una variable.

La primera y segunda son preguntas de verdadero y falso (ver anexo), donde los estudiantes deben contestar justificando sus respuestas, las preguntas son de conocimientos previos, relacionados al error de tipo E5; preguntas de inferencia relacionados al error de tipo E2; preguntas de manejo de propiedades en las desigualdades, clases de intervalos y su relación con sus elementos, relacionados al error de tipo E4. Las preguntas 3, 4 y 5 son para evidenciar el dominio que tienen los estudiantes en la representación de los intervalos en sus diferentes formas, en estas preguntas se pretenden evidenciar, el error de tipo E1; La pregunta 6 fue elaborada con la intención de evidenciar en los estudiantes el dominio de traducción del lenguaje literal al lenguaje matemático y también la representación de los intervalos en sus diferentes formas, esta pregunta está relacionado al error de tipo E1b. Las preguntas 7 y 8 son de desarrollo; estas preguntas se plantearon con el objetivo de evidenciar el dominio en conocimientos y cálculos básicos de inecuaciones y su interpretación del conjunto solución, estas preguntas está relacionado con los errores de tipo e1a, E3, E4 y E6.

El cuestionario n.º 1 se aplicó a una muestra de treinta y cinco estudiantes de tercer año de educación secundaria, de las secciones "B", "C" y "D" de la Institución Educativa "Fe y Alegría" n.º 37, seleccionados de manera intencionada. Los estudiantes solo utilizaron hojas, lápices y lapiceros, no utilizaron calculadora.

En la tabla n.º 26, se muestra un consolidado de la cantidad de estudiantes que presentaron respuestas correctas, correctas pero mal justificadas, no contestadas o no justificadas y respuestas incorrectas de las preguntas 1 y 2 del cuestionario n.º 1 que fue tomada a treinta y cinco alumnos. Esta información nos permitió tener una visión global de los resultados obtenidos en forma cuantitativa.

Tabla n.º 2. Consolidado de las respuestas a las preguntas n.º 1 y 2 del cuestionario n.º 1,

Preguntas		Respuestas correctas		Correctas pero mal justificadas		No contesta o no justifica		Respuestas incorrectas	
		Canti	Porcent	Canti	Porcent	Canti	Porcent	Canti	Porcent
		dad	aie	dad	aie (%)	dad	aie	dad	aie
Pregunta n.º 1	a	23	65.71	5	14.29	2	5.71	5	14.29
	b	29	82.86	3	8.57	3	8.57	0	0.00
	c	30	85.71	2	5.71	2	5.71	1	2.86
	d	10	28.57	16	45.71	4	11.43	5	14.29
	e	6	17.14	11	31.43	3	8.57	15	42.86
Pregunta n.º 2	a	19	54.29	2	5.71	1	2.86	13	37.14
	b	15	45.71	2	5.71	2	5.71	16	42.86
	c	25	71.43	1	2.86	6	17.14	3	8.57
	d	24	68.57	2	5.71	8	22.86	1	2.86

Fuente: Elaboración propia.

En la tabla n.º 2 se puede observar lo siguiente:

- En la pregunta n.º (1e) de verdadero/falso, los estudiantes tuvieron dificultades al momento de contestar y justificar su respuesta. Solo seis estudiantes contestaron correctamente; quince estudiantes contestaron de manera incorrecta y once estudiantes contestaron bien, pero justificaron mal sus respuestas; haciendo un total de veintiséis estudiantes que representa el 74.29% de los estudiantes encuestados. En esta pregunta, se evidencia que los estudiantes cometieron el error de tipo E4 porque desconocen la propiedad $(a < b \wedge c < 0) \Rightarrow ac > bc$, necesaria para poder contestar y justificar, correctamente, dicha pregunta. Por ejemplo, en la figura n.º 2, se muestra la respuesta de un estudiante donde al multiplicar por menos uno a cada lado de la desigualdad, no cambia el símbolo de "mayor que" a "menor que". Se evidencia que el estudiante desconoce la propiedad $(a < b \wedge c < 0) \Rightarrow a.c > b.c$



Figura n.º 2: Respuesta a la pregunta 1e del cuestionario n.º 1

Fuente: Resultados del cuestionario n.º 1

- En la pregunta n.º 1d, también podemos observar que cinco estudiantes contestaron incorrectamente y dieciséis estudiantes justificaron mal sus respuestas, haciendo un total de veintiún estudiantes, que representa el 60% de los encuestados. En esta pregunta, se

evidencia que los estudiantes cometieron el error de tipo E2, porque infieren conclusiones erradas.

- En la pregunta n.º 2b de verdadero/falso, los estudiantes tuvieron dificultades al momento de contestar y justificar su respuesta. Quince estudiantes contestaron correctamente, dieciséis estudiantes contestaron con error y dos justificaron mal sus respuestas; haciendo un total de dieciocho estudiantes, que representa el 51.43% de los estudiantes encuestados. En esta pregunta, se evidencia que los estudiantes cometieron el error de tipo E1a porque los estudiantes no interpretan el significado del símbolo no pertenece ($\notin$).
- En la pregunta n.º 2a, se encontró también, con mayor frecuencia, el error de tipo E1a. Allí los estudiantes no logran entender que cuando el intervalo es abierto en 3, el intervalo no incluye a 3. Esto se observó en dos estudiantes que justificaron mal sus respuestas y trece estudiantes que contestaron incorrectamente; haciendo un total de quince estudiantes, que representa el 42.86% de los estudiantes encuestados.

A continuación, presentamos la tabla n.º 3, donde mostramos un consolidado de la cantidad de estudiantes con repuestas correctas, no contestadas y respuestas incorrectas de las preguntas 3, 4, 5 y 6 del cuestionario n.º1, que fue tomado a treinta y cinco alumnos. Esta información nos permitirá tener una visión global de los resultados obtenidos en forma cuantitativa.

Tabla N.º 3. Consolidado de respuestas correctas, correctas, pero mal justificadas, no contestadas o no justificadas y respuestas incorrectas al cuestionario n.º 1

Preguntas		Respuestas correctas		No contestadas		Respuestas incorrectas	
		Cantida d	Porcentaj e (%)	Cantida d	Porcentaj e (%)	Cantidad	Porcenta je (%)
Pregunta 3	a)	33	94.29	1	2.86	1	2.86
	b)	15	42.86	2	5.71	18	51.43
Pregunta 4	a)	19	54.29	2	5.71	14	40.00
	b)	20	57.14	1	2.86	14	40.00
Pregunta 5	a)	34	97.14	1	2.86	0	0.00
	b)	19	54.29	1	2.86	16	45.71
Pregunta 6	a)	17	48.57	3	8.57	15	42.86
	b)	14	40.00	3	8.57	18	51,43
	c)	17	48.57	3	8.57	15	42.86

Fuente: Elaboración propia.

En la Tabla n.º 3 se puede observar lo siguiente:

- En la pregunta n.º 3, los estudiantes tuvieron mayor dificultad en responder el ítem "b", dieciocho estudiantes, que representa el 51.43% contestaron de manera incorrecta. En esta

pregunta, se evidencia el error de tipo E1b porque los estudiantes no logran traducir una expresión matemática (intervalo) a otra expresión matemática (desigualdad). En la figura n.º 3, se muestra las respuestas de dos de los estudiantes donde se puede observar que la pregunta 3a contestaron correctamente, pero en la pregunta 3b cometen el error de tipo E1b porque no logra traducir la representación de intervalos a través de desigualdades.

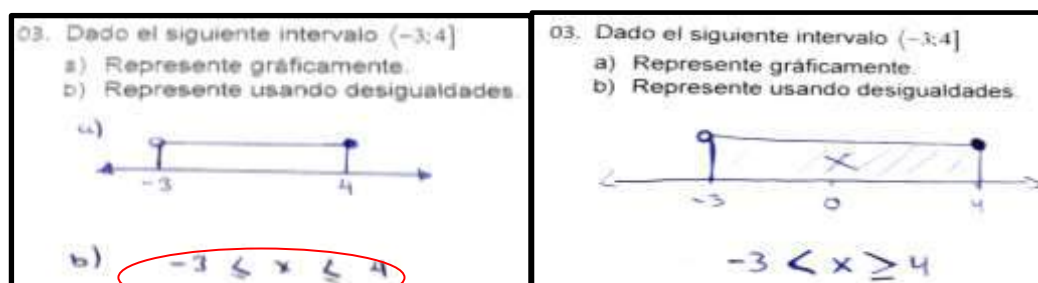


Figura n.º 3. Respuesta a la pregunta 3b del cuestionario n.º 1

Fuente: Resultados del cuestionario n.º 1

- De la misma manera, en la pregunta n.º 6b, 18 estudiantes, que representa el 51.43% de los estudiantes encuestados, contestaron de manera incorrecta. Allí los estudiantes no lograron representar el enunciado a través de desigualdades, evidenciándose, el error de tipo E1b. Con este resultado coincidimos con las tipologías planteadas por todos los autores del marco, excepto con Brouseau (2001). Dichos autores caracterizan este error como: error en la comprensión y traducción del lenguaje literal al lenguaje matemático, para nosotros este error es tipo E1b, porque no logran expresar el enunciado a través de una representación gráfica, a través de intervalos y por desigualdades.

En las preguntas 3; 4; 5 y 6 los errores que cometieron los estudiantes con mayor frecuencia fue al momento de representar los intervalos a través de desigualdades, evidenciándose, el error de tipo E1b.

A continuación, realizamos el consolidado de las preguntas n.º 7 y 8 del cuestionario n.º 1 presentados en la tabla n.º 4

Tabla n.º 4. Consolidado de respuestas correctas, incompletas, no contestadas y respuestas incorrectas de las preguntas n.º 7 y 8º del cuestionario n.º 1

Pregunta		Respuestas correctas		Respuestas incompletas		No contestada		Respuestas incorrectas	
		Cantidad	Porcentaje (%)	Cantidad	Porcentaje (%)	Cantidad	Porcentaje (%)	Cantidad	Porcentaje (%)
n.º 7	a)	6	28.57	12	34.29	0	0.00	16	37.14
	b)	4	11.43	5	14.29	2	5.71	24	68.57
	c)	4	11.43	3	8.57	4	11.43	24	68.57
	d)	4	11.43	3	8.57	12	34.29	14	40.00

	e)	5	14.29	8	22.86	11	31.43	11	31.43
	a)	4	11.43	7	20.00	18	51.43	6	17.14
	b)	1	2.86	0	0.00	19	54.29	15	42.86
n.º	c)	1	2.86	0	0.00	24	68.57	10	28.57
8	d)	1	2.86	4	11.43	25	71.43	5	14.29
	e)	1	2.86	1	2.86	15	42.86	18	51.43
	f)	1	2.86	3	8.57	22	62.86	9	25.71

Fuente: Elaboración propia.

En la tabla n.º 4 se puede observar lo siguiente:

- En la pregunta n.º 7, hay poca cantidad de estudiantes que logró contestar correctamente. Por ejemplo, en 7a solo seis estudiantes contestaron correctamente, ninguno dejó en blanco, dieciséis con respuestas incorrectas y doce con respuestas incompletas haciendo un total de treinta y cinco estudiantes. El análisis de los errores para la pregunta n.º 7a se hizo en las preguntas contestadas incorrectamente y en las preguntas con respuestas incompletas distribuidas de la siguiente manera:

Respuestas incorrectas	Respuestas incompletas	Total	E2	E1a	E6	E4	Total
16	12	28	4	10	8	6	28

- En la figura n.º 4, se muestra la respuesta de dos estudiantes donde se evidencia el error de tipo E3. Se observa que al momento de despejar "x", asume que 30 es negativo, pasando al otro miembro a sumar y en la otra respuesta se observa el error de cálculo básico con expresiones algebraicas ($30 - 22x = 8x$).

c) $26 \geq 30 - 8x$

$26 + 30 \geq 8x$

$56 \geq x$

$\frac{56}{8} \geq x$

$7 \geq x$

$x \leq 7.5$

c) $26 \geq 30 - 8x$

$26 \geq 22x$

$\frac{26}{22} \geq x$

$4 \geq x$

Figura n.º 4: Respuestas a la pregunta 7c del cuestionario n.º 1

Fuente: Resultados del cuestionario n.º 1

- En la pregunta n.º 8, se observó que muchos estudiantes dejaron en blanco sus respuestas, por ejemplo, en la pregunta n.º 8d, veinticinco estudiantes las dejaron en blanco, solo uno las contestó correctamente, cinco las contestaron incorrectamente y cuatro las contestaron de forma incompleta, haciendo un total de treinta y cinco estudiantes. El análisis de error de la pregunta n.º 8d se hizo en las preguntas cuyos errores fueron incorrectos o incompletos distribuidos de la siguiente manera:

Respuestas incorrectas	Respuestas incompletas	Total	E1a	E4	Total
4	5	9	4	5	9

- En la pregunta n.º 8e, quince estudiantes dejaron en blanco sus respuestas, solo una las contestó correctamente, dieciocho las contestaron incorrectamente y uno contestó de forma incompleta; haciendo un total de treinta y cinco encuestados. El análisis de error de la pregunta n.º 8e se hizo en las preguntas cuyos errores fueron incorrectos o incompletos distribuidos de la siguiente manera:

Respuestas incorrectas	Respuestas incompletas	Total	E3	E4	Respuestas no previstas	Total
18	1	19	2	14	3	19

Diseño y Aplicación del cuestionario n.º 2

La elaboración del cuestionario n.º 2 se realizó tomando en cuenta lo siguiente:

- La clasificación de errores planteadas por el autor de la tesis.
- Los contenidos de tercer grado de educación secundaria según el Diseño Curricular Nacional 2016 del área de Matemática.

Según el Diseño Curricular Nacional 2016, el desarrollo de competencias en el área de Matemática se dará a través de la resolución de problemas. Bajo ese indicador, se elaboró el cuestionario n.º 2, teniendo en cuenta la tipología de error planteada con la intención de recoger información acerca de los errores más frecuentes que cometen los estudiantes cuando resuelven problemas con inecuaciones lineales.

El cuestionario n.º 2 contiene 6 preguntas que son problemas de aplicación en diversos contextos (ver anexo), donde los estudiantes plantearán los problemas a través de inecuaciones lineales, resolverán dichas inecuaciones haciendo uso de propiedades e interpretarán sus resultados. Con la pregunta n.º 1, se pretende recoger información sobre los errores de tipo E1b, E2 y E3. Con las preguntas 3, 4 y 5, se pretende recoger información sobre errores de tipo E1b y E6. Finalmente, la pregunta n.º 6, está relacionado con los errores E1b, E3 y E5.

Con respecto a las preguntas del cuestionario n.º 2, fueron adaptados del Cuaderno de trabajo del libro Matemática 3 (2016). El documento completo del cuestionario n.º 2 se encuentra en el anexo 2. El cuestionario n.º 2 se aplicó la misma muestra que contestó el cuestionario n.º 1, tuvo una duración aproximada, de sesenta minutos. Los estudiantes solo utilizaron hojas, lápices y lapiceros, no utilizaron calculadora.

A continuación, en la tabla n.º 5, se muestra un consolidado de las respuestas correctas, no contestadas y respuestas incorrectas del cuestionario n.º 2.

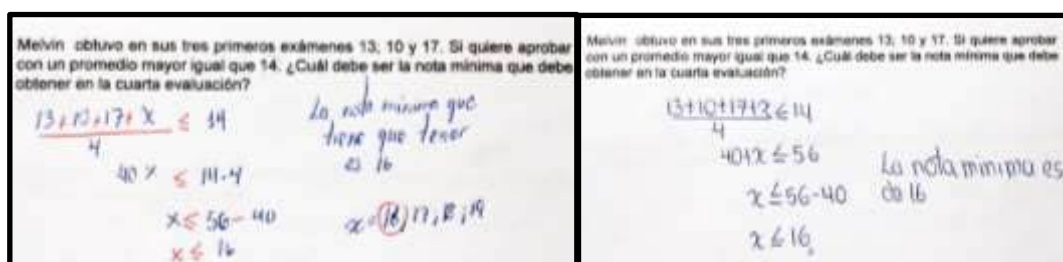
Tabla n.º 5. Resumen de los resultados del cuestionario n.º 2

Pregunta	Respuestas correctas		Respuestas		No contestada	
	Cantidad de estudiantes	Porcentaje (%)	Cantidad	Porcentaje (%)	Cantidad	Porcentaje (%)
1	8	22.86	22	62.86	5	14.29
2	9	25.71	15	42.86	11	31.43
3	22	62.86	13	37.14	0	0.00
4	7	20.00	19	54.29	9	25.71
5	8	22.86	16	45.71	11	31.43
6	10	28.57	22	57.14	3	14.29

Fuente: Elaboración propia.

En La tabla n.º 5, podemos describir lo siguiente:

- En las preguntas de la n.º 1 a la n.º 6, se observa que pocos estudiantes contestaron correctamente las preguntas. Por ejemplo, en la pregunta n.º 4 del cuestionario n.º 2, Solo el 20% de los estudiantes encuestados contestó correctamente y el 54.29% cometió errores de tipo E1b (40%) y E6 (14.29%).
- En la pregunta n.º 1, se encontró que el 62.86% cometió errores en la solución de problemas con inecuaciones lineales, de los cuales 5.71% son errores de tipo E3 y 57.14% son errores de tipo E1b.
- En la pregunta n.º 6, se encontró que el 62.86% de los estudiantes encuestados cometió errores en la solución de problemas con inecuaciones lineales, de los cuales 48,57% cometió errores de tipo E1b y 14.29% cometieron errores de tipo de tipo E3.
- En la figura n.º 6, se muestra la respuesta de dos estudiantes, donde se observa que identifica bien los datos, pero la desigualdad "mayor igual" lo representa por la desigualdad "menor igual".



Fuente: Resultados del cuestionario n.º 2

En la figura anterior, podemos observar, también, a cinco estudiantes que, una vez que hallaron su resultado, no logran interpretar lo obtenido $x \leq 16$. Para ellos, esta desigualdad significa que "x" toma los siguientes valores $x: 16, 17, 18, 19$ y 20 . Luego consideran como nota mínima $x = 16$. Con esto, evidenciamos, nuevamente, el error de tipo E1b porque los estudiantes no logran traducir o no entienden el significado de la desigualdad $x \leq 16$.

Consolidado de los resultados obtenidos

A continuación, presentamos la tabla n.º 6, en la que indicamos el consolidado final de la cantidad total de errores encontrados luego de la aplicación de los cuestionarios n.º 1 y 2, dicha clasificación se hizo en función a la tipología de errores más comunes planteadas por el autor de la investigación.

Tabla n.º 6. Consolidado final de los resultados obtenidos en las respuestas analizadas de los cuestionarios n.º 1 y n.º 2

Cuestionario	n.º de pregunta	Ítem	Tipo de error							Total de respuestas analizadas
			E1A	E1B	E2	E3	E4	E5	E6	
CUESTIONARIO n.º 1 (398 respuestas)	1	a	2					8		10
		b					3			3
		c					3			3
		d			21					21
		e					26			26
	2	a	15							15
		b	18							18
		c						4		4
		d						3		3
	3	a						1		1
		b		18						18
	4	a		14						14
		b		14						14
	5	a								0
		b		16						16
	6	a		15						15
		b		18						18
		c		15						15
	7	a	10		4		6		8	28
		b	4			2	17	6	7	36
		c	5			15		6		26

		d	3				13			16
		e	13			5				18
	8	a	7			2				9
		b				11				11
		c				7				7
		d	4				5			9
		e				2	14			16
		f				6	2			8
CUESTIONARIO n.º 2 (123 respuestas)	1			20	8	2				30
	2		5	6			4			15
	3			9					4	13
	4			14					5	19
	5			11					5	16
	6			22		3		5		25
Total de Respuestas Analizadas			86	192	33	57	93	31	29	521
Porcentaje de respuestas analizadas (%)			16.51	36.85	6.33	10.94	17.85	5.95	5.57	100.00

Fuente: Elaboración propia en base a los resultados obtenidos en los cuestionarios n.º 1 y 2

De la tabla n.º 6 podemos observar lo siguiente:

- De la aplicación de los dos cuestionarios aplicados a treinta y cinco estudiantes se analizaron 521 respuestas, 398 del cuestionario n.º 1 y 123 respuestas del cuestionario n.º 2.
- La moda de la clasificación de errores planteada por el autor, de acuerdo a los resultados obtenidos, es el error de tipo E1b, con una frecuencia de 192 errores que representa el 36.85%. Eso indica que los estudiantes de la muestra analizada, cometen errores con mayor frecuencia en la resolución de inecuaciones lineales, porque tienen dificultad en la traducción del lenguaje literal al lenguaje matemático (por ejemplo, plantear un problema o enunciado a través de inecuaciones) o traducir del lenguaje matemático a otro distinto (por ejemplo, representar un intervalo a través de inecuaciones, gráficamente o viceversa).
- El error de tipo E1b fue evidente en los cuestionarios 1 y 2. En el cuestionario n.º 1, la mayor cantidad de errores de tipo E1b se concentró en las preguntas 3b, 4a, 4b, 5b, 6a, 6b y 6c, de acuerdo a esto, los estudiantes tienen dificultad de traducir un intervalo a través de desigualdades; una desigualdad a través de intervalo o gráficamente; y un enunciado de la

forma literal a través de inecuaciones, desigualdades e intervalos. Donde no se reportó errores fue cuando los estudiantes tradujeron un intervalo a través de una gráfica, o viceversa. En el cuestionario n.º 2, los estudiantes cometieron error, sobre todo, al momento de traducir o plantear el enunciado de un problema a través de inecuaciones lineales; eso se evidencia en todas las preguntas del cuestionario n.º 2.

- Podríamos inferir que las causas a este tipo de error son la poca práctica en la traducción, comprensión y planteo de problemas a través de inecuaciones; además de ello, los estudiantes no comprenden los símbolos y términos matemáticos. Esto corresponde al error de tipo E1a, donde se tuvo un total de 86 respuestas de este tipo, lo cual representa el 16.51%, siendo este el segundo error con mayor frecuencia que se presentó.
- El error de tipo E4, fue el segundo tipo de error que tuvo mayor frecuencia, con un total de 93 respuestas, que representa el 17.85 %. Este tipo de error se observó solo en las preguntas 1b, 1c, 1e, 7 y 8 del cuestionario n.º 1 y pregunta n.º 2 del cuestionario n.º 2. Estas preguntas que evidenciaron el error de tipo E4 en el cuestionario n.º 1, fueron de verdadero/falso, donde tenían que aplicar propiedades para contestar correctamente; y resolución de inecuaciones, donde se observó que los estudiantes desconocen conceptos y propiedades de inecuaciones o las emplean incorrectamente a la hora de resolver una inecuación.
- El error de tipo E3, fue el cuarto tipo de error que tuvo mayor frecuencia, con un total de 57 respuestas, que representa el 10.94%. Este tipo de error se dio con mayor frecuencia en las preguntas 7 y 8 del cuestionario n.º 1 de resolución de inecuaciones y en las preguntas 1 y 6 del cuestionario n.º 2, que fueron problemas de inecuaciones lineales. Allí se observó errores de cálculo elemental en suma de fracciones con expresiones algebraicas y con signos de agrupación.
- El error de tipo E2, fue el quinto error con mayor frecuencia, con un total 33 respuestas, que representa el 6.33%. Los errores de tipo E2 se encontraron en las preguntas 1d (verdadero/falso), 7a del cuestionario n.º 1 y pregunta 1 del cuestionario n.º 2. El error de tipo E2, se evidenció en pocas cantidades, posiblemente porque no hubo muchas preguntas donde el alumno tenga que inferir y si las hubo el estudiante no llegó a ese nivel de inferencia.
- El error de tipo E5 y E6, fueron los errores que se presentaron con menor frecuencia 5.95% y 5.57% respectivamente. El error de tipo E6, se presentaron en pocas cantidades esto posiblemente porque las preguntas no incluían de manera explícita la verificación de sus resultados, además el estudiante muy pocas veces se atreve a comprobar su respuesta.
- A continuación mostramos el gráfico que fue elaborada con la información de la tabla n.º 42, donde nos permite observar las cantidades y porcentajes respectivas por cada tipología de error planteada en nuestra investigación.

Figura n.º 7. Consolidado final del análisis de 521 errores encontradas en los cuestionarios n.º 1 y n.º 2



Fuente: Elaboración propia

Consideraciones finales

El aprendizaje de desigualdades e inecuaciones lineales, resulta difícil para los estudiantes de tercer año de educación secundaria por ser un tema abstracto, ya que tienen que usar de manera adecuada definiciones y propiedades. Coincidimos y evidenciamos lo afirmado por los autores considerados como antecedentes de la investigación: Los estudiantes confunden los conceptos de ecuación y desigualdad (Bazzini, 1999), por lo que resuelven inecuaciones como si fueran ecuaciones. Confunden el significado de $<$, $>$, $\geq$ y $\leq$ (Borello, Lezama, 2009; Maroto, 2013); no entienden las propiedades de desigualdad; no entienden que las desigualdades $x < a$ y $a > x$ son equivalentes (Vrancken, Engler y Muller, 2010; Garrote, Hidalgo, Blanco, 2004); no logran resolver inecuaciones justificando los pasos, por ejemplo, $-2x + 8 > 24$ y no expresan las soluciones gráficamente o por intervalos (Torrealba, 2014; Silva y Pirela, 2015). Estos errores también fueron evidenciados en nuestra investigación.

Se logró el primer objetivo específico, elaborar una tipología de los errores más comunes que cometen los estudiantes de educación secundaria en la resolución de inecuaciones lineales con una variable, tomando como referencia la comparación de las tipologías revisadas. Se logró el segundo objetivo específico, identificar los errores que comete un grupo de estudiantes de tercer año de educación secundaria de la I.E. "Fe y Alegría" n.º 37 en la resolución de inecuaciones lineales con una variable a través de una prueba diagnóstica. Nuestro tercer objetivo específico fue describir los errores que comete un grupo de estudiantes de tercer año de educación secundaria de la I.E. "Fe y Alegría" n.º 37 en la resolución de inecuaciones lineales con una variable, según la tipología propuesta.

- Para lograr este objetivo elaboramos un consolidado final de los resultados obtenidos luego de la aplicación de los dos cuestionarios, el cual mostrados en la tabla n.º 6. Allí podemos observar que se analizaron un total de 521 respuestas: 398 del cuestionario n.º 1 y 123 del cuestionario n.º 2. Los errores de mayor a menor frecuencia que se presentaron fueron de la siguiente manera: El 36.85% de estas respuestas presentan errores tipo E1b, de acuerdo a esto, los estudiantes tienen dificultad de traducir un intervalo a través de desigualdades; una desigualdad a través de intervalo o gráficamente; y un enunciado de la forma literal a través de inecuaciones, desigualdades e intervalos. El 17.85% presenta errores tipo E4, se observó

que los estudiantes desconocen conceptos y propiedades de inecuaciones o las emplean incorrectamente a la hora de resolver una inecuación. El 16.51% presenta errores tipo E1a, los estudiantes tienen poca práctica en la traducción, comprensión y planteo de problemas a través de inecuaciones; además de ello, los estudiantes no comprenden los símbolos y términos matemáticos como: $<$, $>$, $\leq$, $\geq$, $[]$ y $()$. El 10.94%, presenta errores tipo E3, allí se observó errores de cálculo elemental en suma de fracciones con expresiones algebraicas y con signos de agrupación. El 6.33% presenta errores de tipo E2, aquí se evidenció en pocas cantidades, posiblemente porque no hubo muchas preguntas donde el alumno tenga que inferir y si las hubo el estudiante no llegó a ese nivel de inferencia. El 5.95% presenta errores tipo E5, allí se evidenció que los estudiantes no tenían los conocimientos previos sobre los contenidos y conceptos a tratar. Por ejemplo, para inecuaciones el estudiante debe conocer propiedades de desigualdades y operaciones con intervalos, pero no las recuerda. Finalmente, el 4.57%, presenta errores tipo E6; se presentaron en pocas cantidades esto posiblemente porque las preguntas no incluían de manera explícita la verificación de sus resultados, además el estudiante muy pocas veces se atreve a comprobar su respuesta.

Limitaciones

En la experimentación, hemos podido observar que los estudiantes no estuvieron motivados para trabajar con el tema de desigualdades por ser abstracto, sobre todo, en el aprendizaje de las propiedades de desigualdades. Tampoco mostraron mucho interés al momento de contestar los cuestionarios, ya que no están acostumbrados a responder evaluaciones con una gran cantidad de problemas y ejercicios, y que tengan una duración de noventa minutos.

El tipo de trabajo que se realiza en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en instituciones educativas estatales no permite aprender, de manera rigurosa, los objetos matemáticos; específicamente, propiedades de desigualdades y su aplicación a las inecuaciones y problemas de contexto. Cabe mencionar que se está dejando de tomar evaluaciones mensuales o bimestrales. Solo se evalúa durante y después de cada sesión de clase. Eso hace que el estudiante aprenda solo para el momento y, después de un tiempo, se olvida y no responde a una evaluación mensual o bimestral.

Con nuestro estudio, dejamos abiertas las posibilidades para futuros trabajos que puedan considerar lo siguiente:

1. Identificar los errores comunes en los conocimientos previos para el aprendizaje de las inecuaciones lineales de los alumnos de tercer año de educación secundaria.
2. Elaborar actividades didácticas para el aprendizaje de inecuaciones lineales y su aplicación a problemas de contexto dirigidas a estudiantes de tercer año de educación secundaria a través de sesiones de aprendizaje, teniendo como referencia las tipologías de errores más comunes encontradas en la presente investigación.

Referencias

- Abrate, R., Pochulu, M. y Vargas J. (2006). *Errores Y Dificultades En Matemática* primera edición Buenos Aires: Universidad Nacional de Villa María, 2006 Dirección Nacional del Derecho de Autor: Expediente N° 487607. Recuperado de <http://unvm.galeon.com/Libro1.pdf>.
- Astolfi, J. P. (1999). *El "error", un medio para enseñar*. Colección: investigación y enseñanza, n° 15. Sevilla, Editora Díada.
- Borello, M. y Lezama J. (2014). Un planteamiento de Resignificación de las desigualdades a partir de las prácticas Didácticas del Profesor. *Un Enfoque Socioepistemológico. Clame 2014*. Recuperado de <https://core.ac.uk/download/pdf/33251667.pdf>
- Caputo, S. y Macías, A (2006). *Análisis de los errores de los alumnos de la asignatura "Álgebra I" al elaborar demostraciones*. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura – UNNE. Recuperado de <http://www.unne.edu.ar/unnevieja/Web/cyt/cyt2006/09-Educacion/2006-D-012.pdf>.
- Esteley, C., Villarreal, M. (1996). Análisis y categorización de errores en matemática. *Revista de Educación Matemática*. Volumen 11. N° 1. (16–35). Universidad Nacional de Córdoba.
- Garrote, M., Hidalgo, M., y Blanco, L. J. (2004). Dificultades en el aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones. *En Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, 46, 37-44. Recuperado de <http://www1.unex.es/eweb/ljblanco/documentos/2004%20Garrote,%20Hidalgo,%20Blanco%20Inecuaciones%20Suma.pdf>.
- Godino, J., Batanero, B. y Font, V. (2004). *Didáctica de las Matemáticas Para Maestros*. Departamento de Didáctica de la Matemática Facultad de Ciencias de la Educación Universidad de Granada 18071 Granada. Recuperado de <http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/>
- Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2014). *Metodología de la Investigación*. México: Editorial Ultra. Sexta Edición.
- Lego Mindstorms Education EV3 (2015). *Introducción al plan de lecciones de robótica: Uso de la aplicación de programación EV3*. LEGO Group. ©2015 The LEGO Group. 041329. Recuperado de <https://le-www-live-s.legocdn.com/.../ev3...robotics/introduction-to-robotics-tablet-es>.
- Lehmann, Ch. (2004). *Álgebra*. Editorial Limusa S.A. México.
- Lima, E. (1997). *Análisis Real*, Volumen 1. Instituto de Matemática y Ciencias afines, UNI, 1997. 240pp. Instituto de Matemáticas y Ciencias Afines (IMCA).
- Maroto, A. (2013). Propuesta para la enseñanza y aprendizaje de las inecuaciones lineales. *Revista Educación*, Julio-Diciembre, 1-16.
- Ministerio de Educación (2016). *Currículo Nacional de la Educación Básica Regular*. Lima. Recuperado <http://www.minedu.gob.pe/>.
- Ministerio de Educación. *Matemática 3°*. Editorial Santillana. Primera edición marzo del 2016.

- Saucedo, G. (2007). Categorización de errores algebraicos en alumnos ingresantes a la Universidad. Informe para posgrado maestría. Argentina: *itinerarios educativos* 2(2), 22-43. Recuperado de <https://bibliotecavirtual.unl.edu.ar/ojs/index.php/Itinerarios/article/viewFile/3898/5923>.
- Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el Enfoque Lógico Semiótico. *Investigación en Educación Matemática XI, Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*, 19-52.
- Socas, M. (2012). El Análisis del Contenido Matemático en el Enfoque Lógico Semiótico (ELOS). *Aplicaciones a la Investigación y al Desarrollo Curricular en Didáctica de la Matemática* (pp. 1-22). Valencia: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valencia y SEIEM.
- Silva, L. y Pirela, L. (2015). *Dificultades Que Presenta El Estudiantado De Cuarto Año De Educación Media General En El Aprendizaje De Inecuaciones Según El Enfoque Teórico De Socas*. Caso: Estudiantes de la Escuela Técnica Robinsoniana Monseñor Gregorio Adam, durante el Período Escolar 2014-2015. *Universidad de Carabobo Facultad de Ciencias de La Educación Escuela de Educación, Departamento de Matemática y Física Cátedra: Diseño de Investigación*.
- Stewart, J., Redlin, L. y Watson, S. (2012). *Precálculo, Matemáticas para el cálculo*. Sexta edición. México Cengage Learning Editores, S.A. de C.V., una Compañía de Cengage Learning, Inc. Corporativo Santa Fe.
- Torrealba, J. (2014). Taxonomía de Radatz: Errores cometidos en La resolución de inecuaciones de primer grado por estudiantes del primer semestre de la face-Uc. Universidad de Carabobo Área de Estudios de Postgrado Facultad de Ciencias de la Educación Maestría en Educación Matemática.
- Vrancken, S., Engler, A. y Müller, D. (2010). Inecuaciones Algebraicas. Una experiencia Didáctica Articulando diversos sistemas de Representación. *Yupana N 05*. Universidad Nacional del Litoral Argentina. Recuperado de <https://doi.org/10.14409/yu.v1i5.261>.

ANEXOS

CUESTIONARIO n.º 1

3.º DE SECUNDARIA

Tiempo: 90 min.

APELLIDOS Y NOMBRES: FECHA:

01. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones. Justifique su respuesta.

- a) $-8 > -1$
- b) $3 \leq 7$
- c) $a < b$ es equivalente a $b > a$
- d) Si $-x \leq 3$ entonces $x \leq -3$
- e) Si $-a > -b$ entonces $a > b$

02. Para cada enunciado, escriba verdadero (V) o falso (F), según corresponda. Justifique tu respuesta.

- a) $3 \in [1; 3\rangle$ ()
- b) $2 \notin \langle -5; 2\rangle$ ()
- c) $-3 \in \langle -4; 2]$ ()
- d) $4 \in [-3; +\infty\rangle$ ()

03. Dado el siguiente intervalo $\langle -3; 4]$

- a) Represente gráficamente.
- b) Represente usando desigualdades.

04. Dada la siguiente desigualdad $x < -3$.

- a) Realice una representación a través de intervalo.
- b) Represente gráficamente.

05. Dada la gráfica



- a) Represente a través de intervalo.
- b) Represente por desigualdades.

06. La edad de los adolescentes se podría definir como de 10 años o más y menores de 19 años. Represente las edades de los adolescentes usando intervalos, desigualdades y gráficamente.
07. Resuelva las siguientes inecuaciones en $\mathbb{R}$, justificando los pasos realizados. Interprete la solución obtenida.
- a) $8 \leq 2x$ b) $-5x < 30$ c) $26 \geq 30 - 8x$
d) $-12 < 3x + 6 \leq 18$ e) $3x - 2 < 5 - x$
08. Resuelva las siguientes inecuaciones en $\mathbb{R}$ e indique el conjunto solución
- a) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{6} < 1$ b) $\frac{x}{2} - \frac{x-5}{3} > 3$ c) $\frac{x}{2} - \frac{2x-1}{6} \geq 2(x-3)$
d) $-3 \leq \frac{2x-5}{3} < 5$ e) $2(3-x) + 2x \leq 5$ f) $5(x+2) > 9+5x$

CUESTIONARIO n.º 2

3.º DE SECUNDARIA

Tiempo: 60 min

APELLIDOS Y NOMBRES: FECHA:

01. Durante las últimas semanas, se registró bajas temperaturas en la provincia de Huancavelica. Esto ha ocasionado enfermedades respiratorias, sobre todo en la población infantil. El alcalde ha recibido un reporte en el que se indica que la temperatura registrada aumentada en 5°C no es mayor que 15°C ni menor que 4°C . ¿Dentro de qué intervalo se encontrarán las temperaturas registradas?
02. Las instrucciones en una botella de medicina indican que se debe conservarse a una temperatura entre 41°F y 68°F . ¿Qué intervalo de temperaturas corresponde en una escala Celsius, sabiendo que la relación de temperaturas Fahrenheit y Celsius es $^{\circ}\text{F} = \frac{9}{5}^{\circ}\text{C} + 32$?
03. Carla dispone de S/ 120 para llevar a sus sobrinos al circo. Si les compra entradas de S/ 15, le sobra dinero, pero si quisiera comprarles entradas de S/ 20, le faltaría dinero. ¿Cuántos sobrinos tiene Carla?
04. Rita compra el doble de calculadoras de S/ 15 que las de S/ 50. Si no tiene más de S/ 720 para gastar en calculadoras, ¿cuál será la cantidad máxima de calculadoras de S/ 15 que puede comprar?

05. Un comerciante compró un cierto número de relojes. Luego vendió 120 y le quedó más de la mitad. Al día siguiente, le devolvieron 13 relojes por estar defectuosos. Luego logró vender 99 relojes y le quedó menos de 36. ¿Cuántos relojes compró el comerciante?
06. Melvin obtuvo, en sus tres primeros exámenes, 13, 10 y 17. Si quiere aprobar con un promedio mayor igual que 14, ¿cuál debe ser la nota mínima que debe obtener en la cuarta evaluación?

RELACIÓN ENTRE LAS CÓNICAS Y DISEÑO ARQUITECTÓNICO

Sumaya Jaimes Reátegui

Rosa Kohama Aréstegui

Darcy E. Aréstegui de Kohama

maya_jaymes@hotmail.com, rosakohama@hotmail.com, deam_hco@hotmail.com

Universidad Nacional Hermilio Valdizán de Huánuco, Perú

Resumen

Uno de los problemas que afronta la enseñanza de las matemáticas en la formación de un arquitecto es la no vinculación de la misma con otras disciplinas; no permitiendo al estudiante ver la importancia de esta asignatura en su perfil profesional. En este trabajo se presenta una actividad basada en el enfoque de resolución de problemas para vincular dos asignaturas (Matemática I y Taller de Diseño I) de la carrera de Arquitectura, realizada durante el semestre 2019-I en la Universidad Nacional Hermilio Valdizán de Huánuco-Perú. El análisis de la actividad fue a través de: la autoevaluación de los estudiantes, la coevaluación entre pares de estudiantes. El análisis de la vinculación de las asignaturas fue por medio de la heteroevaluación de los docentes y utilizando la prueba del χ^2 cuadrado. Los resultados muestran que existió una relación significativa entre las dos asignaturas.

Palabras clave: Interdisciplina, enseñanza de las matemáticas, cónicas, diseño arquitectónico

Introducción

En diversas universidades la enseñanza de las matemáticas se realiza sin vincular con las disciplinas, siendo en muchos casos difícil para el docente enseñar las matemáticas integrando con las otras asignaturas de especialidad. Fritz et al. (2014) en su investigación titulado una propuesta didáctica que integra conceptos matemáticos en situaciones contextualizadas, diseña una propuesta didáctica para estudiantes de Arquitectura que consistió en la resolución de una situación problemática que implicaba el análisis de una obra arquitectónica, concluyendo que los estudiantes participaron activamente y aplicaron conceptos matemáticos significativamente en la construcción del modelo matemático de la obra. Crespo, Sanabria, & Guerra (2012) en su investigación titulada, Matemática para arquitectos: convergencias conceptuales y experiencias pedagógicas integradas con expresión gráfica, precisa la necesidad de priorizar la integración entre asignaturas de las disciplinas básicas con las de la especialidad, para el desarrollo científico -metodológico en ambas disciplinas.

En el Perú la integración de disciplinas se realizó en diferentes ramas de las ciencias; sin embargo, faltan trabajos de investigación en el área de la Arquitectura. El objetivo del presente trabajo es vincular la disciplina de Matemática I y Taller de diseño I, a través del enfoque de

resoluciones de problemas, a partir de este, los estudiantes con los conocimientos matemáticos de las cónicas y del diseño arquitectónico podrán integrarlos y así conseguir la solución válida del problema de diseño en el contexto real.

Aspectos teóricos y metodológicos

Cónicas

Etimológicamente una cónica es la intersección entre un cono circular recto con un plano; si el plano corta al cono sin pasar por el vértice se obtiene una cónica no degenerada: hipérbola, parábola, elipse; si el plano pasa por el vértice del cono se obtiene una cónica degenerada: una circunferencia, una recta, un par de rectas secantes, rectas paralelas, punto. (Salazar, 1987, p. 42)

La recta

"Es el lugar geométrico de los puntos que conservan siempre una misma dirección"(Ruiz, 2016, p. 20). Cuya ecuación es $ax + by + c = 0$.

La circunferencia es " el conjunto de puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro, la distancia fija se le llama radio y se simboliza por r " (Rojas, 2016, p. 36). Cuya ecuación es $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2, r > 0$

La parábola

"Es el lugar geométrico de todos los puntos en el plano cuya distancia a un punto fijo, llamado foco, es igual a su distancia a una recta fija determinada, denominada directriz " (Cuellar, 2012, p. 335). Cuyas ecuaciones son:

$$(x - h)^2 = 4p(y - k) \text{ o } (y - k)^2 = 4p(x - h)$$

La hipérbola

"Es el lugar geométrico de los puntos del plano y la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, siempre es constante y menor que distancia entre los focos" (Fuenlabrada, 2007, p. 165). Cuyas ecuaciones son:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \text{ o } \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1, a^2 + b^2 = c^2$$

La elipse

"Es el conjunto de puntos en el plano cartesiano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos es constante, la cual siempre es mayor que la distancia entre dichos puntos fijos" (Cuéllar, 2010, p. 229). Cuyas ecuaciones son:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \text{ o } \frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1, a^2 = c^2 + b^2$$

Diseño Arquitectónico

Chávez (2005) define el diseño arquitectónico como la actividad que intencionalmente realiza el estudiante/arquitecto para responder a las proposiciones dirigidas a la creación de un objeto "La obra de arquitectura" que insertado en un lugar resuelve necesidades de organización, del espacio, sintetizando un conjunto de imágenes gráficas y plásticas.

Forma

“Percibimos con claridad cada edificio porque cada uno tiene una forma. La forma es la figura o determinación exterior de algo”(Claux, 2005, p. 44).

Planos de planta

Palacios (1997) define el dibujo de la proyección del objeto visto desde arriba hacia abajo como si hubiera sido cortado a la altura de un metro. Se le conoce también como plano de distribución porque gráfica la organización espacial; es el principal de las pautas para hacer los otros planos.

Planos de elevación

Palacios (1997) define como representaciones gráficas de exteriores proyectadas sobre planos verticales por medio de las elevaciones también en las fachadas se expresa el carácter de cada elemento arquitectónico.

Metodología

La investigación es del tipo descriptivo – correlacional. De la información recolectada, se identificó los aspectos de las autoevaluaciones y coevaluaciones (entre pares de estudiantes) con respecto al uso de las ecuaciones matemáticas las cónicas en diseño arquitectónico, uso de los principios ordenadores en la función del diseño arquitectónico, uso de las cónicas en la forma del diseño arquitectónico. El análisis correlacional estuvo orientado a establecer la relación entre el uso de la cónica y el diseño arquitectónico.

La población analizada estuvo conformada por los estudiantes del semestre 2019-I de la carrera profesional de Arquitectura de la Universidad Nacional Hermilio Valdizán de Huánuco-Perú y la muestra no probabilística fue de 17 estudiantes, ingresantes del primer ciclo, que cursaban la asignatura de Matemática I y Taller de Diseño I. Se aplicó el método de resolución de problemas, se planteó a los estudiantes realizar un diseño arquitectónico de un espacio de esparcimiento usando cónicas (recta, circunferencia, parábola, elipse, hipérbola): Para esto los estudiantes realizaron maquetas y planos usando la teoría de las cónicas (ver imágenes 1-6). Para establecer la relación entre el uso de las cónicas y diseño, se consideró rubricas de heteroevaluación de los docentes (ver tabla1).



Imagen1.Maqueta de un espacio de esparcimiento

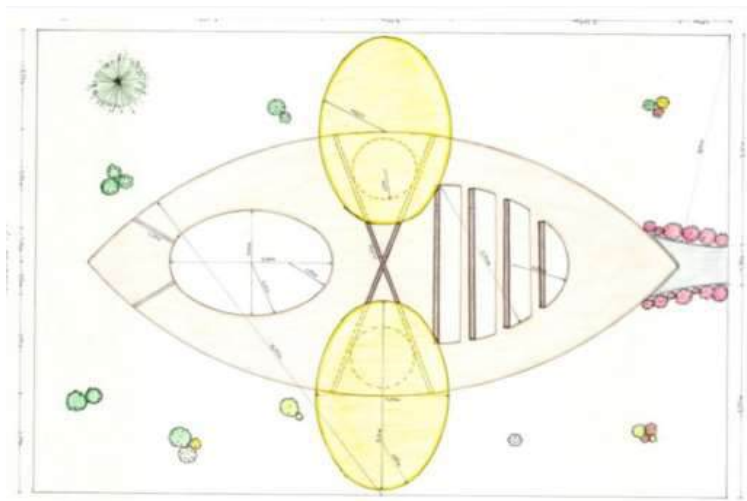


Imagen2.Plano de planta de un espacio de esparcimiento

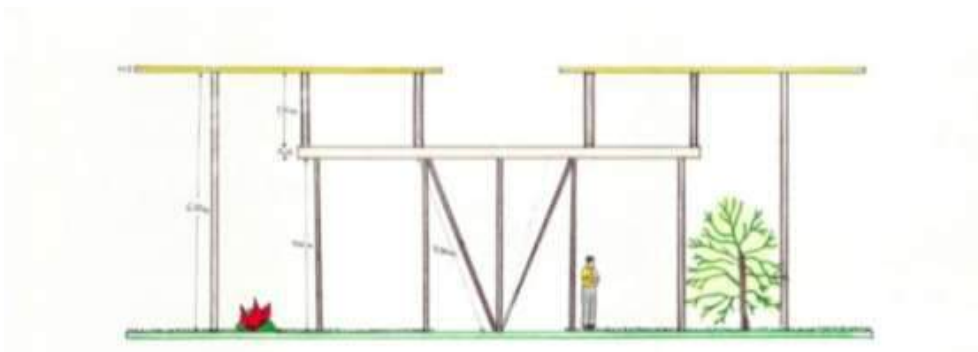


Imagen 3.Plano en elevación de un espacio de esparcimiento



Imagen 4. Maqueta de un espacio de esparcimiento

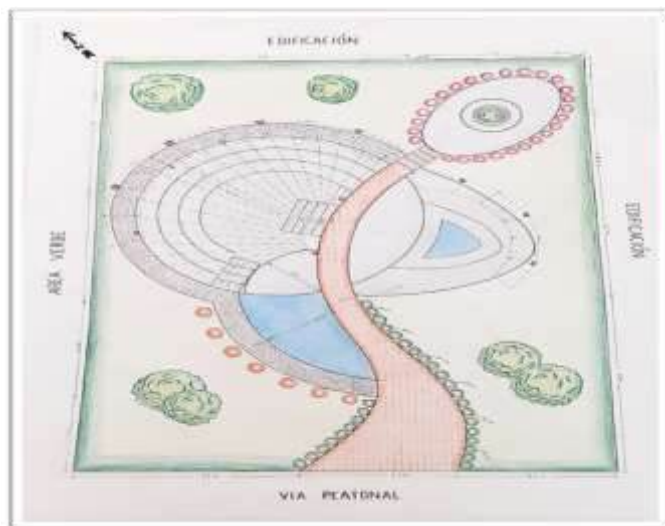


Imagen 5. Plano de planta de un espacio de esparcimiento

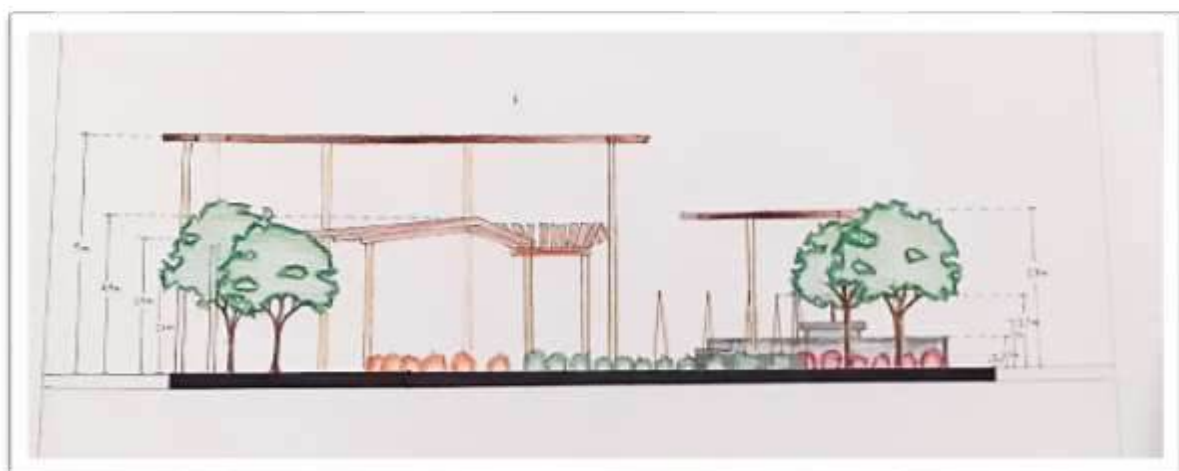


Imagen 6. Plano en elevación de un espacio de esparcimiento

Tabla 1

Rúbrica para la Maqueta y planos

Uso de las cónicas para los diseños arquitectónicos con referente un insecto en extinción

Diseño	Aspectos	Pre formal (10-12)	Receptivo (13-14)	Resolutivo (15-16)	Autónomo (17-18)	Estratégico (19-20)	Nota
Aprendizaje esperado: las Maquetas cumplen con las ecuaciones matemáticas y fundamentos arquitectónico	Uso de las cónicas en la Forma diseño arquitectónico	No identifica ninguna ecuación de las matemáticas en el diseño	Cumple con 1 aspectos (recta, circunferencia, parábola, elipse, hipérbola, o parte de las cónicas antes mencionadas, o funciones)	Cumple con 2 aspectos (recta, circunferencia, parábola, elipse, hipérbola, o parte de las cónicas antes mencionadas, o funciones)	Cumple con 3 aspectos (recta, circunferencia, parábola, elipse, hipérbola, o parte de las cónicas antes mencionadas, o funciones)	Cumple con 4 aspectos (recta, circunferencia, parábola, elipse, hipérbola, o parte de las cónicas antes mencionadas, o funciones)	
Evidencia: Maqueta y plano de: planta y elevación	Principios ordenadores en diseño arquitectónico	No identifica ningún principio ordenador en el plano de planta y elevación	Cumple con 1 principios ordenadores; explica detalladamente cada principio en un plano de planta y elevación	Cumple con 2 principios ordenadores; explica detalladamente cada principio en un plano de planta y elevación	Cumple con 3 principios ordenadores; explica detalladamente cada principio en un plano de planta y elevación	Cumple con 4 principios ordenadores; explica detalladamente cada principio en un plano de planta y elevación	

Proceso de evaluación	Logros	Uso de las ecuaciones de las cónicas	No cumple con No Usa correcta las ecuaciones matemáticas recta, circunferencia, parábola, elipse, hipérbola, o parte de las cónicas antes mencionadas, o funciones	Cumple con 1 aspectos (usa correcta las ecuaciones matemáticas: recta, circunferencia, parábola, elipse, hipérbola, o parte de las cónicas antes mencionadas)	Cumple con 2 aspectos (usa correctamente las ecuaciones matemáticas: recta, circunferencia, parábola, elipse, hipérbola, o parte de las cónicas antes mencionadas)	Cumple con 3 aspectos (usa correctamente las ecuaciones matemáticas: recta, circunferencia, parábola, elipse, hipérbola, o parte de las cónicas antes mencionadas)	Cumple con 4 aspectos (usa correctamente las ecuaciones matemáticas: recta, circunferencia, parábola, elipse, hipérbola, o parte de las cónicas antes mencionadas)	Nota Promedio

Resultados

Análisis de la Autoevaluación

Tabla 2.

Porcentaje del aspecto de la Autoevaluación

Aspectos	Uso de las Ecuaciones cónicas en el diseño	Uso de las cónicas en la forma del diseño	Uso de los principios ordenadores en la función del diseño
Pre formal	11,8 %	0	0
Resolutivo	11,8 %	0	11,8 %
Autónomo	29,4 %	11,8 %	23,5 %
Estratégico	47,0 %	88,2 %	64,7 %
Total	100,0 %	100,0 %	100,0 %

Fuente: propia

En la autoevaluación, el 47,0 % de los estudiantes expresaron que utilizaron correctamente 4 ecuaciones de la cónicas (aspecto: estratégico) y 11,8 % expresaron que no utilizaron las ecuaciones de las cónicas en el diseño del espacio de esparcimiento. El 88,2 % expresaron que usaron correctamente 4 cónicas (aspecto: estratégico) y el 11,8 % expresaron que usaron correctamente 3 cónicas (aspecto: autónomo) en la forma del diseño. El 64,7 % expresaron que usaron correctamente 4 principios ordenadores (aspecto: estratégico) y 11,8 % usaron correctamente 2 principios ordenadores (aspecto: resolutivo) en la función del diseño.

Análisis de la Coevaluación

Tabla 3.

Porcentaje de aspecto de la Coevaluación

Aspectos	Uso de las ecuaciones de las cónicas en el diseño	Uso de las cónicas en la forma del diseño	Uso de los principios ordenadores en el diseño
Pre formal	11,8 %	5,9 %	5,9 %
Resolutivo	5,9 %	0	5,9 %
Autónomo	52,9 %	23,5 %	23,5 %
Estratégico	29,4 %	70,6 %	64,7 %
Total	100,0	100,0 %	100,0 %

Fuente: propia

En la coevaluación de entre pares de estudiantes, el 29,4 % de los estudiantes expresaron que utilizaron correctamente 4 ecuaciones de las cónicas (aspecto: estratégico) y 11,8 % expresaron que no utilizaron correctamente las ecuaciones de las cónicas en el diseño del espacio de esparcimiento. El 70,6 % expresaron que usaron correctamente 4 cónicas (aspecto: estratégico) y el 5 % expresaron que no usaron correctamente las cónicas (aspecto: pre formal) en la forma del diseño. El 64,7 % expresaron que usaron correctamente 4 principios ordenadores (aspecto: estratégico) y 5,9 % no usaron correctamente los principios ordenadores (aspecto: pre formal) en la función del diseño.

Relación entre forma del diseño arquitectónico de un espacio de esparcimiento y las cónicas

H₀: La forma del diseño de un espacio de esparcimiento no se relaciona con las ecuaciones de las cónicas

H_a: La forma del diseño de un espacio de esparcimiento si se relaciona de las ecuaciones de las cónicas

Se contrastó la hipótesis usando la prueba de chi cuadrado

Tabla 4. *Tabla cruzada*

		Forma del diseño arquitectónico				
		Autónom			Total	
		Pre formal	o	Estratégico		
Ecuaciones matemáticas de las cónicas	Pre formal	Recuento	2	0	0	2
		Recuento esperado	,2	,1	1,6	2,0
	Resolutivo	Recuento	0	0	2	2
		Recuento esperado	,2	,1	1,6	2,0
	Autónomo	Recuento	0	1	8	9
		Recuento esperado	1,1	,5	7,4	9,0
	Estratégico	Recuento	0	0	4	4
		Recuento esperado	,5	,2	3,3	4,0
Total		Recuento	2	1	14	17
		Recuento esperado	2,0	1,0	14,0	17,0

Fuente: propia

Tabla 5

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	df	Significación asintótica (bilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	17,810 ^a	6	,007
Razón de verosimilitud	13,384	6	,037
N de casos válidos	17		

a. 11 casillas (91,7%) han esperado un recuento menor que 5.

El recuento mínimo esperado es ,12.

Como significación asintótica=007 <0.05 se rechaza la hipótesis nula y se concluye que la forma del diseño de un espacio de esparcimiento se relaciona con las ecuaciones de las cónicas.

Relación entre las ecuaciones de las cónicas y los principios ordenadores del diseño arquitectónico de un espacio de esparcimiento

H₀: Los principios ordenadores del diseño de un espacio de esparcimiento no se relaciona de las ecuaciones de las cónicas

Ha: Los principios ordenadores del diseño de un espacio de esparcimiento se la relaciona de las ecuaciones de las cónicas.

Se contrastó la hipótesis usando la prueba de Chi cuadrado

Tabla 6

Tabla cruzada

				Principio ordenadores del diseño arquitectónico			
				Pre formal	Resolutivo	Autónomo	Estratégico
Ecuaciones matemáticas de las cónicas	Pre formal	Recuento	2	0	0	0	
		Recuento esperado	,2	,4	,9	,5	
	Resolutivo	Recuento	0	2	0	0	
		Recuento esperado	,2	,4	,9	,5	
	Autónomo	Recuento	0	1	6	2	
		Recuento esperado	1,1	1,6	4,2	2,1	
	Estratégico	Recuento	0	0	2	2	
		Recuento esperado	,5	,7	1,9	,9	
Total			Recuento	2	3	8	4
			Recuento esperado	2,0	3,0	8,0	4,0

Tabla 7

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	df	Significación asintótica (bilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	28,727 ^a	9	,001
Razón de verosimilitud	21,782	9	,010
N de casos válidos	17		

a. 16 casillas (100,0%) han esperado un recuento menor que 5.

El recuento mínimo esperado es ,24

Como la significación asintótica=001<0.05, se rechaza la hipótesis nula y se concluye que los principios ordenadores del diseño arquitectónico de un espacio de esparcimiento se relacionan con las ecuaciones de las cónicas.

Consideraciones finales

Los estudiantes expresaron que sus logros fueron:

- Utilizar las cónicas en un espacio arquitectónico en cual pensaban que no había forma de usarlas.
- Generar, explicar y desarrollar las cónicas en el diseño arquitectónico
- Emplear detalladamente las ecuaciones de las cónicas y distribuirlas en los espacios principales y secundarios del diseño arquitectónico
- Incremente mi creatividad
- Me ayudo a tener un mejor conocimiento de los principios ordenadores, así mismo a la vez como las ecuaciones matemáticas son importante al hacer una construcción.
- Logre llevar la matemática a una maqueta 3D y así la matemática cumple una función importante.
- Me ayudo para poder saber aplicar la matemática a una edificación, además de aprender de manera didáctica y me motivo a indagar más en las ecuaciones.

Referencias

- Chávez, B. A. (2005). *Recreando la creatividad arquitectónica*. Huancayo, Perú: Milagross.
- Claux, C. I. (2005). *Arquitectura y el proceso de diseño*. Lima, Perú: Universidad San Martín de Porres.
- Crespo, E. M. C., Sanabria, O. K., & Guerra, A. C. (2012). Matemática para arquitectos: Convergencias conceptuales y experiencias pedagógicas integradas con Expresión Gráfica. *Arquitectura y Urbanismo*, 33(3), 113-121.
- Cuéllar, C. J. A. (2010). *Matemáticas III*. Distrito Federal, México: McGraw-Hill Interamericana.
- Cuellar, C. J. A. (2012). *Geometría analítica*. D.F., México: McGraw-Hill Interamericana.
- Fritz, M. S., Gonzales, M. P., Imbach, M. G., Kernot, S., Laspina, C., Speratti, H., & Vuitot, M. V. (2014). *Una propuesta didáctica que integra conceptos matemáticos en situaciones contextualizados*.
- Fuenlabrada, de la V. T. (2007). *Geometría analítica*. Distrito Federal, México: McGraw-Hill Interamericana.
- Palacios, M. M. (1997). *Ensayos sobre Arquitectura*. Huancayo, Perú: Otim computer.
- Rojas, Á. C. J. (2016). *Introducción a la geometría*. Barranquilla, Colombia: Universidad del Norte.
- Ruiz, B. J. (2016). *Matemáticas 3: Geometría analítica básica*. Distrito Federal, México: Grupo Editorial Patria.
- Salazar, S. L. A. (1987). *Superficies de segundo orden*.

FORMAS E EQUAÇÕES: UMA INTRODUÇÃO AO ESTUDO DAS SEÇÕES CÔNICAS COM O GEOGEBRA

André Lúcio Grande*

Benedito Antonio da Silva **

andreluciogrande@gmail.com, benedito@pucsp.br

Faculdade de Tecnologia de Mauá, Brasil *

Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil*

Resumen

Este trabalho objetiva realizar uma breve análise sobre as diferentes abordagens relacionadas a introdução ao estudo das seções cônicas utilizando-se das tecnologias voltadas ao ensino e a aprendizagem da Matemática. A partir de situações-problema descrevemos e avaliamos as diversas modalidades, tratamentos e pontos de vista no estudo do objeto matemático em questão, destacando as implicações didáticas dessas abordagens. Utilizou-se como recurso computacional o software GeoGebra, que permite de maneira interativa e dinâmica auxiliar os estudantes na elaboração de conjecturas, testar hipóteses e validar resultados na construção do conhecimento matemático. A pesquisa se caracteriza como sendo do tipo qualitativo, tendo como referencial teórico a questão da visualização no ensino da Matemática defendida por David Tall. Como resultados, destacamos as potencialidades do software GeoGebra no estudo das seções cônicas, sendo que por meio do mesmo podem ser evocados diversos conceitos, no sentido de permitir explorar as diversas representações do objeto matemático.

Palabras clave: Seções Cônicas, Geometria Analítica, Visualização, GeoGebra.

Introdução

A Geometria Analítica (GA) é um ramo da Matemática que apresenta uma relevância significativa no âmbito acadêmico e escolar por propiciar, em grande medida, diversas aplicações em muitas áreas do conhecimento nos cursos que se utilizam de seus conceitos.

Essa disciplina aparece nos currículos escolares de Matemática nos vários níveis de ensino, em que se observa, mesmo de maneira implícita, a sua abordagem desde o ensino fundamental, em que os professores introduzem e destacam a importância da utilização de um sistema de coordenadas para a localização de pontos num plano e o cálculo de distâncias. No ensino médio ou secundário são estudadas as equações cartesianas e paramétricas de retas, circunferências e seções cônicas além das posições relativas entre as mesmas, em que se sobressaem algumas propriedades geométricas. Já no ensino superior a GA é abordada entre outras áreas na Engenharia, Física, Matemática e Computação. Nesses cursos, os objetos matemáticos como curvas e superfícies apresentam um tratamento tanto algébrico quanto geométrico e vetorial.

De um modo geral por meio do estudo da GA muitos problemas geométricos podem ser tratados de maneira algébrica e vice-versa, sendo que essa relação entre a Álgebra e a Geometria foi responsável por um importante progresso e desenvolvimento na Matemática e em outras áreas do conhecimento. Esse fato foi destacado pelo matemático francês Joseph Louis Lagrange ao afirmar que:

Enquanto a Álgebra e a Geometria estiveram separadas, o seu progresso foi lento e o seu uso limitado; mas uma vez que estas ciências se uniram, elas deram uma à outra um apoio mútuo e rapidamente avançaram juntas para a perfeição.

(Lagrange, 1795, p.271).

Dentre os temas abordados num curso de GA destacam-se as seções cônicas, ou simplesmente cônicas, como a elipse, a hipérbole e a parábola. Tais elementos, que podem ser obtidos pela intersecção um cone circular reto com um plano, foram estudados desde a Antiguidade (séc. IV a.C.) por Menecmo, Apolônio, Euclides e Arquimedes de maneira sintética, com a construção dessas curvas sendo efetuada utilizando-se régua e compasso, e na solução de problemas geométricos, como a duplicação do cubo. Além disso, no século XVII, observou-se o estudo de suas propriedades geométricas e o traçado de tangentes das cônicas efetuados por Fermat e Descartes. Segundo Courant e Robbins:

O tratamento métrico aplicado por Apolônio - as seções cônicas – elipses, hipérboles e parábolas – foi um dos grandes feitos da Antiguidade. A importância das seções cônicas para a Matemática pura e aplicada (por exemplo, as órbitas dos planetas e dos átomos de hidrogênio são seções cônicas) dificilmente é exagerada”. Não constitui surpresa o fato de que a teoria grega clássica de seções cônicas ainda seja parte indispensável no ensino da Matemática. (Courant e Robbins, 2005, p.233).

Quanto aos ramos da Matemática em que o tema pode ser abordado, podemos destacar, além da própria Geometria Analítica o Cálculo Diferencial e Integral, Cálculo Vetorial, Álgebra Linear, Geometria Descritiva e Geometria Diferencial.

Este tema, ao ser abordado em sala de aula pelos professores nos mais diferentes níveis de ensino, apresenta algumas particularidades, como a questão de uma abordagem sintética ou analítica do tema e um tratamento unificado ou fragmentado do mesmo. Destacamos também a grande variedade de conceitos que podem ser evocados tais como: transformações geométricas, equações cartesianas, paramétricas, vetoriais, lugares geométricos, transformações lineares, autovalores e autovetores, mudança de coordenadas, matrizes ortogonais e semelhantes, diagonalização de matrizes, invariantes algébricos e geométricos.

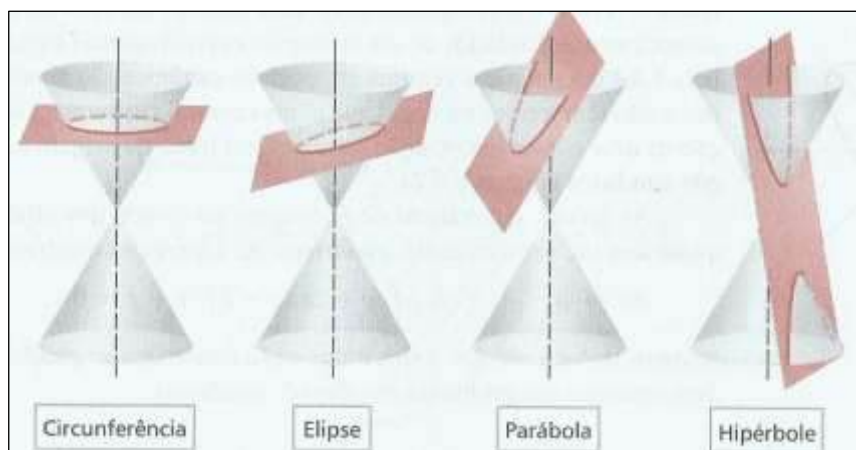


Figura 1. Seções Cônicas

Além da grande gama de conceitos elencados, cabe ressaltar que o ensino e a aprendizagem das seções cônicas devem contemplar questões que envolvam e potencializem nos estudantes o pensamento geométrico e a visualização das propriedades dos objetos matemáticos por meio de suas mais diversas representações, contribuindo-se assim para a compreensão e a generalização de alguns resultados.

Dessa forma, essa pesquisa objetiva realizar uma análise sobre as diferentes abordagens relacionadas a uma introdução ao estudo das seções cônicas, procurando descrever os diversos tratamentos e conceitos envolvidos sob as diversas representações utilizadas, como a algébrica, geométrica e numérica, utilizando-se como recurso tecnológico o software GeoGebra, que de maneira dinâmica e interativa, potencializa e contribui sobremaneira na visualização das propriedades dos objetos matemáticos, possibilitando a elaboração de conjecturas, teste e validação de hipóteses, no sentido de auxiliar na construção do conhecimento matemático.

A importância da visualização no ensino da Matemática

O papel da visualização no ensino e na aprendizagem em Matemática é um tema que vem sendo discutido por um número cada vez maior de educadores e pesquisadores. A visualização, em linhas gerais, no ensino e aprendizagem do Cálculo permite interpretar informações por meio da construção de representações visuais, de softwares, entre outros recursos didáticos.

David Tall (2002) considera a visualização não só relevante à Matemática como à Educação Matemática. Por visualização o autor entende como uma ação de transformar conceitos abstratos em imagens mentalmente visíveis. Essa ação constitui-se em dois momentos: constrói-se algo mentalmente e posteriormente representa-se o que se pensou. Sobre a visualização o autor afirma que:

Ao introduzir as visualizações adequadamente complexas de ideias matemáticas, é possível fornecer uma visão muito mais geral dos modos possíveis de aprender os conceitos, fornecendo

intuições muito mais poderosas do que através de uma linguagem tradicional (TALL, 2002, p.20 – tradução nossa).

O autor ressalta ainda que o uso do computador constitui uma interface visual e atuante em que é possível criar modelos de uma situação proposta destinados às explorações sensoriais por meio de percepções, visualizações e intuições. Para o autor, o computador se torna um “organizador genérico” de algumas ideias e conceitos, sendo um ambiente (ou micromundo) em que os alunos podem manipular exemplos e contraexemplos desses conceitos. Por meio de um software, portanto, os alunos entram em contato com o objeto matemático.

Sendo assim, selecionou-se o software GeoGebra para a exploração das propriedades algébricas e geométricas no estudo das cônicas, visando trabalhar com os estudantes conceitos intuitivos de maneira dinâmica das mesmas, o que pode contribuir para o aluno formular conjecturas e testar hipóteses sobre alguns resultados.

O GeoGebra é um software gratuito de Geometria Dinâmica, escrito na linguagem JAVA e disponível em português, que apresenta uma interface entre Geometria e Álgebra. Ele possui a vantagem de dispor, ao mesmo tempo, de duas representações diferentes de um mesmo objeto matemático: a geométrica e a algébrica, por exemplo, e essas representações podem ser simultaneamente manipuladas.

Aportes Teóricos

Um dos problemas fundamentais da GA consiste em determinar dada uma equação o lugar geométrico correspondente, ou seja, encontrar a curva ou a reta que contém todos os pontos, e somente esses pontos, cujas coordenadas satisfazem à equação, o que significa obter sua representação gráfica ou geométrica.

As seções cônicas podem ser abordadas essencialmente sob dois aspectos: o aspecto geométrico, em que essas curvas são definidas como lugares geométricos, utilizando-se um os dois pontos distintos (focos), uma reta diretriz e um número dada pela relação entre distâncias denominado excentricidade. Utilizando-se de um tratamento algébrico, tais curvas são definidas por certas equações de segundo grau, com representação por equações cartesianas, paramétricas, polares ou vetoriais.

Inicialmente uma situação problema em que se pode introduzir as seções cônicas, envolvidas num contexto da Física e da Mecânica, pode ser enunciada da seguinte maneira:

Situação-Problema

Uma barra rígida de extremidades A e B, de comprimento l , repousa inicialmente ao longo de um muro vertical. Em um dado momento essa barra começa a deslizar sobre um plano perpendicular ao muro e ao solo, suas extremidades A e B estão em contato permanente respectivamente com o solo e o muro, até a mesma encontrar-se totalmente na horizontal, ou seja, o ponto B percorrer o comprimento l na horizontal e o ponto A se localizar no solo. Qual é a curva descrita por um ponto $M = (x, y)$ qualquer dessa barra?

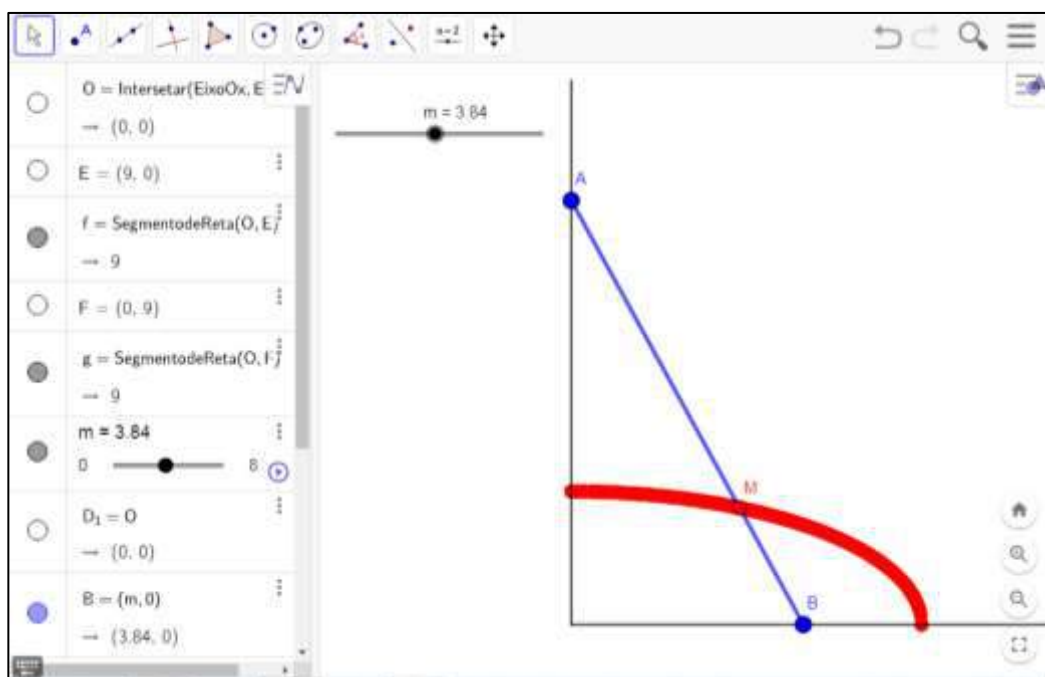


Figura 2. Situação-Problema

Essa situação sucinta uma série de conceitos que podem ser explorados de maneira dinâmica no GeoGebra. Primeiramente, pode-se abordar a questão do lugar geométrico descrito pelo ponto M com relação ao movimento simultâneo dos pontos A e B. Várias conjecturas e hipóteses podem ser elaboradas ao se movimentar com o seletor do GeoGebra sobre a trajetória descrita pelo ponto M. Demonstra-se algebricamente (não se constitui o objetivo desse trabalho), utilizando-se de relações trigonométricas no triângulo retângulo, que a curva descrita pelo ponto M é uma elipse, centrada no vértice do ângulo reto formado pelo muro e o solo. É interessante propor ainda na atividade para se determinar o lugar geométrico no caso do ponto M estar localizado no ponto médio do segmento de extremos A e B, que nesse caso é uma circunferência. Outras situações- problema podem ser elaboradas de maneira semelhante no sentido de se introduzir a hipérbole e a parábola. Nesse tratamento, destacam-se o aspecto da curva cônica ser gerada pelo movimento contínuo de um ponto e a sua abordagem ser tratada como um lugar geométrico.

Uma implicação dessa abordagem reside no fato de que a mesma serve como uma situação para a introdução ao conceito das curvas cônicas, mas que seu alcance se restringe ao aspecto motivacional para a introdução do conceito.

Outra abordagem das seções cônicas como um lugar geométrico pode ser dada de maneira sintética quando definimos uma cônica sendo uma curva plana descrita por um ponto, cujas distâncias a um ponto fixo e uma reta fixa estão entre si numa razão constante. O ponto fixo é denominado foco da cônica; a reta fixa a diretriz e a razão constante a excentricidade da cônica.

Para essa que essa abordagem possa ser construída no GeoGebra, temos a seguinte construção: Seja F um ponto fixo, D uma reta fixa ($F \notin D$) e sendo e um número real ($e > 0$). A curva C é o

conjunto dos pontos M do plano tal que $\frac{MF}{d(M,D)} = e$, também denominada cônica de foco F , de direção D e excentricidade e . Essas cônicas são chamadas de *elipse* no caso se $0 < e < 1$, *parábola* se $e = 1$ e *hipérbole* se $e > 1$. A reta perpendicular a D passando pelo ponto F é chamada eixo focal, que se constitui como o eixo de simetria que toda seção cônica admite.

Esse tratamento destaca, de maneira sintética, propriedades das seções cônicas definidas como lugares geométricos, mas que podem ser feitas demonstrações no sentido de se obter as equações das curvas cônicas.

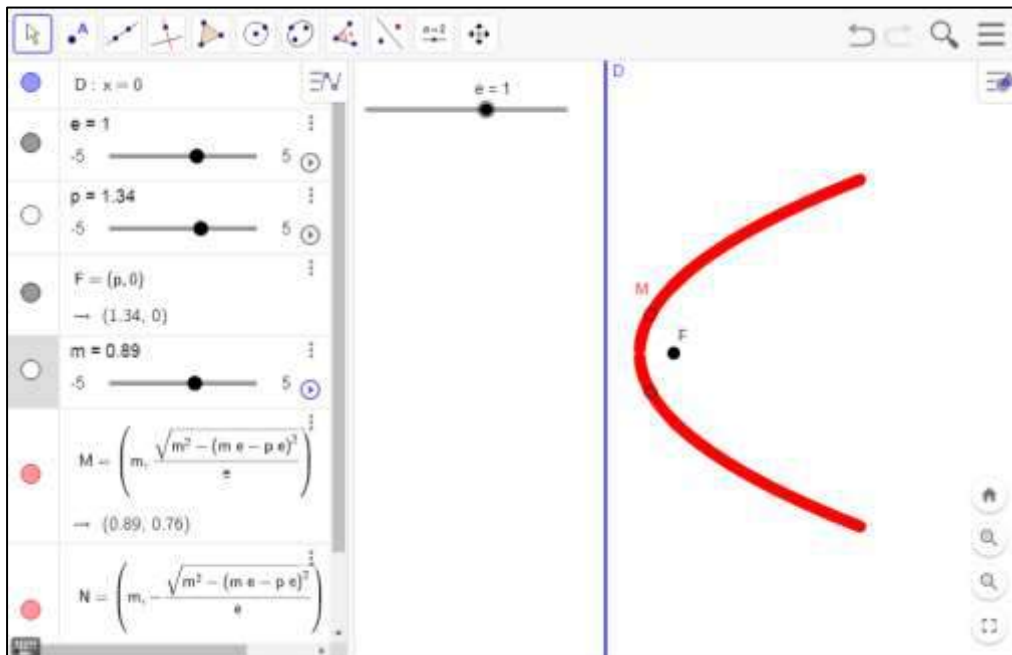


Figura 3. Seções Cônicas – Lugar Geométrico

Num curso de Cálculo Diferencial e Integral, por exemplo, as seções cônicas são definidas como um lugar geométrico e são estudadas enfatizando-se suas equações cartesianas, paramétricas e polares, suas representações gráficas e o traçado de retas tangentes e normais a essas curvas.

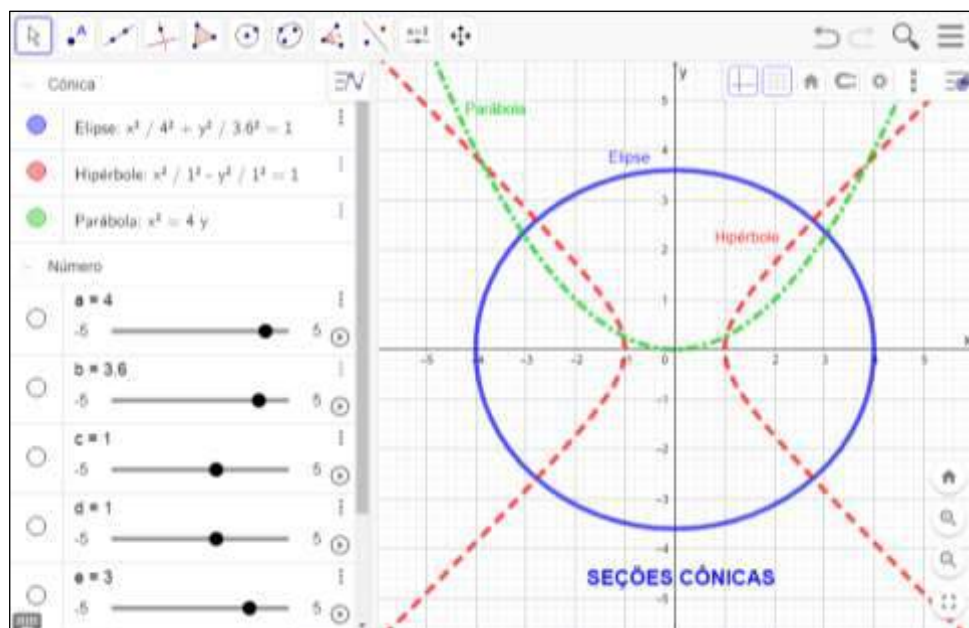


Figura 4. Equações das Seções cônicas - GeoGebra

Nessa abordagem, as cônicas são estudadas por uma equação geral do 2º grau nas três variáveis x , y e z , em que:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + mx + ny + pz + q = 0$$

onde pelo menos um dos coeficientes a , b , c , d , e , ou f é diferente de zero, representa um superfície quádricas, ou simplesmente uma quádrica.

Se essa superfície for cortada por planos coordenados ou por planos paralelos a eles, a curva de intersecção será uma cônica. Essa curva se chama traço da superfície no plano.

Por exemplo, o traço da superfície quádrica no plano $z = 0$ é a cônica:

$$ax^2 + by^2 + 2dxy + mx + ny + q = 0$$

contida no plano $z = 0$, ou seja, o plano xOy e pode representar uma elipse, uma hipérbole ou uma parábola. Em casos particulares pode representar uma reta, duas retas, um ponto, ou um conjunto vazio.

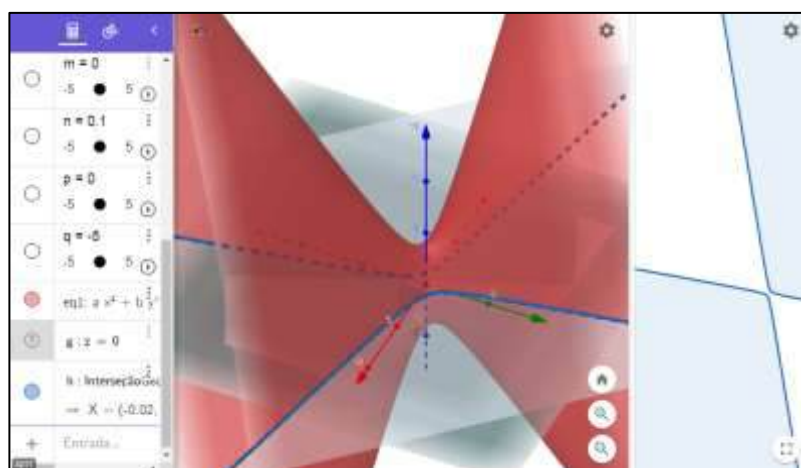


Figura 5. Equações das Seções cônicas - GeoGebra

Em Álgebra Linear, as cônicas e as quádricas apresentam um enfoque tanto algébrico e vetorial, enfatizando-se sua representação matricial por meio das formas quadráticas.

Uma abordagem pertinente que pode ser realizada ao estudarmos as cônicas e as quádricas pode ser interpretando-as algebricamente como uma forma quadrática, em que muitos conceitos podem ser evocados, tais como: equações algébricas, transformações lineares, autovalores e autovetores, mudança de coordenadas, matrizes ortogonais e semelhantes, diagonalização de matrizes, invariantes algébricos e geométricos sob endomorfismos.

Por meio das transformações lineares ortogonais (isometrias) sobre as cônicas e as quádricas, como rotações e translações, é possível efetuar-se uma mudança do sistema de coordenadas, no sentido de facilitar o reconhecimento e classificação desses objetos matemáticos.

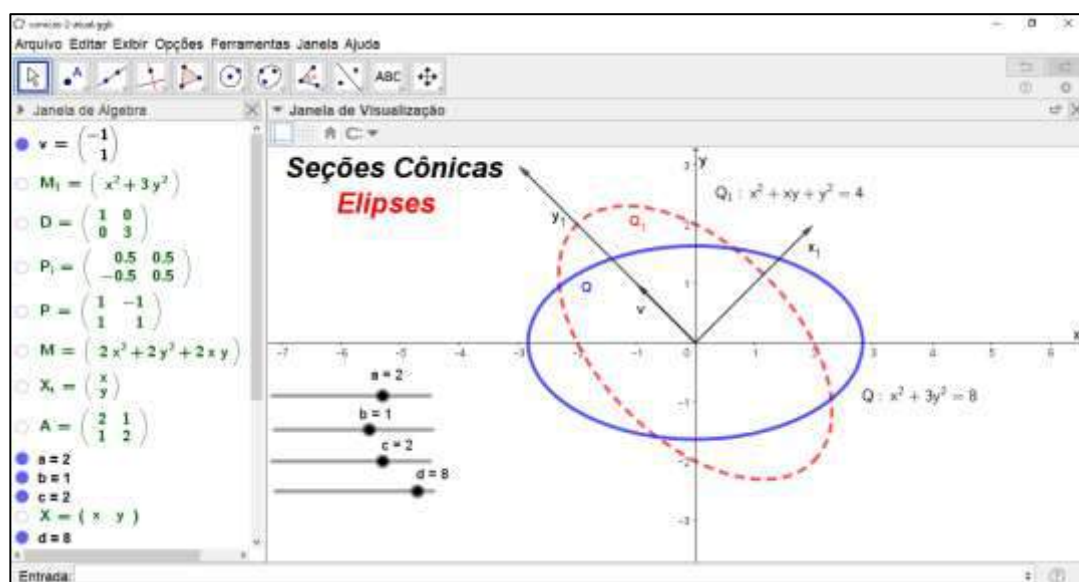


Figura 6. Rotação e Translação de eixos

Para a Geometria Diferencial, as seções cônicas e as superfícies quádricas são estudadas por meio de suas parametrizações, onde são exploradas propriedades locais e globais desses objetos matemáticos. Enfatiza-se nesse caso por exemplo a curvatura dessas curvas em cada ponto da mesma.

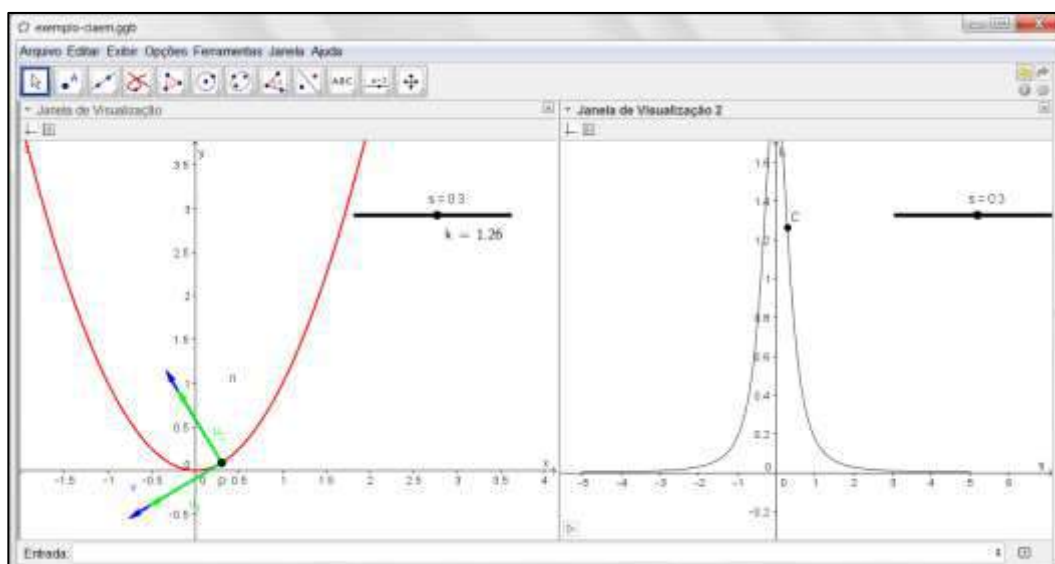


Figura 7. Curvatura de uma curva

Considerações Finais

Este trabalho descreveu e analisou as diferentes abordagens e tratamentos no estudo das seções cônicas sob o ponto de vista da visualização no ensino e aprendizagem da Matemática segundo David Tall e do uso do software GeoGebra como recurso auxiliar computacional.

Destacamos que essas múltiplas abordagens (sintética, analítica, vetorial) possibilitam evocar os mais diversos conceitos matemáticos em todos os níveis de ensino, o que permite aos professores trabalharem em sala de aula os mais variados temas.

Cabe ressaltar que essas não são as únicas abordagens e tratamentos possíveis na introdução do estudo das seções cônicas. Podemos introduzir o conceito por exemplo por meio da geometria projetiva, em que as cônicas são a projeção de um círculo sobre o plano.

O GeoGebra possibilita analisar de maneira dinâmica e não estática algumas propriedades geométricas das seções cônicas, sendo que o software permite aos estudantes, em grande medida, desenvolver intuições, gerar conjecturas e testar hipóteses, elementos essenciais para a construção do conhecimento matemático.

Dessa forma, o GeoGebra constituiu-se de uma valiosa ferramenta tecnológica que pode ser utilizada na construção do conhecimento matemático, conforme procurou-se mostrar por das diferentes abordagens voltadas a introdução ao estudo das seções cônicas.

Referências

- Anton, Howard. Busby, Robert C. (2006). Álgebra linear contemporânea. Porto Alegre: Bookman.
- Bogdan, R. e Biklen, S. A (1994). Investigação Qualitativa em Educação. Porto: Porto Editora.
- Camargo, I. Boulos, P. (2005). *Geometria Analítica – um tratamento vetorial*. 3º ed. rev. e ampl. – São Paulo: Prentice Hall.
- Courant, R. & Robbins, H. (2005). O que é matemática? : uma abordagem elementar de métodos e conceitos. Tradução de Adalberto da Silva Brito. Rio de Janeiro: Ciência Moderna.

- Grande, A. L. (2013). *Um estudo epistemológico do Teorema Fundamental do Cálculo voltado ao seu ensino*. Tese de Doutorado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.
- Lagrange, J. L. (1795). *Oeuvres de Lagrange* / publ. par les soins de J.-A. Serret, sous les auspices du ministre de l'instruction publique. Paris: Gauthier-Villars.
- Monteiro, A. (2001) *Álgebra Linear e Geometria Analítica*. Lisboa: McGraw-Hill.
- Tall, D. O. (Ed.) (2002). *Advanced Mathematical Thinking*. Londres: Dordrecht, Kluwer Academic.

FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICA. UNA REVISIÓN DE LITERATURA CIENTÍFICA DE LOS ÚLTIMOS 10 AÑOS

Flor Isabel Carrillo Lara

f.carrillo@pucp.edu.pe

Instituto de Investigación sobre Enseñanza de la Matemáticas, IREM-PUCP, Perú

Resumen

Esta investigación tiene por objetivo realizar una revisión sistemática de la literatura con respecto a la formación de profesores de matemática específicamente de los niveles educativos de secundaria y superior. En este trabajo se consideran 18 artículos, en el que 7 de ellos corresponden a estudios de formación inicial de profesores y 11 de ellos a investigaciones con profesores en servicio y/o formación continua. De acuerdo a la revisión realizada notamos que los modelos usados para formación de profesores más representativos, con 4 concurrencias cada uno, son: Conocimiento Didáctico del Contenido, Conocimiento especializado de profesor de matemática y Espacio de trabajo matemático. Además, del total de artículos presentados 15 de ellos declaran que se trata de una metodología cualitativa, y 6 artículos emplean un Estudio de Caso para su investigación.

Palabras clave: Formación de profesores, educación matemática, conocimientos matemáticos,

Introducción

En el área de la Didáctica de la Matemática uno de los focos de estudio es la formación de profesores, debido a la importancia de su papel en el proceso de la enseñanza-aprendizaje de los estudiantes con respecto a los diferentes objetos matemáticos. Por ello, este informe tiene por objetivo realizar una revisión sistemática de la literatura con respecto a la formación de profesores de matemática específicamente de los niveles educativos de secundaria y superior. Para dicha revisión se consideran las bases de datos Dialnet, Springer y Scopus; en el que consideramos artículos de revistas indexadas con estudios empíricos, en los idiomas de español e inglés.

Con respecto al tema formación de profesores en este trabajo se consideran 18 artículos, en el que 7 de ellos corresponden a estudios de formación inicial de profesores y 11 de ellos a investigaciones con profesores en servicio y/o formación continua. De acuerdo a la revisión realizada notamos que los modelos más representativos, con cuatro (4) concurrencias cada uno, son: Conocimiento Didáctico del contenido, Conocimiento especializado de profesor de matemática y Espacio de trabajo matemático. Además, del total de artículos presentados quince (15) de ellos declaran que se trata de una metodología cualitativa, y seis (6) artículos emplean un estudio de caso para su investigación. Con respecto al tipo de estudio, corresponde a una revisión sistemática de la literatura científica. Nos basamos en la siguiente pregunta ¿Cuáles son

los marcos teóricos, modelos y enfoques realizados en la formación de profesores de matemáticas?

Criterios de inclusión-exclusión y descriptores

Para este trabajo se incluyen artículos publicados en bases de datos científicas indexadas, en idioma español e inglés, entre los años 2009 y 2019, en el que se identifica estudios empíricos de Formación de Profesores de Matemática (FPM). En cuanto al tema seleccionado, es un área de investigación científica y tecnológica de creciente interés cuyo fin es investigar los efectos de los conocimientos del profesor sobre la calidad de los aprendizajes de los estudiantes. En específico, la formación didáctica de los profesores de matemática, ya que el desarrollo de las competencias matemáticas de los estudiantes, depende en gran medida de la formación de sus profesores en esta ciencia (Giné de Lera y Deulofeu, 2014; Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017).

Por otro lado, los diferentes marcos teóricos y modelos que se emplean para la formación de profesores de matemáticas mencionan al Conocimiento Didáctico del Contenido (Speer, N., King, K. & Howell H., 2014; Cengiz, E., 2019; Tian A., Meyta D., 2019; y Fernández, J., Molfino, V., Ochoviet, C., 2016), la Resolución de problemas (Martha Bonilla, Jaime Romero, Deissy Narváez, Ángel Bohórquez, 2015; Constantinos, P., 2015; y De Lera, CG. y Piquet, JD., 2014), el modelo del Conocimiento especializado del profesor de matemática (Charalambos, Y.; 2015; Steele, M. & Cervello K., 2012; Flores-Medrano, E., Montes, M. Carrillo, J. Contreras, L., Muñoz-Catalán, M. y Mar, A. 2016; Diana Vasco Mora, Nuria Climent, Dinazar Escudero-Ávila, Miguel A. Montes, Miguel Ribeiro, 2016), el Espacio de Trabajo Matemático (Morales, H., 2018; Flores-Medrano, E., Montes, M. Carrillo, J. Contreras, L., Muñoz-Catalán, M. y Mar, A., 2016; Carolina Henríquez-Rivas* Elizabeth Montoya-Delgadillo, 2016; Diana Vasco Mora, Nuria Climent, Dinazar Escudero-Ávila, Miguel A. Montes, Miguel Ribeiro, 2016), entre otros

Con respecto a los criterios de inclusión-exclusión en este trabajo vamos a presentar la tabla 1, con cinco apartados, que tratan sobre la temática y su perspectiva, sobre características de la fuente, sobre el proceso de investigación y sobre ámbitos y temporalidad de las fuentes; con respecto a la formación de profesores de matemática.

Dicha búsqueda de información fue realizada por un revisor, considerando los criterios mencionados. Cabe mencionar que, con respecto a los idiomas incluidos para dicha revisión, se consideró francés, pero no se obtuvo resultados.

Tabla 1: Criterios de inclusión y exclusión

Criterios	Inclusión	Exclusión
1. Sobre la temática y su perspectiva:		
Especificidad del tema: Formación de profesores de matemática.	Se incluirán investigaciones del área de didáctica de la matemática, que tengan relación con la formación de profesores y el objeto de estudio. Se incluirán profesores de nivel secundaria y nivel superior.	Investigaciones relacionadas con profesores de matemática de nivel preescolar. Investigaciones centradas en las dificultades de estudiantes.
Perspectiva conceptual específica: Trabajo matemático idóneo-personal del profesor de matemática en servicio con respecto a la derivada de una función.	Se incluirán investigaciones relacionadas con el Espacio de trabajo matemático del profesor de matemática con respecto a las diferentes interpretaciones de la derivada de una función.	Investigaciones realizadas en el área de estadística y probabilidades, trigonometría. Investigaciones centradas en infraestructura para la enseñanza.
2. Sobre características de la fuente		
Tipo de fuente académica	Para las fuentes académicas se incluirán artículos en revistas de educación matemática. Además, actas de eventos del marco teórico Espacio de Trabajo Matemático.	Tesis de maestría, tesis de doctorado, capítulos de libros, libros completos, comunicaciones breves de experiencias, talleres y entrevistas.
Estatus de la fuente académica	Sobre los artículos, se incluirán aquellos que pertenecen a revistas indexadas del área.	Artículos de congresos académicos. Se excluirán artículos publicados en revistas no indexadas.
Extensión y formato de la fuente	Se incluirán revistas y conferencias especializadas en el Espacio de trabajo matemático.	Se excluirán resúmenes o textos incompletos. Se excluirán revistas y congresos que aborden otras temáticas.

3. Sobre el proceso de investigación

Tipo de investigación	Investigaciones empíricas y/o teóricas que abordan la derivada de una función desde diferentes enfoques. Se incluirán investigaciones empíricas y/o teóricas relacionadas con la formación de profesores.	Se excluirán las investigaciones con estudiantes de Educación Básica Regular.
Metodología utilizada	Con respecto a la metodología se priorizan estudios cualitativos.	No se presenta exclusión.
Procedencia	Investigaciones que presenten evidencias de sus análisis y resultados con respecto al objeto matemático de estudio y la formación de profesores.	No se presenta exclusión.

4. Sobre ámbitos y temporalidad de las fuentes

Ámbito de la educación	Nuestro tema se centra en el ámbito de la Educación Matemática, formación de profesores de matemática.	No se presenta exclusión.
Ámbito geográfico	Se incluyen investigaciones de ámbito nacional e internacional.	No existen criterios de exclusión.
Temporalidad de la fuente	Se incluirán investigaciones publicadas del 2009 al 2019.	Indagaciones con más de 10 años de antigüedad.

Proceso de recolección de artículos y resultados

Para el proceso de búsqueda, a partir de la pregunta de investigación se definieron los siguientes descriptores: *"profesores de matemática"*, *"educación matemática"*, *"formación de profesores"*. Por especificidad de la búsqueda de la literatura científica, se realizaron combinaciones de los términos establecidos: *"profesores de matemática" + derivada*, *"educación matemática" + formación de profesores*, *"educación matemática" + formación de profesores + derivada*. Las bases de datos empleadas para la búsqueda son: Dialnet, Springer y Scopus. Se inicia la búsqueda en la base de datos **"Dialnet"**, revista donde se encuentra el Boletín de la sociedad Puig Adam de profesores de matemática. Entonces consideramos la palabra clave *"derivada"* en

el que se considera investigaciones de los últimos 10 años. En la búsqueda del boletín se encontraron 7 investigaciones, continuando con la revisión identificamos que 3 de ellas se centran en las dificultades de los estudiantes, siendo este un criterio de exclusión para nuestra búsqueda y las otras 3 son tesis doctorales siendo este otro criterio de exclusión es por ello que solo consideramos a Bonilla, Romero, Narváez y Bohórquez (2015), codificado de la siguiente manera R1. Luego, en "**Springer**" se realizan las siguientes búsquedas: en español con la palabra "*profesores de matemática*" no se halla ningún resultado, en inglés con la palabra "*Mathematics teachers*" se halla Journal of Mathematics Teacher Education con 599 resultados en la disciplina de "La enseñanza y la formación del profesorado". Primero se seleccionaron 18 artículos ya que estaban relacionados con profesores de matemática, pero luego de revisar los documentos se seleccionan 7 trabajos, codificados de la siguiente manera R2, R3, R4, R5, R6, R7 y R8 (Ver tabla 3).

La siguiente búsqueda se realizó en "**Scopus**", con las palabras "teachers" and mathematics, se obtuvo 585 resultados de libre acceso y 2406 en otros. Luego, se selecciona una restricción: Sujeto al área de matemática, además se seleccionan los idiomas de inglés, español y francés; la ruta específica es limitado a KEY ("teachers" AND mathematics) AND (LIMIT-TO (SUBJAREA," MATH")) AND (LIMIT-TO (LANGUAGE," English") OR LIMIT-TO (LANGUAGE," Spanish") OR LIMIT-TO (LANGUAGE," French")). Después de una revisión de sus resúmenes y documentos, se consideran 10 artículos codificados de la siguiente manera R9, R10, R11, R12, R13, R14, R15, R16, R17 y R18 (Ver tabla 3).

De todo lo mencionado, en resumen, presentamos la tabla 2 donde se describe la base de dato empleada, los descriptores, el idioma, cantidad de investigaciones empleadas en este trabajo.

Tabla 2: Resultados de búsqueda FPM

Base de datos	Descriptores	Idioma / Cantidad de investigaciones	Revisión 1	Revisión 2
Dialnet	profesores de matemática + derivada	Español / 15 Inglés / 0	15	0
	educación matemática + formación de profesores + derivada	Español / 697	56	1
Springer	profesores de matemática	Español/0		
	Mathematics teachers	Inglés / 599	18	7
Scopus	"profesores" y matemática	Español/78	20	8
	"teachers" and mathematics	Inglés/53	10	2
Total				18

Ahora presentamos la tabla 3 con los códigos de los resultados de la revisión de literatura realizada para el presente trabajo.

Tabla 3: Artículos seleccionados codificados según autores y año

Código	Autor	Año
R1	Bonilla M., Romero J., Narváez D. y Bohórquez A.	2015
R2	Brent D., Jo Towers y Chapman O.	2019
R3	Kim Beswick, Merrilyn Goos	2018
R4	Hyung Sook Lee, Coomes J. & Yim J.	2017
R5	Charalambos, Y.	2015
R6	Constantinos, P.	2015
R7	Speer, N., King, K. & Howell H.	2014
R8	Steele, M. & Cervello K.	2012
R9	Cengiz, Erdik	2019
R10	Tian Abdul Aziz y Meyta Dwi Kurniasih	2019
R11	Morales, H.	2018
R12	Fernández, J., Molfino, V. y Ochoviet, C.	2016
R13	Arnal-Bailera, A. y Oller-Marcén, AM	2017
R14	De Lera, CG. y Piquet, JD.	2014
R15	Corica, A. y Otero, M.	2016
R16	Flores-Medrano, E., Montes, M. Carrillo, J. Contreras, L., Muñoz-Catalán, M. y Mar, A.	2016
R17	Henríquez-Rivas, C. y Montoya-Delgadillo, E.	2016
R18	Vasco Mora, D., Climent, N., Escudero-Ávila, D., Montes, M. y Ribeiro, M.	2016

Basados en la codificación realizada en la tabla 3, en la siguiente sección se presenta el análisis comparativo y crítico de las fuentes seleccionadas para este trabajo.

Análisis comparativo y crítico de fuentes seleccionadas

Para el desarrollo de esta sección consideramos las 18 fuentes seleccionadas, codificadas según la tabla 3. En el que se consideran específicamente 3 criterios, que mencionamos a continuación: Tipos de problemas / objetivos, Tipos de Marco conceptual – teórico y Tipos de diseños metodológicos.

Con respecto al primer criterio, Tipos de problemas / objetivos, podemos identificar que las fuentes seleccionadas se centran en dos grupos, a quien denominamos tipo A, aquellos estudios que tienen como sujetos de investigación a profesores de matemática en formación inicial; y,

por otro lado, el tipo B, en el que los sujetos de estudio son profesores de matemática en formación continua y/o en servicio (Ver tabla 4).

En Bonilla et al. (2015), su problemática es el proceso de construcción del significado de variación matemática. Con respecto a Charalambos (2015), su estudio pretende comprender cómo el conocimiento matemático de los profesores para la enseñanza y sus creencias pedagógicas contribuyen a su desempeño al proporcionar explicaciones y seleccionar las tareas a utilizar; Aziz & Kurniasih, (2019), intentan analizar la flexibilidad de los profesores de matemáticas; Morales, (2018), manifiesta su interés en observar el proceso de modificación del sistema de enseñanza de matemáticas en un estudiante (profesor en formación inicial); Corica y Otero (2016), tienen como propósito que los futuros profesores adopten gestos de un modelo pedagógico no tradicional, basado en la investigación y en la vinculación de la matemática con otras disciplinas; en el estudio de Vasco et al. (2016), abordan las posibles relaciones entre los resultados del análisis de una sesión en el aula con dos modelos teóricos diferentes: el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) y los Espacios de trabajo matemáticos (MWS).

En los artículos presentados podemos manifestar que sus problemáticas son diferentes, ninguna de las mencionadas tiene relación con respecto a su foco de investigación.

Con respecto a la investigación de Brent (2019), su objetivo es evaluar la "enseñanza reformada de tres maestros en su práctica; en Beswick y Goos (2018), su problemática es estudiar el conocimiento del profesor de matemáticas por medio de la pregunta ¿Qué sabemos y a dónde vamos?; Lee y Coomes (2017), Constantinos (2015), Speer, King & Howell (2014), y Steele & Cervello (2012) realizan estudios sobre los conocimientos matemáticos y didácticos de los profesores de matemática; Cengiz (2019), realiza una investigación de las opiniones de los profesores de matemática sobre plantear problemas; Fernández et al. (2016), trata de establecer vínculos entre la investigación y las prácticas docentes; Arnal-Bailera y Oller-Marcén (2017), la investigación se centrada en el análisis del conocimiento de los futuros maestros de matemáticas de secundaria; De Lera y Piquet (2014), relacionan el conocimiento y las creencias sobre la resolución de problemas; Medrano et al. (2016), en su estudio permiten comprender el conocimiento que el profesor pone en juego en la transición entre los distintos Espacios (idóneo, personal y de referencia) de Trabajo Matemático, así como las relaciones entre estos; y, Henríquez-Rivas y Montoya-Delgadillo (2016), estudia el trabajo personal del profesor en temáticas de geometría euclidiana que articulan los enfoques sintético y analítico.

A continuación, presentamos tres tablas en el que se sintetiza las similitudes y diferencias de las fuentes seleccionadas para este trabajo.

Tabla 4: Similitud -diferencias / tendencias – problemas – objetivos

Criterios	Fuentes clasificadas

Tipos de problemas / objetivos	Tipo A: Identificar conocimientos didáctico-matemáticos que deben tener los profesores de matemática en formación inicial (total 7) R1, R5, R10, R11, R14, R15, R18
	Tipo B: Identificar conocimientos didáctico matemáticos que deben tener los profesores en formación continua y/o en ejercicio (total 11) R3, R4, R6, R7, R8, R9, R12, R13, R14, R16, R17

Tabla 5: Similitud -diferencias / tendencias – Marco conceptual - teórico

Criterios	Fuentes clasificadas
Tipos de Marco conceptual - teórico	Tipo A: Conocimiento Didáctico del Contenido/ Análisis de contenido. (total 4) R7, R9, R10, R12
	Tipo B: Resolución de problemas. (total 3) R1, R6, R14
	Tipo C: Modelo Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática (MTSK). (total 4) R5, R8, R16, R18
	Tipo D: Teoría de situaciones. (total 1) R11
	Tipo E: Espacio de trabajo matemático. (total 4) R11, R16, R17, R18
	Tipo F: Technological Pedagogical Content Knowledge – TPACK. (total 1) R13
	Tipo G: Teoría Antropológica de lo Didáctico. (total 1) R15

Tabla 6: Similitud -diferencias / tendencias – Metodología

Criterios	Fuentes clasificadas
Tipos de diseños metodológicos	Tipo A: Metodología Cualitativa. (total 15) R1, R3, R4, R7, R8, R9, R10, R11, R12, R13, R14, R15, R16, R17, R18
	Tipo B: Estudio de caso. (total 6) R6, R7, R8, R11, R12, R14
	Tipo D: Estado del Arte. (total 2) R3, R5
	Tipo E: Estudio Exploratorio. (total 1) R15

Consideraciones finales

El estado del arte realizado en el presente estudio ayudó a delimitar los diferentes trabajos producidos que involucran la formación de profesores de matemática considerando del 2009 a 2019.

En la revista Dialnet se obtuvo R1, que corresponde a un estudio en Colombia en el que los sujetos de investigación fueron 16 profesores de formación inicial de nivel secundaria; además, podemos mencionar que el objeto matemático es la optimización utilizando la derivada y la programación lineal.

Con respecto a la revista Springer, se considera a R2, R3, R4, R5, R6, R7 y R8; siete (7) investigaciones en total. De los cuales, R2 corresponde a Canadá, R3 a Australia, R4, R7 y R8 se realizaron en Estados Unidos del Norte, R5 y R6 estudios en República de Chipre. Para R2, se considera a 3 profesores en servicio como sujetos de investigación. R3, no cuenta con sujetos de investigación ya que realiza una revisión bibliográfica relacionada al conocimiento del profesor de matemática. Para R4, se considera 54 profesores de secundaria como sujetos de investigación. R5 se centra en el conocimiento y creencias de los profesores, específicamente dominios cognitivo y afectivo; y como estos contribuyen conjuntamente a la calidad de la enseñanza.

Con respecto a los resultados en Scopus, R9 se realizó en Turquía, R10 en Indonesia, R11, R17 en Chile, R12 en el país de Uruguay, R13, R14, R16 y R18 en España, R15 en Argentina.

Agradecimiento

A la Dra. Jesús Victoria Flores, mi asesora de tesis y directora de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas, por el apoyo brindado para la elaboración de este artículo.

Referencias

- Abdul, T. & Dwi, A. (2019). External Representation Flexibility of Domain and Range of Function. *Journal on Mathematics Education* Volume 10, No. 1, January 2019, pp. 143-156. Recuperado en file:///C:/Users/Flor%20Carrillo/Downloads/External-representation-flexibility-of-domain-and-range-of-function2019Journal-on-Mathematics-Education.pdf
- Arnal-Bailera, A., Oller-Marcén A. (2017). Formación del Profesorado y Demostración Matemática. Estudio Exploratorio e Implicaciones. *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 31, n. 57, p. 135 - 157, abr. 2017. DOI: <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a07> Recuperado en file:///C:/Users/Flor%20Carrillo/Downloads/Formacin2017Bolema--Boletn-de-educacin-en-matemticas-Acceso-abierto.pdf
- Beswick, K. & Goos, M. (2018). Mathematics teacher educator knowledge: ¿What do we know and where to from here? *Journal of Mathematics Teacher Education* (2018) 21:417–427 <https://doi.org/10.1007/s10857-018-9416-4>. Recuperado en <https://link-springer-com.ezproxybib.pucp.edu.pe/content/pdf/10.1007%2Fs10857-018-9416-4.pdf>
- Bonilla, M., Jaime Romero, J., Narváez, D. y Bohórquez, A. (2015). Características del proceso de construcción del significado del concepto de variación matemática en estudiantes para

- profesor de matemáticas. AIEM - Avances de Investigación en Educación Matemática. - 2015, N° 7, 73 - 93 Recuperado en file:///C:/Users/Flor%20Carrillo/Downloads/Dialnet- CaracteristicasDelProcesoDeConstruccionDelSignific-5672146.pdf
- Cengiz, E. (2019). Investigation of Mathematics Teachers' Opinions About Problem Posing. Journal on Mathematics Education Volume 10, No. 1, January 2019, pp. 1-20. Recuperado en file:///C:/Users/Flor%20Carrillo/Downloads/Investigation-of-mathematics-teachers-opinions-about-problem-posing2019Journal-on-Mathematics-Education.pdf
- Constantinos, P. (2014). Analysing the relationship between the problem-solving-related beliefs, competence and teaching of three Cypriot primary teachers. J Math Teacher Educ (2015) 18:299–325 DOI 10.1007/s10857-014-9287-2. Recuperado de <https://link-springer-com.ezproxybib.pucp.edu.pe/content/pdf/10.1007%2Fs10857-014-9287-2.pdf>
- Corica, A. y Otero, M. (2016). Diseño e Implementación de un Curso para la Formación de Profesores en Matemática: una Propuesta desde la TAD. Bolema, Rio Claro (SP), v. 30, n. 55, p. 763 - 785, ago. 2016. DOI: <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a22>. Recuperado en file:///C:/Users/Flor%20Carrillo/Downloads/Design-and-implementation-of-a-course-for-the-training-of-mathematics-teachers-A-proposal-since-ATDDiseo-e-Implementacin-de-un-Curso-para-la-Formacin-de-Profesores-en-Matemtica-una-Propuesta-desde-la-TAD201.pdf
- Charalambous, CY. (2015). Working at the intersection of teacher knowledge, teacher beliefs, and teaching practice: a multiple-case study. Revista de formación docente de matemáticas. Octubre 2015, Volumen 18, Número 5, pp 427-445. Recuperado en <https://link-springer-com.ezproxybib.pucp.edu.pe/content/pdf/10.1007%2Fs10857-015-9318-7.pdf>
- Davis, B., Towers, J., Chapman, O., Drefs, M. & Friesen, S. (2019). Exploring the relationship between mathematics teachers' implicit associations and their enacted practices. J Math Teacher Educ (2012) 15:159–180 DOI 10.1007/s10857-012-9204-5. Recuperado en <https://link-springer-com.ezproxybib.pucp.edu.pe/content/pdf/10.1007%2Fs10857-019-09430-7.pdf>
- Díaz-Bazo, C. (2017). La investigación-acción en la educación básica en Iberoamérica. Una revisión de la literatura. Magis. Revista Internacional De Investigación En Educación, 10 (20), 159-182. doi: <http://dx.doi.org/10.11144/Javeriana.m10-20.iaeb>
- Fernández, J., Molino, V., y Ochoviet, C. (2016). Rol Docente del Investigador en Matemática Educativa: un Ejemplo en un Curso de Posgrado para Profesores del Nivel Superior. Bolema, Rio Claro (SP), v. 30, n. 55, p. 808 - 829, ago. 2016. DOI: <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a24> Recuperado en file:///C:/Users/Flor%20Carrillo/Downloads/Teaching-role-of-the-researcher-in-educational-mathematics-An-example-in-a-postgraduate-course-for-teachers-of-higher-levelRol-Docente-del-Investigador-en-Matemtica-Educativa-un-Ejemplo-en-un-Curso-de-Posgr.pdf
- Giné de Lera, C., Deulofeu J. (2014). Conocimientos y Creencias entorno a la Resolución de

- Problemas de Profesores y Estudiantes de Profesor de Matemáticas. *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 28, n. 48, p. 191-208, abr. 2014. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a10>. Recuperado en file:///C:/Users/Flor%20Carrillo/Downloads/profesores-de-matemticas2014Bolema--Boletn-de-educacin-en-matemticas-Acceso-abierto.pdf
- Godino, J., Giacomone, B., Batanero, C., y Font, V. (2017). Enfoque Ontosemiótico de los Conocimientos y Competencias del Profesor de Matemáticas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 31(57), 90-113. Recuperado de <http://www.scielo.br/pdf/bolema/v31n57/0103-636X-bolema-31-57-0090.pdf>
- Henríquez-Rivas, C., Montoya-Delgadillo, E. (2016). El Trabajo Matemático de Profesores en el Tránsito de la Geometría Sintética a la Analítica en el Liceo. *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 30, n. 54, p. 45-66, abr. 2016. DOI: <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a22>. Recuperado en file:///C:/Users/Flor%20Carrillo/Downloads/Design-and-implementation-of-a-course-for-the-training-of-mathematics-teachers-A-proposal-since-ATDDiseo-e-Implementacin-de-un-Curso-para-la-Formacin-de-Profesores-en-Matemtica-una-Propuesta-desde-la-TAD201.pdf
- Lupiáñez, J. (2015). Diseño de pruebas para la evaluación diagnóstica. Una experiencia con profesores. Tesis doctoral. Universidad de Granada. España. Recuperado en <http://digibug.ugr.es/bitstream/handle/10481/35214/24465720.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Morales, H. (2018). Influencia de un Proceso de Formación de Profesores en el Sistema de Enseñanza del Concepto de Área en Estudiantes de Pedagogía en Matemáticas, un Estudio de Caso. *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 32, n. 62, p. 1050-1067, dez. 2018. DOI: <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a15>. Recuperado en file:///C:/Users/Flor%20Carrillo/Downloads/Influencia-de-un-Proceso-de-Formacin-de-Profesores-en-el-Sistema-de-Enseanza-del-Concepto-de-rea-en-Estudiantes-de-Pedagoga-en-Matemticas-un-Estudio-de-Caso2018Bolema--Mathematics-Education-Bulletin-Open-Ac.pdf
- Rojas, N. (2014). Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas: un estudio de casos. Tesis doctoral. Universidad de Granada. España. Recuperado de <http://digibug.ugr.es/bitstream/handle/10481/35199/24462111.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Sook, H., Coomes, J. & Yim, J. (2017). Teachers' conceptions of prior knowledge and the potential of a task in teaching practice. *J Math Teacher Educ* (2019) 22:129–151 DOI 10.1007/s10857-017-9378-y. recuperado en <https://link-springer-com.ezproxybib.pucp.edu.pe/content/pdf/10.1007%2Fs10857-017-9378-y.pdf>
- Speer, N., King, K. & Howell, H. (2014). Definitions of mathematical knowledge for teaching: using these constructs in research on secondary and college mathematics teachers. *J Math Teacher Educ* (2015) 18:105–122 DOI 10.1007/s10857-014-9277-4. Recuperado de <https://link-springer-com.ezproxybib.pucp.edu.pe/content/pdf/10.1007%2Fs10857-014-9277-4.pdf>

- Steele, M. & Cervello, K (2012). Relationships between mathematical knowledge for teaching and teaching practice: the case of proof. *J Math Teacher Educ* (2012) 15:159–180 DOI 10.1007/s10857-012-9204-5. Recuperado de <https://link-springer-com.ezproxybib.pucp.edu.pe/content/pdf/10.1007%2Fs10857-012-9204-5.pdf>
- Olarte-Mejía y Ríos-Osorio (2015). Enfoques y estrategias de responsabilidad social implementadas en Instituciones de Educación Superior. Una revisión sistemática de la literatura científica de los últimos 10 años. *Revista de la Educación Superior*, 4(175),19-40. Recuperado de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0185-27602015000300002&lng=es&tlng=es.
- Taylor, S. y Bogdan, R. (2000). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación*. Barcelona: Paidós. Recuperado de: <https://asodea.files.wordpress.com/2009/09/taylor-s-j-bogdan-r-metodologia-cualitativa.pdf>
- Vasco, D., Climent, N., Escudero-Ávila, D., Miguel A., Montes, M. y Ribeiro, M. (2016). Conocimiento Especializado de un Profesor de Álgebra Lineal y Espacios de Trabajo Matemático. *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 30, n. 54, p. 222- 239, abr. 2016. DOI: <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a11>. Recuperado en file:///C:/Users/Flor%20Carrillo/Downloads/Conocimiento--especializado2016Bolema--Boletn-de-educacin-en-matemticas-Acceso-abierto.pdf

ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO PERSONAL: INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL

Liseth Chacón Cama

Jesús Victoria Flores Salazar

LisethChacon.kf@gmail.com, jvflores@pucp.pe

Instituto de Investigación sobre Enseñanza de la Matemáticas, IREM-PUCP, Perú

Resumen

En esta investigación se analizará el trabajo matemático personal de los estudiantes cuando resuelven tareas sobre la interpretación geométrica de la derivada de una función. Se trabajó con estudiantes de primer año de la carrera de Ingeniería de la Universidad Nacional de Moquegua. Se fundamentó en las dificultades que presentan los alumnos al estudiar la derivada y el énfasis en los desarrollos formales y algorítmicas dejando de lado las ideas geométricas. Se desarrolla el trabajo en el contexto de la Ingeniería Didáctica y con base teórica en la Teoría del Espacio de Trabajo Matemático, se elaboró y aplicó una tarea diagnóstica y una tarea uno para identificar los paradigmas del análisis y estudiar la activación de las génesis en el plano semiótico-instrumental en el trabajo matemático de los estudiantes.

Palabras clave: *Derivada, interpretación geométrica, espacio de trabajo matemático personal, paradigmas del análisis.*

Introducción

En las últimas décadas se desarrolló un número considerable de investigaciones acerca de la enseñanza y el aprendizaje de temas relacionados con la derivada, entre ellas las investigaciones de Rodríguez, Pochulu y Ceccarini. (2011), Vega, Carrillo y Soto (2014), Vrancken y Engler (2014), Gómez (2017) que afirman que observaron dificultad de los estudiantes al estudiar la derivada de una función real de variable real en su primer año de universidad. Estos hallazgos en sus estudios permitieron a los autores inferir que uno de los motivos es el exceso de definiciones formales en su enseñanza y uso de algoritmos en la resolución de problemas.

Estas investigaciones apotran al proceso de enseñanza y aprendizaje de la noción derivada de una función real de variable real en las universidades, en bienestar de los estudiantes, ya que los estudiantes tienen la posibilidad de observar en estas investigaciones algunas dificultades que presentan los alumnos y sobre todo propuestas para superarlas.

Así también Artigue (1998) menciona que los estudiantes encuentran notorias dificultades al inicio de la etapa universitaria en el desarrollo de los cursos de análisis, relacionadas con la complejidad matemática de los objetos matemáticos básicos de este campo conceptual.

Igualmente, Tall (2011), infiere que estas dificultades se presentan particularmente de la idea que tenemos de tangente en geometría, y su transición a la definición en cálculo, en ese sentido refiere que la concepción de la tangente a un círculo en geometría no es necesariamente la definición en cálculo cuando nos referimos de tangente a una curva. Los estudiantes que inician un curso de cálculo tienen saberes previos de la recta tangente y para hablar de la derivada definida como la pendiente de la tangente a la curva en un punto; todo ello genera dificultades, pues no siempre ambas definiciones concuerdan lo que genera un obstáculo en el desarrollo de su aprendizaje. En ese sentido Vrancken y Engler (2014) y Montoya y Vivier (2015) concuerdan que para construir conceptos y procesos matemáticos es necesario analizar las ejecuciones de los alumnos.

En este sentido nos interesa estudiar ¿Cuál es el trabajo matemático personal que realizan estudiantes de ingeniería al resolver tareas que promueven la interpretación geométrica de la derivada de una función real de variable real? Para poder dar respuesta a esta pregunta desarrollamos la presente investigación de corte cualitativa tiene que por objetivo identificar en los estudiantes de la activación de las génesis semiótica e instrumental, en el plano semiótico instrumental al desarrollar tareas sobre la interpretación geométrica de la derivada y analizar qué paradigmas del análisis utilizan.

Todo este análisis y desarrolla en el marco de la teoría del Espacio de Trabajo Matemático (ETM) que fue desarrollado por Houdement y Kuzniak (2006), en el contexto de la Ingeniería Didáctica de Artigue Para alcanzar este propósito se diseñó y se aplicó dos tareas a los estudiantes para luego analizar sus producciones en base a la teoría

Material y métodos

La presente investigación descriptiva del tipo cualitativa según Hernández, Fernández y Baptista (2010) ya que le interesa analizar que conocimientos movilizan los estudiantes en tareas que favorecen la interpretación geométrica de la derivada de una función real de variable real, en este sentido utilizamos algunos aspectos de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995) y se desarrolló las cuatro fases que considera la autora:

FASE I: Análisis preliminares

Realizamos un análisis histórico el objeto matemático la derivada, un análisis de las concepciones de los estudiantes y un análisis didáctico de los textos de Espinoza (2004) y Mitacc (2009).

FASE II: Análisis a priori

En nuestra investigación la docente actúa de investigadora y observadora al mismo tiempo. En esta fase diseñamos dos tareas que favorecen la interpretación geométrica de la derivada de una función de variable real, y utilizamos como medio el software GeoGebra, estas tareas se fundamentaron en ETM de Referencia en el dominio del Análisis Matemático, para ello consideramos variables micro didácticas. A continuación, la descripción de las tareas diseñadas.

Nombre	Finalidad	Tiempo	Fecha
Tarea <i>Exploratoria</i>	Reunir información sobre los conocimientos de los estudiantes participantes en relación a: recta y sus representaciones, recta secante y tangente, pendiente de una curva, existencia del límite de una función.	45 minutos	Del 07-13 de Octubre
Tarea: <i>Interpretación Geométrica</i>	Conjeturar lo que ocurre con la pendiente de una recta secante a medida que se va reducido el intervalo dado. Diremos que una función es derivable en un punto si gráficamente es localmente indistinguible de una recta. Es decir, si al elegir un punto e ir ampliando sucesivamente, llegase un momento que no pudiéramos distinguirlas.	150 minutos	Del 28 al 31 de octubre

Estas tareas fueron propuestas al estudiante en fechas mostradas y desarrollamos análisis a priori de las posibles soluciones de parte de los estudiantes, las estrategias que podrían utilizar para su resolución, así como prever los errores que puedan tener durante su desarrollo.

FASE III: Experimentación

Realizamos la aplicación de las tareas diseñadas en la fase anterior a 15 estudiantes que usan el primer ciclo de Ingeniería de Sistemas de la Universidad Nacional de Moquegua, en un laboratorio provisto de computadoras para poder hacer uso del software.

Todo este proceso fue filmado, fotografiado y la información fue recogida con fichas de observación y fichas de registro.

Analizamos las acciones de los estudiantes al enfrentarse a la secuencia de tareas, observamos de forma exhaustiva el proceso, con una ficha de observación se tomará nota de todo lo que acontece, es en este momento donde se utilizarán los instrumentos para recoger la información.

FASE IV: análisis a posteriori y validación

En esta fase realizaremos el análisis del trabajo matemático realizado por los estudiantes al resolver las tareas dadas, esto bajo el contexto del ETM y procederemos a la confrontación del análisis a priori y análisis a posteriori para realizar la validación interna de acuerdo con la ingeniería didáctica.

Algunos resultados

Tarea exploratoria: Se diseñó esta tarea con la finalidad de conocer a los estudiantes y diseñar una "Tarea 1" pertinente, lo más ajustada a la realidad del estudiante. Consta de seis 6 preguntas; y está organizada de la siguiente manera: La primera parte está compuesta de la pregunta N°1, N°2, N°3 y N°4, busca recoger las concepciones de los estudiantes con respecto al objeto la recta, para ello se les pidió que describan con sus propios saberes qué entendían por recta secante y tangente. De los quince estudiantes trece tienen una idea de la definición de la recta tangente y de la recta secante, nueve de ellos utilizaron una manera gráfica para representar las rectas con ayuda de una circunferencia. Sólo uno de los estudiantes, utilizó una curva en general para representar gráficamente sus rectas. Respecto a la pendiente la mayoría de los estudiantes la relacionó con el ángulo de inclinación de la recta, ayudándose de una representación gráfica. Solo un estudiante realizó una representación gráfica en el plano, la define como la tangente del ángulo respecto a las abscisas, y escribe la fórmula de la pendiente.

En la pregunta N°3 y N°4 el estudiante debe movilizar saberes respecto a la pendiente de una recta, ya se les presentó un gráfico para que ellos describan y se observó que 14 estudiantes utilizaron la fórmula para calcular el valor de la pendiente de manera correcta, así también identifican correctamente si la pendiente es positiva negativa o no existe, pero no fundamentan correctamente.

La segunda parte que conforman la preguntas N5 y N°6 diseñada con la intención de identificar las concepciones que tienen los estudiantes respecto al límite de una función, para ello se les pidió que calcularan un par de límites y luego que identificaran su existencia en una figura. En los resultados de los estudiantes se pudo observar que el 100% de los estudiantes utilizan correctamente los algoritmos para calcular el valor correspondiente del límite de una función; sin embargo, en la pregunta 6 se observa que sólo dos utilizan la definición de continuidad para fundamentar la existencia el mismo.

Tarea 1: Trabajemos con la Recta y analizamos su derivabilidad

El propósito de la Tarea 1 es analizar los paradigmas del dominio del análisis en el que los estudiantes se encuentran al resolver la tarea propuesta, así también identificar las génesis que se activan en el plano Semiótico Instrumental.

Agradecimientos

- A la beca Docente Universitario 2017-PRONABEC, por el apoyo brindado en el desarrollo de la investigación.
- A la Dirección de Gestión de la Investigación-DGI de la Pontificia Universidad Católica del Perú-PUCP, por el apoyo brindado en el marco del proyecto ID-694/2019, PUCP.

Referencias

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿Qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *RELIME, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 1, 40-55. Recuperado de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33510104>

- Bustos, L. & Vásquez, J. (2016). *Uso del software CarMetal para potenciar el aprendizaje de la noción de derivada al resolver problemas de optimización*. (Tesis de maestría). Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia. Recuperado de <http://repository.udistrital.edu.co/handle/11349/2686>
- Gaona, Jorge (2018). *Elaboración de un Sistema de Evaluación en Línea como Proceso de Formación de Profesores de Matemáticas*. (Tesis doctoral). Université Sorbonne Paris Cité
- Gómez, M (2017). Una propuesta para la enseñanza de la derivada basada en el aprendizaje autónomo. *Revista Ingeniería, Matemáticas y Ciencias de la Información*, 4(8), 19-27. Recuperado de <http://dx.doi.org/10.21017/rimci.2017.v4.n8.a28>
- Gómez-Chacón, M., Kuzniak, A., & Vivier, L. (2016). El rol del profesor desde la perspectiva de los espacios de trabajo matemático. *BOLEMA Boletín de Educación Matemática*, 30(54), 1-22. Recuperado de <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a01>.
- Hernández, R., Fernández, C. & Baptista, P. (2010) *Metodología de la Investigación*. Ed. McGraw-Hill Interamericana. 5ta ed., p. 9.
- Kuzniak, A., & Richard, P. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. RELIME, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática* (4-1), 5-39. Recuperado de <https://doi.org/10.12802/relime.13.1741a>
- Menares, R (2016). *Estudio del Espacio de Trabajo del Análisis de Profesores de Matemáticas en Chile: El Caso de las Funciones Continuas* (Tesis doctoral). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
- Montoya, E., & Vivier, L. (2015). ETM de la noción de tangente en un ámbito gráfico Cambios de dominios y de puntos de vista. En T. Gutiérrez (Presidencia). XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática CIAEM 2015. Conferencia llevada a cabo en Chiapas, México. Recuperado de http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/753/325
- Ruiz, K., Córdova, Y., & Rendón, C., La comprensión del concepto de derivada mediante el uso de GeoGebra como propuesta didáctica. En: Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación (12-14, noviembre, 2014: Buenos Aires, Argentina). Recuperado de <https://www.oei.es/historico/congreso2014/memoriactei/1190.pdf>
- Rodríguez, M., Pochulu, M., & Ceccarini, A. (2011). Criterios para organizar la enseñanza de Matemática Superior que favorecen la comprensión. Un ejemplo sobre aproximaciones polinómicas de funciones. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, 13(3), 461-487. Recuperado de <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/6970>
- Vega, M., Carrillo, J., & Soto, J. (2014). Análisis según el modelo cognitivo APOS del aprendizaje construido del concepto de la derivada. *BOLEMA Boletín de Educación Matemática*, 28(48), 403-429. Recuperado de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291231123021>

Vrancken, S., y Engler, A., Una introducción a la derivada desde la variación y el cambio: resultados de una investigación con estudiantes de primer año de la universidad, BOLEMA, Boletín de Educación Matemática, 28(48), 449-468. Recuperado de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291231123021>

OBJETO VIRTUAL DE APRENDIZAJE: UNA ESTRATEGIA PARA DESARROLLAR PENSAMIENTO ALGEBRAICO

Juddy Amparo Valderrama Moreno*

Solange Roa Fuentes **

juddyamparo2@gmail.com, roafuentes@gmail.com

Universidad Metropolitana de Educación, Ciencia y Tecnología "UMECIT", Panamá*

Universidad Industrial de Santander UIS, Colombia**

Resumen

En el ámbito internacional y nacional, desde la Educación Matemática se buscan proyectos que propendan en el desarrollo del pensamiento matemático desde un enfoque didáctico. Particularmente en esta investigación se busca el desarrollo del Pensamiento Algebraico (PA), en una propuesta innovadora de un Objeto Virtual de Aprendizaje (OVA), sustentado en la Teoría de las Situaciones Didácticas, para tal fin se realiza el diseño de talleres con la herramienta del software dinámico llamado GeoGebra, en cada actividad se pueda experimentar, visualizar y razonar en un contexto matemático mediante la interacción con el OVA, donde a menor intervención directa del profesor el estudiante de secundaria del grado octavo pueda avanzar en los niveles de comprensión de objetos matemáticos del PA. Metodológicamente se trabaja un enfoque mixto, bajo un abordaje empírico inductivo, para determinar patrones y validar los elementos que componen el OVA.

Palabras clave: *Palabras clave: Pensamiento Algebraico, OVA, Teoría de las Situaciones Didácticas.*

Introducción

El propósito de la enseñanza de la matemática ha sido que los estudiantes las comprendan y sepan utilizar en contextos cotidianos y especializados, para ello se requieren determinar abordajes que no solo le sean llamativos a los estudiantes, sino que logre desarrollar competencias matemáticas. Por otro lado, el uso de tecnologías y sus aparatos está inmerso en la cotidianidad de los nativos digitales (estudiantes actuales). Ellos nacieron en la época del video juego, la inmediatez, no hablan de entrar a internet, porque ellos viven en el internet. Se hace necesario hacer un abordaje donde el uso de la tecnología sea un medio para enseñar la matemática no solo como elemento llamativo sino le permita desarrollar y alcanzar la rigurosidad que se requiere. En consecuencia, se aborda como socio cognitivo el software de GeoGebra, al parafrasear a (Moreno, 2014), los artefactos tecnológicos permiten a profesores y estudiantes interpretar de mejor forma las propiedades y conceptos matemáticos en la medida que se utilizan y se apropian sus bondades, es así que al hacer un uso didáctico de GeoGebra

en el diseño de actividades no solo le va a permitir experimentar y visualizar procesos matemáticos, sino ahondar en razonamientos que conlleven a la institucionalización del saber, mediante validaciones de acciones y retroacciones a la luz de la metodología propia de la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD).

De las TIC a las TAC en el Educación Matemática.

En el ámbito internacional como el nacional se unen esfuerzos para que el uso de la tecnología en la didáctica sea paulatino y consistente. La tecnología es un componente esencial del entorno; los alumnos trabajan, con confianza, en tareas matemáticas complejas cuidadosamente elegidas por el profesorado (Thales, 2003, p. 3). Por otro lado, en los dos ámbitos el propósito es contribuir a la enseñanza de la matemática en un contexto de resolución de problemas y se expone elementos puntuales de acuerdo a las tendencias y gustos de los estudiantes; de tal forma que el aprendizaje sea eficiente, eficaz y alcance los niveles de desarrollo del pensamiento matemático y se pueda vivenciar al desenvolverse con propiedad en el mundo globalizado. Un ejemplo de ello, es lo planteado en el año 2000 en los Principios y Estándares para la Educación Matemática publicados por la National Council of Teacher of Mathematics (NCTM, por su sigla en inglés) y traducidos por la Andaluza de Educación Matemática (Thales, 2003). Allí se plantea la igualdad, el currículo, la enseñanza, el aprendizaje, la evaluación y la tecnología; como los principios de la Educación Matemática y los cuales se ha retomado como línea a seguir en la política pública a nivel nacional. En el año 1998 el Ministerio de Educación Nacional (MEN) planteo la triada para enseñar matemática: procesos, pensamientos y contexto, enfatizando abordar su enseñanza por procesos, donde los contenidos no sean más que un pretexto para enseñarla, en respuesta se enseñe una matemática contextualizada en sí misma y en otras ciencias (MEN, 1998).

En la actualidad circulamos en la era digital y con ello los gustos y necesidades de estar a la vanguardia de un mundo globalizado. En Colombia se promueve el uso de las tecnologías en la educación desde diferentes ministerios: Educación Nacional (MEN), de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (MinTIC) y de Ciencia Tecnología e Innovación, para generar currículos donde se promueva el uso de la tecnología en el aula de clase y así cambiar los procesos de aprendizaje; para alfabetizar comunidades tanto de profesores y comunidad en general, en el uso de tecnología para mejorar procesos de uso y utilidad de la información. Finalmente, en el presente año se dicta los lineamientos de la política pública para la consolidación de la sociedad del conocimiento para impulsar el desarrollo científico, tecnológico y la innovación. Según la (OCDE, 2018) en Colombia en las dos últimas décadas se ha estructurado un camino para sentar las bases de una política digital.

Pero, cuando se refiere al uso de la tecnología, no se trata solo del equipamiento del manejo y uso de innovación por ser tecnológico, se trata de hacer un uso pedagógico donde lo didáctico, lo disciplinar y lo tecnológico se unan para generar acciones pensadas, ejecutadas y reflexionadas que permitan mejorar proceso de enseñanza y optimicen el uso de la tecnología para generar mayor impacto de aprendizaje de los estudiantes. En virtud a lo anterior, no solo se plantea el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC), sino se requiere hacer el tránsito de las TIC a las tecnologías del Aprendizaje y el Conocimiento (TAC). Son las TAC quienes hacen posible aprender más y de mejor manera (Lozano, 2011), hacer referencia a

las TAC significa que no solo es acceder al uso de un computador o software por ser vanguardista e innovadores, sino se trata de hacer uso del software en computador, tableta o dispositivo móvil aprovechando sus bondades para generar procesos de razonamiento donde se generen aprendizaje. Es tener en cuenta los gustos y contexto tecnológico de los estudiantes. Según (Prensky, 2010) son nativos digitales, los estudiantes actuales repelen los textos y les agrada los gráficos, no aprovechan la presencialidad para enriquecer sus procesos de comunicación, a ellos les gusta: trabajar en red y por la red, el rendimiento en la inmediatez, los trabajos al azar, los ambientes tecnológicos, repelen las actividades monótonas donde solo se evidencie el contenido, en general son nacidos en un contexto tecnológico y sus gustos son la interacción con la tecnología.

Al retomar lo planteado por la política pública internacional y nacional, los gustos de los estudiantes y las tendencias del mundo globalizado, en este trabajo se busca plantear una propuesta innovadora donde se valide un OVA, el cual fomenta el desarrollo del PA, donde a través del diseño de actividades con GeoGebra como socio cognitivo se aproveche las bondades ofrecidas por la tecnología y se rompa las barreras de tiempo y espacio y el estudiante pueda reforzar en un ambiente digital a la luz de la TSD. En efecto, el OVA sustentado en la TSD, puede potenciar la construcción de los procesos matemáticos, puesto que se enfatiza en la comprensión de los mismos, antes que la mecanización de tareas tediosas de uso de tecnología. Se propone pues una educación matemática que propicie aprendizajes de mayor alcance y más duraderos que los tradicionales, que no sólo haga énfasis en el aprendizaje de conceptos y procedimientos sino en procesos de pensamiento ampliamente aplicables y útiles para aprender cómo aprender (MEN, 1998).

El diseño de actividades con el uso de las TAC

El uso del software GeoGebra como socio cognitivo permite fortalecer cada vez más el discurso matemático escolar e ir avanzando en la aleación de las disciplinas, ya que, que se evidencia una interdisciplinariedad entre el uso de las tecnologías, la matemática y el desarrollo de competencias ciudadanas. En la enseñanza del cálculo diferencial a nivel superior un ejemplo clásico de optimización es el determinar el volumen máximo que puede tener una caja de cartón construida a partir de cortar cuadrados a las esquinas de un rectángulo de cartulina. Al contextualizar dicho problema a la localidad y a nivel de grado octavo de desarrollo de pensamiento algebraico se plante lo siguiente:

Situación problema: En nuestro municipio Floridablanca “**Municipio dulce de Colombia**” se produce una variedad de delicias para degustar no solo en nuestra ciudad, sino en diferentes países. Para la conservación de estos dulces se requiere hacer una caja sin tapa con un material especial de cartón. Estas cajas se realizan de diferentes tamaños a partir de cortar cuadrados de igual medida (**lado d**) a sus esquinas a un cartón de forma rectangular, como lo muestra la figura.

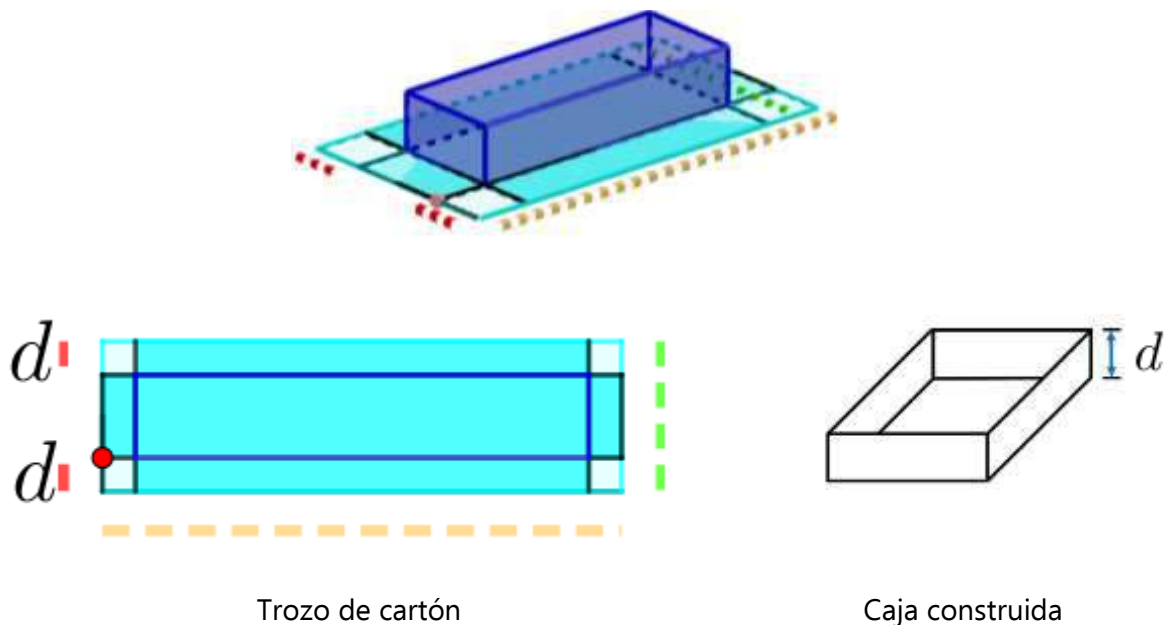


Figura 1. Caja de dulces.

En fabrica “**La familia COLVIA**” desean determinar el volumen de la caja, la cantidad de cartón para su diseño y finalmente la cantidad de cinta para decorar dicha caja realizada. Ayuda a identificar y concluir como de forma generalizada se puede predecir la capacidad de la caja y la cantidad de cartón requerida para su fabricación y la cantidad de cinta para decorar de acuerdo al tamaño que se necesite.

Para abordar el problema se requiere la interacción con unos talleres prediseñados en GeoGebra donde se dan las siguientes orientaciones:

- Abre GeoGebra en la simulación “**la Caja de la familia COLVIA**”. De una sola vez Clic en el botón INICIO.
- Después de escribir la respuesta, oprima Enter, cada vez que finalice.
- De clic en uno de los textos: Bien o inténtalo de nuevo según su respuesta. Si aparece el letrero inténtalo de nuevo, significa que cometió un error, por lo tanto, lo debe volver a hacer.
- Si aparece Bien, de clic sobre Bien y continúe.

Al realizar lo anterior el estudiante inicia la interacción con la actividad prediseñada. La actividad solicita determinar el largo y el ancho, aunque esta respuesta aparentemente sencilla, algunos estudiantes confunden, y al registrar los valores de forma invertida (el largo más corto que el ancho), el medio (GeoGebra) le informa que su acción es incorrecta, por lo tanto, el estudiante debe realizar la retroacción, y para ello le da clic en “Inténtalo de Nuevo”. El estudiante, puede intentarlo cuantas veces requiera hasta que su respuesta sea correcta.

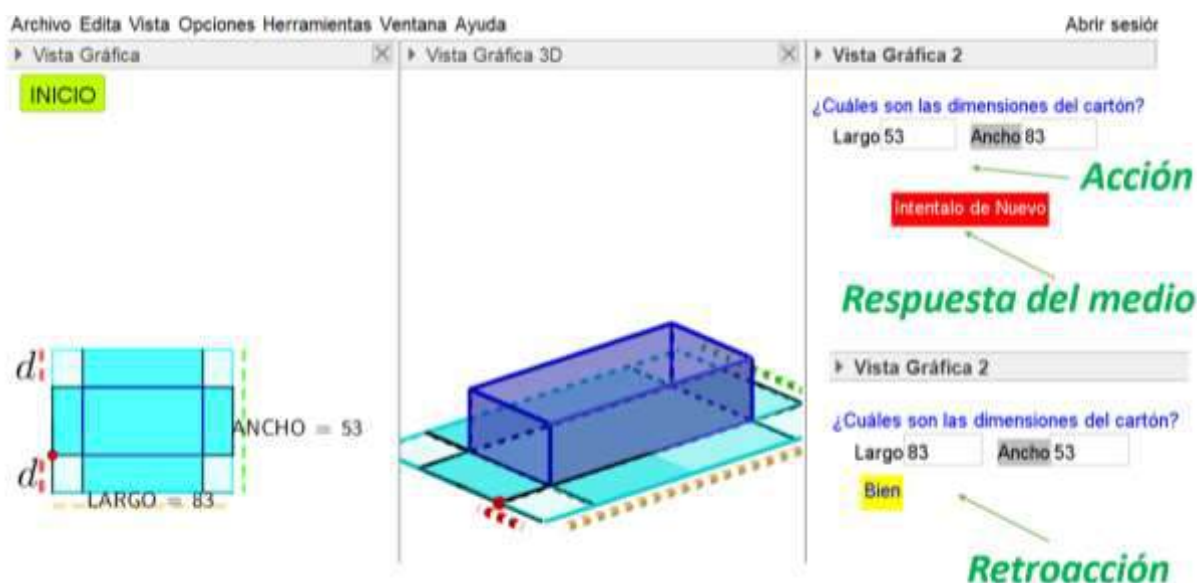


Figura 2. Interacción con el medio

Al obtener la validación, la actividad genera una nueva solicitud “Mueva el punto rojo”, en este momento el estudiante observa que al mover el punto rojo se genera diferentes de diseño de cajas, sin cambiar el largo, ni el ancho del cartón.

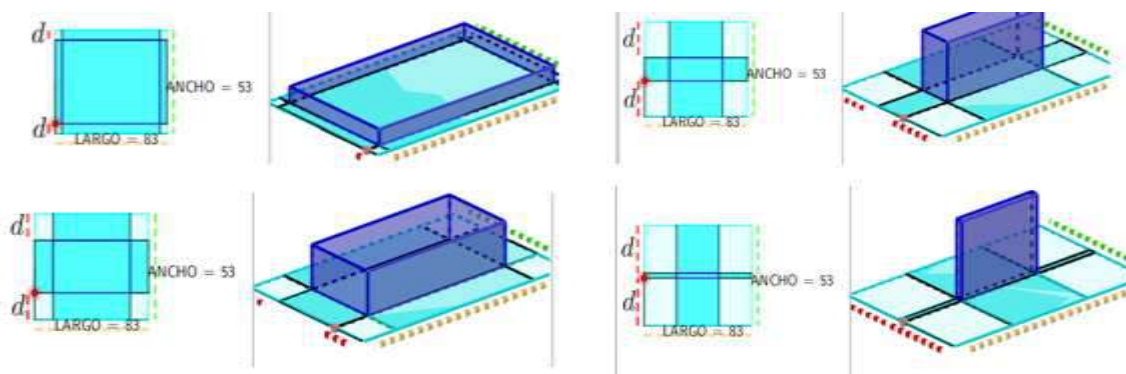


Figura 3. Variación del diseño de la caja de dulces

Seguidamente surge el interrogante ¿Qué representa d ? y se despliega tres opciones: ¿el largo del cartón? ¿El ancho del cartón? ¿La altura de la caja?, el estudiante debe seleccionar una sola opción. En caso que la opción seleccionada sea incorrecta, lo debe intentar de nuevo y al solicitar la retroacción las opciones cambian al azar la posición; esto hace que el estudiante realice nuevamente el razonamiento y no se genere una actividad de descarte. Posteriormente se requiere determinar la expresión algebraica que representa: la altura de la caja, el largo de la caja y el ancho de la caja, el estudiante las escribe y valida la respuesta. En esta ocasión se deben dar las tres respuestas correctas de lo contrario no se obtiene la validación. Con acciones validadas se determina los valores que puede tomar d , como se determina el volumen de la caja, la expresión algebraica que representa el volumen de la caja. En un siguiente paso a partir del valor numérico de $d = 10$ se indaga ¿Cuál es el volumen de la caja? Y se ratifica que haya identificado el procedimiento que se estaba realizando con la pregunta ¿Qué significa la expresión algebraica determinada?; nuevamente al azar se despliega tres opciones: el perímetro

de la caja, el área de la caja o el volumen de la caja. Después de determinar la haber logrado la validación del conocimiento de cómo se una expresión algebraica representa el modelo matemático del volumen de la caja, se continua con la interrogación ¿Cómo se puede determinar el área total de la caja?; el estudiante escoge opción y determina que al multiplicar el área total del cartón dado y quitándole los 4 cuadrados de las esquinas. Una última sesión corresponde a determinar la cantidad de cinta que se requiere para decorar todo el orillo de la caja y para tal fin se plantea el siguiente abordaje: ¿Cómo se puede determinar el perímetro de la caja? ¿Cuál es la expresión algebraica que determina el perímetro de la caja? En el primer interrogante el estudiante de manera de selección determina que se debe sumar el largo el ancho y el alto para validar y posteriormente multiplicar por cuatro, en el segundo escribe la expresión algebraica y valida. De esta forma finaliza con la solución del problema y el software le dice ¡Excelente Trabajo!

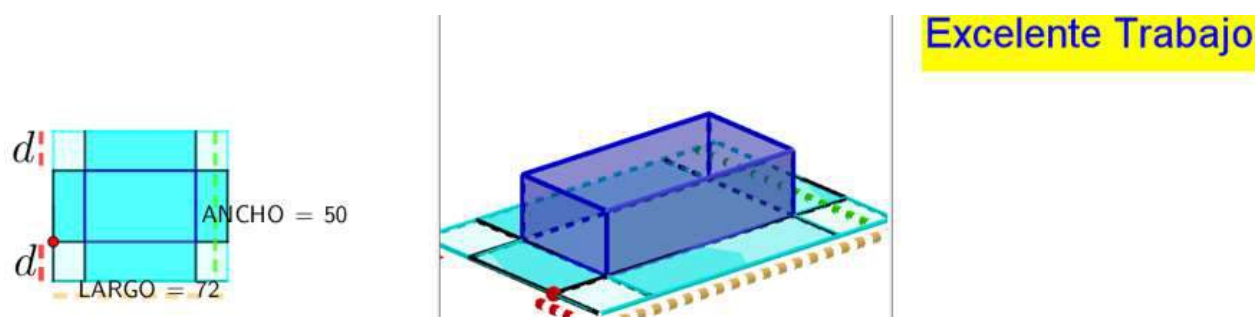


Figura 4. Finalización de la actividad

Ahora se invita a reflexionar sobre los siguientes interrogantes: ¿cuál es el volumen de la caja, si el valor de $d = 0$? ¿Existe caja? ¿Cuál es el volumen de la caja, si el valor de $d = 25$? ¿Existe caja? ¿Cuál es el volumen de la caja, si el valor de $d = 36$? ¿Existe caja? Seguidamente se continúa con la siguiente actividad, donde el estudiante realiza ejercitación: la experimentación, visualiza y razona. En un nuevo archivo, el estudiante da clic en inicio y con el mismo problema el software le solicita con respecto al trozo de cartón dado determine las expresiones algebraicas que representan: el largo, el ancho, la altura, el volumen de la caja, la superficie, el perímetro y finalmente ¿qué valores puede tener la altura de la caja? Finalizada la escritura de las expresiones algebraicas el estudiante valida su trabajo y el software le genera un puntaje que oscila entre 30 y 100 puntos de acuerdo a la efectividad del trabajo realizado, en otra actividad el estudiante en el OVA da clic en siguiente y realiza la ejercitación con 4 problemas más.

Luego de finalizar la solución del quinto problema el software le responde con el promedio de sus valoraciones y determina el desempeño de la actividad en una valoración de acuerdo a la escala de valoración del Sistema Institucional de Evaluación SIE del colegio: de 30 a 64 puntos **Bajo**. De 65 a 79 puntos **Básico**. De 80 a 89 puntos **Alto** y de 90 a 100 **Superior**. Por último, el estudiante da clic en continúe y se despliega la tabla con el resumen de sus aciertos y desaciertos.

Método

El abordaje metodológico, se fundamenta en un enfoque empírico inductivo, puesto que a partir de la experiencia y sus patrones de regularidad se pretende determinar los elementos que componen el OVA por descubrimiento (Padrón, 1998). El análisis de datos se realiza desde lo cuantitativo con análisis de datos mixto. Por otra parte, el abordaje tipo exploratorio implica un diseño experimental longitudinal (Hernández et al., 2014).

La muestra para este trabajo investigativo es tomada del Colegio Técnico Vicente Azuero del municipio de Floridablanca Colombia con estudiantes del grado octavo de la jornada de la mañana, cuyas edades oscilan entre 11 y 16 años con un promedio determinado de 13 años.

Consideraciones finales

El diseño de actividades mediante la programación con el software de GeoGebra permite el trabajo personalizado del estudiante, puesto que, aunque el problema a resolver es el mismo “la caja de la familia COLVIA” al dar clic en inicio se genera la individualización, ya que a cada estudiante el largo y el ancho del cartón dado varia, lo que representa que sus respuestas son particulares y el razonamiento a realizar debe responder a su problema y no al del compañero el cual en la presencialidad se encuentra al lado, pero en la red se encuentra interconectado por las diferentes formas de comunicarse.

Los razonamientos matemáticos cada vez se deben ir refinando en la medida que el estudiante realice ejercitaciones, pero mediante la resolución de problemas y registre sus comunicaciones en un lenguaje propio de la matemática, un ejemplo son las operaciones matemáticas básicas son muy pocas, puesto que son de nivel básico tan solo requiere multiplicar el ancho por el alto, sumar el alto con el ancho y multiplicar por 2 o por 4 según lo que se requiera, pero si el estudiante no es cuidadoso de guardar sus registros y hacer razonamiento a la hora de responder, le va requerir cada vez que surge una pregunta volver a hacer la operación. En consecuencia, no solo se requiere ir respondiendo las preguntas que el software le genera, sino ir diligenciando el taller para poder que sus apuntes estén refinados después de las validaciones.

Al encontrarse en red las actividades le permite al estudiante descargarlas e intentar su solución, cuantas veces requiera para poder tener experticia en el manejo tanto del software como en el desarrollo propio de cada actividad diseñada.

En conclusión, el diseño de actividades con ayuda del medio GeoGebra permite que el estudiante valide el conocimiento e institucionalice el saber con mayor facilidad, con poca intervención directa del profesor, ya que, de acuerdo a su avance, le permite hacer acciones, generar retroacciones que requiera para poder validar el conocimiento y finalizar con la institucionalización del saber. Al tener las actividades en red le va permitir al estudiante romper las barreras de tiempo y espacio.

Referencias

- OCDE (2018), Revisión del Gobierno Digital en Colombia: Hacia un Sector Público Impulsado por el Ciudadano, Éditions OCDE, París. <http://dx.doi.org/10.1787/9789264292147-es>
- Hernández, R.; Fernández, C. y Baptista, M. (2014). *Metodología de la investigación*. México, México: McGRAW-HILL / Interamericana Editores, S.A. de C.V, quinta edición.
- Moreno, L. (2014). *Educación Matemática: del signo al píxel*. Universidad Industrial de Santander.
- Padrón, J. (1998). La estructura de los trabajos de investigación. Decanato de Posgrados. Universidad Nacional Abierta. Caracas, Venezuela.
- Prensky, M. (2010). *Nativos e Inmigrantes digitales*. Distribuidora SEK, S.A.
- Lozano, R. (2011). De las TIC a las TAC: tecnologías del aprendizaje y el conocimiento. *Anuario ThinkEPI*, (5) 45-47.
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares de Matemáticas*. Recuperado https://www.mineduacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf
- Ministerio de Educación Nacional. (2000). *Formación de Docentes sobre el uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas*. Recuperado <https://www.mineduacion.gov.co/cvn/1665/article-81040.html>
- Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla, España: editorial: Servicio de Publicaciones de la S.A.E.M. Thales.
- Moreno, L. (2014). *Educación Matemática: del signo al píxel*. Universidad Industrial de Santander.

EMOCIONES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS EN FORMACIÓN

María S. García González*

Elizabeth Advíncula Clemente**

Carina J. Saire Huamani*

mgargonza@gmail.com, eadvincula@pucp.edu.pe, cjsaire@gmail.com

Universidad Autónoma de Guerrero, México*

Instituto de Investigación sobre Enseñanza de la Matemáticas, IREM-PUCP, Perú**

Resumen

En la presente investigación se conjugan dos áreas disciplinares, la didáctica de las matemáticas y la psicología, este nexo obedece al interés de estudiar las emociones que experimentan un grupo de profesores peruanos en formación en el nivel primario. Como sustento teórico, la investigación se fundamenta en una teoría psicológica llamada Teoría de la Estructura Cognitiva de las Emociones, y metodológicamente el diseño de investigación se ciñe a un estudio de casos instrumental. Los resultados señalan que los participantes experimentan emociones en dos facetas, cuando se reconocen como estudiantes de matemáticas en sus cursos de la carrera, y cuando se consideran profesores, al realizar sus prácticas frente a grupo; en ambas facetas experimentan emociones de satisfacción, agrado júbilo, gratitud, orgullo, esperanza, miedo congoja, decepción, reproche y desagrado.

Palabras clave: *emoción, formación de profesores, matemáticas.*

Introducción

En la Didáctica de la Matemática, disciplina que estudia la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, desde la línea de investigación llamada Dominio Afectivo, se estudian las emociones, creencias, actitudes, valores y motivación, tanto de profesores como de estudiantes de matemáticas. Los resultados de grupo de indagaciones han mostrado una alta influencia de dichos constructos en la enseñanza y en el aprendizaje escolar, de ahí su importancia de estudio (Lewis, 2013; Di Martino y Sabena, 2011; Bekdemir, 2010; Philipp, 2007). Dentro de los constructos del Dominio Afectivo, las emociones son las que tienen menor tradición de investigación, por mucho tiempo estuvieron subordinadas a los estudios sobre actitudes y creencias. Sin embargo, con el paso del tiempo, el interés en su estudio individual ha incrementado, esto debido a la importancia de la naturaleza emocional de los contextos educativos (Schutz y Pekrun, 2007; Middleton, Jansen y Goldin, 2018).

Respecto a los profesores, las emociones se clasifican en dos grupos, emociones negativas y emociones positivas. Las emociones negativas implican experiencias desagradables durante el momento de la enseñanza, por ejemplo, el estrés, la desmotivación y el síndrome de Burnout

(Schutz y Zembylas, 2009; Rodríguez, Guevara y Viramontes, 2017). Cuando este grupo de emociones se presenta puede conducir al desgano por dar clases (Ramos-Silverio y García-González, 2018) o en grados altos, al abandono de la profesión (Hannula, Liljedahl, Kaasila y Rösken, 2007). Las emociones positivas, por el contrario, implican experiencias de placer al momento de conducir una clase, entre ellas se encuentran el entusiasmo, la alegría, el orgullo, la satisfacción y el interés (Di Martino y Sabena, 2011; Anttila, Pyhältö, Soini y Pietarinen, 2016).

La ansiedad matemática se ha reportado como un fenómeno común entre los profesores en formación de la escuela primaria de muchos países, y se ha evidenciado que puede interferir seriamente en ellos impidiéndoles convertirse en buenos profesores de matemática (Bekdemir 2010; Hannula, Liljedahl, Kaasila, & Rösken, 2007). También se han evidenciado otras emociones negativas hacia las matemáticas, como miedo, estrés, y desesperación, producto de las experiencias de los futuros profesores, vividas cuando eran estudiantes (Coppola, *et al.*, 2012; Di Martino & Sabena, 2011). Estos resultados han sido relevantes al demostrar que las emociones influyen en la perspectiva del profesor acerca de cómo enseñar matemáticas.

Respecto a los profesores en servicio, García-González y Martínez-Sierra (2016) realizaron un estudio exploratorio sobre las emociones de profesores mexicanos de nivel pre universitario, sus resultados muestran que, en su mayoría los profesores experimentan emociones en función de lo que sus estudiantes pueden lograr en la clase de matemáticas. Encontramos este resultado interesante, pues pareciera que las emociones del profesor de matemáticas tienen su origen en la actividad docente, el logro de los aprendizajes matemáticos. De ahí que las acciones que realice el estudiante (poner atención, deserción escolar), directa o indirectamente, para aprender, afectarán la estabilidad emocional del docente.

Otro resultado relevante sobre el origen de las emociones de profesores en servicio es el reportado por García-González y Pascual-Martín (2017), quienes reportan el caso de Diego, un profesor de matemáticas de secundaria que experimentaba emociones negativas en sus clases de matemáticas debido a su escaso conocimiento de los temas que debía impartir. Considerando la importancia de las emociones en la labor de los docentes, en la presente investigación nos proponemos su estudio desde la formación de profesores de nivel primario, bajo el supuesto de que conocer las emociones servirá para hacer intervenciones futuras con el fin de aminorar los efectos negativos de éstas.

Particularmente nos proponemos identificar las emociones y situaciones que las desencadenan en un grupo de estudiantes de la Facultad de Educación del nivel primario en Perú. La elección de esta población se debe a que los profesores de este nivel son los primeros con los que los estudiantes descubren el mundo de las matemáticas y, la forma en como ellos presenten el curso puede influir en el gusto de esta área.

Referente conceptual

En la vasta literatura en psicología, disciplina de la que proviene el constructo emoción, existen diferentes definiciones de esta palabra, a pesar de esto, las distintas definiciones comparten ciertas características, por ejemplo, que las emociones son fenómenos multidimensionales caracterizados por elementos, cognitivos, fisiológicos y conductuales.

En esta misma línea, la Teoría de la Estructura Cognitiva de las Emociones (Ortony, Clore y Collins, 1996), llamada comúnmente teoría OCC, se basa en la idea de que las emociones son desencadenadas por las valoraciones cognitivas que la gente hace de una situación de manera consciente o no, y la fuente de evidencia en la que se basa es el lenguaje, a través de él es posible conocer los orígenes y la emoción misma experimentada por las personas. Desde esta perspectiva teórica las emociones son entendidas como "reacciones con valencia ante acontecimientos, agentes u objetos, la naturaleza particular de las cuales viene determinada por la manera como es interpretada la situación desencadenante" (Ortony, Clore y Collins, 1996, p.16).

La teoría OCC señala una tipología sobre cómo, a diferencia del lenguaje común, se pueden etiquetar las emociones que experimentan las personas, para ello se basa en la palabra emocional que usa la persona cuando narra la emoción experimentada y en las situaciones que desencadenan dicha emoción. Para clasificar las emociones esta teoría las describe en tres grandes categorías, reacciones ante los acontecimientos, reacciones ante los agentes y reacciones ante los objetos. En la Tabla 1 se describen estas categorías

Tabla 1.

Tipos de emociones concebidas por la OCC

Clase	Grupo	Tipos (ejemplo de nombre)
Reacciones ante los acontecimientos	VICISITUDES DE LOS OTROS	Contento por un acontecimiento deseable para alguna otra persona (feliz-por) Contento por un acontecimiento indeseable para alguna otra persona (alegre por el mal ajeno) Descontento por un acontecimiento deseable para alguna otra persona (resentido-por) Descontento por un acontecimiento indeseable para alguna otra persona (quejoso-por)
	BASADAS EN PREVISIONES	Contento por la previsión de un acontecimiento deseable (esperanza) Contento por la confirmación de la previsión de un acontecimiento deseable (satisfacción) Contento por la refutación de la previsión de un acontecimiento indeseable (alivio) Descontento por la refutación de la previsión de un acontecimiento deseable (decepción)

		Descontento por la previsión de un acontecimiento indeseable (miedo) Descontento por la confirmación de la previsión de un acontecimiento Indeseable (temores confirmados)
	BIENESTAR	Contento por un acontecimiento deseable (jubilo) Descontento por un acontecimiento indeseable (congoja)
Reacciones ante los agentes	ATRIBUCIÓN	Aprobación de una acción plausible de uno mismo (orgullo) Aprobación de una acción plausible de otro (aprecio) Desaprobación de una acción censurable de uno mismo (autoreproche) Desaprobación de una acción censurable de otro (reproche)
Reacciones ante los objetos	ATRACCIÓN	Agrado por un objeto atractivo (agrado) Desagrado por objeto repulsivo (desagrado)
Reacciones ante el acontecimiento y el agente simultáneamente	BIENESTAR/ATRIBUCIÓN	Aprobación de la acción plausible de otra persona y contento por el acontecimiento deseable relacionado (gratitud) Desaprobación de la acción censurable de otra persona y descontento por el acontecimiento deseable relacionado (ira) Aprobación de la acción censurable de otra persona y descontento por el acontecimiento deseable relacionado (complacencia) Desaprobación de una acción censurable de uno mismo y descontento por el acontecimiento indeseable relacionado (remordimiento)

Fuente: Ortony, Clore y Collins (1996).

Conviene aclarar que la teoría OCC, no se guía por las palabras emocionales que usa el sujeto para describir la emoción que experimenta, más bien se centra en el acontecimiento que origina la emoción y a esa descripción le da como nombre una palabra emocional neutra (ver columna "tipos" de la tabla anterior).

Metodología

El método de esta investigación es de tipo cualitativo, pues identificamos y describimos las emociones que experimentan por las matemáticas los profesores en formación en su rol de estudiantes y futuros maestros.

El diseño de investigación corresponde a un estudio de casos instrumental (Yin, 2014). Los casos de esta investigación fueron 3 mujeres y 2 varones, estudiantes de la Facultad de Educación, con especialidad de Educación primaria. Cursaban el quinto y sexto semestre de formación profesional; pero coincidían en el curso Didáctica de la estadística y probabilidad en el semestre 1 de 2018. Fueron elegidos de manera intencionada pues queríamos entrevistar a personas que manifestaron temor hacia la matemática, dificultades al resolver problemas y otros que dominaban el curso pero que habían tenido alguna experiencia negativa en la educación básica.

La técnica empleada para la recolección de datos es la entrevista grabada y posteriormente transcrita para su respectivo análisis. Las preguntas usadas fueron las siguientes: De tus experiencias emocionales, 1. ¿Qué emociones o sentimientos experimenta en la clase de matemática?, ¿por qué experimenta eso?; 2. ¿Cuáles son las principales experiencias positivas que ha tenido cuando realizó una sesión de clase?, ¿por qué experimenta eso?; 3. ¿Cuáles son las principales experiencias negativas que ha tenido cuando realizó una sesión de clase?, ¿por qué experimentó eso?; 4. ¿En qué circunstancias y situaciones ha experimentado felicidad o alegría en la clase de matemáticas?; 5. ¿En qué circunstancias o situaciones ha experimentado tristeza o pesar en la clase de matemáticas? (como estudiante y maestro)

Cabe resaltar que las preguntas 1, 2 y 3, proporcionan las situaciones desencadenantes (la clase de matemáticas, experiencias negativas y positivas en la realización de una sesión de clases) y demandan las palabras emocionales, por el contrario, las preguntas 4 y 5, proporcionan las palabras emocionales (felicidad, alegría, tristeza, pesar) y demandan la situación desencadenante.

Para identificar las emociones y las situaciones desencadenantes, la tipología OCC mostrada en la Tabla 1 se volvió nuestra herramienta de análisis de datos.

Análisis de datos

Las emociones identificadas en nuestro trabajo de investigación han sido nombradas de acuerdo a la tipología de emociones OCC de la Tabla 1. A continuación desarrollamos un pequeño ejemplo de codificación de una emoción. En el discurso de los participantes resaltamos en **negrita** la situación desencadenante de la emoción y en *cursiva* las palabras emocionales, usamos corchetes para hacer aclaraciones.

P1: [Las matemáticas] *me gustaban mucho* **gracias a un profesor** que era de poner sellos cada vez que uno terminaba un ejercicio.

Identificamos en P1, que la situación desencadenante de su gusto hacia las matemáticas es la didáctica del profesor. El gusto que dice sentir lo codificamos en el grupo de las emociones de atracción, específicamente en el tipo “agrado” (Figura1).

Agrado: Agrado por un objeto atractivo.	
Agrado	Objeto atractivo
<i>me gustaban mucho</i>	un profesor que era de poner sellos cada vez que uno terminaba un ejercicio

Emoción: Agrado.

Situación desencadenante:

La didáctica del profesor.

Figura 1: Ejemplo de codificación de la emoción agrado.

El discurso de los informantes, individualmente, se analizó como en el ejemplo anterior. Posteriormente se hizo una distinción por tipo de emociones, positivas y negativas, considerando los 5 casos. Como resultado obtuvimos 6 tipos de emociones positivas (Tabla 2) y 5 de emociones negativas (Tabla 3).

Tabla 2.

Emociones positivas

Tipos de emociones	Situaciones desencadenantes
Agrado	Didáctica del profesor Enseñar matemáticas Resolver problemas Gusto por la matemática Conocer la utilidad de la matemática
Satisfacción	Enseñar matemáticas Sentirse involucrado por su profesor Uso de materiales didácticos en clase Dictar una clase interesante
Júbilo	Didáctica del profesor Notas aprobatorias en los exámenes
Gratitud	Didáctica del profesor
Orgullo	Poder resolver problemas
Esperanza	Ser un buen profesor de matemática

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 3.

Emociones negativas

Tipos de emociones	Situaciones desencadenantes
Miedo	Examen de matemáticas Pasar al pizarrón Profesor No entender las matemáticas
Congoja	Manejo del grupo Conocimiento de los temas
Decepción	La inclusión en clases Pasar al pizarrón Concurso escolar
Reproche	Estudiante con necesidades especiales Desconocimiento del tema
Desagrado	Desaprobar el curso Justificar respuestas en los exámenes Didáctica del profesor

Fuente: Elaboración propia.

Posterior a identificar las emociones negativas y positivas, nos dimos a la tarea de clasificarlas en dos tipos generales de situaciones desencadenantes, aquellas que los participantes vivieron, y siguen viviendo como estudiantes, y aquellas que son producto de sus experiencias en las prácticas pre profesionales, y en dónde se conciben así mismos como profesores (Tabla 4).

Tabla 4.

Emociones por rol del participante y situaciones desencadenantes

Emociones	Situación desencadenante
	Como estudiante:
	<u>Metas del salón de clases</u>
	Resolver problemas
	Aprobar los exámenes
Agrado	Pasar al pizarrón
	Aprobar el curso
Satisfacción	Entender las matemáticas
	Justificar respuestas en los exámenes
Júbilo	
	<u>Acciones del profesor</u>
Gratitud	Didáctica del profesor
Orgullo	<u>Acciones de ellos mismos</u>

Esperanza	Gusto por la matemática Conocer la utilidad de la matemática Sentirse involucrado por el profesor
Miedo	Concurso escolar
Congoja	
Decepción	
Reproche	
Desagrado	Como Profesor: <u>Metas del profesor</u> Enseñar matemáticas Usar materiales didácticos en clase Dictar una clase interesante Ser un buen profesor de matemática Saber manejar al grupo Conocer los temas Incluir a los estudiantes con necesidades especiales

Fuente: Elaboración propia.

La Tabla 4, evidencia que los profesores en formación, experimentan ambos tipos de emociones, positivas y negativas, en sus roles como estudiantes y profesores, pero las situaciones desencadenantes son diferentes. Como puede observarse, las emociones experimentadas como estudiantes se deben al cumplimiento de metas del salón de clases, a las acciones del profesor y a las acciones de ellos mismos, lo que coincide con los resultados de la literatura (ver por ejemplo García-González, 2016). Respecto al rol de profesores, sus emociones se desencadenan por las metas que ellos se plantean en sus prácticas pre profesionales, lo que coincide con la investigación de García-González y Martínez-Sierra (2016).

Conclusiones

A decir de los informantes, la mayoría de las emociones negativas que identificamos en el rol de estudiantes, las experimentaron durante sus primeros años de escolaridad, debido a que sus maestros eran muy estrictos y no fomentaban un clima empático en el aula. Consideramos que, como lo reporta la literatura (Philipp, 2007; Coppola, et al, 2012; Di Martino & Sabena, 2011) esta situación pudiera traer consecuencias en ellos para convertirse en buenos maestros.

Las emociones negativas de los profesores en formación en su rol de profesores son: miedo, congoja, reproche, decepción desagrado. Miedo al preparar una clase de matemática; esto se debe al desconocimiento del tema a trabajar. Congoja al ser conscientes de las experiencias negativas vividas durante la época escolar, que marca su vida como maestros. Decepción por no haber concluido una sesión de clase como la habían previsto, lo que es parte de su aprendizaje como futuros profesores ya que están en prácticas pre profesionales. Sin embargo, a pesar de

esta situación, todos manifiestan sus deseos de ser excelentes maestros en su vida profesional y de brindar a sus estudiantes experiencias gratificantes al enseñar matemática.

Para superar las malas experiencias emocionales según Pietila (2002) y Liljedahl, (2005) (citados por Hannula, Liljedahl, Kaasila, & Rösken, 2007), es necesario que los educadores de futuros profesores brinden experiencias positivas con las matemáticas, por ejemplo al trabajar de manera constructivista con el uso de fichas, y generar un ambiente de apoyo en el aula al trabajar con la resolución de problemas para generar confianza en ellos y fomentar su participación; esto permitiría que logren aprender realmente las matemáticas que deberán enseñar.

Referencias

- Anttila, H., K. Pyhältö, T. Soini, y P. Pietarinen. 2016. "How Does It Feel to Become a Teacher? Emotions in Teacher Education." *Social Psychology of Education*, 19 (3), 451–473.
- Bekdemir, M. (2010). The pre-service teachers' mathematics anxiety related to depth of negative experiences in mathematics classroom while they were students. *Educational Studies in Mathematics*, 75(3), 311–328. <http://doi.org/10.1007/s10649-010-9260-7>
- Carrillo, J., Contreras, L.C., Climent, N., Escudero-Ávila, D., Flores-Medrano, E., & Montes, M.A. (Eds.) (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas*. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.
- Coppola, C., Di Martino, P., Pacelli, T., & Sabena, C. (2012). Primary teachers' affect: A crucial variable in the teaching of mathematics. *Nordic Studies in Mathematics Education* 17 (3–4), 101–118.
- Di Martino, P., & Sabena, C. (2011). Elementary pre-service teachers' emotions: shadows from the past to the future. In K. Kislenko (Ed.), *Current state of research on mathematical beliefs XVI*, Tallinn University, 89–105.
- García-González, M. S. (2016). "Me frustra no resolver un problema en el examen": Emociones en la clase de matemáticas. *Revista Eutopía. Revista del Colegio de Ciencias y Humanidades para el Bachillerato* 9 (24), 79–86. ISSN: 1870-8137
- García-González, M. y Martínez-Sierra, G. (2016). Emociones en profesores de matemáticas: un estudio exploratorio. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 247–252). Málaga: SEIEM.
- García-González, M. y Pascual-Martín, M. (2017). De la congoja a la satisfacción: el conocimiento emocional del profesor de matemáticas. *IE Revista de Investigación Educativa de la Rediech*, 8(15), 133–148.
- Hannula, M. S., Liljedahl, P., Kaasila, R., & Rösken, B. (2007). Researching relief of mathematics anxiety among pre-service elementary school teachers. In J.-H. Woo, H.-C. Lew, K.-S. P. Park, & D.-Y. Seo (Eds.), *Proceedings of 31st Annual Conference for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 1 (pp. 153–156). Seoul, Korea.

- Lewis, G. (2013). Emotion and disaffection with school mathematics. *Research in Mathematics Education*, 15(1), 70–86. doi:10.1080/14794802.2012.756636
- Middleton, J., Jansen, A. y Goldin, G. The Complexities of Mathematical Engagement: Motivation, Affect, and Social Interactions. En Jinfa C. (Ed.). *COMPENDIUM for Research in Mathematics Education* (pp. 667-699). Virginia, USA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Ortony, A., Clore, G. L., y Collins, A. (1996). *The cognitive structure of emotions*. (J. Martínez y R. Mayoral, traductores). España: Siglo XXI. (Trabajo original publicado en 1988).
- Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. In F. Lester (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 257–315). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Ramos-Silverio, J. y García-González, M. S. (2018). Perfil emocional de una docente en clase de matemáticas. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 477-484). Gijón: SEIEM. ISBN: 978-84-17445-11-9.
- Rodríguez, J., Guevara, A. y Viramontes, A. (2017). Síndrome de burnout en docentes. *IE Revista de Investigación Educativa de la Rediech*, 7(14), 45-67.
- Schutz, P., y Pekrun, R. (Eds.). (2007). *Emotion in education*. Boston, MA: 1100 Academic Press.
- Schutz, P., y Zembylas, M. (2009). Introduction to advances in teacher emotion research: The impact on teachers lives. En P. Schutz, y M. Zembylas (Eds.), *Advances in teacher emotion research: The impact on teachers lives*. New York: Springer.
- Yin, R. (2014). *Case Study Research Design and Methods*. Thousand Oaks, CA: Sage
- Zembylas, M. (2005). Beyond teacher cognition and teacher beliefs: the value of the ethnography of emotions in teaching. *International Journal of Qualitative Studies in Education*, 18(4), 465-487.

LA ENSEÑANZA DE SUMAS CON NÚMEROS NATURALES EN LA ESCUELA PRIMARIA MULTI - GRADO

Lorena Trejo Guerrero

ltrejog@cinvestav.mx

Universidad Nacional Autónoma de México, México

Resumen

La experiencia como profesores e investigadores en educación primaria, nos permite identificar las condiciones que el contexto escolar ofrece a los niños del medio rural, su nivel de aprendizaje y las repercusiones del trabajo docente en el área de matemáticas en escuelas donde los profesores trabajan con dos o más grados a la vez. Diseñamos una situación didáctica para trabajar la noción de número natural con un grupo de 1º, 2º y 3er. grados, la cual consiste en sumar cantidades pequeñas o decenas. El énfasis se puso en el proceso de enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria pública rural en el Estado de Hidalgo, así como en el trabajo colaborativo entre los estudiantes al realizar las actividades en equipos integrados por los tres grados. Para interpretar nuestros resultados utilizamos las características de la escuela primaria multigrado y el uso del lenguaje matemático entre los estudiantes de primaria.

Palabras clave: multigrado, enseñanza, aprendizaje cooperativo, número.

Introducción

El conocimiento se construye en el aula gracias a un proceso de interacción entre los alumnos y el profesor, para lo cual es necesario analizar no sólo la actividad constructiva de los estudiantes (ideas previas sobre el contenido, predisposición para el aprendizaje, etc.) sino también a los mecanismos de influencia o de ayuda pedagógica, rol que desempeña el profesor.

Los números naturales se enseñan desde el primer grado con el fin de proporcionar experiencias que pongan en juego los significados que adquieren en diversos contextos y las diferentes relaciones que pueden establecerse entre ellos para aplicar ciertas habilidades en la resolución de problemas, lo cual confluye con Bruner (2008). Para ayudar a los estudiantes a desarrollar una comprensión profunda de conceptos matemáticos y socializar los métodos de solución entre ellos, al dar sentido y construir juntos la tarea de las matemáticas, es necesario que el maestro cuente con ciertas habilidades didácticas y de expresión que le permitan atender las necesidades reales de aprendizaje de sus alumnos.

Consideramos al lenguaje como una de las herramientas más importantes de los profesores, permite la comunicación verbal entre personas de la experiencia cotidiana. Pero, es preciso para un buen funcionamiento del intercambio de significados adecuados, poseer el código de

lenguaje que se requiere en cada espacio de interacción social o en el desarrollo de disciplinas científicas, en cuyo caso se trata del lenguaje técnico de cada una de ellas (específicamente, aquí se trataría del lenguaje propio de la Matemática Educativa).

En el presente trabajo de investigación (de naturaleza cualitativa) nos propusimos abordar cómo el alumno, apoyándose en el **uso del lenguaje**, adquiere diversas nociones y conceptos referidos al número natural, a la par que interactúa con sus compañeros y con su profesor durante juegos en el patio. Así mismo, nos planteamos identificar qué realizan los niños de los tres grados al jugar con sus compañeros para enriquecer la enseñanza de las sumas con números naturales.

Problema de investigación y aspectos teóricos y metodológicos

A partir del diseño e implementación de la clase se analizó el lenguaje del aula, tanto entre maestra y alumnos, como entre los estudiantes, y a nivel de quienes ejercen la enseñanza (esto es, en dos instancias diferentes de reflexión). Para acercarnos a lo que debe ser parte del conocimiento matemático del profesor con respecto al contenido de la división con números naturales, como espacio de significación, articulación y tránsito hacia la suma con números naturales en la escuela primaria.

Nuestras preguntas de investigación quedan planteadas de la siguiente manera: 1) **¿Cómo el maestro diseña y enriquece las experiencias didácticas organizadas para favorecer la comprensión de la adición de números naturales, en el niño?** Con respecto a los alumnos: 2) **¿Cómo registran sus respuestas y cómo sus compañeros con mayor experiencia los verifican?**

Características de la escuela multi – grado

El trabajo docente en aulas multigrado implica atender simultáneamente a niños de diversos grados, lo que demanda al profesor organizar y planificar el trabajo de tal manera que pueda articular y relacionar los contenidos de las diversas asignaturas y grados, evite la fragmentación de la enseñanza y atienda adecuadamente a todos los niños.

Ventajas: Son grupos poco numerosos lo cual permite vigilar “casi” de manera personal a cada uno de los alumnos. Desventajas: para organizar las clases los maestros de la escuela multi - grado requieren emplear los mismos materiales elaborados para las escuelas de organización completa: libros de texto gratuito, libros para el maestro y ficheros de actividades didácticas. Otra desventaja importante es la falta de apoyo de algunos padres de familia para reforzar el trabajo en casa.

Marco teórico

La importancia del lenguaje

En la escuela primaria se usa el lenguaje oral y escrito en el proceso de enseñanza y aprendizaje de cualquier asignatura y está presente durante todo el proceso escolar: los alumnos requieren conversar sobre los temas, necesitan leer textos para buscar información y elaborar escritos con la información obtenida. Por ello es de suma importancia que la escuela contribuya al desarrollo de las competencias comunicativas de los alumnos.

Una de estas acciones es la utilización sistemática y explícita de las habilidades comunicativas en el desarrollo de los contenidos de las otras asignaturas, tanto en la planeación de clases como en su implementación; es importante que quede claro cuáles serán las actividades de expresión oral, escritura o lectura que se trabajarán mientras se abordan temas de matemáticas, por ejemplo.

El análisis del discurso es un medio privilegiado para estudiar el uso del lenguaje natural que se utiliza de manera cotidiana y a la incorporación del lenguaje especializado de las matemáticas durante los procesos educativos, cuando se intenta comprender los mecanismos y procedimientos con los que los participantes construyen los significados con diversas versiones de un contenido, dependientes de las situaciones de interacción en donde estas versiones se confrontan, negocian y reconstruyen (Thompson, 1993).

Dentro de la Matemática Educativa y el enfoque cognoscitivista del aprendizaje nos preguntamos cómo se usan los signos y las palabras en las clases de matemáticas, qué hace el maestro para guiar al alumno a construir su propio aprendizaje y descubrir el conocimiento de manera significativa (Ausubel, Novak y Hanesian, 1983), lo cual le permitirá seguir aprendiendo. Por eso es importante la identificación de conceptos clave/fundamentales para la comprensión de contenidos más complejos

Análisis del lenguaje en el aula

Para el análisis del lenguaje de los alumnos en el aula tomamos las aportaciones de Cazden (1991), quien en la conversación entre iguales menciona que los niños, a diferencia de las conversaciones con el maestro, es con sus compañeros con quienes pueden aportar elementos intelectuales, dando directrices o cumpliéndolas, haciendo preguntas y contestándolas. El análisis de la interacción verbal permite estudiar ejemplos de intercambio lingüístico en el ámbito real en el que éste ocurre.

Si consideramos que la lengua es una herramienta que ayuda a facilitar la adquisición de competencias lingüísticas, es el instrumento simbólico mediante el cual cada uno organiza su entorno; es comunicación y por medio de ella el ser humano organiza su pensamiento; tiene un desarrollo diferente cuando es oral o cuando es escrita; presenta una dimensión sociocultural, exhibiendo también un trascendente canal de comunicación pedagógica (Bourdieu y Passeron, 1970). Entonces, si la escuela tiene la función de que los niños comprendan textos y el sentido de las intervenciones orales, provee las condiciones deseables para que a través de situaciones comunicativas los niños, desarrollen y pongan en práctica sus competencias, o reproduzcan cánones establecidos. Por todo ello, es importante analizar el intercambio lingüístico que se genera en el aula.

Dado que una característica de las construcciones complejas del lenguaje es que representan una estructura articulada, exigen un análisis discursivo, entendida tal labor como una empresa perfectamente legítima e indispensable, retomamos el análisis conversacional del discurso de Thompson (1993) para nuestra investigación, cuyo principio metodológico clave de este análisis es estudiar ejemplos de interacción lingüística en el ámbito real en que ocurren y poner una cuidadosa atención a las maneras en que se organizan.

Para el análisis del discurso en el aula entre la profesora y los alumnos, retomamos las ideas de Shuard y Rothery (1984) en referencia al flujo del significado, considerando los usos del lenguaje del profesor y la re-significación del mismo por los alumnos, la importancia de la identificación del profesor en el argumento de sus alumnos.

Consideramos necesario investigar cómo el maestro en servicio utiliza el lenguaje en el aula, durante las clases de matemáticas de la escuela primaria, para conducir a sus alumnos a descubrir diversos caminos para resolver un problema usando los números naturales y fomentar el planteamiento de nuevos problemas, posibilitando el empleo de unidades de información cada vez mayores en la solución de problemas particulares (Bruner, 2008).

El número natural, su enseñanza y aprendizaje en la primaria

Definimos a los “números naturales” «como aquellos que se pueden establecer gracias a la inducción matemática, es decir que poseen todas las propiedades inductivas» (Piaget, 1996).

Según la epistemología genética disponemos de dos métodos para investigar la naturaleza de los entes matemáticos en función de su desarrollo: el método histórico-crítico y el método psicogenético. Así, se distingue una sociogénesis de los conocimientos, relativa a su desarrollo histórico en el seno de las sociedades y a su transmisión cultural, y una psicogénesis de las nociones y de las estructuras operatorias elementales que se constituyen en el transcurso del desarrollo de los individuos (Piaget e Inhelder, 1978) para “[...] averiguar si el niño es capaz de comprender la identidad de un todo a través de las diferentes composiciones aditivas de sus partes: $(4 + 4) = (1 + 7) = (2 + 6) = (3 + 5)$ ” (Piaget, 2005, 218).

La psicogénesis de la inducción en aritmética es lo que se ha denominado desarrollo evolutivo del razonamiento inductivo-numérico al considerar este problema desde la Matemática Educativa.

Método

La investigación se llevó a cabo en una escuela primaria multi-grado bidocente del sistema público en el Estado de Hidalgo, en la Zona Escolar 105, Cuyamaloya, perteneciente al Sector 02, Tulancingo de Bravo. La maestra Karina tuvo a su cargo un grupo de 10 alumnos, 4 de 1º, 4 de 2º y 2 de 3er grados, sus edades oscilan entre los 6 y 8 años. La maestra tiene una amplia experiencia en escuelas muligrado, 21 años de servicio.

Los instrumentos metodológicos como el registro de observación, la revaloración del uso de juegos y la organización de equipos con niños de los tres grados durante la resolución de problemas aritméticos con números naturales, mostraron la importancia de sistematizar el proceso de recopilación de datos en el campo.

La adquisición de experiencia laboral de los maestros en este tipo de escuelas se basa, a diferencia de la escuela de organización completa, en la habilidad que adquieren los profesores en ajustar el currículum oficial a las condiciones sociales y culturales de estas pequeñas comunidades.

Con respecto a los estudiantes de escuelas multi-grado, podemos decir que cuentan con experiencias y conocimientos peculiares propios del medio rural y diferente a los de los alumnos de escuela de organización completa.

El análisis del discurso se realizó durante la clase desarrollada con los alumnos, donde el análisis conversacional y argumentativo entre los alumnos nos dio la oportunidad de acercarnos a la reinterpretación desde el lenguaje natural y el lenguaje técnico de las matemáticas en torno a la enseñanza de adiciones con números naturales.

En nuestra investigación etnográfica, para validar los significados que surgen en el aula, durante la clase de matemáticas, utilizamos como criterio básico los significados locales de las acciones desde el punto de vista de la maestra y sus alumnos.

La propuesta didáctica plantear y resolver problemas de suma

Los planes y programas (2017) proponen definir la intención didáctica al momento de planear la clase, de ahí que la claridad de objetivos e intenciones resulta fundamental para ajustar las actividades, si se quiere lograr un nivel de comprensión.

Actividades para 1°, 2° y 3er. grados.

Plantean y resuelven problemas de suma (con y sin transformaciones) con números naturales uno o dos numerales, utilizando costalitos de frijoles y juegos de piso.

Actividades de lenguaje

Expresión oral: comunicar procedimientos de resolución. Argumentar resultados.

Tabla 1

Recursos didácticos:

Para el maestro	Para el alumno
• Dados • Juegos de piso (Tiro al blanco) • Costalitos de semilla (dos) • Marcadores, gises de colores • Juegos de mesa (El mensajero del Rey)	• Hojas blancas • Lápiz • Goma • Cuaderno • Frijoles

Propósito: que los alumnos identifiquen la suma de las cantidades obtenidas en los tiros de costalitos de cada uno de los integrantes del equipo.

Organización: Se trabaja con los alumnos de 1°, 2° y 3er grados de manera simultánea.

El "tiro al blanco", es un juego que consiste en dibujar círculos concéntricos en la cancha de la escuela y colocar un número en cada uno de los círculos, a 10 pasos del blanco se colocan los puntos de tiro, los alumnos deberán lanzar un "costalito" de tela lleno de semillas.

Se forman dos equipos integrados por niños de 1°, 2° y 3er. grados, quienes por turnos lanzarán su costalito, los números registrados serán los que señalen el lugar donde cae el costalito.

Cuando pasen todos los niños de ambos equipos, se suman los números obtenidos y gana el equipo que obtenga el número mayor.

Se realizaron tres sesiones con dos rondas diferentes, con las siguientes variantes:

- a) 1ª. Ronda: se colocan los números del 1 al 5 colocando el 1 en el centro del círculo.
- b) 2ª. ronda: se colocarán los números del 9 al 5, colocando el 9 en el centro del círculo.
- c) 3ª. ronda: se colocan los números pares del 2 al 8 colocando el 2 en el centro del círculo.
- d) 4ª. ronda: se colocarán los números impares del 9 al 1, colocando el 9 en el centro del círculo.
- e) 5ª. ronda: se colocan las decenas pares del 20 al 80 colocando el 80 en el centro del círculo
- f) 6ª. ronda: se colocan los números impares del 10 al 90 colocando el 10 en el centro del círculo.

Los niños identificaron el numeral que otorga más puntos al calcular la fuerza del tiro del costalito. Si el costalito cae fuera de los círculos, el puntaje equivale a cero. Es indispensable que todos los niños interpreten las instrucciones, sino sus compañeros se encargarán de explicarles detenidamente, lo cual confluye con lo expuesto por Cazden (1991).

Resultados obtenidos

Se jugaron varias rondas con las variantes señaladas anteriormente, dos rondas por sesión aproximadamente, los niños se cansan. A la siguiente sesión establecer cambios, ya sea en el orden de los números o en usar unidades o decenas.

Esta propuesta pretende disminuir los tiempos de espera, permitir una mayor atención a los alumnos, profundizar en el tema, favorecer la colaboración, la ayuda mutua y la tutoría –los niños más grandes apoyan a los menores–, estimular la puesta en común de los conocimientos adquiridos y atender el nivel de los alumnos al dejar actividades específicas incluyendo a los tres grados.

Para el reconocimiento de las principales concepciones erróneas que dificultan el aprendizaje; es necesario identificar si son resultado de antecedentes deficientes, o son las que presenta el sistema decimal de numeración cuando sumamos cantidades de una cifra y en otro juego sumamos cantidades de dos cifras. Cabe agregar que el uso del cero puede generar concepciones erróneas (Trejo y Valdemoros, 2015), cuando el costalito cayó fuera de los círculos, los niños de 3er grado indicaban a los niños de 1° anotar el cero para no equivocarse a la hora de realizar la suma del total de puntos.



Figura 1. Niños de 1°, 2° y 3er grado recibiendo instrucciones para jugar

Criterios para la selección y uso de recursos o materiales educativos.

Estrategias didácticas para el trabajo con estudiantes de 1°, 2° y 3er. grados en escuelas multigrado. Se consideró en el bloque 3 de 2° grado, se puede adaptar esta lección con los tres grados juntos.

Cuando se trabaja con un tema común es importante considerar lo siguiente:

Indicaciones iniciales para todo el grupo: explicar el juego, el uso de materiales, que promuevan el intercambio de saberes de los niños, en este caso será con los tres grados juntos. Lo importante es poner en común los conocimientos o aprendizajes previos, que los números adquieran el significado adecuado al contexto de la clase, de acuerdo con lo planteado por Shuard y Rothery (1984).

Consideraciones finales

Algo importante que hay que considerar es el aprendizaje cooperativo y los agrupamientos flexibles al formar los equipos para el juego. Una situación que debe fomentarse y aprovecharse en las escuelas multigrado es el trabajo cooperativo, la ayuda mutua y las tareas compartidas entre los alumnos, quienes aprenden unos de otros y conocen lo que se trabaja en distintos grados, para que así, los niños pequeños vayan adquiriendo espontáneamente conocimientos de los alumnos mayores, quienes a su vez adquieren seguridad en sí mismos y reafirman sus conocimientos al apoyar a sus compañeros. De ahí que es recomendable promover la realización de actividades por equipos integrados por alumnos de diferentes grados.

Estas actividades permiten un trabajo acorde con los avances y ritmos de aprendizaje de los alumnos, lo que es un principio básico del trabajo en multigrado. Cabe agregar que también dependen del tipo de escuela multigrado que se trate, ya sean aquellas que cuentan con un profesor (unitarias) **dos profesores**, tres profesores, o cuatro profesores.

Con lo anterior podemos comprender las dificultades de los profesores en servicio en cuanto a la reinterpretación de las operaciones aritméticas y la importancia de la secuencia adoptada al presentar las actividades de enseñanza de manera accesible a sus alumnos. De este modo, los maestros se enfrentan no sólo a comprender un contenido curricular, sino a crear sus propios medios de transferencia de ese contenido, retomamos a Chevallard (1998) quien menciona que "se designa con el término transposición didáctica al conjunto de transformaciones que sufre un saber a efectos de ser enseñado".

El uso del lenguaje se convierte en el principal elemento de interacción objetiva, ya que a través de este proceso se fundan las nuevas condiciones en la construcción del conocimiento aritmético.

Referencias

- Ausubel, P., Novak, J., Hanesian, H. (1983). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. Editorial Trillas. México.
- Bordieu, P. y Passeron, J. C. (1970). *La reproducción: Elementos para la teoría del sistema de enseñanza*. Barcelona, España: Editorial Laia.
- Bruner, J. (2008). *Desarrollo cognitivo y educación*. Madrid, España: Editorial Morata.
- Cazden, C. B. (1991). *El discurso en el aula: El lenguaje de la Enseñanza y el Aprendizaje*. Barcelona, España: Paidós.
- Chevallard, Y. (1998). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires, Argentina: Aique.
- Piaget, J., Szeminska, A. (1996). *Génesis del Número en el niño*. Buenos Aires, Argentina: Editorial Guadalupe.
- Piaget, J. (2005). *Introducción a la Epistemología Genética*. México, México: Paidós.
- Secretaría de Educación Pública (2017). Planes y Programas de Estudio, México, México.
- Shuard, H. & Rothery, A. (1984). *Children reading mathematics*. Oxford, UK: John Murray.
- Thompson, J. (1993). *Ideología y cultura moderna*. México, México: UAM.
- Trejo, L. y Valdemoros, M. "El uso del lenguaje matemático en la enseñanza del número natural en la escuela primaria". Tesis doctoral publicada en el Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (CINVESTAV – IPN). (2015).

ANÁLISE DE LIVRO DIDÁTICO: UMA OLHAR PARA O ENSINO DA LINGUAGEM GRÁFICA

Sidney Silva Santos

Geovane Carlos Barbosa

Nathalia Tornisiello Scarlassari

Celi Espasandin Lopes

sidneysantosnm@gmail.com, geovanecb@gmail.com, ts.nathalia@gmail.com,
celi.espasandin.lopes@gmail.com

Universidade Cruzeiro do Sul, Brasil

Resumen

O presente artigo tem como objetivo investigar se uma coleção de livros didáticos dos anos iniciais do Ensino Fundamental, aprovados no Programa Nacional do Livro Didático em 2019, apresenta as considerações apontadas por Brasil (2017) e verificar se as atividades propostas nesses livros, envolvendo o uso da linguagem gráfica, consideram os níveis de compreensão gráfica propostos por Curcio (1989). Organizamos os dados na perspectiva da pesquisa documental e observamos que as atividades exploram contextos diferentes, no entanto, não partem de situações vivenciadas pelas crianças como sugere Brasil (2017) e não apresentam enriquecimento significativos nas suas construções referentes umas às outras, impossibilitando avanços quanto aos níveis de compreensão da linguagem gráfica.

Palabras clave: *Ensino de Estatística, Livro Didático, Linguagem Gráfica, Anos Iniciais.*

Introdução

Com a implementação da Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2017), os currículos brasileiros introduziram o estudo de estatística e probabilidade desde os anos iniciais do Ensino Fundamental e destaca que é preciso considerar o papel heurístico das experimentações na aprendizagem da estatística e da matemática. Acreditamos que a criança quando inserida na escola, precisa desenvolver, por meio de vivências empíricas, a habilidade de relacionar informações mensuráveis com situações concretas, percebendo as ideias de incerteza e variabilidade e, analisar os dados além do que os textos prescrevem, questionando, as informações e os resultados, dessa forma, a criança estaria desenvolvendo o pensamento estatístico (CAMPOS, WODEWOTZKI e JACOBINI, 2011).

Neste documento o ensino da linguagem gráfica se dá a partir dos primeiros anos de escolaridade e solicita que as atividades planejadas, com o objetivo de ensinar essa temática, contemplem a habilidade de relacionar observações empíricas do mundo real por meio de representações como diagramas e pictogramas. Além disso, acrescenta que o primeiro contato

das crianças com essa temática “evolui o trabalho com a coleta e a organização de dados de uma pesquisa de interesse dos alunos” (BRASIL, 2017, p. 230).

A construção, leitura e interpretação da linguagem gráfica a partir das experiências vivenciadas pelos estudantes são fundamentais e indispensáveis desde os anos iniciais do Ensino Fundamental crescendo em sofisticação percorrendo os anos finais desse mesmo nível de escolaridade até chegar no Ensino Médio. Seu estudo se justifica, entre outras razões, por entendermos que “todos os cidadãos precisam desenvolver habilidades para coletar, organizar, representar, interpretar e analisar dados em uma variedade de contextos, de maneira a fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões adequadas.” (BRASIL, 2017, p. 230).

Outro fator primordial que interfere direta ou indiretamente no ensino e aprendizagem da linguagem gráfica é a abordagem dada a essa temática nos livros didáticos. O livro didático auxilia muitos professores no planejamento de aulas e, muitas vezes, é o único material utilizado pelo professor. Dessa forma, o livro didático precisa contemplar todo o conteúdo proposto pelo documento norteador (BNCC) e também, permitir que o professor, a partir das atividades propostas, tenha condições de extrapolar as barreiras postas e trabalhar de maneira a permitir ao aluno compreender o mundo em que vive.

Levando em consideração que o livro didático propõe ou deveria propor metodologias de ensino seguidas de atividades diferenciadas e com carácter experimental para fomentar o planejamento de aula do professor, este estudo busca investigar se uma coleção de livros didáticos de matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental, aprovada no Programa Nacional do Livro Didático em 2019, traz atividades de estatística que abrange os níveis de compreensão da linguagem gráfica proposto por Curcio (1989) e verificar se essas atividades foram planejadas como orienta a BNCC.

Fundamentação teórica

Muitos pesquisadores dedicaram-se ao estudo da construção, leitura e compreensão de diagramas para representar um conjunto de dados, entre eles destacamos: DÍAZ-LEVICOY, BATANERO et al., 2016; CURCIO, 1989; SANTOS, BARBOSA e LOPES, 2018; BATANERO, ARTEAGA e RUIZ, 2010; DÍAZ-LEVICOY, MORALES, LÓPEZ-MARTÍN, 2015. Esses estudos, nacionais e internacionais, revelam que muito tem se pensado no ensino e na aprendizagem dessa temática. Curcio (1989), por exemplo, distingue três níveis de compreensão da linguagem gráfica por um sujeito, a saber: leitura dos dados, leitura entre os dados e leitura além dos dados.

No Nível I, leitura dos dados, é o momento em que o estudante lê literalmente o gráfico, retirando os fatos explícitos que nele estão representados, por exemplo: ler as informações descritas no eixo horizontal e no eixo vertical; ler as informações contidas na legenda. Neste primeiro nível não se faz interpretação dos dados.

No Nível II de compreensão da representação gráfica, leitura entre os dados, o aluno faz algumas interpretações e organiza as informações contidas nos dados. É nesse nível que o estudante compara quantidades, faz relações matemáticas existentes no gráfico e realiza inferências simples a partir dos dados contidos nos gráficos. De acordo com Curcio (1989), este é o nível mais comum na compreensão dos gráficos, espera-se que o aluno identifique tendências no gráfico e o relacionamento de ideias.

No que se refere ao Nível III, leitura além dos dados, o estudante faz inferências ou prevê um determinado resultado ou acontecimento em função da experiência de seus conhecimentos e não apenas em informações apresentadas no gráfico. Ao atingir esse nível de compreensão os estudantes tem condições de formular perguntas além dos dados ali presentes, extrapolando e fazendo previsões ou inferências a partir da interpretação.

Para Curcio (1987) crianças do ensino fundamental devem participar ativamente de atividade estatísticas, que promovam a coleta de dados tomando como referência o mundo que os cerca para produzirem os seus respectivos diagramas. Essa participação desde a coleta é capaz de promover um progresso na visualização de padrões existentes entre os dados e suas relações implícitas, atingindo níveis de leituras diferentes e complementares.

Procedimentos metodológicos

O foco desta investigação é na análise de livros didáticos, com isso, buscamos recursos na pesquisa documental, uma vez que realizamos análise sistemática das atividades propostas em uma coleção de livros de matemática. Entendemos por pesquisa documental aquela realizada a partir de documentos “que não receberam ainda um tratamento analítico, ou que ainda podem ser reelaborados de acordo com os objetivos da pesquisa.” (GIL, 2008, p. 51). O primeiro passo da pesquisa documental consiste na exploração das fontes primárias, em documentos que constituem obras ou textos originais - materiais que ainda não tenham sido trabalhados ou discutidos por outros pesquisadores (BOOTH, COLOMB, WILLIAMS, 2005). A escolha pela abordagem documental se deu por analisarmos as atividades propostas em uma coleção de livros didáticos que são considerados por Booth, Colomb e Williams (2005) como fontes primárias.

Em busca de elementos para atingir nosso objetivo, analisamos a coleção que foi adotada pela maioria das escolas municipais e estaduais do estado de São Paulo de acordo com Brasil (2019a).no PNLD⁸ 2019 dos anos iniciais do ensino fundamental. A coleção, assim como todas as outras aprovadas, é composta por cinco volumes (do 1º ao 5º ano) e cada volume é estruturado em oito unidades que, segundo o autor, abordam as diferentes unidades temáticas propostas pela BNCC dos anos iniciais, a saber: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística. Nossa análise se deu em cada uma das oito unidades dos cinco volumes da coleção e nos limitamos à temática estatística, especificamente, nas atividades que abordam o conteúdo referente a linguagem gráfica. Buscamos nesses livros analisar se as atividades sugeridas para as crianças seguem a proposta curricular em vigor no país – BNCC e analisar se as atividades foram planejadas levando em consideração os níveis de compreensão gráfica proposta por Curcio (1989).

A Base Nacional Comum Curricular

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento normativo para as redes de ensino e suas instituições públicas e privadas, referência obrigatória para elaboração dos currículos

⁸ O Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD), segundo Brasil (2019a), é destinado a avaliar e a disponibilizar obras didáticas, pedagógicas e literárias, entre outros materiais de apoio à prática educativa, de forma sistemática, regular e gratuita, às escolas públicas de educação básica das redes federal, estaduais, municipais e distrital e também às instituições de educação infantil comunitárias, confessionais ou filantrópicas sem fins lucrativos e conveniadas com o Poder Público.

escolares brasileiros e propostas pedagógicas para o ensino infantil e ensino fundamental, Brasil (2017). Esse documento propõe habilidades que deverão ser desenvolvidas nos anos iniciais do ensino fundamental. O Quadro 1 apresenta essas habilidades para a unidade temática Probabilidade e Estatística, em especial para o estudo de gráficos estatísticos para estudantes do 1º ano.

Quadro 1

Habilidades esperadas para o desenvolvimento da linguagem gráfica

ANOS	HABILIDADES
1º ANO	(EF01MA21) Ler dados expressos em tabelas e em gráficos de colunas simples. (EF01MA22) Realizar pesquisa, envolvendo até duas variáveis categóricas de seu interesse e universo de até 30 elementos, e organizar dados por meio de representações pessoais.

Fonte: Brasil (2017)

Buscamos as habilidades propostas em Brasil (2017) e expostos no quadro acima as habilidades esperadas para o 1º ano do ensino fundamental.

Descrição e Análise das Atividades

A coleção não apresenta capítulo específico sobre Probabilidade e Estatística e seu estudo se dá ao final de alguns capítulos. As atividades são apresentadas em algumas seções durante o desencadear de cada volume e as abordagens que “exigem realização de pesquisas são pouco exploradas” (BRASIL, 2019b, p. 57). Nos cinco volumes identificamos 25 atividades envolvendo a linguagem gráfica, das quais cinco atividades estão no livro do 1º ano, uma no 2º ano, duas no 3º ano, dez no 4º ano e sete no 5º ano. Para este artigo selecionamos e analisamos três atividades retiradas do livro do 1º ano por possuírem características e contextos diferentes.

A atividade da Figura 1 sugere o envolvimento da criança em fases iniciais de coleta, organização, representação, leitura e interpretação de informações a partir de um contexto cotidiano.



Figura 1. Pesquisa sobre a fruta preferida de sua turma

Fonte: Dante (2017, p. 54), Livro do 1º Ano

O item a exige da criança uma organização pessoal das informações coletadas na pesquisa possibilitando o aluno à conceber por meio de diferentes tipos de representações, tais como: marcações por meio de traços (horizontais, verticais, diagonais), desenhos das frutas (pictogramas), a combinação de ambas (traços e frutas), representação a partir de cores etc. No entanto, o item b, limita a criança utilizar essas diferentes representações para organizar os dados coletados. A criança é levada a representar as preferências pelas frutas por meio de um diagrama, pré-estabelecido, organizado em colunas. Essas ações vão de encontro ao que é proposto em Brasil (2017) no que tange as habilidades de realizar pesquisas e organizar dados por meio de representações e procedimentos pessoais, em um universo limitado até 30 elementos com apenas uma variável categórica. Nos itens c, d e e são abordados os níveis de compreensão da linguagem gráfica proposto por Curcio (1989) quanto a leitura dos dados (Nível 1). É esperado que a criança leia os eixos, leia a legenda, leia o título e observe a escala. Destacamos o fato de que a leitura da escala do eixo (quantidade de pessoas) pode passar despercebido pela criança, pois sua atenção se voltará para contagem dos retângulos pintados.

A próxima atividade traz resultados prontos de uma pesquisa realizada por meio de uma gincana com alunos do 1º ano, na qual cada equipe está indicada por um símbolo, agora, representados por um gráfico de barras simples.



Figura 2. Gincana, ordem dos números e gráfico

Fonte: Dante: (2017, p.75), Livro do 1º Ano

Na situação o eixo horizontal representa a quantidade de pontos que cada criança marcou por meio de retângulos (cada retângulo representa a unidade) e o eixo vertical traz figuras geométricas para representar o valor de cada variável. No itens a, b e c a criança faz a leitura dos dados a partir do gráfico e espera-se que identifique as equipes relacionando-as com suas respectivas pontuações, ou melhor, eixo vertical com eixo horizontal; Nos itens d e e o esperado é que as crianças relacionem as pontuações com suas equipes, ou ainda, eixo horizontal com eixo vertical. Essas ações não estão de acordo com o proposto em Brasil (2017), acreditamos, assim como este documento, que o primeiro contato da criança com a estatística se dá por meio de suas organizações e representações pessoais a partir de contextos pertinentes à sua realidade. Essa atividade não apresenta avanços em relação aos níveis de compreensão do desenvolvimento da linguagem gráfica em comparação com a atividade, permanece no Nível I. Entendemos que o uso de círculos, triângulos, quadrados e retângulos para representar as equipes pode confundir a criança na identificação das frequências que foram representadas por quadrados, mesmo que as cores sejam as referências na contagem das equipes na gincana.

A atividade seguinte sugere uma contagem inicial das crianças dispostas nas equipes azul, verde, amarela e vermelha de uma gincana escolar, que envolve a leitura e interpretação das pontuações obtidas por essas equipes por meio de uma tabela simples e um gráfico de barras simples.



Figura 3. Atividade sobre a grande gincana

Fonte: Dante (2017, p. 198), Livro do 1º Ano

Nos itens a, b e c espera-se que a criança faça uma leitura dos dados (Nível I) contidos na situação com base nos desenhos das quatro equipes. Para o item d é exigido que a partir do gráfico de colunas simples a criança preencha a tabela simples retirando as informações do gráfico. A atividade permite a criança ler os dados expressos em tabelas simples e gráficos, como sugere Brasil (2017).

Algumas considerações

O artigo teve como objetivo investigar se uma coleção de livros didáticos dos anos iniciais do Ensino Fundamental, aprovados no Programa Nacional do Livro Didático em 2019, traz as considerações apontadas pela BNCC e, verificar se as atividades propostas nesses livros, envolvendo o uso da linguagem gráfica, considerando os níveis de compreensão propostos por Curcio (1989).

A partir das atividades analisadas verificamos que embora abordem contextos diferentes não partem de situações vivenciadas pelas crianças como sugere Brasil (2017) e não apresentam enriquecimento significativos nas suas construções referentes umas às outras, impossibilitando avanços quanto aos níveis de compreensão da linguagem gráfica proposta por Curcio (1989). Destacamos também que em Brasil (2017) é proposto o uso de tecnologias para que os alunos possam usar a tecnologia de forma consciente, crítica e responsável com objetivo de resolver problemas cotidianos, porém, no livro didático não identificamos estratégia pedagógica que envolvesse o uso desse recurso.

Pensamos que o mais adequado seria sugerir a construção dos dados pelos alunos, por meio de entrevistas, por exemplo. Com os dados em mãos, o professor deve orientar o estudante a tabular essas informações a partir de estratégias próprias. Enfatizamos que o trabalho em

grupo facilita a aprendizagem e é fundamental para que as crianças desenvolvam habilidades de colaboração e argumentação, desde que bem orientado pelo professor.

Referências

- Batanero, C., Arteaga, P. e Ruiz, B. (2010). Análisis de la complejidad semiótica de los gráficos producidos por futuros profesores de educación primaria en una tarea de comparación de dos variables estadísticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 28, 141-154.
- Booth, W. C., Colomb, G. G., & Williams, J. M. (2005). *A arte de pesquisar*. São Paulo: Martins Fontes.
- Brasil. (2017). *Base Nacional Comum Curricular*. Acesso em 02 de Maio de 2019, disponível em <http://www.mec.gov.br/>:
http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=79601-anexo-texto-bncc-reexportado-pdf-2&category_slug=dezembro-2017-pdf&Itemid=30192
- Brasil. (2019a). *Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação*. Acesso em 24 de Maio de 2019, disponível <http://www.fnnde.gov.br/index.php/programas/programas-do-livro/pnld/dados-estatisticos>
- Brasil. (2019b). *Guias do Programa Nacional do Livro e do Material Didático*. Acesso em 28 de Maio de 2019, disponível em Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação: http://pnld.nees.com.br/pnld_2019/componente-curricular/matematica
- Campos, C. R., Wodewotzki, M. L., & Jacobini, O. R. (2011). *Educação Estatística: teoria e prática em ambientes de modelagem matemática*. Belo Horizonte: Autêntica Editora.
- Cúrcio, F. R. (1987). Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18(5), (pp. 382-393).
- Cúrcio, F. R. (1989). Developing graph comprehension: elementary and middle. Reston, VA: NCTM.
- Dante, L. R. (2017). *Ápis matemática, 1º ano: ensino fundamental, anos iniciais* (3ª ed., Vol. 1º). São Paulo: Àtica.
- Díaz-levicoy, D., Morales, R. e López-Martín, M. M. (2015). Tablas estadísticas en libros de texto chilenos de 1º y 2º año de educación primaria. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, 4(7),10-39
- Gil, A. C. (2008). *Métodos e Técnicas de Pesquisa Social*. São Paulo: Atlas.
- Santos, S. Barbosa, G. y Lopes, C. (2019). Gráficos estatísticos: leitura e interpretação. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. Disponible en https://www.ugr.es/~fqm126/civeest/silva_celi.pdf

UN ANÁLISIS NORMATIVO ONTOSEMIÓTICO DE LOS TEXTOS MATEMÁTICOS ESCOLARES BAJO EL ENFOQUE DE GÉNERO

Anderson D. Chavez Marcelo

AndersonDny@gmail.com

Universidad Nacional de Educación, Perú

Resumen

En este artículo se presenta los avances de una investigación que tiene como fin describir la relación entre género y los textos de matemática del nivel primaria, y así mismo explicar cómo el género norma el diseño de las tareas y la actividad matemática. Todo ello, partiendo de, la literatura sobre género y educación matemática, para delimitar el problema. Así mismo el uso del enfoque ontosemiótico como marco teórico-metodológico, posibilita responder a preguntas del tipo ¿qué ha pasado aquí? y ¿por qué? a través de las herramientas teóricas: sistema de prácticas, configuración ontosemiótica, función semiótica y norma ecológica. Siendo ésta última el conjunto de normas sociales, políticas, económicas y etc. que regulan la actividad matemática, y en éste estudio, la norma género.

Palabras clave: *Palabras clave: función semiótica, sistema de normas, género.*

"Sin cambiar las reglas, no es posible modificar los procesos gobernados por dichas reglas"

Godino, Font, Wilhelmi y Castro (2009).

Introducción

Consideramos a las matemáticas como construcciones sociales de sistemas de signos en un determinado contexto, en el cual se realizan sistemas de prácticas para alcanzar un determinado fin, como, por ejemplo, la resolución de problemas, y que además dichas prácticas que se realicen –en ese contexto– son guiadas por reglas o normas que no solamente son matemáticas (es decir, objetos matemáticos previamente conocidos y que se están usando), sino también por normas de otras naturalezas, tal es el caso como, las del entorno social, político, económico. Sin embargo, como menciona Wittgenstein (1953) la caracterización de una norma no es de manera precisa, es decir, existen normas que se puedan reconocer, pero habrá otras que no, haciéndolas imperceptibles, pero que sabremos cuando se la transgrede. Un caso particular de éste, es el género. Por último, también consideramos que de éstos sistemas de prácticas –tanto matemáticos como de otra naturaleza–, emergen nuevos objetos ya sean, tantos matemáticos como de otra naturaleza, que ahora regularán a las futuras prácticas. Por lo tanto, "no solo se siguen normas, sino también se crean nuevas normas".

Ahora bien, asumiendo éstos presupuestos –que son los del enfoque ontosemiótico– y

posicionándonos en instituciones escolares, aquéllos que se encuentra inmersos en determinados contextos. Las matemáticas que se pretenden enseñar vienen cargadas con normas de distintas naturelzas que serán punto de partida o de referencia para re-construir las normas que yacen en dichos contextos, normas que como se comentó pueden ser tanto objetos matemáticos como objetos sociales (p.e. la categoría género), así como otros. En el capítulo dedicado al marco teórico y metodología se explicará con más detalle.

Una de las motivaciones del estudio se encuentra en el siguiente problema observado en clase.

En una fiesta hay 15 varones y 18 mujeres ¿Cuántas parejas de baile se pueden formar?

Entre las diferentes respuestas que se encontró, se identificó que algunas de las acciones para resolver el problema son debido al uso de normas o reglas que se encontraban en la matemática, pero otras correspondían a seguir una norma social, como, por ejemplo, “un varón no puede bailar con otro varón” o “las parejas se forman solo entre personas de diferente sexo”. Entonces, se encontró un problema y se decidió en explorarlo.

Planteamiento del problema

Según la motivación presentada, así como, algunas referencias con relación al tema en cuestión, tales como Farfán C., y Farfán R. (2017) y Martínez (sf), pero sobre todo basándonos en herramientas del enfoque ontosemiótico como marco teórico-metodológico, que serán presentadas en la siguiente sección. Llegamos a identificar que existe una problemática entorno al planteamiento de un problema de matemática de un texto y su resolución, cuyo factor de conflicto podría ser, el género. Debido a ello, este estudio se justifica en la necesidad de identificar y describir si existe alguna relación entre el género y los textos de matemática del nivel primario del Ministerio de Educación del Perú y explicar cómo es esto es posible. Partiendo para ello de las siguientes preguntas exploratorias:

- ¿El género norma los textos matemáticos escolares de nivel primario?
- ¿Cuáles son las normas de género que están presentes en dichos textos escolares?
- ¿Cómo el género norma los textos matemáticos escolares?

Marco teórico y metodológico.

Esta investigación se sitúa en el enfoque ontosemiótico [EOS] como marco teórico y metodológico. A continuación, se presenta su metodología adaptada al estudio y luego una herramienta teórica de dicho enfoque que se utilizará para realizar los análisis.

Enfoque ontosemiótico como metodología de investigación

El enfoque ontosemiótico propone una propia metodología dimensionada en focos, fines, generalizabilidad y nivel de análisis, tal como se muestra en los estudios de Quiroz (2015) y Torres (2015), presentaremos a continuación un comentario de éstos y una adaptación para el presente estudio:

El *Foco* se encarga de dimensionar los fenómenos que podríamos percibir, para así identificarlo y continuar con el estudio. Una vez ello, los *fines* nos permiten qué hacer, aquí se presenta las intenciones y las preguntas que pretenden los niveles de análisis didáctico del enfoque

ontosemiótico (sistema de prácticas, configuración de objetos y procesos, trayectorias y configuración didáctica, normas y metanormas, e idoneidad didáctica). Además de ello, creemos que es necesario situarlas en *fases*, para el presente estudio en una fase de diseño –o en una fase anterior a ésta– de un proceso de instrucción matemática, aunque no descartamos que pueda éste realizarse en la implementación y evaluación (de la implementación).

Según el enfoque ontosemiótico –basándose en estudios previos– las reglas que regulan los procesos de instrucción se pueden nombrar, y esto debido a la identificación de regularidades en los patrones de interacción que suceden en dicha instrucción. El cuarto nivel de análisis, intenta mostrarnos una organización de cómo las normas conocidas regulan los procesos de instrucción, sin embargo, creemos que éstos criterios también sirven para reconocer las normas que yacen en el diseño –e inclusive antes– y no solo en la implementación. Ahora bien, si nos nuestros *fin*es son las normas que regulan la *fase* del diseño, podríamos *enfocarlo* en la faceta epistémica, esto quiere decir, enfocar la atención en los objetos primarios intervinientes y emergentes de una configuración epistémica que pretende ser enseñada, que regulan y regularán –respectivamente– las prácticas que resuelven los problemas. Si, además, nos *enfocamos* en la faceta ecológica, estaríamos atendiendo a las *normas* sociales, políticas, económicas o de otra índole que tiene como intención educar a los estudiantes para una sociedad determinada, estas normas pueden entenderse como objetos (pero no matemáticos) sino sociales, y ésta idea se complementa perfectamente con la idea de *objeto institucional*, objeto que no es reducido solamente a objetos de naturaleza propiamente matemática. Creemos que la norma género, es un objeto institucional que regula las prácticas de los sujetos dentro de dicha institución y que interactúan con prácticas propiamente matemáticas para conseguir un determinado objetivo (p.e la resolución de problemas), y así como el conocimiento matemático de dicha institución intenta re–construirse en el aula de clase, de igual manera lo hará el género, y así convirtiendo las prácticas en prácticas discriminatorias.

Tanto la faceta epistémica como la ecológica, pueden posicionar correctamente los fines que se pretenden hacer, es decir, análisis de los problemas, las prácticas y los objetos (tanto matemáticos como sociales). Y esto, puede enfocarse desde la faceta mediacional cuyo fin será solo descriptivo, es decir, sirve de soporte donde se encuentran tanto la faceta epistémica como ecológica, estos medios pueden ser medios materiales o de otra naturaleza. Para así, analizar los problemas y la resolución de éstos, considerando a la comprensión del problema parte de su resolución.

- El foco de ésta investigación es epistémico–mediacional, debido a que centra su atención en Cuadernos de Trabajo de matemática del nivel primario que diseña y distribuye el ministerio de educación del Perú (MED), pero sobre todo es ecológico, ya que se centra su atención a la relación con otras disciplinas o ciencias, en éste caso la psicología, y en particular el enfoque de género.
- El Fin es descriptivo–explicativo, debido a que realizará análisis normativos –y de ser necesario análisis ontosemióticos– de los significados que nos brinde los textos, para así responder a preguntas del tipo ¿Qué ha pasado aquí y por qué? En particular, ¿Qué pasa y por qué en la actividad matemática cuando se analiza a través del enfoque de género?

- El nivel de generalizabilidad es exploratorio, debido a que no pretende generalizar sus resultados a todos los textos matemáticos escolares y además intenta indagar si las normas construidas socialmente (en éste caso el género) regulan las prácticas matemáticas en la resolución de problemas, podría decirse en términos generales de investigación que es un estudio de caso, cuya muestra intencional son solo los textos que el ministerio proporciona.
- El nivel de análisis es, global, debido a que se presta la atención en todos los libros del ministerio de educación del Perú, en sus diferentes versiones: texto del estudiantes y guía del maestro.

Así como podríamos enmarcar ésta investigación en un estudio de caso, también podríamos enmarcarla en el análisis de contenido. Análisis, que el EOS sustituye con dos de sus herramientas teóricas, por una parte, la configuración ontosemiótica, que son las redes de objetos que aparecen y se involucran en la actividad matemática, movilizadas por las acciones de los agentes (ya sean personas o instituciones) para alcanzar determinados fines, como, la resolución de problemas. Éstas redes de objetos son de naturaleza diversa como: situaciones problemas, conceptos/definiciones, propiedades, procedimientos y argumentos. Y, por otra parte, la herramienta función semiótica, que se menciona en Godino, Batanero y Font (2009) que relaciona a los objetos –no necesariamente matemáticos– éstos pueden ser situados en dos planos y un criterio o regla:

- Plano de expresión (objeto inicial, considerando frecuentemente como el signo)
- Plano de contenido (objeto final, considerado como el significado del signo, esto es, lo representado, lo que se quiere decir, a lo que se refiere un interlocutor)
- Criterio o Regla de correspondencia, esto es, un código interpretativo que regula la correlación entre planos de expresión y contenido. Estableciendo el aspecto o carácter del contenido referido por la expresión.

Análisis normativo del enfoque ontosemiótico

El cuarto nivel de análisis didáctico del EOS “identificación de normas y metanormas” propone responder a preguntas del tipo “¿Qué ha pasado aquí y por qué?”. En éste nivel (basándose previamente en la literatura sobre el estudio de contrato didáctico, normas sociales y normas sociomatemáticas), se presenta una categorización sobre las normas, a las cuales dimensionará en facetas. Además, sugiere que podría realizarse una clasificación distinta y complementaria a la presentada en facetas, centrándose en los momentos, el grado coerción y el origen, tal como se muestra en la figura 1.



Figura 11. Dimensión normativa. Tipos de norma. (Godino y Font, 2008)

A continuación, se describe la categorización de las normas en las seis facetas que se propone en Godino, Font, Wilhelmi y Castro (2009):

- Normas epistémicas: Aquí encontramos a las normas que son presentadas en forma objetos institucionales contruidos socialmente, es decir, objetos que son el resultado del diálogo y el consenso de los sujetos que pertenecen a dicha institución y que están listos para regular las prácticas de los sujetos, encontrando aquí a los objetos primarios que componen una configuración epistémica (conceptos, proposiciones y procedimiento). Además, cada una de ellas está asociada a una metanorma (en éste caso norma metaepistémica), por ejemplo, en las situaciones problema, es necesario que el alumno pueda responder a preguntas del tipo, ¿qué es un problema? ¿cuándo se ha resuelto un problema? ¿qué reglas conviene seguir para resolver un problema?, etc. De manera similar, con relación al componente «argumento», el alumno necesita saber qué es y cuándo se considera válido un argumento en la clase de matemáticas. Para éstos, los sujetos en una determinada institución responden según las normas existen y que se comparten (metanormas).
- Normas ecológicas, son las normas que pretenden al menos alcanzar o guiar dos objetivos. El primero está relacionado con educar a los sujetos que intervienen en un proceso de enseñanza *para* una determinada sociedad (ya sea democrática o dictatorial) enfocando la atención en aspectos sociales, políticos y económicos de dicha sociedad que se pretende. La segunda se relaciona con la formación inicial de los futuros profesionales que el modelo de sociedad requiera, en este sentido, tiene coherencia que para alcanzar ello, se preste atención a qué contenidos se tienen que enseñar, encontrándose ésto usualmente en las directrices curriculares ya sea a nivel de estado o de la institución escolar misma, es decir, son la pauta. Además de ello, existe –según la sociedad que se pretende– una obligación por el profesor de informar los diferentes estados de aprendizaje según las técnicas o tipos de evaluación que emplee. En éste último punto, se percibe que ésta faceta (al igual que otras tal vez) puede interactuar con característica de las otras facetas o son normas que están por encima de las otras nomas, también es el caso como, la obliqación del uso de las TICS por la institución escolar, las

competencias que los alumnos tienen que alcanzar los estándares de evaluación de PISA y así, entre otros.

Enfoque de Género y algunos estudios con su relación a la educación matemática.

Enfoque de género

El género se refiere a los roles, las características y oportunidades definidos por la sociedad que se consideran apropiados para los hombres, las mujeres, los niños, las niñas y las personas con identidades no binarias... No es un concepto estático, sino que cambia con el tiempo y del lugar (Organización Mundial de la Salud [OMS], 2018).

La masculinidad y feminidad aluden al grado en que una persona se ajusta a las expectativas culturales sobre la conducta y la apariencia que deben mostrar hombres y mujeres. Los estereotipos pueden resultar nocivos, ya que inducen a generalizaciones equivocadas y, por ende, repercuten en el trato recíproco entre los miembros de una colectividad social (Master, Johnson y Kolodny, 1988).

Así mismo cuando las personas o los grupos no se ajustan a las normas de lo masculino y lo femenino –el género– suelen ser objeto de estigmatización, exclusión social y discriminación, todo lo cual puede afectar negativamente a la salud. Además de, que existe una superioridad en privilegios de un género sobre el otro. El género interactúa con el sexo biológico, pero es un concepto distinto, ya que éste es social (OMS, 2018).

El enfoque de género o perspectiva de género es una categoría amplia de análisis cuya estrategia particular, la igualdad de género, consiste en una igualdad de derechos, responsabilidades y oportunidades para todas las personas, para disminuir o erradicar las consecuencias que el género norma, tal como son, las discriminaciones y la violencia del género (OMS, 2018).

Algunos estudios de la relación entre el género y la educación matemática

Algunos estudios encontrados con relación a la perspectiva de género en la educación matemática atienden –en término metodológicos del EOS– a focos y fines diferentes, haciendo una adaptación al EOS encontramos:

- El estudio realizado por Farfán C. y Farfán R (2017), bajo la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, unos de sus focos de atención es la faceta afectiva, en particular, en las actitudes que tuvieron dos varones y dos mujeres antes de enfrentarse a problemas multiplicativos, con el fin de intentar de explicarlos a través de normas ecológicas (en este caso de la norma género con algunas características de normas cognitivas). El otro foco es la atención a la faceta cognitiva, es decir, en las prácticas, los objetos y los procesos que se realizaron, y con el fin proponer una explicación que son normados desde la faceta ecológica (el género con características de normas cognitivas).
- Así mismo, encontramos también otro estudio, pero con relación al análisis de textos desde el enfoque de género, tal es el caso de Martínez (sf) en el cual el foco de atención es la faceta epistémica–mediacional, es decir, textos matemáticos escolares, en particular su información verbal o gráfica de los problemas, cuyo fin fue explicar que éstos fueron diseñados bajo la norma ecológicas de género.

Ambos estudios fueron enfocados desde perspectivas distintas, en lo epistémico, cognitivo, afectivo y mediacional, para explicar cómo son normados por el género, ya sea antes del diseño de tareas (en la faceta afectiva), en el diseño de tareas (en la faceta epistémica–mediacional) y en su resolución (en la faceta cognitiva).

Así mismo, notamos que existe en ambos estudios, una hipótesis o presunciones previas, que permite realizar el estudio, es decir, la identificación de la problemática y su posible comprensión conociendo las normas que la regulan. Resaltamos que éste estudio se enfocará en lo epistémico–mediacional, es decir, en los textos matemáticos escolares, para comprender cómo son normados por el género desde el diseño de tareas hasta las prácticas, los objetos y procesos que son regulados.

Algunos análisis de normativos

Los primeros análisis y resultados atienden al diseño de tareas del texto “Cuaderno de trabajo” del 4to grado de educación primaria, para comprender por qué fueron creados y cómo tiene una relación con la norma, género.

Tabla 1

Conteo de las normas de género o de equidad en la información de los problemas

Información Género	Representación verbal	Representación gráfica	Suma parcial	Suma total
Que refuerzan lo “masculino”	5	2	7	14
Que refuerzan lo “femenino”	5	2	7	
Que promueven la equidad	7		7	7

Fuente: Creación personal

En la tabla 1 se muestra el conteo que se realizó en la información de las situaciones problemas –un ejemplo de éste se puede ver en el Anexo–, que actúan como o reforzador de género (14 informaciones) o como promotor de la equidad de género (7 informaciones). A continuación, se presenta una breve descripción de los roles, características y oportunidades que refuerzan el género o promueve la equidad:

Que refuerzan el género masculino:

- Roles: Niños jugando futbol; ir a comprar alimentos y debido a que tiene una empresa.
- Características: A un niño le gusta el color azul, negro, rojo y azul.
- Oportunidades: de ser tener un taller de mecánica y de ser albañil.

Que refuerzan el género femenino:

- Roles: Mujeres en trabajos decorativos o manualidades; mujeres en tareas de confección; mujeres en tareas de repostería; mujeres en actividades de cocina y ir de compras al mercado.
- Características: Colores como rosado, celeste bebé, morado y amarillo como favoritos de niñas.

Que promueven la equidad de género:

- Roles: Varones en tareas de confección; varones en tareas de repostería; varones en actividades de repostería y varones en actividades de cocina.
- Oportunidades: Mujeres que tienen la oportunidad estar en un taller de repujado; ambos realizan trabajos en la agricultura y ganadería, venta de alimentos y bebidas en el mercado o en la calle.

Se puede percibir que existe una intención que permite ver que las mujeres pueden ocupar espacios y acciones de los varones, así como viceversa, aunque aún se notan resistencias al proponer tareas que refuerzan lo que el género ya ha establecido. La pregunta que originó este primer resultado es ¿Cuál debe de ser el porcentaje en el que se presenten éste tipo de informaciones?

La segunda parte del análisis se enfoca en las normas que podrían intervenir en la resolución de los problemas y la explicación de cómo éstos normas la actividad matemática.

- 4 Lola encuesta a sus compañeras y compañeros de aula sobre sus preferencias en lectura: 6 de ellos prefieren leer novelas; 8, prefieren cómics; 7, cuentos, 5, periódicos, y 4, revistas. ¿Cuál será el gráfico más adecuado para mostrar la información a sus compañeros?

Figura 12. Problema relacionado con el género. (MED, 2018, p.46)

En la práctica “Leer y comprender” nos enfocamos en las funciones semióticas que se podrían establecer entre la expresión y lo que se interpreta de ésta (el contenido), para la comprensión del problema, así como la norma que permite dicha interpretación.

Si observamos la siguiente relación, o llamemos mejor, función semiótica, a “Compañeras y compañeros” → “mujeres y varones”. Esto es realizado debido al conocimiento implícito o explícito de una norma que promueve la equidad. Mientras que en la misma información del problema si observamos la relación “6 de ellos...” → “6 personas del grupo de varones” o “6 de ellos...” → “6 personas del grupo de varones y mujeres”, notamos que estas interpretaciones son debido a reglas que la Real Academia de la española propone, es decir, el uso de masculino genérico para referirse tanto a solamente varones, como a varones y mujeres, generando al menos conflicto a la hora de decidirse por una determinada interpretación. Es decir, mientras que “ellos” puede imponerse y hacer referencia a ambos sexos, por el otro lado, cuando decimos “ellas” para referirnos a ambos sexos, esto es inadecuado. Por ello, debido a que no existe tal oportunidad, notamos entonces que el género puede explicar este segundo ejemplo presentado como regulador de la actividad que se realizará. Estamos de acuerdo con la siguiente cita:

El abuso del masculino genérico invisibiliza a la mujer. Es un fallo en el comportamiento

comunicativo, es decir, hay contextos en los que es necesario especificar si nos dirigimos solo a hombres o a hombres y mujeres. Hacerlo es, precisamente, una cuestión de eficacia comunicativa (Márquez, 2019).

Algunas reflexiones

Con ambos análisis presentados se pretende mostrar y explicar que la norma género está presente en el diseño de tareas, ya sea solo con la intención de reforzar los roles, características u oportunidades ya existentes y que se le asignan a cada sexo, a través de información verbal o de imágenes. Y por el otro lado, el género normando la actividad matemática, desde la comprensión del problema hasta su resolución, explicados a través de las reglas de interpretación de una función semiótica.

Referencias

- Farfán C. y Farfán R. (2017). "Matemática educativa y (perspectiva de) género como categoría transversal desde el enfoque socioepistemológico". Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/320679822_Matematica_educativa_y_perspectiva_de_genero_como_categoria_transversal_desde_el_enfoque_socioepistemologico
- Godino, J., Batanero, C. & Font, V. (2009). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Departamento de didáctica de la matemática. Recuperado en Http://www.ugr.es/~jgodino/funcionessemiотicas/sintesis_eos_10marzo08.pdf
- Godino, J. Vicenç, F., Wilhelmi, M., y Castro C. (2009). Aproximación a la dimensión normativa en Didáctica de las matemáticas desde un enfoque Ontosemiótico. Recuperado de: https://www.ugr.es/~jgodino/eos/dimension_normativa.pdf
- Martínez, C. (sf). Estudio desde una perspectiva de género en los libros de texto de matemáticas de educación primaria (trabajo fin de grado). Universidad de Granada, España.
- Masters, W.H., Johnson, W.E., y Kolodny, R.C. (1988). *La sexualidad humana*. España, Barcelona: Grijalbo.
- Ministerio de educación del Perú (2018). Matemática 6° cuaderno de trabajo. Perú: Quad/Graphics.
- Organización Mundial de la Salud. (25 de agosto del 2018). Género y Salud. Recuperado de: <https://www.who.int/es/news-room/fact-sheets/detail/gender>
- Quiroz, J. (2015). Construcción de un significado de referencia de la adición de números naturales en el sistema curricular peruano de educación primaria (tesis de maestría). Pontificia universidad católica del Perú, lima.
- Torres, C. (2016). Creación de problemas sobre funciones cuadráticas por profesores en servicio, mediante una estrategia que integra nociones del análisis didáctico (tesis de maestría). Pontificia universidad católica del Perú, Lima.
- Wittgenstein, L. (1953). *Investigaciones filosóficas*. Barcelona, España: Crítica.

ÁLGEBRA NOS ANOS INICIAIS E FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL: ANÁLISE DAS EXPECTATIVAS INSTITUCIONAIS

Anderson Alves

Marlene Alves Dias

Karina de Oliveira Castro

Mariana Silva Nogueira Ribeiro

alves150@hotmail.com, maralvesdias@gmail.com,

karinadeoliveiracastro@gmail.com, mariana.snogueira@kroton.com.br

Universidade Anhanguera de São Paulo, Brasil no Processo de Ensino e Aprendizagem no Brasil

Resumen

Esse extrato sobre as expectativas institucionais indicadas nas novas orientações brasileiras, para o eixo Álgebra e Funções, teve como objetivo identificar nos documentos oficiais para o ensino e aprendizagem de Álgebra no ensino fundamental anos iniciais e finais, quais as praxeologias privilegiadas para estabelecer a passagem da aritmética para a álgebra, tentando verificar a existência de relação entre a expectativa institucional e o aumento das dificuldades dos estudantes apresentadas nas macroavaliações. O quadro teórico é constituído pela Teoria Antropológica do Didático, as noções de quadro e nível de conceituação e níveis de conhecimento esperados dos estudantes. Trata-se de pesquisa qualitativa, cujo método é a pesquisa documental. As análises foram realizadas em documentos oficiais, livros didáticos e na macroavaliação SARESP, por meio de uma grade por nós construída. Podemos considerar que as dificuldades dos estudantes estão associadas à falta desenvolvimento explícito do pensamento algébrico e da passagem da Aritmética para Álgebra.

Palabras clave: *Pensamento Algébrico, Praxeologias, Ostensivos e Não-Ostensivos.*

Introdução

Nos últimos anos, os alunos da Educação Básica vêm sendo avaliados em nível internacional pelo Programa Internacional de Avaliação dos Estudantes (PISA); no âmbito nacional pelo Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) e, para o estado de São Paulo, em nível estadual, pelo Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP).

Essas avaliações têm mostrado o baixo desempenho dos alunos nas disciplinas de Matemática e Português de todas as etapas da Educação Básica, que se acentua à medida que os alunos progredem em seus estudos.

Interessamo-nos pelos resultados divulgados pelo SAEB, cuja avaliação tem por objetivo diagnosticar a qualidade da educação básica brasileira e identificar alguns fatores que podem

dificultar o desenvolvimento do aluno, sendo aplicada para estudantes que cursam o final das etapas escolares: Ensino Fundamental - anos iniciais (5º ano), Ensino Fundamental - anos finais (9º ano) e Ensino Médio (3º ano), sendo que as duas primeiras etapas correspondem ao grupo destacado para nosso estudo.

Os resultados das avaliações dos alunos que participaram da prova em 2017 foram coletados no site G1 a partir do relatório do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP) e apresentados na figura 1 abaixo:

Fonte: <https://g1.globo.com/educacao/noticia/2018/08/30/7>.

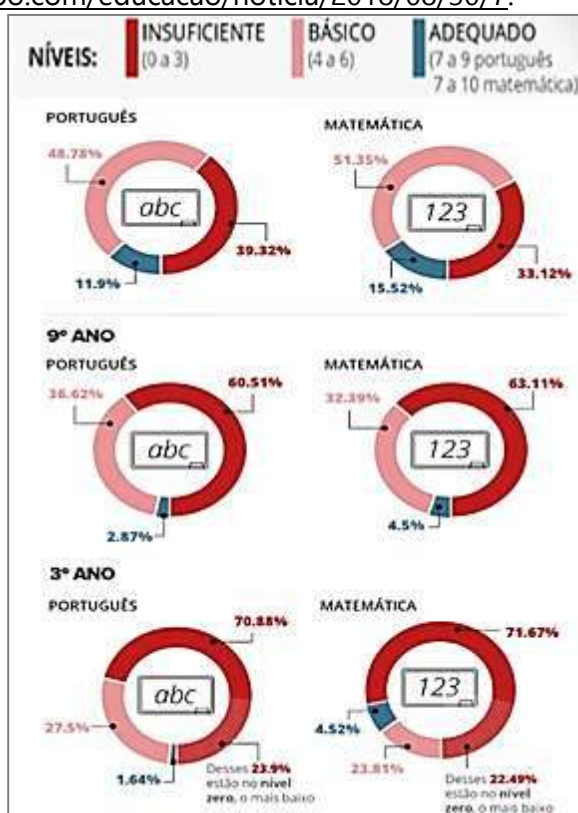


Figura 1. Resultados do SAEB 2017

Por meio dessa imagem, podemos comparar os resultados de Português e Matemática, que se mostram bastante próximos e indicam que, nas duas disciplinas, a porcentagem de alunos no nível insuficiente aumentou de forma considerável. Ressaltamos ainda que os resultados da macroavaliação SARESP são próximos aos apresentados em nível nacional, o que nos conduziu à problemática de nossa pesquisa, a saber.

Constatadas as dificuldades dos estudantes em Matemática, consideramos que a álgebra simbólica, quando introduzida prematuramente, pode ser uma das causas do aumento dessas dificuldades. Observando o relatório pedagógico do SARESP e, mais particularmente, algumas das questões e habilidades encontradas a partir do 7º ano, podemos ponderar que o baixo desempenho dos alunos verificado pode estar relacionado ao fato de ser nesse mesmo ano que se introduz a Álgebra utilizando apenas seu simbolismo com poucas referências ao seu desenvolvimento histórico e ao pensamento algébrico, compreendido aqui como uma forma de

pensamento matemático que, segundo Kaput (1998), corresponde a estabelecer generalizações sobre dados e relações matemáticas, por meio de conjecturas e argumentos que se expressam pela linguagem cada vez mais formal.

A partir da problemática mencionada, colocamo-nos a questão de pesquisa: *Seria a álgebra simbólica a causa do aumento das dificuldades matemáticas dos estudantes a partir do 7º ano?*

Na tentativa de responder a essa questão, o objetivo da pesquisa foi: *Identificar nos documentos oficiais para o ensino e aprendizagem de Álgebra no ensino fundamental anos iniciais e finais, quais as praxeologias privilegiadas para estabelecer a passagem da aritmética para a álgebra, tentando verificar a existência de relação entre a expectativa institucional e o aumento das dificuldades dos estudantes apresentadas nas macroavaliações.*

Procedimentos metodológicos

Trata-se de uma pesquisa qualitativa, de acordo com Godoy (1995), que segue o método da pesquisa documental, conforme Lüdke; André (2013), pois, de um lado, não mensuramos os eventos estudados, mas a partir da nossa questão de pesquisa e de suas derivadas, escolhemos os documentos a serem analisados e para os quais descrevemos os processos, procurando compreender os fenômenos em consonância com um estudo indireto dos participantes, pois não podemos nos esquecer de que existem os elaboradores das propostas esperadas e existentes, os elaboradores das macroavaliações e os estudantes que as respondem, ou seja, analisamos documentos retrospectivos e contemporâneos que indicam caminhos para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem para a Educação Básica brasileira e uma forma de avaliação desses estudantes como meio de compreender suas dificuldades. Ressaltamos ainda que os documentos são institucionalizados, podendo assim serem considerados como cientificamente autênticos.

Os documentos analisados foram:

- 1) Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1997; Brasil, 1998);
- 2) Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018);
- 3) Livros didáticos para o Ensino Fundamental - anos iniciais de: Bigode; Gimenez (2017) e Dante (2018). Livro didático para o Ensino Fundamental - anos finais de: Bigode (2014) e Dante (2019);
- 4) A macroavaliação SARESP – São Paulo (2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017).

Para a análise desses documentos, construímos uma grade de análise segundo o modelo de Dias (1998). A grade de análise é composta das seguintes variáveis: tipo de tarefa, técnica(s), tecnologia(s), teoria, quadro em que a tarefa é enunciada, ostensivos utilizados na tarefa, não ostensivos associados e nível de conhecimento esperado dos estudantes.

Ressaltamos aqui que, na grade de análise, utilizamos as noções didáticas de praxeologia segundo Chevallard (1997), ostensivos e não ostensivos conforme Chevallard (1994), quadro conforme definição de Douady (1984) e níveis de conhecimento esperado dos estudantes de acordo com definição de Robert (1997, 1998), que apresentamos brevemente na sequência.

Referencial teórico da pesquisa.

Como anunciado acima, o referencial teórico central da pesquisa é a TAD, mais particularmente as noções de praxeologia, ostensivos e não ostensivos.

Iniciamos ressaltando que Chevallard (1994, 1997) indica que a noção de praxeologia corresponde a uma das premissas básicas da TAD, pois segundo o autor, toda atividade regular humana pode ser entendida por meio deste modelo único. Ainda conforme o autor, as atividades humanas podem ser decompostas em certo número de tarefas, mais concretamente em tarefas de um determinado tipo. Esses *tipos de tarefas* necessitam de uma *técnica* para serem desenvolvidas; sendo assim, essas técnicas, para se tornarem viáveis, precisam ser compreensíveis e justificáveis. Essa dupla função de possibilitar resolver a tarefa e justificá-la é amparada por um discurso denominado *tecnologia* de uma técnica. Da mesma forma, a tecnologia de uma técnica deve ser compreensível e justificável, dando origem ao que o autor denomina *teoria*, que corresponde à tecnologia da tecnologia. Assim, a hierarquia técnica - tecnologia e teoria - está relacionada ao tipo de tarefa considerado.

Após considerar a noção de praxeologia e apresentar alguns exemplos, Chevallard (1994) elabora as seguintes questões: Do que é feita uma determinada técnica? Quais os “ingredientes” que a compõem? Em que consiste a implementação de uma técnica? Para responder a estas questões, o autor distingue dois objetos: os objetos ostensivos, que têm para nós uma forma material, sensível e os objetos não ostensivos, que correspondem às noções, conceitos e ideias etc. O pesquisador observa ainda que os ostensivos nos permitem manipular os não ostensivos aos quais estão associados e que são evocados durante essa manipulação. Ainda consoante Chevallard, toda técnica supõe a ativação de um complexo de ostensivos e não ostensivos, sendo a manipulação dos ostensivos regada pelos não ostensivos que são evocados com a ajuda dos ostensivos, o que conduz a uma dialética necessária entre ostensivos e não ostensivos. Como exemplo, o pesquisador considera: os objetos materiais que possibilitam uma manipulação no sentido estrito (lápiz, compasso,...) e os ostensivos: gestuais, discursivos, gráficos e escriturais além da voz, olhar etc.

Lembrando que, conforme Chevallard (1997), a primeira noção fundamental da TAD é a de *objeto*, que corresponde a toda entidade, material ou imaterial, que existe para pelo menos um indivíduo. Assim, a noção de objeto é a mais geral, pois tudo é objeto, inclusive as pessoas. Assim, para o autor, toda obra *O* é um objeto, sendo a obra considerada como qualquer parte de um complexo de praxeologias.

Consideramos ainda a noção de quadro e mudança de quadros de Douady (1984, 1992), que a partir da análise epistemológica sobre o trabalho do matemático profissional, coloca em evidência a dualidade dos conceitos matemáticos, os quais, em geral, funcionam como ferramentas implícitas e, em seguida, explícitas da atividade matemática antes de adquirirem o status de objeto e de serem trabalhados como tal e o papel desempenhado pelas *mudanças de quadros* nas atividades e na produção matemática.

Segundo Douady (1984, 1992), uma *ferramenta implícita* corresponde a um conceito em elaboração, enquanto uma *ferramenta explícita* está associada a um conceito ou a uma noção utilizada intencionalmente para resolver um problema, e um *objeto* é definido como um

componente cultural que ocupa um lugar bem determinado no complexo edifício do saber matemático, sendo reconhecido socialmente.

O objeto matemático, tal como definido por Douady (1984, 1992), é parte de um edifício mais amplo que é o saber matemático, constituindo assim o que ela denomina *quadro*, que corresponde a um ramo da Matemática, das relações entre os objetos, de suas formulações eventualmente diversas e das imagens mentais que lhes são associadas. As imagens mentais são essenciais, pois funcionam como ferramentas dos objetos do quadro. Dois quadros podem conter os mesmos objetos, mas diferirem pelas imagens mentais e problemáticas desenvolvidas.

Douady define as *mudanças de quadros* como meios para se obterem formulações diferentes de um problema, que podem ou não ser equivalentes, mas que possibilitam um novo acesso às dificuldades encontradas e permitem utilizar novas ferramentas e técnicas que não eram adequadas para a formulação inicial. As traduções de um quadro em outro terminam sempre em resultados desconhecidos, em novas técnicas, favorecendo assim a criação de novos objetos matemáticos, enriquecendo, tanto o quadro original, como os quadros auxiliares de trabalho.

Utilizamos ainda a noção de níveis de conhecimento esperados dos estudantes definidos por Robert (1997, 1998) que, após definir níveis de conceituação como os marcos que podemos identificar ao longo do ensino das noções de determinado campo conceitual e indicar que esses níveis são relativos, pois dependem das escolhas em função do nível de conceituação que desejamos abordar, apresenta os três níveis de conhecimento esperados dos estudantes, a saber:

O *nível técnico* corresponde a um trabalho isolado, local e concreto. Está relacionado principalmente às ferramentas e definições utilizadas em uma determinada tarefa. Exemplo: Determinar o valor de x para a igualdade $x + 5 = 15$.

O *nível mobilizável* equivale a um início de justaposição de saberes de um determinado domínio, podendo até corresponder a uma organização. Vários métodos podem ser mobilizados. O caráter ferramenta e objeto do conceito está em jogo, mas o que se questiona é explicitamente pedido. Se um saber é identificado, ele é considerado mobilizado se ele é acessível, isto é, se o estudante o utiliza corretamente. Exemplo: O triplo de um número é 153. Qual é esse número?

O *nível disponível* está atrelado a saber responder corretamente o que é proposto sem indicações, de poder, por exemplo, dar contraexemplos (encontrar ou criar), mudar de quadro (fazer relações), aplicar métodos não previstos. Esse nível de conhecimento está associado à familiaridade, ao conhecimento de situações de referência variadas que o estudante sabe que conhece (servem de terreno de experimentação), ao fato de dispor de referências, de questionamentos, de uma organização. Pode funcionar para um único problema ou possibilitando fazer resumos. Exemplo: O perímetro de um retângulo é igual a 228 cm e a diferença entre as medidas do comprimento e da largura é 10 cm. Determine a área desse retângulo.

Descrição e Análise de uma Atividade

Tipo de tarefa T: Determinar um valor desconhecido, em situação representada por meio de uma balança. (EF_{ai} , EF_{af}). Exemplo: Determine o valor desconhecido.

Fonte: Bigode e Gimenez, Matemática no Cotidiano, 4º ano (2017, p.185).

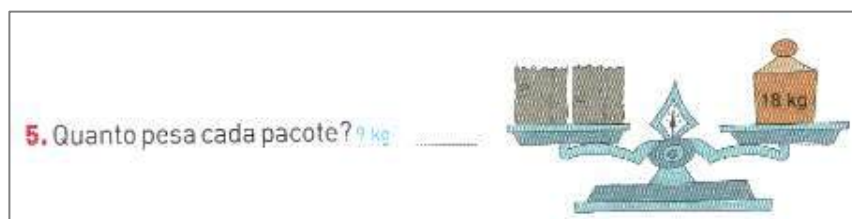


Figura 2. Exemplo de uma tarefa de tipo T.

Técnica τ : Encontrar o valor atribuído aos pacotes, envolve o domínio básico do quadro aritmético, nota-se que a balança está em equilíbrio, como os pacotes são iguais, divide-se 18kg por dois, encontrando 9kg para cada pacote. Mas para isso, deve-se dispor da noção de igualdade enquanto equivalência, indicada pela balança de braços iguais. Observa-se ainda que a operação em jogo é a divisão. Os autores deste livro didático introduzem exemplos com balança desde o 1º ano do ensino fundamental anos iniciais (1º ao 5º ano, alunos de 6 a 10 anos).

Tecnologia θ associada à tarefa: operação de divisão de números naturais e a propriedade de equivalência da igualdade.

Teoria θ associadas à tecnologia: conjuntos dos naturais, suas operações e propriedades e noção de equivalência da igualdade.

Quadro(s) em que a tarefa é enunciada: quadro aritmético.

Quadro(s) de solução da tarefa: quadro aritmético-algébrico.

Ostensivos utilizados: ostensivo equivalência, ostensivo numérico, ostensivo figural (balança de braços iguais com pacotes e um peso).

Não ostensivos associados: equivalência da igualdade, princípio da desigualdade, operações e propriedades dos números naturais.

Nível de conhecimento esperado dos estudantes: mobilizável para equivalência da igualdade, disponível para as operações e propriedades dos números naturais.

Esta tarefa exige a passagem do quadro da aritmética para o quadro aritmético-algébrico, uma vez que na tarefa existe característica algébrica associada à propriedade de equivalência da igualdade.

Resultado da discussão

Observamos que a proposta de ensino de Matemática para o Ensino Fundamental - anos iniciais, PCN – (BRASIL, 1997), não contemplava especificamente o desenvolvimento de Álgebra, nem orientava sobre os possíveis conteúdos a serem trabalhados nessa etapa escolar, mas se esclarecia que a Matemática precisava ser tratada como uma linguagem, o que corresponde a identificar ostensivos e associá-los a não ostensivos, mesmo não utilizando essa nomenclatura. Logo, as representações de noções e conceitos matemáticos deveriam possibilitar a leitura e a interpretação de situações e problemas por meio de ostensivos gráficos, tabelas e números.

Em relação aos conteúdos a serem trabalhados no Ensino Fundamental - anos finais, o PCN (BRASIL, 1998) indica o estudo dos números e operações por meio da articulação entre Aritmética e Álgebra, ou seja, é nessa etapa escolar que se indica explicitamente o estudo da Álgebra articulado com Aritmética, Geometria, Probabilidade e Combinatória e outros campos do conhecimento.

Verificamos que a Álgebra está, mais particularmente, associada às grandezas e medidas e a introdução da Álgebra simbólica por meio da passagem da Aritmética para a Álgebra. Mesmo se não é explicitada, essa passagem pode ser entendida na indicação de articulação entre Aritmética e Álgebra, quando do estudo dos números e operações.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018) divide-se em cinco unidades temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística, que devem ser trabalhadas de forma articulada no desenvolvimento dos objetos de conhecimento e das habilidades a serem abordadas no Ensino Fundamental.

Os objetos de conhecimento e as habilidades associadas estão apresentados para os diferentes anos do Ensino Fundamental, segundo a unidade temática. Por exemplo, para a unidade temática Álgebra, no 7º ano do Ensino Fundamental - anos finais para o objeto de conhecimento: Linguagem algébrica: variável e incógnita, são destacadas as seguintes habilidades:

- 1) Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita.
- 2) Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na Matemática, mas também nas artes e na literatura.
- 3) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.

A análise dos livros didáticos anteriormente indicados mostra que ainda é preciso repensar a organização dos saberes matemáticos a serem distribuídos segundo as unidades temáticas de forma a associar objeto de conhecimento e habilidades. Mesmo considerando que existe um embrião dessa organização nos livros analisados, algumas tarefas parecem avançadas para os alunos do ano considerado.

Em relação à macroavaliação SARESP, observamos que, em geral, os tipos de tarefas propostas aos alunos do 3º e 5º anos do Ensino Fundamental - anos iniciais e 7º e 9º anos do Ensino Fundamental - anos finais estão em consonância com as propostas indicadas nos Parâmetros Curriculares Nacionais e são representativas dos tipos de tarefas encontradas nas quatro obras analisadas.

Considerações finais

A análise das expectativas institucionais proposta pela pesquisa indica que os livros didáticos analisados cumpriram seu papel, uma vez que existe uma coerência entre o que era proposto e o que os alunos poderiam encontrar nessas fontes para estudo. O que parece mostrar que as dificuldades dos alunos podem estar realmente associadas às escolhas de organização e tratamento da Álgebra, que não era explicitamente associada ao desenvolvimento do

pensamento algébrico, sendo, em geral, introduzida por meio de seu simbolismo sem que houvesse preocupação com a passagem gradativa da Aritmética para a Álgebra.

Com o novo documento, esperamos que sejam feitas as adaptações necessárias das propostas curriculares, o que o estado de São Paulo vem desenvolvendo por meio de guias de transição.

Acreditamos ainda que os materiais didáticos serão melhor adaptados às indicações da BNCC, sendo assim, ainda é prematuro analisar qualquer dado relacionado a essa nova organização do ensino.

Referências

Bigode, A. J. L.; Gimenez, J. (2017). *Matemática do cotidiano*. São Paulo: Scipione.

Bigode, A. J. L. (2014). *Matemática*. São Paulo: Scipione.

Brasil. (2018). Secretaria de Educação Fundamental. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC/SEF, 600p.

Brasil. (1998). Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília: MEC/SEF, 152p.

Brasil. (1997). Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília: MEC/SEF, 1997. 142p.

Chevallard, Y. (1994). *Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique*. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/>. Acesso em: 11 out. 2019.

Chevallard, Y. (1997). *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des Mathématiques. L'approche Anthropologique*, Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=27. Acesso em: 18 out 2019.

Dante, L. R. (2018). *Projeto Ápis*. Matemática. São Paulo: Ática.

Dante, L. R. (2019). *Projeto Teláris*. Matemática. São Paulo: Ática.

Dias, M. A. (1998). *Problèmes d'articulation entre points de vue "cartésien" et "paramétrique" dans l'enseignement de l'algèbre linéaire*. 510 p. Doutorado (Didática da Matemática) – Universidade Paris Diderot, Paris, 1998.

Douady, R. (1992). Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. *Repères IREM* 6, 132-158.

Douady, R. (1984). *Jeux de cadre et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques*. 340f. Doutorado (Didática da Matemática) – Universidade Paris Diderot, Paris, 1984.

Godoy, A. S. (1995). *Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades*. RAE - Revista de Administração de Empresas, São Paulo, v. 35, n. 2, p. 57-63.

Kaput, J. J. (1998). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. In S. Fennel (Ed.), *The nature and role of algebra in the K-14 curriculum: Proceedings of a national symposium* (pp. 25-26). Washington, DC: National Research Council, National Academy Press.

- Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 18, n. 2, p.139-190.
- Robert, A. (1997). Niveaux de conceptualisation et enseignement secondaire. En J.L. Dorier, G. Harel, J. Hillel, M. Rogalski, J. Robinet, A. Robert, A. Sierpiska et al. (Eds), *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question* (pp. 149-157), Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions.
- São Paulo. (2019). Secretaria da Educação do Estado de São Paulo – SEE/SP. *SARESP: Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017*. Disponível em: <<https://www.educacao.sp.gov.br/consulta-saresp.html>>. Acesso em: 15 out de 2019.

ANÁLISIS DE LAS DIFICULTADES QUE PRESENTAN LOS ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS EN MATEMÁTICA BÁSICA

Roger Ivan Soto Quiroz
pcmarqui@upc.edu.pe

Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas, Perú

Resumen

El presente estudio pretende analizar las diferentes dificultades tanto académicas como actitudinales que presentan los estudiantes universitarios que llevan por segunda vez el curso de Matemática Básica. El sustento teórico se basa en la comprensión lectora, las competencias, el aprendizaje significativo, el razonamiento cuantitativo y las actitudes hacia la matemática. Esta es una investigación cualitativa, con diseño fenomenológico, con aplicación de la técnica de la entrevista no estructurada. La muestra la conformaron diez estudiantes de la Facultad de Diseño; también participaron tres docentes y cinco tutores académicos. Se descubrieron seis dificultades: 1) Dificultad en la comprensión lectora de los problemas matemáticos, 2) Dificultad en comprender contenidos matemáticos básicos, 3) Dificultad con la asistencia a clases, 4) Dificultad en el interés y motivación por el curso, 5) Dificultad en repasar los temas matemáticos, 6) Dificultad en la asistencia a tutoría y talleres de reforzamiento.

Palabras clave:

Comprensión lectora, aprendizaje significativo, actitudes hacia la matemática, habilidades matemáticas.

Introducción

La Matemática ha sido, es y será para algunos un dolor de cabeza, un trauma, temor, ansiedad o un curso muy difícil, mientras que para otros refleja una alegría o algo fácil de aprender. El gusto por la matemática y el desarrollo de sus habilidades se inician desde niños al contar, trazar, descubrir figuras, realizar operaciones elementales, resolver ecuaciones, expresar en lenguaje simbólico, resolver problemas, pero también surgen las dificultades de su aprendizaje en aquellas personas que no la entienden, como es el caso de los estudiantes universitarios participantes del presente estudio.

En la universidad en estudio, en la asignatura de Matemática Básica, los estudiantes deben desarrollar habilidades de razonamiento cuantitativo como: interpretar, representar, calcular, analizar y argumentar (Vergara, Fontalvo, Muñoz & Valbuena, 2015). Asimismo, habilidades más específicas como: extraer información de un texto matemático, identificar el valor de las variables necesarias para reemplazar en una fórmula, discriminar entre fórmulas, representar una proporción matemática, realizar operaciones básicas, resolver ecuaciones, interpretar intervalos, obtener el valor numérico de una variable independiente, evaluar una función, evaluar fórmulas,

realizar aproximaciones, completar tablas de contingencia, construir gráficos, convertir cantidades a su equivalente porcentual o viceversa, interpretar textos matemáticos, comparar cantidades, completar tablas de distribución de frecuencias, redactar conclusiones, entre otras.

Problema de investigación y aspectos teóricos y metodológicos

Las dificultades que suelen presentarse en los estudiantes universitarios matriculados en Matemática Básica son tanto a nivel conceptual, procedimental, como a nivel actitudinal (Teoría de las competencias). En el nivel conceptual, las dificultades suelen estar relacionadas con aprender temas específicos como tamaño de muestra, cambio de moneda, variaciones porcentuales, variables, entre otros; en el nivel procedimental, las mayores dificultades suelen ser que algunos estudiantes no comprenden el texto matemático, no identifican los datos adecuadamente, no infieren, no relacionan información anterior y posterior, no identifican el requerimiento del problema; en el nivel actitudinal, suelen presentar dificultades como desinterés por el curso, poca participación en las clases, distracción en clase o bien concentrados en el celular o bien conversando de otros temas con sus compañeros, no encontrarle gusto ni utilidad práctica a la matemática, inasistencia a clases, poca o nula participación en las tutorías académicas o talleres de reforzamiento, sentirse seguro que va a aprobar el curso cuando no pone los medios apropiados como repasar en casa o tomar apuntes, no resolver los materiales de clase, no prepararse para los exámenes, entre otros. Mueller, Yankelwitz & Muher (2011) sostienen que, los estudiantes motivados en aprender matemática disfrutan cuando realizan sus tareas, comprenden y buscan el conocimiento.

En la universidad en estudio existe poca o ninguna motivación hacia el curso de matemática y los estudiantes carecen de recursos cognitivos para resolver problemas de la vida diaria (Rostaing, Bernuy, Borja, Martínez, Ayllón & Gómez, 2019). Asimismo, existen otras investigaciones cuyos resultados indican que existe una débil motivación intrínseca y extrínseca por parte de los estudiantes para el aprendizaje de la matemática y también de los docentes para la enseñanza de la misma (Erazo, 2015; Navea, 2015; Jiménez, 2015, como se citó en Rostaing, Bernuy, Borja, Martínez, Ayllón & Gómez, 2019).

En el presente estudio, se analizarán seis aspectos importantes que guardan relación con los estudiantes universitarios participantes que llevan por segunda vez el curso de Matemática Básica:

Importancia de la comprensión lectora de los problemas matemáticos

En los problemas matemáticos es importante que el estudiante descifre el sentido del texto y reconozca el contexto o situación del problema, por ejemplo, situaciones sobre "elecciones municipales", "día del shopping", "licenciamiento de universidades", "promociones y ofertas", entre otras (Viramonte, 2016). En la comprensión del texto, el estudiante debe identificar y relacionar toda la información de la situación problemática que se le brinda en forma verbal, en tablas, en gráficos (barras, circular, histograma, ojiva, polígono de frecuencias), en lenguaje simbólico (fórmulas, modelos matemáticos, ecuaciones) todas brindan información relevante para la solución del problema.

Importancia de los contenidos matemáticos básicos

Existen contenidos básicos y habilidades matemáticas elementales que se les complica aprender y desarrollar a los estudiantes. Ingresan a la universidad con estas dificultades, las traen desde la escuela, entre estas se tiene a los porcentajes, operaciones con números reales, ecuaciones, funciones, interpretación de tablas y gráficos, entre otras. Al respecto, López (2013) manifiesta que, en la teoría de las competencias los estudiantes desarrollan diferentes saberes: saber comprender, saber interpretar, saber pensar, saber desempeñar y saber actuar en diversos escenarios.

Importancia de la asistencia a clases

Los contenidos matemáticos son secuenciales, por lo general si un estudiante se pierde la explicación de un tema desarrollado por el profesor entonces para algunos que entienden matemática se les hace fácil nivelarse, mientras que para aquellos que tienen dificultades les costará mucho su nivelación. Yao & Chiang (2011) encontraron que, estudiantes que faltaban a algunas clases, en especial a las primeras, tuvieron menor promedio en sus calificaciones en comparación con los que sí asistieron. Asimismo, Bartual & Poblet (2009) descubrieron que, la asistencia continua a clases aumenta el porcentaje de aprobados de un curso. Igualmente, Delgado & Castillo (2015) demostraron que, la dedicación de los estudiantes y su asistencia a clases producen incidencia positiva en sus calificaciones.

Importancia del interés y motivación del estudiante por el curso

Por lo general, los estudiantes universitarios cuyas carreras profesionales no son afines a la matemática sienten cierto rechazo, temor, desinterés, desmotivación hacia la matemática, y los estudiantes de la carrera de Diseño no son la excepción a ello. Que los estudiantes se interesen por la Matemática Básica va a depender del nivel de significatividad que provoque en ellos resolver los problemas, de si son útiles o no estos problemas para ellos, si despiertan o no su interés y su curiosidad, si relaciona sus conocimientos previos con los nuevos conocimientos que va descubriendo (Soto, 2018; Alcaraz, 2002; Guerrero, 2014; Roig, 2009). Asimismo, Cantoral, Covián, Farfán, Lezama & Romo (2008) sustentan que "El aprendizaje significativo se caracteriza porque tiene en cuenta los intereses, necesidades y realidades del alumno, despertando el interés en aprender lo que considera valioso (motivación)" (p.45).

Importancia en repasar los temas matemáticos para afianzar los conocimientos

Repasar los temas de matemática consiste básicamente en practicar los problemas que ya se han desarrollado en clase o los problemas propuestos en las tareas, materiales de clase, controles, libros, prácticas o examen parcial. Para repasar los temas se puede realizar de forma individual, entre dos o en grupos de estudio, pueden ser con docentes, tutores, amigos o familiares. Para estudiantes con dificultades en matemática, es importante practicar, practicar y seguir practicando, mientras más practiques es mejor para resolver los problemas.

Importancia de la asistencia a tutoría y talleres de reforzamiento para estudiantes que requieren asesoría académica

La teoría del desarrollo cognitivo de Vygotsky tiene que ver con la forma en que el estudiante socializa con su entorno para aprender, los alumnos cuentan con lo que les enseñan sus docentes, grupos de estudio con amigos, tutorías académicas, talleres de reforzamiento y en

algunos casos alumnos que repasan los temas en casa con algún familiar (Cantú, De Alejandro, García & Leal, 2017). La tutoría académica es una actividad que la universidad en estudio emplea como apoyo a los estudiantes, es un espacio de aprendizaje personalizado, donde el estudiante se reúne con un tutor y absuelven todas las dudas matemáticas. Asimismo, los talleres de reforzamiento son actividades de repaso de los temas desarrollados en clase, son de forma grupal, existen diversos horarios para esta actividad.

En cuanto a los aspectos metodológicos, es un estudio con enfoque de investigación cualitativa, donde se exploran las principales dificultades que experimentan los participantes del estudio. El estudio estuvo orientado por el diseño fenomenológico, puesto que se focalizó en el análisis de las experiencias de los estudiantes que han desaprobado el curso de Matemática Básica, de las razones por la que han desaprobado. Para la indagación se empleó la técnica de la entrevista no estructurada, el estudio se realizó en una universidad privada cuya misión es la exigencia y la innovación, se encuentra ubicada en la ciudad de Lima, Perú. Los estudiantes participantes son de la Facultad de Diseño, donde por lo general no les gusta la matemática.

En cuanto al procedimiento, se efectuaron los siguientes pasos:

Paso 1: Se trabajó con una muestra no probabilística y se seleccionó de modo intencional a los participantes del estudio o también conocido como muestra de conveniencia (Guzmán, Bastidas & Mendoza 2019). La muestra estuvo conformada por: 10 estudiantes matriculados por segunda vez en la asignatura de Matemática Básica de la Facultad de Diseño (4 de Diseño y Gestión de Modas, 3 de Diseño Profesional Gráfico y 3 de Diseño de Interiores), además participaron 3 docentes que les enseñan Matemática Básica y 5 tutores académicos, todos de una Universidad Privada, de Lima, Perú.

Paso 2: Se inició la entrevista no estructurada, de manera individual, con una pregunta inicial para los estudiantes ¿Qué dificultades tienes en el curso de Matemática Básica?, asimismo, para los docentes la pregunta de partida fue ¿Qué dificultades para aprender el curso tienen sus estudiantes matriculados por segunda vez?, mientras que en el caso de los tutores ¿Qué dificultades observa en los estudiantes que llevan el curso por segunda vez y que asisten a la tutoría académica o a los talleres de reforzamiento?

En el caso de los estudiantes, para una mejor direccionalidad y facilidad en la identificación de los contenidos temáticos que les parecieron muy difíciles de aprenderlos, se les indicó que traigan su examen parcial y las prácticas calificadas del curso.

Paso 3: Después de realizar la primera pregunta a los participantes se fue anotando las categorías que fueron surgiendo en el transcurso de toda la entrevista. Algunas categorías fueron similares a las encontradas en la revisión bibliográfica, mientras que otras fueron nuevas categorías.

Paso 4: Se transcribieron las entrevistas, luego el análisis de la información permitió establecer seis categorías comunes a todos los participantes.

Paso 5: Se presentaron los resultados de la investigación. Se transcribieron, analizaron e interpretaron frases de los participantes que hacían referencia a cada categoría.

Paso 6: Se establecieron las conclusiones.

Resultados

Los resultados muestran seis dificultades (categorías) que manifestaron todos los participantes del estudio.

Dificultad en la comprensión lectora de los problemas matemáticos.

Los problemas matemáticos que se desarrollan en las clases y se evalúan en los exámenes son de tipo caso, de una historia real o adaptada, con mucha información, donde el estudiante debe leer todo inclusive las referencias al pie de página. Para ello, los estudiantes deben aplicar algunas técnicas de comprensión de lectura como subrayar, resaltar, relacionar, tener concentración, integrar el significado de lo que lee, que les permitirá resolver con éxito los problemas.

Estudiante 1:

"Los problemas son todos de comprensión lectora y eso es una de mis mayores dificultades. Son los problemas textuales que te ponen para que tú los comprendas, entonces tengo que pensar muy bien en lo que quiere decir el fragmento del problema y después siempre tengo que estar conectada con la anterior pregunta."

Estudiante 2:

"Del texto, tengo que leer todo, resalto lo más importante, leo las referencias del pie de página puesto que a veces hay información valiosa para resolver el problema. Tengo que concentrarme mucho para entender el texto."

Los estudiantes deben identificar datos importantes de los problemas y relacionar la información existente en sus diversas formas: textual, algebraica, tablas y gráficos. Vernucci, Canet, Andrés & Burin (2017) sostienen que, las habilidades de comprensión lectora y cálculo matemático son importantes para desempeñarse exitosamente en el colegio, en la universidad, en cualquier situación que se presenta en la vida cotidiana y para el aprendizaje en general.

Docente 1:

"Tienen dificultades de comprensión lectora para resolver los problemas. Deben relacionar toda la información del texto, ellos dicen: yo he jalado el curso porque no he leído bien."

Tutor 1:

"Tienen una dificultad en la comprensión lectora del problema matemático, la información la tienen en el texto, pero se les complica identificar la información sustancial."

Dificultad en comprender contenidos matemáticos básicos.

Entre los contenidos temáticos que tienen dificultad se tiene: cambio de moneda, variaciones porcentuales, valor z , redondeo y variables.

Estudiante 1:

"No entiendo la compra y venta de dólares. Las variaciones porcentuales cuando aparecen en gráficos."

Estudiante 6:

"Completar la tabla de distribución de frecuencias de variable cuantitativa continua."

Docente 2:

"Se les complica encontrar el valor z para encontrar el tamaño de muestra, piensan que el subíndice se multiplica, también se complican en el tema de variaciones porcentuales."

Tutor 1:

"Tienen muchas dificultades con la variación porcentual, por ejemplo, cuando se les presenta un gráfico de variación porcentual, es bien complicado para ellos el reconocimiento de nombre de variables de estudio y los tipos de variable, una vez un alumno me dijo que variable es 40%, otro mencionó variable hombres cuando en realidad la variable es sexo."

Tutor 2:

"Encontrar tamaño de muestra (por ejemplo, el subíndice del valor z , el valor p y q , el redondeo por exceso, se olvidan bastante)."

Algunos estudiantes llegan a manifestar que no saben nada de matemática desde el colegio, percibiéndose una gran frustración en ellos. Mato & De la Torre (2010) sostienen que los docentes influyen en la formación de actitudes (negativas o positivas) hacia la matemática y por ende, en la motivación hacia su estudio.

Estudiante 2:

"Se me complica el tema de variación porcentual en tablas y gráficos, eso de identificar el valor presente y el valor pasado, reemplazarlo en la fórmula. En un examen vino una pregunta de estas y no la hice. Desde el colegio no sé nada de matemática, se me complica mucho."

Estudiante 3:

"Tengo dificultades con problemas de tipo de cambio de moneda, redondear un número no sé si es al menor entero o al mayor entero. He sido muy mala en matemática desde la escuela."

Docente 3:

"Una vez un estudiante, dijo: no sirvo para la matemática, nunca me ha gustado, siempre he sido malo en ello. Pero, en el primer examen (control 1) lo aprobé con 14, porque si lo hubiese desaprobado, ya me hubiese retirado del curso. No sabía ni colocar la línea de división, ni qué operación se resuelve primero. Me ayudó el ser ordenado, y con esfuerzo, practicando en casa, asistiendo a las tutorías, he podido enfrentar con éxito, aprobar y aprender la matemática. He sacado 18 de promedio en el curso."

Dificultad con la asistencia a clases.

Generalmente la inasistencia o tardanza a las clases es de índole actitudinal, un descuido de su parte, esto trae como consecuencia que se pierdan la secuencia del tema y si llegan tarde encuentran el desarrollo del problema a medias y esto afecta a sus calificaciones. Las investigaciones indican que, los estudiantes que suelen faltar a clases, por lo general, suelen tener bajas calificaciones (Yao & Chiang, 2011; Bartual & Poblet, 2009; Delgado & Castillo, 2015; Gabalán & Vásquez, 2017).

Estudiante 1:

"Si no vine a clases un día y no asistí a tutoría en esa semana ese sí que es un gran problema para poder entender el tema y los temas que siguen, ese error lo cometí el ciclo pasado ahora no."

Estudiante 5:

"Llego tarde a las clases de matemática, generalmente 20 minutos tarde. Llegar temprano a clases también es importante, puesto que si llegas 20 minutos tarde ya te perdiste toda la introducción del tema, en mi caso eso si es una gran dificultad mientras que para otros que son más hábiles en el curso es muy fácil se pone al día rápidamente."

Docente 1:

"Se descuidan mucho, tanto así que faltan a clases, en el aula te quedan mirando, no agarran el lapicero para desarrollar el material de clase, no toman apuntes, algunos solo toman fotos."

Dificultad en el interés y motivación por el curso.

El desinterés y la falta de motivación de los participantes se manifiesta en sus distracciones con el celular, conversaciones de temas ajenos a lo que se desarrolla en la clase o por confiarse demasiado. Casis, Rico & Castro (2017) encontraron en su investigación que, entre las tres categorías actitudinales (Motivación, autoconfianza y ansiedad), la motivación del estudiante hacia la matemática tiene más orientación positiva.

Estudiante 2:

"Me distraigo mucho con el celular en clase, por ello, lo apago para prestar atención a los temas que hace el profesor."

Estudiante 3:

"Me distraía mucho con el celular en plena clase, usaba el whatsapp, Facebook, ahora también me tienta pero me controlo."

Tutor 1:

"Los alumnos mencionan que han desaprobado el curso por dejadez de su parte, se han confiado, han pensado que el curso iba a ser sencillo aprobarlo, no han comprendido que aprobarlo es un proceso."

Por lo general, estas dificultades se presentaban más en el ciclo pasado, mientras que en el presente ciclo han tomado conciencia de sus errores y se han propuesto mejorar.

Estudiante 4:

"El ciclo pasado, me distraía muchísimo en clase de matemática, tenía un grupo de amigos de mi carrera y me distraían porque conversaban mucho o hacían mucha chacota en clase o hacía reír a mis amigos o salíamos de clase y después volvíamos. Pero ahora no, es totalmente distinto ya no estoy con mi grupo de amigos de antes, ahora ya no me distraigo, presto atención totalmente, me ubico adelante antes me ubicaba atrás y hacía cualquier cosa menos prestar atención, me distraía con el celular porque prefería eso a atender la clase del profesor. Ahora, presto atención y entiendo las explicaciones del profesor."

El desinterés en el curso también se debe a la percepción de los participantes de que el curso no tiene utilidad práctica en su carrera de Diseño. Elisondo, Donolo & Rinaudo (2009) sugieren que los docentes universitarios deben proponer actividades basadas en una situación concreta de resolución de problemas específicos aplicada a la vida real o a su carrera profesional.

Estudiante 5:

"Mi carrera es diseño gráfico, yo ya estoy trabajando en mi carrera y la verdad que aplico poco o casi nada de matemática en lo que hago, siento que a veces no tiene sentido el curso."

Docente 2:

"En los alumnos de Diseño, no veo el interés por aprender el curso, lo que veo es que solo quieren aprobar el curso y punto, me dicen que eso no lo aplicarán en su carrera."

Dificultad en repasar los temas matemáticos.

Las actividades de extensión, la transferencia de los aprendizajes y la preparación para los exámenes permiten que se asimilen, interioricen y se desarrollen las habilidades matemáticas. Los estudiantes participantes son de una carrera donde a la mayoría no les gusta el curso, han tenido traumas o miedo a la matemática, por ello es importante que practiquen los temas fuera del aula. Almonacid, Gutiérrez & Pullo (2017) encontraron que existe una falta de motivación e interés por repasar las resoluciones de problemas matemáticos.

Estudiante 2:

"Solo cuando hay examen, foros o controles me pongo a repasar los temas, en otros momentos libres que tengo ni veo los temas. El ciclo pasado no entendía el curso, llegué al examen parcial y no resolví nada del examen porque no sabía nada, ahora es diferente porque estoy poniendo más esfuerzo en estudiar los temas. Ahora tomé apuntes que me sirven para repasar y entender los temas."

Dificultad en la asistencia a tutorías y talleres de reforzamiento.

Para los estudiantes participantes, las tutorías académicas y los talleres de reforzamiento que desarrollan los tutores antes no tenían tanta importancia como ahora. Los que no pueden asistir a estas actividades buscan otras alternativas como buscar ayuda con amigos y/o familiares que saben de matemática.

Estudiante 7:

"No asisto ni a tutorías ni a talleres, tengo una amiga de un ciclo superior que me ayuda, me explica todo y fácil entiendo."

Estudiante 8:

"El ciclo pasado no asistía, pero ahora asisto a tutorías de 2 a 4 horas a la semana para repasar con el tutor los temas desarrollados en la semana de clases, poder entender los problemas y lograr por fin aprobar este curso que llevo por segunda vez."

Los participantes que asisten a la tutoría presentan buena actitud, desean entender los temas y se han propuesto aprobar el curso. La investigación realizada por Zaldívar, Nava & Lizárraga (2018) demostró que la tutoría en matemática ayuda a mejorar el rendimiento académico de los estudiantes, sus calificaciones se elevan. Además, los estudiantes que asisten a la tutoría perciben confianza y respeto mutuo entre tutor y estudiante.

Estudiante 8:

"Gracias a las tutorías he aprendido bastante, los tutores tienen mucha paciencia, buen trato y generan confianza."

Tutor 3:

"Suelen venir los alumnos interesados en el servicio, algunos quieren que se les explique toda la clase que faltó, otros desean que se les absuelva todas sus dudas, quieren aprender más, profundizar el tema."

Tutor 1:

"Tienen una situación de revancha, mayormente los alumnos "bicas" (los que llevan el curso por segunda vez) que vienen a asesorías piensan que si ya se equivocaron el ciclo pasado, ahora ya no les volverá a pasar. Los estudiantes que llevan el curso por segunda vez vienen a la tutoría con buena actitud, reservan la tutoría para dos horas, y si estoy libre se siguen quedando una hora más, traen sus materiales actuales y materiales pasados para poder reforzarlos, siendo su principal motivación obviamente aprobar el curso."

Conclusiones

Se descubrieron seis dificultades que presentan los estudiantes que llevan por segunda vez el curso de matemática Básica, estas son: 1) Dificultad en la comprensión lectora de los problemas matemáticos, 2) Dificultad en comprender contenidos matemáticos básicos, 3) Dificultad con la asistencia a clases, 4) Dificultad en el interés y motivación por el curso, 5) Dificultad en repasar los temas matemáticos, 6) Dificultad en la asistencia a tutoría y talleres de reforzamiento. Se descubrieron otras dificultades, pero solo fueron mencionadas por algunos participantes, tales

como: presencia de nervios frente a los exámenes, olvido de los temas, miedo frente a los exámenes, no utilizar adecuadamente la calculadora, no darle importancia al curso por ser una asignatura general pero sí a los cursos de especialidad, entre otras.

Referencias

- Alcaraz, F. (2002). *Didáctica y currículo: un enfoque constructivista*. España: Universidad de Castilla-La Mancha.
- Almonacid, M., Gutiérrez, L. & Pullo, N. (2017). *La motivación y el aprendizaje en el área de matemática* (Tesis de licenciatura). Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle, Lima, Perú.
- Bartual, T. & Poblet, M. (2009). Determinantes del rendimiento académico en estudiantes universitarios de primer año de economía. *Revista de Formación e Innovación Educativa Universitaria*, 2(3), 172-181.
- Cantoral, R., Covián, O., Farfán, R., Lezama, J. & Romo, A. (2008). *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: un reporte iberoamericano*. España: Ediciones Díaz De Santos.
- Cantú, D., De Alejandro, C., García, J. & Leal, R. (2017). *Comprensión lectora, educación y lenguaje*. Estados Unidos: Polibrio.
- Casis, M., Rico, N. & Castro, E. (2017). Motivación, autoconfianza y ansiedad como descriptores de la actitud hacia las matemáticas de los futuros profesores de educación básica de Chile. *PNA*, 11(3), 181-203.
- Delgado, M. & Castrillo, L. (2015). Efectividad del aprendizaje cooperativo en contabilidad: una contrastación empírica. *Revista de Contabilidad*, 18(2), 138-147.
- Elisondo, R., Donolo, D. & Rinaudo, M. (2009). Ocasiones para la creatividad en contextos de educación superior. *Revista de Docencia Universitaria*. Recuperado de http://www.um.es/ead/Red_U/4/elisondo.pdf.
- Gabalán, J. & Vásquez, F. (2017). Rendimiento académico universitario y asistencia a clases: Una visión. *Revista Educación*, 41(2). doi: <http://dx.doi.org/10.15517/revedu.v41i2.18477>
- Guerrero, M. (2014). *Metodologías activas y aprendizaje por descubrimiento. Las TIC y la Educación*. Marpadal Interactive Media S.L.
- Guzmán, K., Bastidas, B. & Mendoza, M. (2019). Estudio del rol de los padres de familia en la vida emocional de los hijos. *Revista de investigación Apuntes Universitarios*, 9(2), 61-72.
- López, M. (2013). *Aprendizaje, competencias y TIC*. México: Pearson.
- Mato, M. & De la Torre, E. (2010). Evaluación de las actitudes hacia las matemáticas y el rendimiento académico. *PNA*, 5(1), 197-208.
- Mueller, M., Yankelewitz, D. & Maher, C. (2011). Sense making as motivation in doing mathematics: Results from two studies. *The Mathematics Educator*, 20(2), 33-43.

- Roig, V. (2009). *Nuevas tecnologías de enseñanza-aprendizaje en la universidad*. España: Ediciones Universidad de Salamanca.
- Rostaing, G., Bernuy, L., Borja, C., Martínez, E., Ayllón, M. & Gómez, I. (2019). Motivación de logro y resolución de problemas con funciones lineales en una universidad de Surco. *Revista de investigación Apuntes Universitarios*, 9(1), 85-101.
- Soto, R. (2018). Principios que consideran los catedráticos al elaborar problemas matemáticos. *Revista UCV-Scientia*, 10(2), 132-137. DOI: [dx.doi.org/10.18050/RevUcv-Scientia.v10n2a2](https://doi.org/10.18050/RevUcv-Scientia.v10n2a2)
- Vergara, J., Fontalvo, J., Muñoz, A. & Valbuena, S. (2015). Estrategia didáctica para el fortalecimiento del razonamiento cuantitativo mediante el uso de las TIC. *Matua, Revista del Programa de Matemáticas*, 2 (2), 71-80. Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia.
- Vernucci, S., Canet, L., Andrés, M. & Burin, D. (2017). Comprensión Lectora y Cálculo Matemático: El Rol de la Memoria de Trabajo en Niños de Edad Escolar. *Psykhé*, 26(2), 1-13. doi: <https://dx.doi.org/10.7764/psykhe.26.2.1047>
- Viramonte, M. (2015). *Comprensión lectora: dificultades estratégicas en resolución de preguntas inferenciales*. Buenos Aires: Ediciones Colihue.
- Yao, J. & Chiang, T. (2011). Correlación entre la asistencia a clases y las calificaciones. *Journal of Computing Sciences in Colleges*, 27(2), 142-147.
- Zaldívar, A., Nava, L. & Lizárraga, J. (2018). Influencia de la tutoría en el aprendizaje de matemáticas. Perspectiva del estudiante. *RIDE. Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo*, 8(16), 493-515. doi: <https://dx.doi.org/10.23913/ride.v8i16.355>

ERRORES Y DIFICULTADES RELATIVOS AL CONCEPTO DE SOLUCIÓN DE ECUACIONES LINEALES

Aldrin Peña Lizano

Francisco Ugarte Guerra

pena.ae@pucp.edu.pe , fugarte@pucp.edu.pe

Instituto de Investigación sobre Enseñanza de la Matemáticas, IREM-PUCP, Perú

Resumen

Esta investigación tiene por objetivo proponer una lista de los errores y dificultades presentes en el proceso de construcción del concepto de solución y conjunto solución de una ecuación o de un sistema de ecuaciones lineales. Este trabajo forma parte de un trabajo de investigación más amplio en el que se utilizará la lista para analizar las concepciones de solución y conjunto solución que tienen estudiantes universitarios, en un primer curso de matemáticas. Para la elaboración de esta clasificación de errores y dificultades nos basamos en el trabajo de Soccas sobre errores y dificultades y lo adaptamos a nuestro objeto matemático. Luego aplicamos nuestra propuesta para clasificar los errores y dificultades reportados en otras investigaciones y concluimos con algunas sugerencias a tener en cuenta para la enseñanza del concepto de solución para ecuaciones lineales.

Palabras clave: conjunto solución, ecuaciones, dificultades

Introducción

Los sistemas de ecuaciones lineales nos proporcionan un medio para poder modelar situaciones problemáticas en particular, en algunas de las ingenierías. Para ello, en primer lugar, se traduce el problema al lenguaje algebraico, después, se obtienen las soluciones del sistema y, por último, se comprueba si la solución matemática obtenida es válida como respuesta al problema de partida. Nosotros los enfocaremos en nuestro trabajo de investigación en los errores y dificultades del concepto solución en un sistema de ecuaciones lineales, para ello nos basaremos en numerosas referencias respecto a este tema como Oktac, Asumen, Betancourt, Ochoviet, Paniza, Sadosky, etc. Luego, se creará una prueba diagnóstica, basada en las dificultades encontradas en dicho tema por los investigadores mencionados, que será aplicada a los alumnos de matemática básica para ingeniería de una universidad de Lima. Después, se analizarán sus respuestas contrastándolas con las dificultades y errores encontrados en los antecedentes.

Nuestra misión será encontrar evidencias sobre la comprensión del concepto de solución y conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales, es decir, esperamos que el estudiante, después de determinar los valores de las variables del sistema, los pueda reemplazar en las ecuaciones para luego llamar a este par de valores solución del sistema. La rigurosidad de la simbología matemática no será parte de nuestro objetivo. Estas son dificultades de los estudiantes que se muestran al denotar el conjunto solución, según Socas (1997).

Antecedentes

Luego de revisar las investigaciones sobre solución de un sistema de ecuaciones lineales, mostraremos evidencias de los errores y dificultades acerca del concepto de solución

Según Ochoviet (2009), como afirma en su tesis de maestría, los alumnos pensaban que las únicas variables que se usaban en ecuaciones eran x y y , por lo que sugiere que, para corregir estas dificultades, debemos enseñar a los alumnos los sistemas de ecuaciones lineales no solo usando las variables x e y . También observó que los alumnos no muestran el conjunto solución del sistema, sino que brindan la respuesta proporcionando los valores de x e y . Esto conlleva a que el estudiante piense que encontró dos soluciones y no una. Ochoviet sugiere, para evitar estos errores, enseñar y hacer hincapié en que los alumnos muestren siempre el conjunto solución del sistema. Otra observación de la investigadora fue que los estudiantes piensan que los sistemas de ecuaciones solo son compatibles determinados, por lo que, para evitar estos errores, la investigadora sugiere realizar ejercicios que incluyan sistema compatible indeterminado e incompatible. Finalmente, Ochoviet recomienda trabajar con los estudiantes ejercicios con un número de ecuaciones diferentes al número de incógnitas, pues ellos solo piensan en sistemas donde el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas como son el 2×2 y 3×3 . Debido a estos resultados, consideraremos investigaremos ejercicios y problemas referidos al sistema de ecuaciones lineales donde el número de ecuaciones es menor al número de variables, pues los estudiantes tienen dificultades en este tipo de ejercicios. Otros investigadores como Panizza, Sadovsky y Sessa (1999) detectaron las dificultades que tienen los estudiantes de cuarto y quinto de secundaria de un colegio de Argentina, al resolver una ecuación con dos variables en forma adecuada. En sus resoluciones los estudiantes agregaban una ecuación para poder resolverlo o lo dejaban sin responder, esto hecho coincide con las conclusiones de Ochoviet (2009), donde afirma que los estudiantes tienen dificultad en resolver sistema de ecuaciones, con número de variables distintos al número de ecuaciones. Esta información de los investigadores brinda futuras pautas que servirán para diseñar nuestra prueba diagnóstica. Estas observaciones identificadas por Ochoviet, Panizza, Sadovsky y Sessa, quienes aportarán información para alimentar de manera adecuada nuestras actividades y secuencia didáctica. Podemos inferir que en los estudiantes que fueron evaluados por los investigadores predomina el pensamiento analítico aritmético, pues no llegan a tener capacidad de análisis para estar en el pensamiento analítico estructural.

Cutz (2005) detectó las dificultades que tienen los estudiantes con la representación geométrica del conjunto solución de un sistema de ecuaciones con dos y tres variables, además de relacionar e interpretar adecuadamente el pensamiento sintético geométrico y analítico estructural de Sierpinska (2000). La investigación consistió en entrevistar a 5 alumnos que recién estaban cursando álgebra lineal en una institución superior de México, a los cuales se les indicó que

desarrollaran una serie de actividades, por ejemplo, la gráfica de ecuaciones con dos incógnitas, de manera que hubiera tres puntos de intersección. Se detectó que los alumnos dieron como las soluciones los tres puntos de corte; es decir, ellos identifican la intersección de cada par de rectas como solución cuando en realidad no hay. Nosotros podemos inferir que dichos estudiantes tienen dificultad de transitar del pensamiento sintético geométrico al pensamiento analítico estructural. El investigador también detectó que los alumnos consideran a una recta como un objeto de solución único y no de infinitas soluciones; también, observó que los estudiantes consideran las rectas como segmento y no como rectas. Esto es otra fuente de dificultad; es decir, no consideran que la recta se prolonga indefinidamente. El investigador concluyó que los estudiantes tienen distintas formas de interpretar el pensamiento geométrico y analítico; además, sugiere tener en cuenta las dificultades que encontró en los alumnos al iniciar el desarrollo del curso de álgebra lineal para poner mayor énfasis o crear actividades que ayuden a superar dicha dificultad.

Oktac, García y Ramírez (2006) consideraron realizar importantes actividades de reflexión y análisis a los alumnos para poder apreciar su nivel de comprensión del tema. En la primera actividad, consideraron indicar a los alumnos que resuelvan el siguiente sistema:
$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 4x + 6y = -8 \end{cases}$$

,para conocer las herramientas que utilizan los alumnos al resolver dicho sistema si realizan operaciones para eliminar una de las variables, se encontrarán con la siguiente expresión $0=32$ y concluirán que el sistema no tiene solución. Los investigadores proponen hacerles a los estudiantes la siguiente pregunta: ¿por qué consideran que no tiene solución? Así, el docente podrá saber si aprendió el concepto y no solo el algoritmo de solución. Si la respuesta de los alumnos fuera infinitas soluciones, también se debe realizar con ellos la misma reflexión. Una segunda actividad consiste en pedir a los estudiantes que brinden ejemplos de un sistema de ecuaciones lineales de dos ecuaciones con incógnitas que tenga infinitas soluciones y otro que además tenga como solución el punto $(5; -3)$. Estos tipos de problemas representan para los estudiantes un gran desafío, porque ellos están acostumbrados a que se les brinde el sistema de ecuaciones y aplicar su algoritmo de solución. Lo que pretende esta pregunta es averiguar si el alumno tiene claro lo que significan las ecuaciones equivalentes como infinitas soluciones.

Por otro lado, en las investigaciones que realizó Mora (2001) a estudiantes de licenciatura, detectó que tenían dificultad en poder interpretar cuando, al resolver un sistema de ecuaciones lineales, se encuentran con la igualdad $0=0$. Además, cuando se les muestra la gráfica de tres rectas que forman un triángulo, los estudiantes identifican los vértices del triángulo como solución del sistema. Por ello, el investigador concluye que los alumnos no pueden transitar los distintos modos de pensamiento de Sierpinska (2000). Oaxaca y De la Cruz (2009) detectaron en sus investigaciones que los estudiantes creen que la solución gráfica de un sistema de ecuaciones lineales se encuentra en la intersección con los ejes coordenados; además, no relacionan la solución o soluciones del sistema como pares ordenados, sino que consideran como solución el valor de las variables de manera independiente.

Errores y dificultades según socas

Mattos (2018) afirma que las investigaciones realizadas por Socas (1997) confirman que, en el aprendizaje de las matemáticas, surgen muchas dificultades en casi todos los alumnos. Por ello,

clasifica dichas dificultades de la siguiente manera: la primera dificultad detectada por Socas es la asociada a la complejidad de los objetos matemáticos. Esto se debe a la precisión con que los estudiantes trabajan sus tareas asignadas, pues desarrollan el ejercicio o problema de la tarea asignada con un lenguaje habitual y no necesariamente con una precisión matemática. Un segundo tipo de dificultad, según Socas, está asociado con los procesos de los pensamientos matemáticos, donde los estudiantes pueden transitar sobre los conceptos matemáticos, pero sin el formalismo y la abstracción de este. El tercer tipo de clasificación de las dificultades, según Socas, está asociado a los procesos de enseñanza de matemáticas. Para ilustrarlo, el autor pone como ejemplo una institución escolar donde detectó que la enseñanza docente era tradicional y se limitaba a brindar los contenidos matemáticos de manera formal y rigurosa. En cuanto al currículo de las matemáticas, Socas advierte que muchos docentes se centran en un libro de texto y en su formalismo matemático correspondiente, de manera que no logran articular dicho conocimiento con los estudiantes y los métodos de enseñanza. El cuarto tipo de dificultad que clasifica Socas está asociado a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos. Este aparece cuando tratamos de lograr información sobre los procesos de desarrollo de aprendizaje de los estudiantes, de manera que se puedan regular los niveles de dificultad de las preguntas que se trabajan con ellos. El quinto tipo de dificultad que detectó Socas es aquel asociado a las actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas. Dicha dificultad aparece, debido a que muchos estudiantes tienen miedo o un comportamiento negativo hacia las matemáticas.

Propuesta de dificultades y errores para el conjunto solución

Nosotros detectamos en nuestra prueba diagnóstica aplicada a los estudiantes de ingeniería de los primeros ciclos de una universidad de Lima, que han terminado sus estudios secundarios por lo menos hace 5 años y están empezando a estudiar su carrera profesional, los siguientes los errores y dificultades definidas por Socas (1997):

1. Tienen una dificultad de precisión según Socas (1997), al no poder escribir adecuadamente el conjunto solución en un sistema de ecuaciones lineales.
2. Tienen un error de procedimiento según Socas (1997), sólo al ser capaces de resolver sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, y cuando se enfrentan a un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas, lo agrupan de dos en dos, y muestra como la solución del sistema tres pares ordenados, además cuando se enfrentan a resolver una ecuación con dos variables, consideran que no hay solución porque falta como información otra ecuación.
3. Tienen un error del significado de la igualdad según Socas (1997), al considerar los términos independientes del sistema de ecuaciones como la solución.
4. Tienen una dificultad de pensamiento matemático y un error de procedimiento según Socas (1997) al considerar como solución todos los cortes entre graficas de las rectas y/o con los ejes coordenados, es decir si se les muestran las graficas de tres rectas de manera que se intercepten en tres puntos no colineales, algunos estudiantes responderían que el sistema tiene tres soluciones y otros indicarían que tienen 5 soluciones pues además están agregando los cortes con los ejes coordenados.
5. Los estudiantes tienen en algunos casos un pensamiento analítico aritmético y no tienen desarrollado un pensamiento sintético según Sierninska (2 000), esto se manifiesta cuando

se enfrentan a la gráfica de un sistema de ecuaciones y en vez de interpretar la gráfica, determinan las ecuaciones del sistema para luego resolverlo, esto sería una dificultad de procedimiento.

6. Tienen una dificultad de pensamiento matemático y error de procedimiento según Socas (1997), cuando los estudiantes después de resolver un sistema de ecuaciones lineales, determinan los valores de las variables x e y , con lo cual consideran que el sistema tiene dos soluciones y no una, porque pueden inferir que dichos estudiantes no lo consideran como un par ordenado la solución del sistema.

Aplicación de la lista de errores y dificultades

Ahora nosotros consideraremos las definiciones y clasificaciones de errores y dificultades trabajadas por Socas (1997) para analizar los antecedentes registrados.

1. Según Ochoviet (2009), hay algunos estudiantes que sólo reconocen las variables x e y , en nuestros casos algunos estudiantes sólo reconocían como variable a x .
2. Según, Panizza, Sadovsky y Sessa (1999), muchos estudiantes no son capaces de resolver una ecuación con dos variables, debido a que consideran que falta una ecuación, en nuestro caso dicha respuesta coincidió con algunas resoluciones de la respuesta de la prueba diagnóstica, esto sería un error de procedimiento según Socas (1997) pero otros mostraron algunas soluciones de la ecuación, y fueron sólo 2 alumnos de 40 estudiantes que fueron capaces de resolver correctamente la ecuación, podemos inferir que dichos estudiantes han transitado por el pensamiento analítico estructural de Sierpiska (2000).
3. Según Cutz (2005), Eslava y Villegas (1998), Oaxaca y De La Cruz (2009), cuando los estudiantes se enfrentan a la gráfica de un sistema de ecuaciones lineales, brinda como soluciones los tres puntos de cortes o le agregan además los cortes con los ejes coordenados,. Esto sería un error de procedimiento según Socas (1997).
4. Según Ochoviet (2009) y Valencia (2015), detectaron que los estudiantes evidenciaron problemas al resolver sistema de ecuaciones lineales que tenga el número de ecuaciones diferente al número de incógnitas, Esto sería un error de procedimiento según Socas (1997).

Después de revisar los antecedentes y analizar los resultados de la prueba diagnóstica en base a los errores y dificultades, según Socas, consideramos las siguientes sugerencias que ayudarán a desarrollar un mejor entendimiento y comprensión de la solución o conjunto solución en un sistema de ecuaciones lineales:

- 1) Se debe desarrollar con los estudiantes sistemas de ecuaciones lineales del que sean compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible, porque hemos detectado
- 2) Se debe proponer a los estudiantes ejercicios donde ellos puedan discriminar cuando es o no es solución de un sistema de ecuaciones lineales, en forma analítica y gráficamente,
- 3) Se debe desarrollar ejercicios de sistemas de ecuaciones lineales con variables diferentes a x e y , hemos detectado en algunas resoluciones de las respuestas de nuestra prueba diagnóstica, que hay dificultad por aceptar a a y b , como variables.

- 4) Se debe proponer ejercicios de sistema de ecuaciones lineales que tengan como información las soluciones del sistema, de manera que el estudiante pueda construir un sistema de ecuaciones,

Referencias

- Cutz, B. (2005) Un estudio acerca de las concepciones de estudiantes de licenciatura sobre los sistemas de ecuaciones y su solución. Tesis de maestría, Cinvestav- IPN
- Eslava, M., & Villegas, M. (1998). *Análisis de los modos de pensar sintético y analítico en la representación de las categorías de tres rectas en el plano*. (Tesina de Diplomado, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. México).
- González, D., & Roa, S. (2015). *Los sistemas de ecuaciones lineales: evidencias del tránsito entre los modos de pensamiento en estudiantes universitarios*. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 102-109). México D.F.: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Mattos, J. (2018) *Un análisis de las concepciones acerca de las dificultades, los obstáculos y los errores relativo al límite* (Tesis de magister en la enseñanza de las matemáticas).
- Mora, B. (2001). *Modos de pensamiento en la interpretación de la solución de sistemas de ecuaciones lineales* (Tesis de Maestría, CINVESTAV-IPN. México).
- Ochoviet, T. (2009) *Sobre el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas*. (Tesis de doctorado no publicada. CICATA-IPN, México).
- Oaxaca, J. (2002). Dificultades en el tránsito del razonamiento sintético geométrico al analítico aritmético en la solución de sistema de ecuaciones lineales.
- Panizza, M., Sadovsky, P., & Sessa, C. (1999). La ecuación lineal con dos variables: entre la unicidad y el infinito. *Enseñanza de las Ciencias*, 17 (3), 453-461.
- Sierpinska, A (2000), Part II-Chapter 7 on some aspects of students thinking in linear algebra.
- Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, 125-154.

DIFICULTADES EN EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL EN ESTUDIANTES DE INGENIERÍA

Alejandro M. Ecos Espino*

Joffré Huamán Núñez**

Zoraida R. Manrique Chávez***

alejandroecos2013@hotmail.com, joffrehn13@hotmail.com, zoramanrique@hotmail.com

Universidad Nacional de Moquegua, Perú*

Universidad Nacional Micaela Bastidas de Apurímac, Perú**

Universidad Nacional Intercultural de la Amazonía, Perú***

Resumen

El estudio tuvo como objetivo identificar las dificultades en estudiantes de ingeniería en relación al pensamiento variacional. Se tomó como referencia la Teoría de los Registros Semióticos de Duval. El trabajo fue de tipo no experimental, con diseño descriptivo comparativo. La valoración de las respuestas fue bajo la perspectiva cualitativa, desde una óptica exploratoria y descriptiva. Participaron 100 estudiantes de ingeniería civil de las universidades nacionales y privadas de la provincia de Abancay. Se elaboró un cuestionario con 3 preguntas diseñadas dentro del marco del comportamiento variacional de las funciones. Los resultados indican la escasa reflexión de los estudiantes sobre el comportamiento variacional de las funciones. Presentan dificultades para discriminar entre ceros y puntos estacionarios de una función, intervalos de variación de la variable dependiente, intervalos de positividad, negatividad y monotonía de una función. Las dificultades encontradas son tipo cognitivo debido a la inadecuada conversión de un registro al otro.

Palabras clave: Dificultades, funciones, comportamiento variacional.

Introducción

En el ambiente universitario, el aprendizaje de la matemática constituye un problema crítico que se manifiesta a través del número elevado de estudiantes desaprobados y una limitada comprensión de los distintos conceptos que se abordan dentro de la matemática a nivel superior. Esta problemática se ve favorecida por la preferencia de los docentes a la enseñanza tradicional, así como la forma pasiva en que los estudiantes hacen frente a su aprendizaje de carácter matemático.

Dentro del desarrollo del pensamiento matemático avanzado, el modelo de enseñanza tradicional no ha sido efectivo y centra su actuar en la comprensión de algoritmos de resolución mecánica de ciertos ejercicios tipo, generando dificultades en la comprensión adecuada de

conceptos y métodos de pensamiento que son el centro de este campo de las matemáticas. (Artigue, 1995). Se puede lograr que los estudiantes calculen, límites, derivadas o integrales sin que sean capaces de asignar un sentido más amplio a las nociones involucradas en su comprensión. (Cantoral y Mirón, 2000)

El desarrollo del pensamiento variacional constituye un elemento importante en el aprendizaje de las matemáticas a nivel superior, sobretodo en carreras de ingeniería, ya que, a través de él, los estudiantes tendrán la capacidad de reconocer, percibir, identificar y caracterizar los procesos de variación y cambio de variables en distintos escenarios, permitiendo de esta manera su descripción, modelación y representación en diferentes registros como el verbal, tabular, gráfico o algebraico. En tal sentido, en este trabajo nos planteamos el siguiente problema de investigación: ¿Qué dificultades presentan los estudiantes de ingeniería en relación al desarrollo del pensamiento variacional?

Aspectos Teóricos

La teoría de los registros semióticos

Duval (1998) considera que las representaciones semióticas de un objeto son absolutamente necesarias para poder representar una idea o un objeto matemático. Juegan un papel esencial en el desarrollo de representaciones mentales, en el cumplimiento de diferentes funciones cognitivas y en la producción de conocimiento, aumentando la capacidad de pensamiento del sujeto sobre ese objeto y por lo tanto su conocimiento del mismo.

El manejo de diferentes representaciones para un mismo objeto aumenta la capacidad de pensamiento del sujeto sobre ese objeto y por lo tanto su conocimiento del mismo. Cada representación proporciona un aspecto diferente del objeto dependiendo del sistema utilizado para su producción, pero siempre el objeto representado se mantiene invariante (Duval, 2004).

En este sentido, aprender matemáticas se concibe como el desarrollo de coordinaciones progresivas entre variados sistemas semióticos de representación, así como la discriminación y coordinación de sistemas semióticos de representación para llegar a ser capaces de transformar cualquier representación. (Duval, 2000)

Ver los conceptos en múltiples registros y desde múltiples perspectivas permite a los estudiantes organizar mejor su conocimiento. Esto se considera una condición cognitiva necesaria para el aprendizaje (Robert & Speer, 2001, en González, 2006, p. 50).

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, se adopta la premisa teórica de los sistemas semióticos de representación en el sentido que no sólo son necesarios para fines de comunicación, sino que resultan imprescindibles para la actividad cognoscitiva del pensamiento.

Dificultades y errores en el aprendizaje de la Matemática

Socas (1999) organiza las dificultades en el aprendizaje de la matemática en cinco categorías:

1. Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de la matemática.
2. Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático.

3. Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de la matemática.
4. Dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los estudiantes.
5. Dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia la matemática.

Las dos primeras dificultades están relacionadas a los objetos matemáticos y procesos de pensamiento, la tercera a los procesos de enseñanza, la cuarta al desarrollo cognitivo de los alumnos y la última a la falta de una actitud racional hacia la matemática. Todas estas dificultades se conectan y se manifiestan en la práctica en forma de respuestas equivocadas.

Duval (2004) sostiene que muchas de las dificultades de los estudiantes se pueden describir y explicar debido a la falta de coordinación entre registros de representación. Las dificultades cognitivas para la conversión se determinan principalmente por la no congruencia entre dos contenidos de representación del mismo objeto y por la no reversibilidad de la conversión. Con sólo invertir la dirección del cambio de registro, los que aprenden dejan de reconocer los objetos representados.

Pensamiento Variacional

El pensamiento variacional puede describirse aproximadamente como una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que varíen conjuntamente en semejanza a los patrones de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad. (Vasco, 2006, p. 138)

Cantoral (2013) manifiesta que este tipo de pensamiento comprende las matemáticas del cambio por un lado y los procesos de pensamiento por el otro; implica la integración de los dominios numéricos, desde los naturales hasta los complejos, conceptos de variable, función, derivada e integral, así mismo sus representaciones simbólicas, sus propiedades y el dominio de la modelación elemental de los fenómenos de cambio.

El estudio de los conceptos, procedimientos y métodos que involucran la variación, están integrados a diferentes sistemas de representación gráficas, tabulares, expresiones verbales, diagramas, expresiones simbólicas, ejemplos particulares y generales, para permitir, a través de ellos, la comprensión de los conceptos matemáticos. De esta manera se hacen significativas las situaciones que dependen del estudio sistemático de la variación, pues se obliga no sólo a manifestar actitudes de observación y registro, sino también, a procesos de tratamiento, coordinación y conversión.

Aspectos Metodológicos

El estudio es de tipo no experimental, con diseño descriptivo comparativo en el sentido que indican Hernández et al (1997). Se diseñó y validó un cuestionario compuesto de 3 situaciones problemáticas, relacionadas a la identificación de regiones de variabilidad tanto para "x" como para "y"; regiones de crecimiento, decrecimiento, estabilización, valores extremos, así como análisis y descripción del comportamiento de la función. La primera exigía a los estudiantes la coordinación del registro gráfico y el algebraico. La segunda, la coordinación del registro algebraico y el verbal y/o gráfico. La última situación problemática, exigía la coordinación del registro gráfico y el verbal. Fue aplicado a 100 estudiantes del primer ciclo de estudios de la

carrera de ingeniería civil de 03 universidades de la provincia de Abancay: 48 de la Universidad Nacional Micaela Bastidas de Apurímac (UNAMBA), 29 de la Universidad Tecnológica de los andes (UTEA) y 23 de la Universidad Alas Peruanas (UAP) sede Abancay. Se efectuaron análisis de varianza de un factor para identificar diferencias entre las medias obtenidas por los grupos. Por otro lado, el análisis de las respuestas y la determinación de las dificultades de los estudiantes se realizaron desde una óptica cualitativa, a través de un estudio de caso, en su forma exploratoria y descriptiva (Simons, 2011, p.43)

Resultados obtenidos

Tabla 1.

Medias obtenidas por los grupos

Grupos	M	DE
UNAMBA	7.4375	4.1071
UAP	5.3043	0.8757
UTEA	5.3276	1.2121

Fuente: Elaboración propia

Dentro de una escala de evaluación vigesimal, se encontró que, en todos los grupos de estudio, el rendimiento medio alcanzado por los estudiantes es deficiente. En general, este rendimiento es una característica en los estudiantes de las 2 universidades particulares donde se refleja menor dispersión. En la universidad estatal (UNAMBA), la mayor dispersión de los resultados, refleja la existencia de mejores calificaciones en algunos estudiantes.

Tabla 2. *Comparación de medias entre grupos de estudio*

Grupos	F	P
UNAMBA UAP	21.9	0.000*
UNAMBA UTEA	11.4	0.000*
UAP UTEA	0.52	0.061

Fuente: Elaboración propia

**p < 0.05*

Se encontró diferencias estadísticamente significativas en la media obtenida por los estudiantes de la universidad estatal (UNAMBA) en comparación a las otras 2 universidades ($p < 0.05$). Por otro lado, los rendimientos obtenidos por los estudiantes de las dos universidades particulares

no difieren significativamente ($p > 0.05$). En los estudiantes de las universidades privadas, es común el rendimiento deficiente, mientras que, en la universidad estatal, si bien el rendimiento no deja de ser deficiente, es mejor que en las otras 2 universidades.

Tabla 3.

Porcentaje de respuestas correctas en relación a positividad, negatividad y monotonía

Grupo	CP	CN	DP	DN	P	N
	Registro Gráfico (RG)				Registro Algebraico (RA)	
UNAMBA	50.00%	37.50%	50.00%	50.00%	35.40%	27.10%
UAP	60.90%	52.20%	60.90%	65.20%	0.00%	0.00%
UTEA	48.30%	41.40%	48.30%	65.50%	3.45%	0.00%

Fuente: Elaboración propia

En los tres grupos de estudio, el trabajo dentro del registro gráfico resultó ser más efectivo en cuanto a la determinación de las regiones de crecimiento, decrecimiento, positividad y negatividad de una función. Esto refleja que gran parte de los estudiantes hacen correctamente la lectura de la gráfica propuesta y realizan una coordinación correcta entre la gráfica y la simbología algebraica propuesta como alternativa de respuesta. En cuanto a los que contestaron de manera incorrecta, por ejemplo, en la categoría Creciente y Positiva (CP), la alternativa más elegida fue la B, lo cual refleja que la concepción que función que crece debe ser positiva o viceversa, como el caso del estudiante 21 no discrimina adecuadamente que cuando "x" varía de 0 a 1, la función es positiva pero estable, y que cuando "x" varía de 1 a 2, la función es negativa a pesar que está creciendo, poniendo de manifiesto que existe una lectura gráfica inadecuada del comportamiento de la variación de la función.

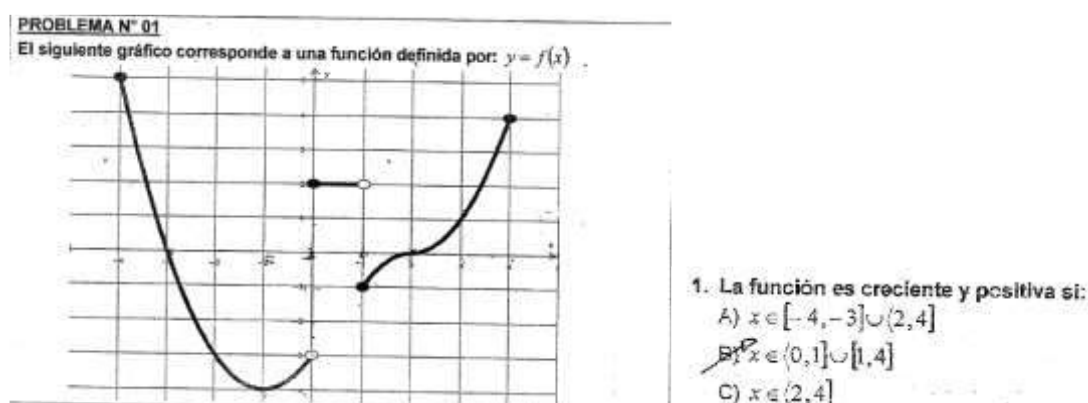


Figura 1. Respuesta del estudiante 21

Tabla 4.

Porcentaje de respuestas correctas por grupo sobre determinación de regiones o puntos de estabilidad

Grupo	Porcentaje
UNAMBA	31.30%
UAP	60.90%
UTEA	62.10%

Fuente: Elaboración propia

Las dificultades encontradas en esta tarea se refieren a la confusión en los estudiantes para interpretar la estabilidad de la función. Algunos estudiantes confunden estabilidad de la función con nulidad de la función, lo cual les llevó a elegir como alternativa de respuesta la A, como es el caso del estudiante 2, que elige la alternativa donde la función se anula, pero parece no asociar estabilidad con falta de crecimiento o decrecimiento, es decir, no utiliza la variación de la función como recurso para responder la pregunta:

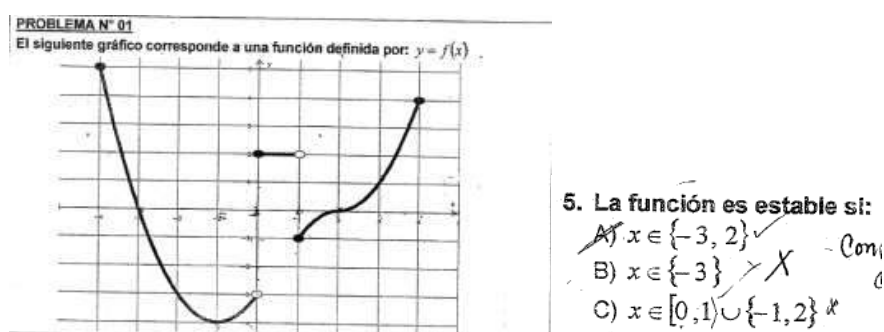


Figura 2. Respuesta del estudiante 2

Tabla 5.

Porcentaje de respuestas correctas sobre determinación de intervalos de variación de las variables

Grupo	Registro Gráfico	Registro Algebraico
UNAMBA	66.70%	29.20%
UAP	58.00%	0.00%
UTEA	43.70%	0.00%

Fuente: Elaboración propia

El trabajo en el registro gráfico fue más efectivo en los estudiantes de los grupos de estudio en cuanto a la determinación de intervalos de variación de las variables. Las dificultades

encontradas en este registro tienen que ver la lectura inadecuada de la gráfica que no refleja la real variación de la variable solicitada, como el caso del estudiante 2:

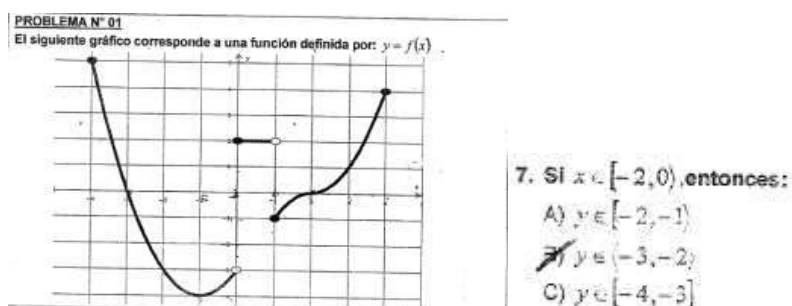


Figura 3. Respuesta del estudiante 2

En cuanto al trabajo en el registro algebraico, los estudiantes recurrieron a la estrategia de la tabulación más que plantear una estrategia gráfica o algebraica que refleje la real variación de la variable. Esta tabulación se realizó de manera directa sin considerar la forma de la función que afecta la variación de la variable solicitada, como el caso del estudiante 13 que prefiere trabajar la función en forma puntual y realizar una lectura directa de los resultados sin analizar la forma de la expresión y como ésta determina la variación de la variable "y":

PROBLEMA N° 02:
Consideremos la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donde $y = f(x) = x^2 - 2x - 3$

D) Si "x" varía de 0 a 2, entonces cómo varía "y":

$$0 < x < 2$$

$$y = x^2 - 2x - 3$$

$$y = (x-3)(x+1)$$

Para $x=0$

$$y = (0-3)(0+1)$$

$$y = -3$$

Para $x=2$

$$y = (2-3)(2+1)$$

$$y = -3$$

$$y = -3 < y < -3$$

Figura 4. Respuesta del estudiante 13

Tabla 6.

Porcentaje de respuestas correctas por grupo sobre análisis del comportamiento de la función

Grupo	Porcentaje
UNAMBA	9.38%
UAP	10.90%
UTEA	15.50%

Fuente: Elaboración propia

Los porcentajes bajos en todos los grupos refleja las dificultades que presentan los estudiantes en cuanto la lectura de la gráfica y esbozar una descripción correcta sobre el comportamiento de la función. Las mayores dificultades se presentaron cuando los estudiantes tuvieron que analizar y describir gráficamente cómo se produce la variación de la función. Lo anterior pone de manifiesto los problemas que tienen los estudiantes para coordinar el registro verbal y el gráfico, como el caso del estudiante 34:

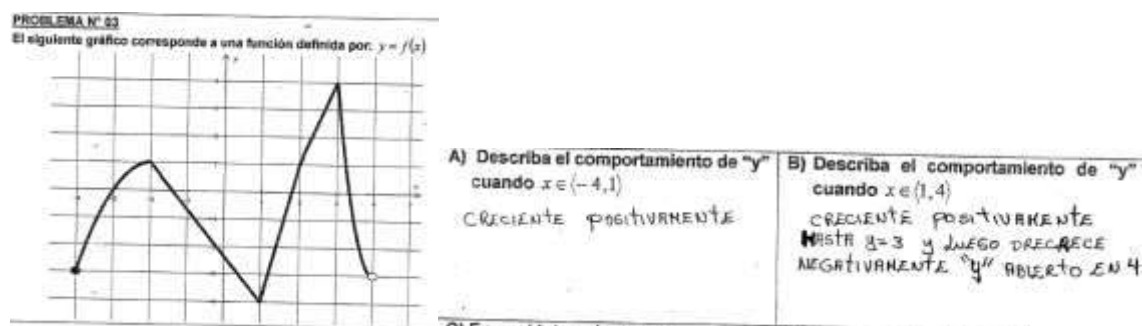


Figura 5. Respuesta del estudiante 34

Tabla 7.

Porcentaje de respuestas correctas sobre identificación de valores extremos

Grupo	Porcentaje
UNAMBA	50.00%
UAP	6.52%
UTEA	6.90%

Fuente: Elaboración propia

En este apartado, los estudiantes que no plantearon una respuesta correcta simplemente dejaron en blanco la casilla. Lo anterior pone en evidencia las dificultades de los estudiantes para interpretar gráficamente el menor o mayor valor de "y". Esta falta de lectura correcta de la gráfica, pone de manifiesto dificultades que presentan los estudiantes en cuanto a la coordinación entre el registro verbal y el gráfico

Consideraciones finales

El análisis de los resultados obtenidos luego de la aplicación del cuestionario refleja la existencia de dificultades en los estudiantes cuando tienen que determinar y describir el comportamiento variacional de las funciones representadas ya sea gráficamente o en forma algebraica o analítica.

El análisis de los datos reportados en las tablas 3, 5 y 6, ponen de manifiesto que los estudiantes prefieren trabajar las funciones en forma puntual, pudiendo leer puntos o trazarlos, sin embargo, no muestran una real reflexión sobre el comportamiento variacional en intervalos de las variables o en forma global, lo cual concuerda con lo manifestado por Bell y Janvier (1981).

El análisis de los resultados reportados en la tabla 4, refleja que los estudiantes tienen dificultades para discriminar entre punto estacionarios de una función y los ceros de la función, lo cual indica confusión entre el comportamiento de la función y la ubicación de la función. Esta confusión también se presenta al momento que los estudiantes tienen que discriminar entre el crecimiento y decrecimiento de la función con su positividad y negatividad, lo que concuerda con lo encontrado por Dolores (2004)

Por otro lado, las dificultades encontradas por los estudiantes parten en gran medida a la inadecuada coordinación entre registros de representación de una función, en nuestro caso, los registros gráficos, algebraicos y verbales. Estas dificultades de tipo cognitivo no permiten realizar una adecuada conversión de un registro al otro como resultados de la falta de congruencia entre las unidades significantes que componen los registros de representación, lo cual concuerda con lo señalado por Duval (2004)

Referencias

- Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En Artigue, M.; Douady, R.; Moreno, L.; Gómez, P., (Eds.). Ingeniería didáctica en educación matemática (pp. 97-140). México DF, México: Grupo Editorial Iberoamérica
- Bell A. & Janvier, C. (1981) The interpretation of graphs representing situations. *For de Learning of Mathematics* 2(19), 34-42
- Cantoral, R. (2013). *Desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional*. México DF, México: Progreso S. A.
- Dolores, C. (2007). *La derivada y el Cálculo. Una mirada sobre su enseñanza por medio de los textos y programas*. En Dolores, C.; Martínez, G.; Farfán, R.M., Carrillo, C.; López, I. y Navarro, C. (Eds.). Matemática Educativa. Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula (pp.169-204). Madrid, España: Ediciones Díaz de Santos
- Dolores, C. (2004) Acerca del análisis de las funciones a través de sus gráficas: concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 3(7), 195-208
- Duval R. (1998). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento*. México DF, México: Grupo Editorial Iberoamérica SA.
- Duval R. (2004). *Semiosis y Pensamiento humano. Registros semióticos y Aprendizaje Intelectuales*. Cali, Colombia: Universidad del Valle.
- González, R. (2006). *La derivada como una organización de las derivadas sucesivas: Estudio de la puesta en funcionamiento de una ingeniería didáctica de resignificación*. (Tesis de

maestría no publicada). México DF, México: Centro de investigación y estudios avanzados del IPN

Hernández, S. et al (1997). *Metodología de la Investigación*. México: Mc Graw-Hill.

Socas M. (1999) *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria*. En: Rico L, editor: *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Barcelona, España: Horsori.

Vasco, C. (2006). *El Pensamiento Variacional, la Modelación y las Nuevas Tecnologías*. En *Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas*. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Zuñiga, L. (2007) El cálculo en carreras de ingeniería: un estudio cognitivo. *RELIME. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 10 (1), 145 -175.

ARTICLACIÓN DE LAS APREHENSIONES EN LA NOCIÓN DEL LÍMITE EN UN PUNTO DE UNA FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL EN ESTUDIANTES DE INGENIERÍA

Violeta Lupita Bejarano Vílchez

Verónica Neira Fernández

v.bejarano@pucp.pe; vneira@pucp.pe

Instituto de Investigación sobre Enseñanza de la Matemáticas, IREM-PUCP, Perú

Resumen

El presente artículo es un recorte de la investigación de Bejarano (2018), la cual tomó como base teórica aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica. Estos aspectos teóricos permitieron analizar la articulación de las aprehensiones perceptiva, discursiva y operatoria que desarrollan los estudiantes, cuando movilizan la noción del límite en un punto de una función real de variable real, en el registro gráfico. Este análisis se realiza mediante una actividad planteada con Geogebra y a lápiz con papel. Los participantes son estudiantes (17 a 21 años) de Ingeniería de Seguridad y Salud en el Trabajo de una universidad pública de Lima. Asimismo, consideramos aspectos de un estudio de caso. La actividad presentada en el artículo tiene como finalidad evidenciar que, el estudiante Julio articula estas aprehensiones al desarrollar preguntas relacionadas al límite en un punto de una función real de variable real en el registro gráfico.

Palabras clave: Límite en un punto de una función real de variable real, aprehensiones, Geogebra, registro gráfico.

Introducción

En la actualidad, existen investigaciones sobre límite de funciones, las cuales muestran la dificultad que presentan los estudiantes para entender la noción del límite de una función, las carencias en la coordinación de registros y la importancia de usar un software (Geogebra).

Tomás (2014), en su investigación tiene como objetivo analizar cómo las diferentes formas de representación semiótica, de este objeto matemático influyen en la comprensión de la coordinación de los procesos de aproximación; el autor concluye que, usar diferentes sistemas de representación en la enseñanza de la noción del límite puede ayudar a los estudiantes a consolidar este concepto.

Por su parte, Londoño, Narro y Vera (2014), indagan sobre la didáctica del límite y la continuidad de funciones, manifiestan en su investigación que los estudiantes tienen un mejor desempeño al usar el registro algebraico. Según las autoras, esto conlleva a que el concepto de límite de funciones no sea identificado en otros registros de representación.

Caglayan (2015) realiza una investigación que ofrece un enfoque basado en pruebas visuales para ayudar a comprender el concepto de límite de una función con un entorno dinámico, el autor concluye que Geogebra es una herramienta que facilita que los estudiantes entiendan, exploren y obtengan experiencias en la observación de los límites y sus propiedades.

En base a estas investigaciones Bejarano (2018) manifiesta que, existe una preocupación, por parte de los investigadores, en estudiar la concepción que tienen los estudiantes con respecto a la noción del límite de una función en los distintos registros de representación semiótica, y resalta la importancia del uso de Geogebra en la enseñanza del límite de funciones.

La autora desarrolla una investigación que, consiste en analizar la articulación las apreensiones perceptiva, discursiva y operatoria para movilizar la noción del límite de una función real de variable real, que realizan los estudiantes de Ingeniería de Seguridad y Salud en el Trabajo de una universidad pública de Lima. Esta investigación toma como base algunos aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (2004) y, un estudio de caso basado en Martinez (2006) como metodología de una investigación cualitativa.

Para el presente artículo, consideraremos el análisis de la producción del estudiante Julio, la información será triangulada con fichas de recojo de información, archivos de Geogebra y grabación de la pantalla del computador con el uso del programa Camtasia Studio 8.

Aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica

En la investigación, tomamos algunos aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica propuesta por Duval (2004) en la cual manifiesta que:

Las representaciones semióticas, es decir, aquellas producciones constituidas por el empleo de signos (enunciado en lenguaje natural, formula algebraica, grafico, figura geométrica.) no parecen ser más que el medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales, es decir, para hacerlas visibles o accesibles a los otros (p.14).

Según Duval (2012), los objetos matemáticos no son claramente accesibles a la percepción, y por ello que es necesario representarlos. De acuerdo con el autor, para que sistema semiótico sea considerado un registro de representación, debe cumplir tres actividades cognitivas ligadas a la semiosis: Formación, tratamiento y conversión.

La formación implica la selección de un conjunto de caracteres perceptibles y que son identificables como representación de lo que se quiere representar. El tratamiento ocurre cuando se realiza una transformación en el mismo registro, una reconfiguración es un tipo de tratamiento para las figuras geométricas. La conversión sucede cuando una transformación produce una representación en el registro distinto a la inicial, conservando la totalidad o parte del contenido de la representación inicial. Según Duval (2004) existen cuatro tipos de registros que, si permiten estas actividades cognitivas, las cuales se resumen en la Tabla 1.

Tabla 1

Clasificación de los registros de representación discursiva y no discursiva

Registros de representación discursiva	Registros de representación no discursiva
Lengua Natural: • Asociaciones Verbales (conceptos) • Forma racional: - Argumentación a partir de observaciones, creencias. - Deducciones válidas a partir de uso de definiciones o teoremas. Sistemas de escritura: • Numéricos (binarios, decimal, fraccionaria...). • Algebraicos; simbólicas (lenguas formales). • Cálculo.	Figuras geométricas planas o en perspectiva: • Aprehensión operatoria y no sólo perspectiva. • Construcción con instrumentos. Gráficos cartesianos: • Cambios de sistemas de coordenadas. • Interpolación, extrapolación.

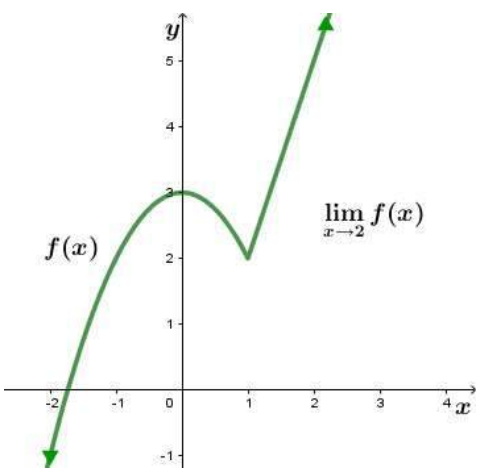
Fuente: Bejarano (2018, p. 27)

Según Duval (1994), una aprehensión es la acción de aprehender; es decir, comprender un objeto por medio de sus representaciones y propiedades en un determinado registro. Además, manifiesta que existen cuatro maneras diferentes de aprehender el registro figural en Geometría, según su rol: aprehensión perceptiva, aprehensión operatoria, aprehensión discursiva y secuencial. Duval (1994) manifiesta que **la aprehensión perceptiva** es la primera que aparece en el proceso cognitivo del estudiante y permite identificar o reconocer inmediatamente una forma u objeto matemático en el plano o en el espacio.

Bejarano (2018) adapta esta aprehensión a una función real de variable real, menciona que, si el estudiante es capaz de identificar que la representación gráfica corresponde a una función real de variable real, entonces podemos afirmar que desarrolló una aprehensión perceptiva **y** para ello debe identificar que hay una variable independiente y otra dependiente, así como reconocer los valores que asumen cada una de estas variables (lectura de los ejes coordenados), tal como se aprecia en la Tabla 2.

Tabla 2

Aprehensión perceptiva del límite en un punto de la función $f(x)$

Aprehensión perceptiva de $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$	
	• $f(x)$ es una función real de variable real. • $f(x)$ es una función por tramos. • $f(x)$ es una función continua. • $f(2) = 5$

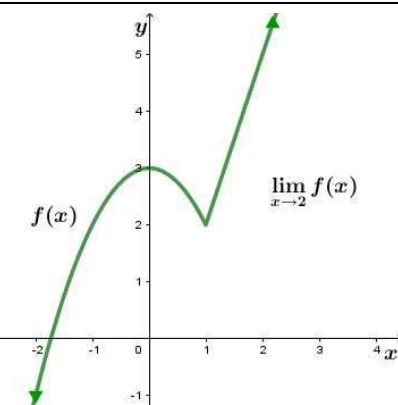
Fuente: Bejarano (2018, p. 29)

De acuerdo con Duval (1994), la **aprehensión discursiva** es la acción mediante el cual el sujeto relaciona el objeto matemático con propiedades matemáticas que no están explícitas en la figura tales como teoremas, axiomas y propiedades.

Según Bejarano (2018) si el estudiante logra identificar propiedades relacionadas al límite en un punto de una función real de variable real, que no están explícitas en la representación gráfica de la función, por ejemplo, el dominio de la función, el tipo de discontinuidad, entre otros, y ello le permita calcular y analizar el límite en un punto de esta función real de variable real, se puede afirmar que el estudiante desarrolla una **aprehensión discursiva** como se aprecia en la Tabla 3.

Tabla 3

Aprehensión discursiva del límite en un punto de la función $f(x)$

Aprehensión discursiva de $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$	
	• $Dom f(x) = \mathbb{R}$ • $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 5$ • $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 5$ • $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ existe y es 5 porque tiene los límites laterales iguales (teorema de la existencia de límite).

Fuente: Bejarano (2018, p. 30)

Según Duval (1994, p. 126), “Una figura proporciona una ayuda heurística. En tanto, una de sus modificaciones posibles muestra la idea de una solución”. El autor menciona que una **aprehensión operatoria** se da cuando se modifica la figura variando su dimensión. Esta consiste en aumentar, disminuir o deformar la figura inicial y esta queda transformada en otra llamada imagen.

Por otro lado, para el registro gráfico Peñaloza (2016), Vara y Salazar (2018) y Salazar (2018) mencionan que el sujeto realiza una modificación óptica al utilizar las herramientas *Alejar* y *Aproximar* en *Geogebra 3D*, con el propósito de que los elementos y características de la representación gráfica del paraboloides puedan ser reconocidos y estudiados con mayor detenimiento mediante acercamientos o alejamientos.

Bejarano (2018), considera que la modificación en el registro gráfico será la **modificación óptica** al realizar una variación de la dimensión de los ejes coordenados X y Y , que servirá para que el estudiante pueda estudiar y analizar conceptos relacionados al límite en un punto de una función real de variable real, donde usando las herramientas *alejar*, *aproximar* o *desplazamiento* de Geogebra se cambia la dimensión de los ejes, tal como se aprecia en la Figura 1, que usando la herramienta *desplazamiento vertical* la dimensión del eje X cambia de uno a cinco.

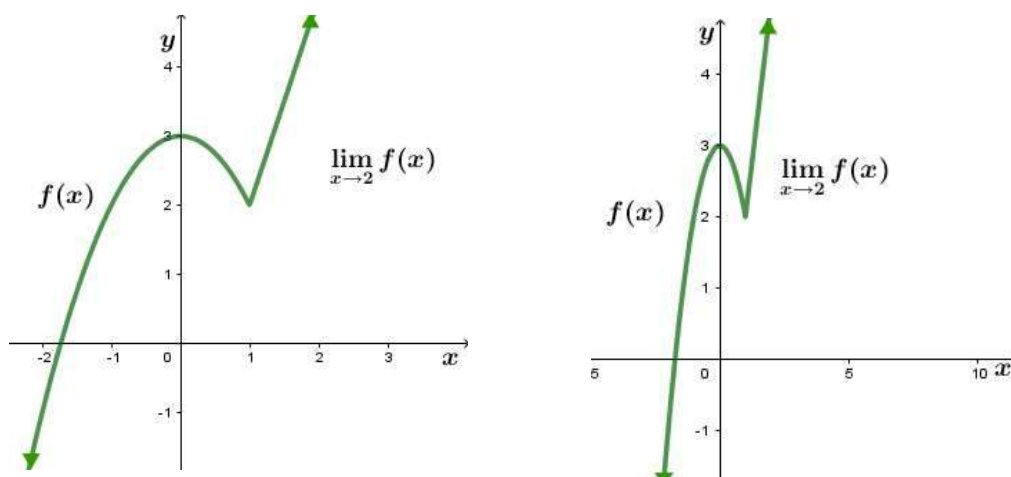


Figura 1. Modificación óptica de una función por variación de la escala de los ejes coordenados.

Fuente: Bejarano (2018, p.31)

Desarrollo de la investigación

Bejarano (2018) aplica en su investigación, aspectos de la metodología de un estudio de caso, en la que el caso es, la articulación de las aprehensiones perceptiva, discursiva y operatoria en el registro gráfico. Para ello identifica las aprehensiones que realizan los estudiantes cuando movilizan la noción de límite de una función real de variable real en un punto, en la representación gráfica, usando Geogebra y a lápiz con papel.

La parte experimental se lleva a cabo con tres estudiantes de Ingeniería de una universidad pública de Lima del curso de Cálculo 1. Para analizar la producción de los estudiantes se usa una ficha de actividad, ficha de observación, ficha de recojo de información, archivos de Geogebra, grabación de la pantalla con Camtasia 8. Según la investigadora este material sirve para la triangulación de datos, contrastar y comparar la información obtenida por los diferentes medios de indagación. Finalmente, con la información obtenida la autora realiza un análisis de la articulación de las aprehensiones. En este artículo presentaremos el análisis de la producción del estudiante Julio a la pregunta 2c) de la actividad.

Figura 2. Pregunta 2 de la actividad

2. Abra el **archivo P2**, a continuación responda los siguientes ítems:

a) ¿Existe $\lim_{x \rightarrow 3.5} f(x)$? Justifique.

b) Usando las herramientas del Geogebra, explique por qué el $\lim_{x \rightarrow 3.5} f(x)$ **NO** es igual a 2

c) ¿Existe el $\lim_{x \rightarrow 2017} f(x)$? Explique

Fuente: Bejarano (2018, p.87)

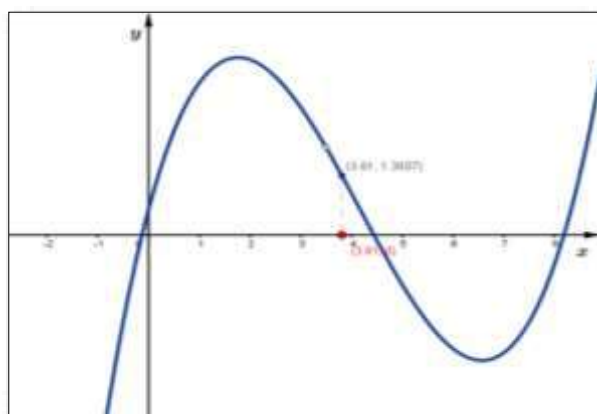


Figura 3. Archivo de Geogebra de la pregunta 2 de la actividad

Fuente: Bejarano (2018, p.61)

Según Bejarano (2018) el objetivo de esta pregunta es que el estudiante realice tratamientos en el registro gráfico que, le permitan movilizar conceptos relacionados al límite de una función real de variable real. En el desarrollo de esta pregunta, se espera identificar las aprehensiones perceptiva, discursiva y operatoria en el registro gráfico usando Geogebra. En un inicio según la autora el estudiante mediante una aprehensión perceptiva no puede determinar $\lim_{x \rightarrow 2017} f(x)$, puesto que $x = 2017$ no se aprecia en el archivo dado en Geogebra. Esta necesidad hará que el estudiante modifique la escala en el plano cartesiano usando las herramientas *alejar* o *desplazamiento*, ello implicaría que el estudiante realizaría una modificación óptica, esto de

acuerdo con Duval mostraría una aprehensión operatoria, porque se modifica a la dimensión de los ejes coordenados, pero se mantiene la forma y orientación de esta representación.

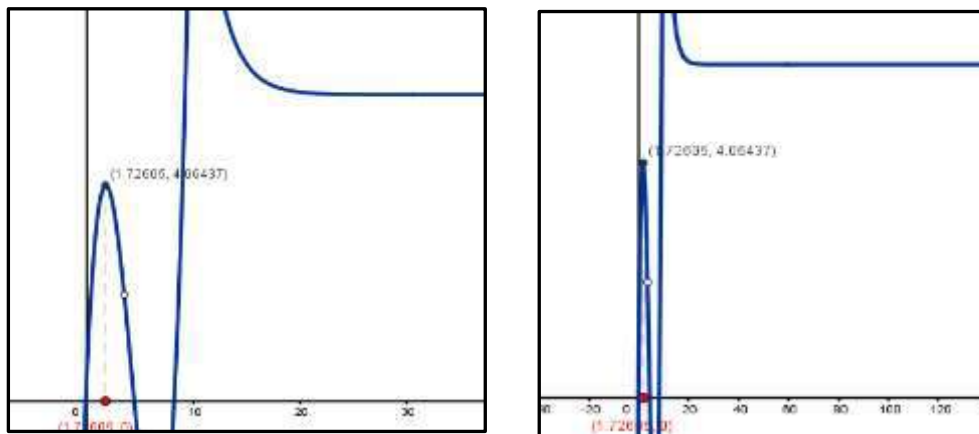


Figura 4. *Modificación óptica de la función $f(x)$.*

Fuente: Bejarano (2018, p.69)

En un determinado momento, luego de realizado los tratamientos al modificar la escala del eje X hasta lograr observar el número 2016, Según Bejarano (2018) el estudiante, mediante su aprehensión perceptiva, podrá apreciar que la función solo está definida hasta $x = 2016$, y por tanto $\lim_{x \rightarrow 2017} f(x)$ no existe, pues $2017 \notin \text{Dom} f$ esto dará cuenta de su aprehensión discursiva, pues reconoce el dominio de la función $f(x)$. El estudiante Julio realizó cambios de dimensión en la escala del archivo de Geogebra, usando la herramienta *desplazamiento*, tal como se aprecia en la captura del computador que se realizó con Camtasia Studio 8, en la Figura 5.

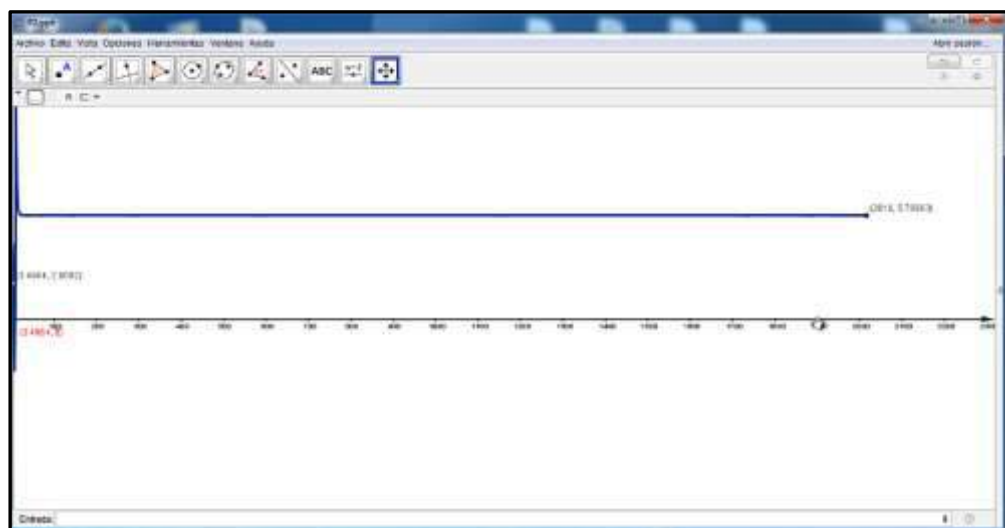
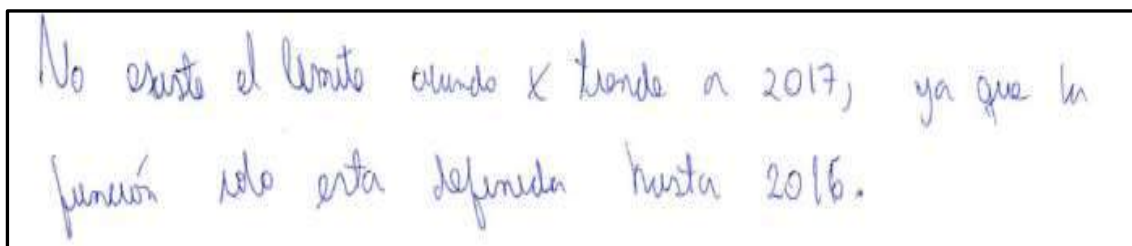


Figura 5. *Modificación óptica de la función $f(x)$.*

Fuente: Bejarano (2018, p.70)

Una vez realizada esta modificación el estudiante Julio respondió usando un registro de lengua natural que, tal como muestra la Figura 50, $\nexists \lim_{x \rightarrow 2016} f(x)$ pues la función solo está definida hasta el 2016, tal como se aprecia en la Figura 5.



No existe el límite cuando x tiende a 2017, ya que la función solo está definida hasta 2016.

Figura 6. Respuesta del estudiante Julio para 2 c).

Fuente: Bejarano (2018, p.70)

Según Bejarano (2018) el estudiante realizó una aprehensión perceptiva para observar que la función solo está definida hasta el valor de $x = 2016$; posteriormente identificó implícitamente que $2017 \notin \text{Dom}f$ lo cual mostró su aprehensión discursiva, pues reconoció el dominio de la función $f(x)$. Luego sustentó que $\nexists \lim_{x \rightarrow 2017} f(x)$, esto evidenciaría una aprehensión discursiva, pues el estudiante estaría usando el teorema de existencia del límite de una función en un punto, dado que como la función solo está definida hasta $x = 2016$, no existen los límites laterales para el valor de $x = 2017$. Con ello Bejarano (2018) concluye que el estudiante Julio articuló las aprehensiones perceptiva, operatoria y discursiva para concluir que $\nexists \lim_{x \rightarrow 2017} f(x)$.

Conclusiones

En el desarrollo de la actividad, el estudiante Julio logró articular las aprehensiones perceptiva, discursiva y operatoria, que le permitieron concluir en la pregunta 2c) que $\lim_{x \rightarrow 2017} f(x)$ no existe. Esto se pudo evidenciar mediante la triangulación de los datos; con el Camtasia Studio 8, se observó que el estudiante realizó tratamiento en el registro gráfico, para cambiar las escalas en el archivo mostrado en Geogebra, lo cual evidenció una aprehensión operatoria, que se produjo luego de que el estudiante realizará una aprehensión perceptiva; finalmente el estudiante articula lo anterior con aprehensión discursiva para fundamentar, usando un registro de lengua natural, que el límite de la función f no existe cuando x tiende a 2017.

Por otro lado, el uso de Geogebra permitió a Julio y los demás estudiantes participantes de esta investigación una manera intuitiva de trabajar la noción de límite en un punto de una función real de variable real.

Referencias

Bejarano, V. (2018). Articulación de las aprehensiones en la noción del límite en un punto de una función real de variable real en estudiantes de Ingeniería. Recuperado de <http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/12075>

- Caglayan, G. (2015). Math majors' visual proofs in a dynamic environment: The case of limit of a function and the ϵ - δ approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 46(6), 797-823. Doi: <https://doi.org/10.1080/0020739X.2015.1015465>
- Duval, R. (1994). Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères-IREM*, (17), pp. 121-138. Recuperado de http://www.univ-irem.fr/exemple/reperes/articles/17_article_119.pdf
- Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano*. (Myriam Vega, trad.). Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática. (Obra original publicada en 1995).
- Duval, R. (2012). Registro de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. *Revemat*, 7(2), 266-297. Doi: <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266>
- Martínez, C. P. (2006). El método de estudio de caso: Estrategia metodológica de la investigación científica. En *Pensamiento & Gestión* 20, 165-193. Universidad del Norte Barranquilla, Colombia. Recuperado de <http://www.redalyc.org/pdf/646/64602005.pdf>
- Londoño N, Narro P, Vera A (2013). Indagando sobre el límite de funciones desde diferentes registros de representación. *El Cálculo y su enseñanza*. Vol (5), p 91-106
- Peñaloza, T. (2016). Proceso de visualización del paraboloides en estudiantes de Arquitectura mediado por el Geogebra. Recuperado de <http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/7204>
- Salazar J.V.F. (2018) Semiotic Representations: A Study of Dynamic Figural Register. In: Presmeg N., Radford L., Roth WM., Kadunz G. (eds) Signs of Signification. ICME-13 Monographs. Springer, Cham.
- Tomás, J. B. P. (2014). Análisis de la comprensión en estudiantes de bachillerato del concepto de límite de una función en un punto (Doctoral dissertation, Universitat d'Alacant-Universidad de Alicante). Recuperado de https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/45713/1/tesis_pons_tomas.pdf
- Vara, T. N. P., & Salazar, J. V. F. (2018). Mathematics Education Art and Architecture: Representations of the Elliptic Paraboloid. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 14(2), 643-655. <https://doi.org/10.12973/ejmste/80628>

EL CONCEPTO DE INFINITO Y EL MODELO DE VAN HIELE

Alba Soraida Gutiérrez Sierra*

Rene Alejandro Londoño Cano**

albasoraidagutierrez@gmail.com, renelondo@gmail.com

Universidad Metropolitana de Educación Ciencia y Tecnología, Panamá*

Universidad de Antioquia, Colombia **

Resumen

Se pretende mostrar avances de la investigación en curso, "Descripción de la comprensión del concepto de infinito y su relación con las funciones de variable real, en estudiantes de Educación Media y primeros semestres de Educación Superior, a través del Modelo de van Hiele". Para poder dar cuenta de la descripción de la comprensión se considera apropiado y adecuado utilizar el Modelo de van Hiele. La metodología de esta investigación está orientada bajo un enfoque mixto, utilizando como herramienta para la recolección de la información la entrevista semiestructurada de carácter socrático; mediante el guion de entrevista se verifican los descriptores hipotéticos correspondientes a cada nivel de razonamiento, permitiendo describir la comprensión de los estudiantes en relación al concepto de infinito, a través del concepto de función de variable real. Esta interacción permite comprender algunos procesos cognitivos de los estudiantes en el momento de razonar.

Palabras clave: infinito, descriptores, comprensión, razonamiento, van Hiele.

Introducción

La problemática abordada desde el contexto de la investigación muestra que cuando los estudiantes se acercan al concepto de infinito, solamente lo hacen desde una noción intuitiva y relacionada con cantidad o tamaño, generando una serie de contradicciones conceptuales frente al hecho de que no pueden establecer con suficiencia y claridad la conexión directa que tiene el infinito con otros objetos matemáticos. Respecto al tema, "se evidencia que el bajo rendimiento de los estudiantes en cursos de cálculo diferencial e integral, se encuentra asociado a la construcción del concepto de función. Una de las razones más relevantes ante esta premisa, es la deficiente e incompleta comprensión del papel que juega el infinito en la teoría de los conjuntos" (Attorps, Björk y Radic, 2016, p.sf.).

De acuerdo a lo anterior, el presente reporte de investigación pretende mostrar las dificultades que se generan en la concepción y definición del infinito y su relación con funciones de variable real, por parte de estudiantes de último año de educación media y primer año de Universidad, para abordar esta problemática se utiliza modelo de Van Hiele, el cual permite describir y

explorar el nivel de razonamiento del concepto en cuestión.

En efecto, al realizar un gran recorrido y análisis en la revisión bibliográfica se pudo evidenciar como algunos objetos matemáticos a la hora de ser enseñados generan ciertas dificultades de comprensión y aprendizaje, en ocasiones esto se atribuye al nivel del lenguaje utilizado por parte del maestro, puesto que éste no está en el mismo nivel de lenguaje de los educandos, esto van Hiele (1957) lo denomina propiedad de separación, sumado a ello la escases de estrategias o formalidad conceptual en el momento de la enseñanza, sobre el asunto es importante indagar acerca de cómo suceden ciertos procesos internos de aprendizaje; por lo anterior, el Modelo van Hiele admite de forma pertinente y adecuada describir la comprensión y establecer el nivel de razonamiento que tienen los estudiantes frente al concepto de infinito; este modelo ha sido implementado en diversas experiencias educativas, respaldado en las últimas dos décadas por investigaciones a nivel de programas de maestría y doctorado, como: estudio comparativo del concepto de aproximación local a través del modelo de van-Hiele (Esteban, 2003). Relación inversa entre cuadraturas y tangentes en el marco de la teoría de Pirie y Kieren (Londoño, Jaramillo y Esteban, 2017) la comprensión del concepto de continuidad en el marco de la teoría de Pirie y Kieren, (Rendón & Londoño, 2011), relaciones proporcionales entre segmentos en el contexto del modelo de van Hiele, entre otros, con los cuales se amplió el fundamento teórico para consolidar las bases que soportaron la investigación.

De acuerdo con lo anteriormente expuesto, una de las tareas de la educación es resignificar la cultura hacia la matemática, como un trabajo creador en el que maestros y estudiantes reorganizan el saber para utilizarlo en la realidad y en solucionar problemas de la vida real; pues el pensamiento matemático "se desarrolla en todos los seres humanos en el enfrentamiento cotidiano a múltiples tareas" (Cantoral y otros, 2005, p.19).

Problema de investigación

Sobre la enseñanza y comprensión del infinito han detectado diversas dificultades, cabe resaltar que los docentes tienen dificultades no solamente en el conflicto originado en la adquisición y comprensión de este concepto por parte de los estudiantes, sino también, en las estrategias que se utilizan para lograr la transposición adecuada del conocimiento enseñable; por su parte la concepción del infinito, no parece regida por el sentido común, pues contradice ideas evidentes e intuitivas, como el axioma griego indica, "El todo es mayor que las partes".

De igual manera, en el aula se encuentran situaciones similares, los estudiantes tienen controversias como que el infinito es una cantidad que aparece en muchas operaciones, pero que al mismo tiempo se requiere de una respuesta exacta, es decir se tiene la idea que el infinito no se puede contar y no se sabe cómo expresarlo matemáticamente, por lo general esta cantidad se relaciona con fenómenos de la existencia y más allá de la misma; es usual que al preguntar ¿qué piensan sobre el infinito?, los estudiantes respondan: el número infinito es como querer contar las estrellas del cielo o los granos de arena, lo relacionan con algo ilimitado o muy grande, lo que deja a la vista que la concepción sobre el infinito se relaciona con la intuición, donde según Cornu (1981) esto hace referencia al "modelo espontáneo" en donde se sabe que este concepto trasciende más allá.

Lo que se evidencia es que el infinito desde su aparición en filosofía y en matemáticas estaba

ligado a una idea intuitiva sobre la posibilidad de ir más lejos, que no hay límite, el pensar que a cada número siempre se le puede añadir el siguiente de, proporciona una idea intuitiva de que los números no tienen límite, siempre se puede construir otro número mayor, el problema surgió cuando cara a contradicciones era necesario concebir otros tipos de infinito.

Así mismo, el infinito asociado al conteo, producto de una extrapolación de la experiencia sensible con colecciones finitas de objetos, se manifiesta en los niños desde pequeños cuando son capaces de advertir que las reglas de las operaciones elementales son aplicables y válidas para todos los números, o que hay eventos cíclicos como la sucesión del día y la noche que se repiten indefinidamente sin que parezcan tener fin.

Frente a lo anteriormente expuesto, cuando los estudiantes comprenden el concepto del infinito solamente desde una noción intuitiva y relacionada con cantidad o tamaño, se generan una serie de contradicciones conceptuales frente al hecho de que ellos no pueden establecer la conexión directa que tiene el infinito con otros objetos matemáticos formales. En consecuencia, Dolores & Valero (2004), afirman que el no tener clara la relación de estos dos conceptos en el cálculo, hace que emerjan consecuencias frente a la modelación de situaciones y fenómenos científicos que fundamentan su análisis y explicación a través del comportamiento de las funciones.

En consecuencia, surgen algunos interrogantes a partir de las premisas anteriormente expuestas:

¿Tienen los docentes la suficiente claridad del término infinito para ofrecer una explicación adecuada de esta noción? ¿en qué momento de su formación se debe situar al estudiante frente al concepto matemático de infinito actual?; es por ello que a través del planteamiento y ejecución de los objetivos la investigación pretende dar solución a la problemática puesta en conocimiento.

Aspectos teóricos

El infinito, está asociado a la idea de totalidad en acto, o infinito actual el concepto de infinito como unidad (infinito actual); mientras que, si el infinito se usa solo como adjetivo, será difícil de tratar como sustantivo, de este modo se refuerza la visión potencial dejando de lado la actual; otro ejemplo si por infinito se entiende algo muy grande, ese algo será transformado en un número natural con evidentes contradicciones, incluso si el concepto de infinito se entiende como ilimitado, resultara difícil admitir más adelante a un objeto limitado pero infinito, como el conjunto ordenado de puntos de un segmento, finalmente, si el infinito se equipara con lo indefinido, adquiere un significado negativo o evasivo (Aponte, 2014).

No obstante, estos errores se asocian también a la forma como el docente presenta una situación problema en la clase para la comprensión del infinito; existe un largo camino de estudiosos, científicos y genios que han dedicado varios años en romper los paradigmas que se han afrontado respecto a este concepto; desde Platón y Pitágoras el infinito era apeirón, inconcebible, el caos, el infinito carecía de medida. La voz «apeirón» tal como la emplea Anaximandro, significa «sin fin» o «sin límite», suele traducirse como «lo infinito», «lo indefinido», «lo ilimitado» (Ortiz, 1994; 59).

Si bien es cierto, la contradicción fue base para limar estas concepciones, la idea de infinito generó un revuelo a lo que se conocía como las ciencias exactas, pues con la aparición del

infinito se abrieron caminos a la existencia ineludible de lo ilimitado, por su parte, Aristóteles intentó explicar qué pasaba con los números denominados infinitos a través de dos representaciones, el infinito como un proceso de crecimiento sin final o de subdivisión sin final y el infinito como una totalidad completa. El primero es el infinito potencial donde se centra en la operación reiterativa e ilimitada, es decir, concebir una expresión que se divide sucesiva e interminablemente, el segundo, el infinito como una totalidad completa concebida en la actualidad. Esta última noción de infinito como totalidad fue ampliamente desarrollada en la geometría.

En consecuencia, el proceso de enseñanza debe orientarse a facilitar el progreso en el nivel de razonamiento, de tal forma que el progreso se haga de un modo rápido y eficaz (Londoño2017) ; asimismo, El modelo van Hiele ha sido considerado pertinente en diferentes investigaciones para describir el razonamiento de un estudiante en conceptos de objetos matemáticos que sirven como guía para diseñar la instrucción a la que se debe exponer un estudiante en apoyo al progreso del nivel en el que se encuentra para avanzar al siguiente nivel.

En relación con las implicaciones anteriores, El modelo de van Hiele permite el desarrollo de estructuras mentales mucho más complejas, como se muestra en la siguiente figura.

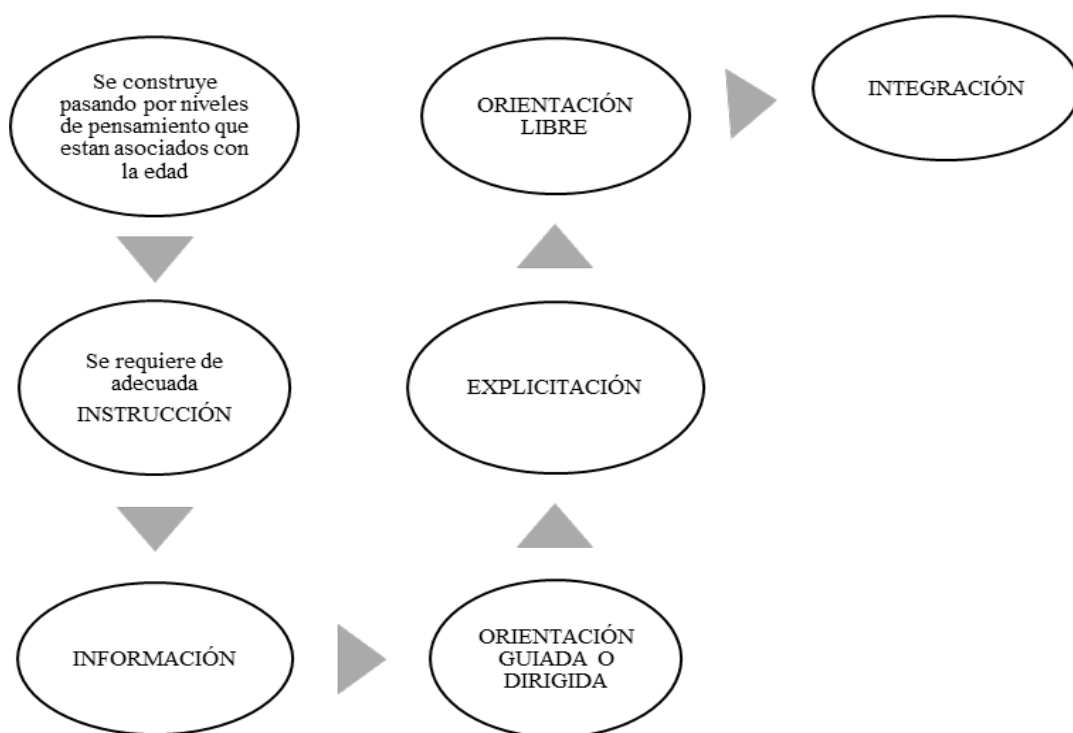


Figura 13. Modelo Van Hiele

Fuente Gamboa & Vargas (2013).

De acuerdo con Jaramillo & Duarte (2006), el modelo Van Hiele está compuesto por la percepción, los niveles de razonamiento y las fases de aprendizaje, van Hiele propone cinco niveles de razonamiento, los cuales se exponen a continuación con algunas de sus

características:

Nivel 0 predescriptivo. Se perciben y describen características teniendo en cuenta conocimientos previos

Nivel 1 de reconocimiento visual. Se reconocen mediante la observación las propiedades, aunque no se hacen relaciones entre sí.

Nivel 2. Análisis. Se establece una razón comparando, identificando propiedades y reconociendo relaciones.

Nivel 3. Clasificación o de relaciones. Se emplean propiedades para deducir utilizando el razonamiento formal

Nivel 4. Deducción formal. Se establecen similitudes y diferencias entre estructuras a partir de propiedades definidas.

En cuanto a las propiedades de los niveles y sus características se pueden mencionar:

Secuencialidad fija: un estudiante no puede estar en un nivel n de van Hiele sin haber superado el nivel $n - 1$ ya que los niveles de razonamiento son jerárquicos.

Adyacencia. Los objetos o conceptos que para los estudiantes son implícitos en el nivel anterior se vuelven explícitos en el nivel siguiente.

Distinción. El nivel siguiente permite estructurar y mejorar la comprensión de los conceptos trabajados durante el nivel anterior

Separación. Para que dos personas puedan entenderse entre sí en relación con un concepto matemático, deben estar en un mismo nivel de razonamiento

Cada nivel tiene su propio lenguaje. Cada nivel de razonamiento tiene un lenguaje específico, pues no solo la capacidad de razonamiento se refleja en la forma de resolver problemas, sino también en la forma de expresarse y en el significado que se da o puede darse al vocabulario específico de cada nivel.

Consecución. El progreso de un nivel al siguiente se produce de forma gradual (Ibarra, 2014)

Aspectos Metodológicos.

A partir de los objetivos a alcanzar y las preguntas que se pretende encontrar respuesta, la investigación tiene un alcance descriptivo de carácter mixto. En la metodología mixta se combinan técnicas, métodos, aproximaciones dentro de la misma investigación como lo establece Johnson & Onwuegbuzie (2004), de esta manera se fortalece el estudio haciendo uso de narraciones, verbalizaciones de los actores objeto de estudio y datos numéricos. Los estudios mixtos permiten obtener una mejor evidencia y comprensión de los fenómenos facilitando el fortalecimiento de conocimientos teóricos.

De esta manera el trabajo se orienta a describir a través del modelo de van Hiele como los estudiantes comprenden el infinito y la relación que se establece entre este objeto matemático y las funciones de variable Real, para ello se diseña un guion de entrevista semi estructurada de carácter Socrático que podar ubicar a los estudiantes en uno de los niveles de razonamiento que contempla el modelo.

Dentro de las técnicas utilizadas para la recolección de la información se desarrolló la entrevista semiestructurada de carácter socrático; se propusieron inicialmente varios descriptores hipotéticos de acuerdo a cada nivel, aunque hay que aclarar que solo se trabajaron los cuatro primeros niveles, pues van Hiele considera que el nivel cinco es de un rigor teórico demasiado elaborado, durante el proceso de verificación y refinamiento de los descriptores, se demostró si estos cumplían y correspondían a cada nivel de razonamiento, y luego se describió la comprensión de los estudiantes en relación con el concepto de infinito, y el concepto de función de variable real. Esta interacción permite, según Sandoval (2002) poder comprender la realidad tanto en su lógica interna como en su especificidad.

La aplicación de la entrevista socrática enmarcada en el modelo de van Hiele propende por un razonamiento crítico y reflexivo en torno al concepto que se está trabajando. El método empleado por Sócrates consta de dos partes: destructiva una, creativa la otra. En la primera etapa, Sócrates toma como punto de partida la concepción del interlocutor acerca del asunto en cuestión, permitiéndole descubrir las contradicciones y las faltas de tal concepción. En la segunda etapa, llamada mayéutica, Sócrates se ve a sí mismo como una partera que ayuda a su interlocutor a dar a luz, a descubrir, a desvelar la verdad que lleva en sí mismo, a quitarle a esta verdad el velo que la cubre. Es esencial al método el empleo sistemático de la ironía socrática, que consiste en simular ignorancia sobre la materia de que se trata, con el fin de hacer aparecer la verdad, a través del diálogo entre el maestro y el aprendiz.

Resultados Obtenidos

En este apartado se mostrará avance en los resultados de acuerdo a algunos descriptores preliminares para cada nivel, así como las preguntas correspondientes.

En este estudio se seguirá la nomenclatura por J. Llorens específicamente para los niveles 0 a III:

*Nivel 0, **predescriptivo***

*Nivel I, **de reconocimiento visual***

*Nivel II, **de análisis***

*Nivel III, **de clasificación, de relación.***

Para que se pueda establecer una clasificación en niveles dentro del modelo de van Hiele, los descriptores de los niveles por verificar deben cumplir con unas propiedades específicas, por su parte Usiskin (1982) las enuncia de la siguiente manera: Secuencialidad fija, Adyacencia, Distinción, Separación, es importante recordar que cada nivel tiene su lenguaje.

Nivel 0. (Predescriptivo)

- *Identifica que una recta y un segmento de recta están conformados por infinitos puntos*
- *Reconoce que los números reales están compuestos por distintos subconjuntos numéricos.*

Preguntas

En la siguiente figura ubica dos puntos cualesquiera C y D entre los puntos A y B



¿En cuántas partes quedo dividido el trazo $A-B$?

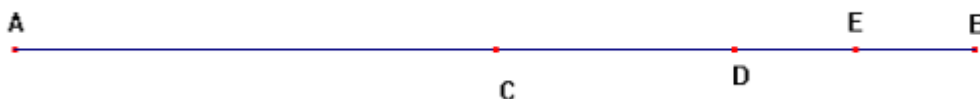
Indica un nombre para el trazo que une los puntos $A-B$ y cada uno de los trazos que se formaron cuando se ubicaron los puntos C y D .

Nivel I. (Visual)

- Identifica de forma visual segmentos de línea e infiere que a partir de ellos se puede establecer un intervalo o subconjunto numérico en los reales.
- Determina un intervalo de números reales como un subconjunto del conjunto de todos los reales.

Preguntas

Daniela recorre en su bicicleta desde el punto A hasta el punto B para esto tiene que pasar por el punto C , siendo C el punto medio entre A y B , luego por el punto E , que es el punto medio entre D y B ; así sucesivamente debe ir pasando por el punto medio de cada segmento resultante, siguiendo este proceso es posible que Daniela llegue al punto B con su bicicleta.



Recorrido de Daniela

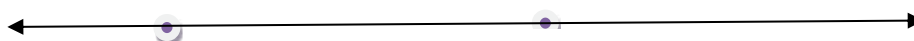
Si cada punto que utilizo Daniela para hacer el recorrido de $A-B$ le corresponde un número real, cuantos números reales se pueden ubicar en dicho recorrido.

Nivel II (De análisis).

- Reconoce de manera analítica la densidad de los reales en un intervalo definido.
- Tiene claro que los reales están compuestos por infinitos subconjuntos propios infinitamente divisibles.

Preguntas

Toma el intervalo real cerrado $[3,4]$



3

4

Ubica el punto medio entre 3 y 4 e indica el valor correspondiente.

Luego a partir del nuevo valor encontrado y el número 4 encontrar el punto medio entre ellos dos. Realiza este proceso tres veces más, ubicando siempre el punto medio.

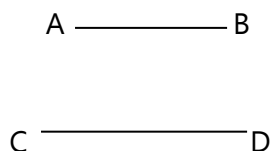
Al realizar el proceso de ubicar el punto medio entre el valor encontrado y el número 4 por muchas veces, indica la cantidad de números que hay entre el punto medio inicial y cuatro.

¿cuántos números reales hay entre tres y cuatro?

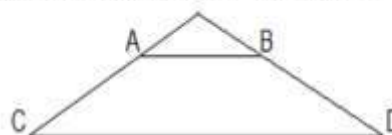
Nivel III (De clasificación o relación).

- Afirma que a cada intervalo de números reales le corresponde la misma cantidad de números reales que cualquier otro intervalo subconjunto de la inicial.
- Reconoce que hay infinitos números en un intervalo cerrado de la recta real.

Preguntas.



Considere los segmentos ___ y ___ de la figura N°



¿Cuál de los dos segmentos tiene más, igual o menos puntos?

Al observar el segmento A-B y el segmento C-D se puede indicar ¿cuál de los dos segmentos tiene mayor cantidad de puntos.

Referencias

- Aponte. (2014). *La noción de infinito en George Cantor. Un estudio Histórico-epistemológico en la perspectiva de la Educación matemática*. . Universidad del Valle Instituto de Educación y Pedagogía : Maestría en Educación énfasis en Educación Matemáticas.
- Attorps, I. B. (2016). *Generating the patterns of variation with GeoGebra: the case of polynomial approximations. International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 47(1), 45-57. DOI:10.1080/0020739X.2015.104696.
- Cantoral, R. y. (2005). *Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis*. México.: Editorial Trillas.
- Cornu. (1981). *Apprentissage de la notion de limite :modèlesspontanés et modèlespropes. ProceedingsPME-V*, . Grenoble, France, : Vol. I, p. 322-326.
- Cornu. (1983). *Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles*. Tesis de doctorado de tercer ciclo. Universit`e de Grenoble.
- Dolores, Valero. (2004). *Estabilidad y cambio de concepciones alternativas acerca del análisis de funciones en la situación escolar*. . Epsilon, Thales, 58, 20(1), 45 73.
- Esteban, P. (2003). *Estudio comparativo del concepto de aproximación local a través del modelo de van Hiele. Valencia. 2003. Tesis doctoral publicada. Valencia*. España : Universidad Politécnica de Valencia.
- Gamboa, y Vargas. (2013). *El Modelo Van Hiele y la enseñanza de la Geometria* . UNiciencias, vol2, número 1.
- Ibarra. (2014). *Relaciones proporcionales entre segmentos en el contexto del modelo de van Hiele*. Antioquia: Universidad de Antioquia. Maestría en Educación.
- Jaramillo y Duarte. (2006). *Enseñanza y aprendizaje de las estructuras matemáticas a partir del modelo de Van Hiel*.
- Johnson y Onwuegbuzie. (2004). *Mixed Methods Research: A Research Paradigm Whose Time Has Come* . Los métodos de investigación mixtos: un paradigma de investigación cuyo tiempo ha llegado]. Educational Researcher, 33(7), 14-26. .
- Jurado y Londoño. (2005). *Diseño de una entrevista socrática para la construcción del concepto de suma de una serie vía áreas de figuras planas. "Una metodología alternativa para la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite"*, . Colciencias 1115.
- Llorens. (1995). *Extensión del modelo de van Hiele a un ámbito diferente de la geometría en niveles educativos elementales*. . Valencia, España.
- Londoño. (2011). *La relación inversa entre cuadraturas y Tangentes en el marco de la teoría de Pirie y Kieren*. . Medellín: Doctorado tesis, Universidad de Antioquia.

- Londoño, Jaramillo y Esteban. (2017). *Estudio comparativo entre el modelo de van-Hiele y la teoría de Pirie y Kieren. Dos alternativas para la comprensión de conceptos matemáticos. Revista Logos, Ciencia y Tecnología. Policía Nacional, volumen 9 nro 2.*
- Londoño, R. A. (2011). *La relación inversa entre cuadraturas y tangentes en el marco de la teoría de Pirie y Kieren.* Medellín: Universidad de Antioquia. Facultad de Educación. Tesis doctorado en educación.
- Rendón y Londoño. (2011). *La comprensión del concepto de continuidad en el marco de la teoría de Pirie y Kieren. Universidad de Antioquia. Trabajo de investigación de Maestría.* Disponible en [http://funes.uniandes.edu.co/2502/1/Rend%C3%B3n2011Comprensi%C3%](http://funes.uniandes.edu.co/2502/1/Rend%C3%B3n2011Comprensi%C3%99)
- Sandoval. (2002). *Investigación Cualitativa.* . Recuperado de <http://contrasentido.yukei.net/wp-content/uploads/2007/08/modulo4.pdf>.
- Schwarzenberge, y Tall. (1978). *Conflicts in the learning of real numbers and limits.* . Mathematics Teaching, 82,44–49.
- Usiskin. (1982). *Van Hiele Levels and Achievements in Secondary School Geometry.CRRSSG Report.* Estados Unidos: Universidad de Chicago.
- Van Hiele. (1957). *El problema de la comprensión. En conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría. Tesis de doctorado.* . Universidad de Valencia. España: Disponible en <https://www.uv.es/aprenggeom/archivos2/VanHiele57.pdf>.

EL DINAMISMO DE GEOGEBRA PARA EXPLORAR ASPECTOS BÁSICOS DE LA TEORÍA DEL CAOS

Viviana Angélica Costa

vacosta@ing.unlp.edu.ar

IMApEC, Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, UNLP, Argentina

Resumen

La Teoría del Caos es una rama actual de la matemática que permite estudiar el comportamiento de sistemas dinámicos complejos que sirven de modelo para múltiples fenómenos naturales, económicos y sociales. En este trabajo se describen aspectos básicos de esta teoría y cómo es posible explorarlos de un modo sencillo usando el dinamismo de GeoGebra. En particular se aborda el estudio del mapa logístico, sistema iterado que modela el crecimiento de una población, que permite delinear la ruta al caos. Se presenta una propuesta didáctica para el estudio de ese mapa y se muestran los resultados realizados utilizando varias de las Vistas de GeoGebra. Finalmente se reflexiona acerca de la importancia de la enseñanza de los sistemas dinámicos en cursos básicos de matemática universitaria o en formación de profesores.

Palabras clave: *Teoría del Caos, sistema dinámico, GeoGebra, enseñanza.*

Introducción

¿Qué es el caos? Es común escuchar relacionar al caos con el llamado efecto mariposa, con la ciencia de las sorpresas, de lo no lineal y lo impredecible. Mientras que la ciencia más tradicional trata con fenómenos supuestamente predecibles como la gravedad, la electricidad o las reacciones químicas, la Teoría del Caos trata con la no linealidad que es efectivamente imposible de predecir o controlar, como la turbulencia, el clima, el mercado de valores, nuestros estados cerebrales, etc. (Mindlin, 2008).

Esta Teoría es la rama de la matemática que estudia, entre otros, esos fenómenos antes detallados que tienen como característica la sensibilidad a las condiciones iniciales. Su desarrollo se inicia a mediados del siglo XX y está íntimamente relacionada con la Geometría Fractal y con la Teoría de las Catástrofes de René Thom. Los avances en estas áreas se vieron favorecidos por el rápido desarrollo de la tecnología y colaboran con entender los sistemas altamente complejos, como son los sistemas sociales, económicos y biológicos, entre otros, que evolucionan en el tiempo con comportamientos que incluyen el desequilibrio, la retroalimentación positiva, perturbaciones, fractales, atractores extraños y la complejidad dinámica, características de la Teoría del Caos (Reigeluth, 2004).

En relación a la enseñanza de estos temas de la matemática contemporánea, ya hace varias décadas Wenzelburger (1992) mencionaba la importancia de su estudio en la formación de profesores y en cursos de grado. Hoy en día no se ha avanzado mucho en esta línea, sólo existen algunos cursos de dinámica compleja como el que detalla Seoane, Zambrano, San Juan (2008) destinado a estudiantes principiantes de los primeros cursos de las titulaciones de Ingeniería Química, Ciencias Ambientales e Informática en España. En general la enseñanza de los conceptos de la Teoría del Caos es postergada a cursos de posgrado. Esto último puede ser debido a que para abordar varios de sus contenidos es necesario el conocimiento de una matemática avanzada que incluye herramientas de Álgebra Lineal y de Sistemas Ecuaciones Diferenciales.

Aunque, un modo sencillo de comenzar a comprender el caos es abordándolo a partir del estudio de los sistemas dinámicos discretos en una dimensión. Estos sistemas, conocidos como mapas, aplicaciones iterativas o relaciones recursivas, evolucionan en el tiempo por el proceso de iteración, en el que el siguiente estado del sistema es determinado por su estado actual. Pueden presentar una gran diversidad de comportamientos, entre los cuales se puede encontrar el caos y revelar sus características fundamentales. Los conocimientos requeridos en este caso se reducen a los del cálculo y del cálculo diferencial en una variable real. Esto permitiría su enseñanza en cursos de grado de distintas carreras y en la formación de profesores.

En esta línea de ideas se presenta en este trabajo una propuesta didáctica que tiene por objetivo mostrar cómo es posible explorar, de un modo sencillo, aspectos teóricos básicos de la Teoría del Caos apoyándose para ello en la potencialidad del software GeoGebra.

Objetivos

- Explorar en forma sencilla sistemas complejos que presentan un comportamiento caótico a partir del dinamismo de GeoGebra.
- Proponer la enseñanza de aspectos básicos de la Teoría del Caos en cursos básicos de matemática universitaria y formación de profesores.

Marco teórico

La investigación se apoya en las ventajas que presenta la utilización de sistemas CAS para explorar conceptos matemáticos y simular procesos. Existe una gran variedad de sistemas CAS que combinan capacidades de cálculo simbólico, numérico y gráfico, libre o comercial y orientado a diferentes campos específicos.

Para el desarrollo de este trabajo seleccionamos el software GeoGebra (<https://es.wikipedia.org/wiki/GeoGebra>) que fue creado con fines educativos. Las razones de tal selección son varias: es gratuito, libre multiplataforma, permitiendo al usuario disponer de tal recurso sin tener que pagar una licencia, más aun en países en vías de desarrollo, como es el caso de muchos en Iberoamérica, donde ni siquiera es de esperar que se disponga de licencias comerciales por su alto costo (Morante y Vallejo, 2011). Otra de las ventajas es la de ser un software de geometría dinámica que permite combinar elementos de Geometría, Álgebra, Análisis y Cálculo de una forma dinámica, representando a los objetos desde cada una de sus posibles perspectivas. Ello significa que es posible obtener vistas gráficas, algebraicas y hojas de

datos vinculadas entre sí. Las construcciones adquieren dinamismo y movimiento, permiten transformaciones sin más que arrastrar cualquier objeto con el ratón, lo que ofrece la posibilidad de interactuar y por tanto investigar sobre una determinada construcción, en contraposición a la rigidez de otros software (Carrillo, 2012).

Para el caso particular del estudio de sistemas dinámicos (discretos o continuos) donde además se incluyan parámetros, GeoGebra ofrece una variedad de herramientas útiles, como son los "deslizadores", la posibilidad de "animación" y de "activar rastros". Además ofrece la posibilidad de trabajar con distintas Vistas simultáneamente, que se actualizan dinámicamente según cambien los objetos en una u otra. Entre las Vistas, se encuentran la Vista Hoja de Cálculo, que permite crear tablas, siendo esto útil al momento de trabajar con sistemas dinámicos discretos. Todo esto antes mencionado se conjuga para configurar a GeoGebra en un espacio de trabajo óptimo para simular y estudiar sistemas dinámicos.

Marco conceptual

Los mapas unidimensionales son de la siguiente forma:

$$x_0 \text{ valor inicial, } x_{n+1}=f(x_n), f \text{ función real y } n=0,1,2,3,\dots$$

El procedimiento usual de un sistema iterado es muy sencillo aunque su dinámica puede ser muy complicada (Alligood, Sauer, & Yorke, 1996). Se escoge primero un valor inicial x_0 de la variable a iterar. Después se calcula el valor de la función en ese punto $f(x_0)$, que determina un nuevo punto $x_1=f(x_0)$. Finalmente se usa ese valor obtenido como entrada para empezar de nuevo el algoritmo. Repitiendo esto n veces se genera una trayectoria (o sucesión) de valores reales: $x_0, x_1, \dots, x_n$ de la que interesa conocer su comportamiento. Esta secuencia o sucesión es conocida como órbita que se inicia en x_0 y donde se cumple que:

$$x_n=f(x_{n-1})=f(f(x_{n-2}))=\dots = f^n(x_0)$$

Los mapas son fácil y rápidamente simulados en computadoras, en los que el tiempo es inherentemente discreto. Tales experimentos revelan un número de patrones inesperados, que a su vez han estimulado nuevos desarrollos teóricos. Las iteraciones pueden visualizarse mediante gráficas del siguiente modo. Una de ellas es simplemente marcar en la recta real los puntos x_i obtenidos de la simulación para los valores de i desde 0 hasta un valor n determinado (Figura 1).



Figura 1. Representación gráfica de un mapa en una dimensión.

También es usual graficar en el plano en un sistema de coordenadas los pares ordenados (n, x_n) , uniéndolos con una poligonal como se observa en la Figura 2.

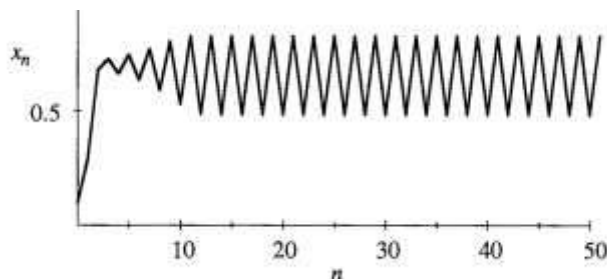


Figura 2. Gráfico de un mapa. Pares (n, x_n) .

Otro modo, es graficar una telaraña u órbita que une los puntos $(x_0; 0)$, $(x_0; x_1)$, $(x_1; x_1)$, $(x_1; x_2)$, ... $(x_n; x_{n+1})$. En el eje de las abscisas se grafica x_n y en el de ordenadas x_{n+1} . Esto se observa en la Figura 3.

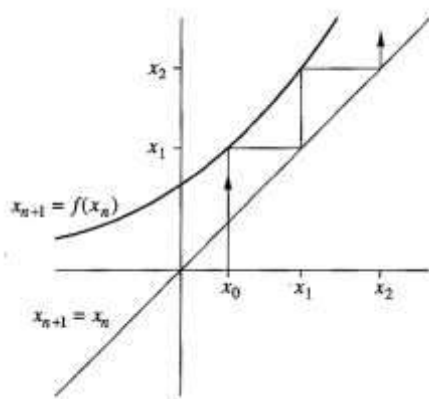


Figura 3. Órbita de un mapa.

El objetivo de los mapas es estudiar su comportamiento para valores grandes de n . Este puede ser estable, inestable, periódico o caótico. Es decir, se busca conocer de un modo cualitativo y cuantitativo el valor de: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Para ello se definen algunos conceptos teóricos. Se denomina punto fijo a un valor x^* que satisface: $f(x^*) = x^*$. Si para algún $x_n = x^*$ y $x_{n+1} = f(x_n) = x^*$, los valores siguientes a x_n permanecen en x^* .

¿Qué condición puede asegurar la estabilidad de un punto fijo x^* ? Consideremos una órbita cercana al punto fijo. Es decir, sea $x_n = x^* + e_n$ y nos preguntamos si es atractiva o repulsiva al punto fijo para n creciendo. Entonces

$$x_{n+1} = x^* + e_{n+1} = f(x^* + e_n) = f(x^*) + f'(x^*) \cdot e_n + O(e_n^2)$$

Pero, por ser x^* punto fijo, $f(x^*) = x^*$, lo anterior se reduce a

$$e_{n+1} = f'(x^*) e_n + O(e_n^2).$$

Despreciando el error, obtenemos $e_{n+1} = f'(x^*) e_n$.

Esta fórmula recursiva es del tipo geométrica y se concluye lo siguiente:

- Si $|f'(x^*)| < 1$, entonces x^* es un punto fijo estable.
- Si $|f'(x^*)| > 1$, entonces x^* es un punto fijo inestable.

- Si $|f'(x^*)|=1$ hay que considerar para el análisis el término del error.

Otros conceptos de interés, que permiten analizar el comportamiento cualitativo de un sistema dinámico son el determinar las órbitas k -periódicas, es decir puntos p del mapa que verifican que $f^k(p)=p$.

Además el Exponente de Lyapunov y el Diagrama de Bifurcaciones son de interés analizar. El primero otorga una medida de la separación exponencial de dos órbitas para condiciones iniciales infinitamente próximas, x_0 y $x_0 + \delta_0$. Al iterar n veces cada una da lugar a órbitas distintas. Sea δ_n la separación entre las dos órbitas. Si $|\delta_n| \approx |\delta_0| e^{\lambda n}$, a λ se lo denomina Exponente de Lyapunov, y se considera que hay caos cuando se obtienen valores positivos de este parámetro.

Por otro lado el Diagrama de Bifurcación es un gráfico de utilidad para encontrar los valores del parámetro para los cuales hay duplicaciones de periodos, regularidades y presencia de caos. En el eje de las abscisas se grafica el parámetro y en el de las ordenadas los valores que se obtienen de las iteraciones después de un largo período.

Mapa Logístico.

Fue introducido por Pierre Verhulst en 1845 y popularizado en un artículo de 1976 por el físico Robert May, como análogo en tiempo discreto a la ecuación diferencial logística para el crecimiento de una población (Madrid Casado, 2015). Una de sus aplicaciones, es la de modelizar el crecimiento de una población en un área cerrada. Su fórmula iterativa es la siguiente:

$$x_0 \in [0, 1], \quad x_{n+1} = r x_n (1 - x_n)$$

El parámetro r representa la fertilidad y demás influencias externas. ¿Por qué es interesante el mapa logístico? Porque reúne, en un solo sistema unidimensional y dependiente sólo de un parámetro, un abanico de comportamientos diversos para las trayectorias x_n cuando se varía el valor de r y/o de x_0 . Además estos comportamientos se encuentran en muchos otros sistemas discretos y continuos. Se dice que sus características dinámicas son universales en ese sentido.

Metodología

Se propone una secuencia didáctica que tiene por objetivo el estudio cualitativo de los sistemas dinámicos discretos que presentan un comportamiento caótico. La secuencia podría ser implementada en dos o tres encuentros en cursos básicos de matemática universitaria, o en cursos para futuros profesores de matemática y/o de física, y se abordarían los conceptos de mapa, punto fijo, bifurcaciones, comportamiento estable, inestable, periódico y caótico. Los conocimientos previos para desarrollar la secuencia serían los de cálculo en una variable: noción de función, derivada y sucesión iterada, y el manejo de básico de GeoGebra.

La propuesta puede iniciarse con el siguiente problema: *"Supongamos el caso de un microbiólogo que está interesado en realizar una serie de experimentos para los que requiere un número suficiente de bacterias de la especie Escherichia coli. Con el fin de proveerse de las bacterias necesarias, realiza un cultivo en una placa Petri. Supóngase que inocula en la placa una cantidad inicial de bacterias a la que denominaremos x_0 . ¿Cómo evoluciona la población en el tiempo si se conoce cuál es su estado inicial?"*.

El mapa logístico podría ser en este caso el que modele matemáticamente el crecimiento de tal población.

Resultados

La respuesta al problema propuesto puede obtener como resultado de las tareas que se presentan a continuación.

En el software GeoGebra se ingresa en la Barra de Entrada la función de iteración, que en este caso es: $f(x) = r \times (1 - x)$, creándose automáticamente un deslizador para el parámetro r . En la Vista Gráfica se obtiene una parábola. También en la Vista CAS se ingresa la misma función, permitiendo obtener mediante el comando Derivada y Resuelve el valor donde se obtiene su máximo de $r/4$ para $x = 1/2$. Esto se observa en la Figura 4. En consecuencia se ajustan los valores máximo y mínimo del deslizador r entre $0 \leq r \leq 4$, para que de este modo los valores del mapa se encuentre entre 0 y 1.

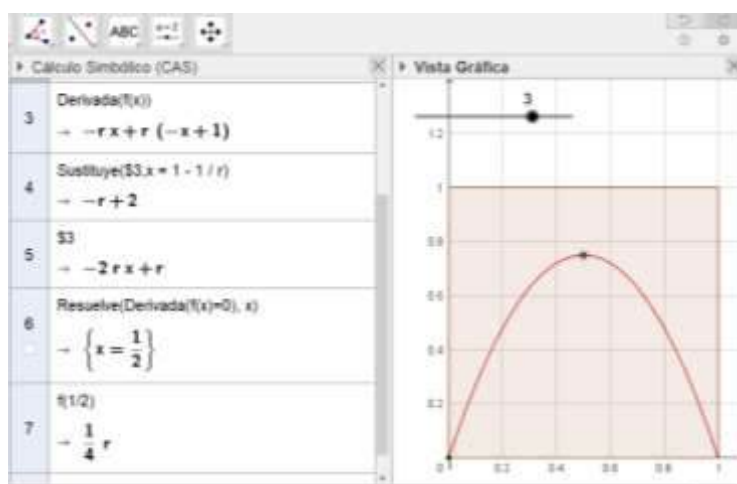


Figura 4. Vista CAS y Vista Gráfica. Función de iteración.

Siguiendo con la secuencia didáctica propuesta, se realizan simulaciones para distintos valores de x_0 y de r . Para esto, una forma es graficar en la Vista Gráfica la lista de pares de puntos generada en la Hoja de Cálculo. En una columna se ingresan los valores de n . Luego se ingresa en la vista grafica un deslizador que se corresponde con la condición inicial, restringido a valores entre 0 y 1. En otra columna se generan los valores de $f(x_n)$. Luego se crea una Poligonal con las columnas A y B, que se corresponden con los pares (n, x_n) . Luego en la Vista Gráfica es posible animar los deslizadores para r y para la condición inicial, y se observan los distintos comportamientos del mapa.

En la Figura 5 se observa que si r es 0.8 y el valor inicial de la población es 0.6, entonces ésta se extingue, es decir que tiende a cero. En cambio, si r es 2, la población se estabiliza en un valor fijo no nulo.

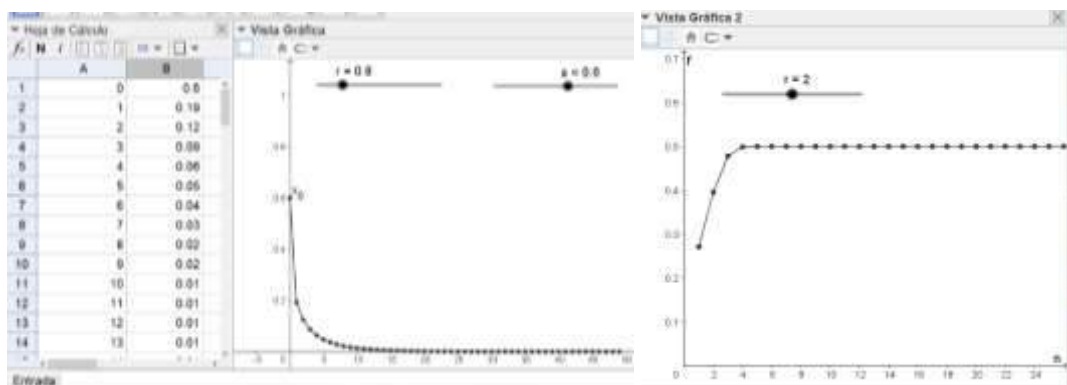


Figura 5. Mapa logístico para $r=0.8$ y para $r=2$.

En la Figura 6, se observa que si r es 3.3 la población oscila entre dos valores fijos, es de doble período, en cambio si r es 3.5 la población toma valores de período 4.

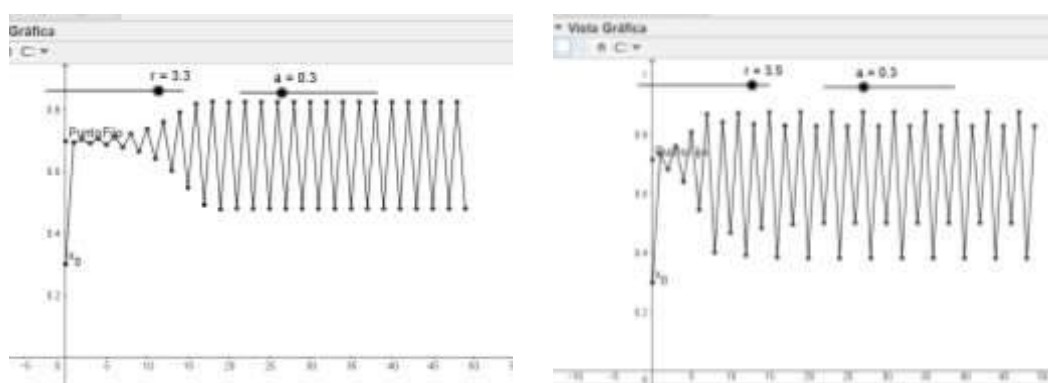


Figura 6. Comportamiento k -periódico del mapa logístico.

¿Cuáles son los valores para los cuales la población se estabiliza en el tiempo? Para encontrarlos se puede hacer en GeoGebra de dos formas, una analítica y la otra gráfica. En la forma gráfica, se ingresan en la barra de entrada las funciones $g(x)=r \times (1-x)$ y $h(x)=x$, para luego en la Vista Gráfica con la herramienta Intersección se seleccionan los dos objetos y se obtiene el punto fijo (Figura 7, columna 1 y 3).

Analíticamente, en la vista CAS se usa el comando Resuelve y se obtienen los *puntos fijos* $x^*=0$ y $x^*=1-1/r$. Para clasificarlos, se encuentra la derivada de la función de iteración evaluada en el punto fijo (comando Derivada y comando Sustituye) (Figura 7, columna 2). Por ejemplo si r es 3, hay dos puntos fijos, 0 y $2/3$, y las derivadas en esos puntos son respectivamente $f'(0)=2$ y $f'(2/3)=4/3$, mayores a 1, lo cual indica que son inestables.

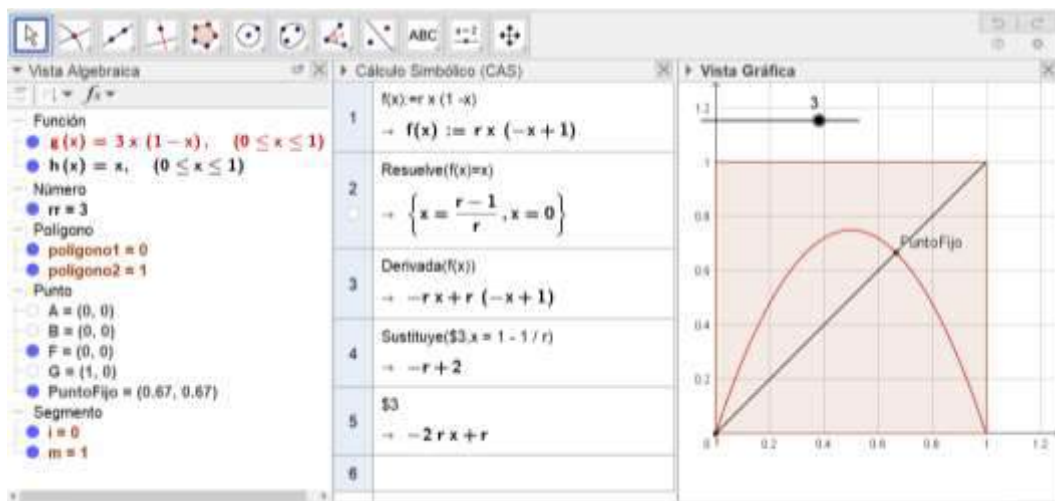


Figura 7. Obtención del punto fijo del mapa logístico.

En resumen, se obtiene lo siguiente.

- Si $0 \leq r < 1$ hay un único punto fijo, $x^*=0$, que del análisis de la derivada $f'(0)=r$, resulta ser estable. Para cualquier condición inicial y para cualquier valor de r en ese rango, la población se extingue.
- Si $r > 1$, hay dos puntos fijos, $x^*=0$ y $x^*=1-1/r$.
 - $1 < r < 3$, $x^*=0$ inestable y $x^*=1-1/r$ es estable. En este caso la población se estabiliza en el punto fijo $1-1/r$ independiente de la condición inicial.
 - $r > 3$, ambos puntos fijos son inestables. La población fluctúa, no se estabiliza.

Se puede además construir en GeoGebra la órbita y el Diagrama de Bifurcaciones, observando en este último el comportamiento del mapa según sea r (Figura 8).

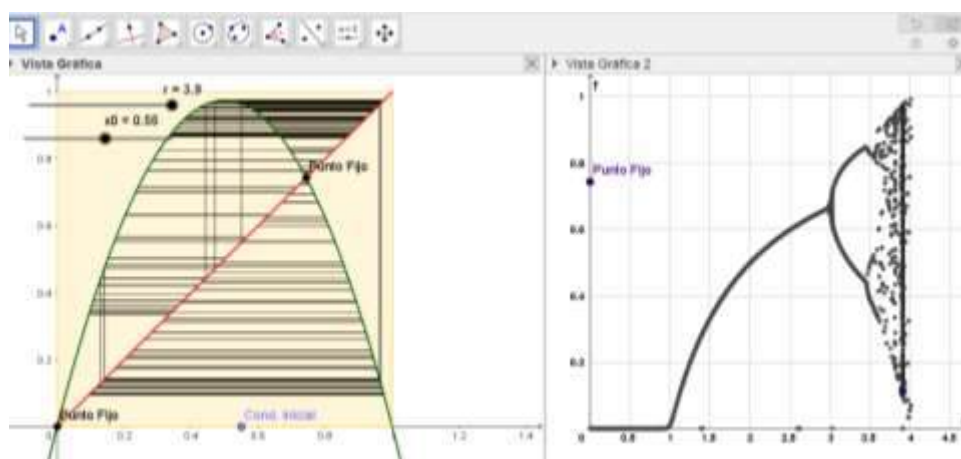


Figura 8. Diagrama de Bifurcaciones.

También es posible obtener en GeoGebra los puntos fijos de período 2, graficando la función $f(f(x))$, junto a la función x , y animando el deslizador r , observar para cuales valores del parámetro se obtiene intersección entre ellas (Figura 9). Esos valores obtenidos, pueden ser puntos que generen órbitas de período 2, en caso de estabilidad.

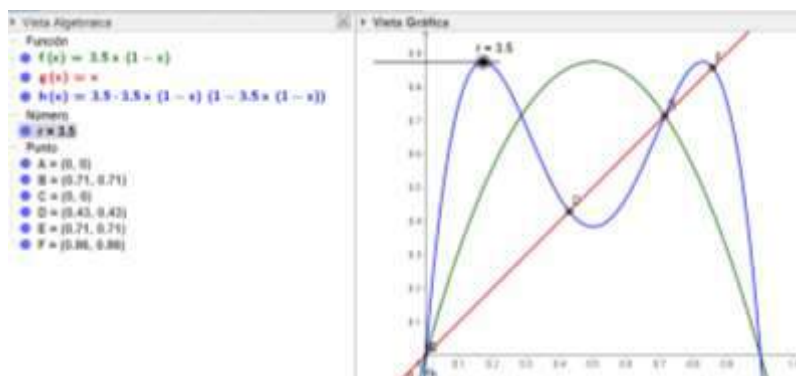


Figura 9. Posibles puntos de período 2.

Sean ahora dos órbitas con condiciones iniciales cercanas, una que inicia en x_0 y otra que inicia en $x_0 + \delta_0$, con δ_0 muy pequeño. Para aproximar el Exponente de Lyapunov λ se considera la diferencia: $\delta_n = f^n(x_0 + \delta_0) - f^n(x_0)$.

Aplicando logaritmos y algunas estimaciones se obtiene lo siguiente, con x_i son los valores obtenidos de la simulación y $f(x_i) = r - 2rx_i$: $\lambda \approx \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln|f'(x_i)|$,

En GeoGebra, es muy sencillo obtener en la Hoja de Cálculo estas aproximaciones de λ para distintos r (usando el deslizador) y calculando la sumatoria antes indicada. Se encuentra que para valores de $r < 3.57$, el exponente de Lyapunov es negativo y en cambio para valores de r muy próximos a $r \approx 3.57$ se obtiene el primer valor positivo de λ . Es decir que para $r \approx 3.57$ el mapa comienza un comportamiento caótico.

Conclusiones

En este trabajo se presentó una propuesta educativa que tiene por objetivo el estudio de los sistemas caóticos que pueden ser explorados de un modo sencillo gracias al dinamismo de GeoGebra, su gratuidad y las distintas Vistas que permite observar los cambios de los objetos en forma simultánea. Se expusieron algunos conceptos básicos de la Teoría del Caos y los resultados del análisis del mapa logístico, sistema dinámico discreto que presenta los más variados comportamientos, entre ellos el caos. Además, lo expuesto en los resultados permite observar que para el estudio del mapa logístico sólo es requerido el conocimiento de algunos conceptos básicos del Cálculo Diferencial en una variable real y de sucesiones numéricas. Por lo tanto, se espera que el presente trabajo sea de utilidad a docentes interesados en difundir la enseñanza de los sistemas dinámicos complejos en cursos de grado y en la formación de profesores, ya que esta teoría aporta herramientas para modelar y comprender sistemas económicos, biológicos, sociales y educativos, entre otros, y la forma en que es probable que estos respondan a cambios que se produzcan.

Referencias

- Alligood, K. T., Sauer, T. D., & Yorke, J. A. (1996). Chaos. New York, Estados Unidos, Springer.
- Carrillo de Albornoz Torres, A (2012). El dinamismo de GeoGebra. Firma invitada. Unión: revista iberoamericana de educación matemática, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 29, 201-210.

- Madrid Casado, C. M. (2015). *La mariposa y el tornado: teoría del Caos y cambio climático*. España, RBA Coleccionables.
- Mindlin, G. B. (2008). *Causas y azares: la historia de caos y de los sistemas complejos*. Universidad Nacional de Quilmes.
- Morante, A., & Vallejo, J. A. (2011). Software libre para el estudio de sistemas dinámicos. *La Gaceta de la RSME*, 14(1), 111-132.
- Reigeluth, C. M. (2004). Chaos theory and the sciences of complexity: Foundations for transforming education. In annual meeting of the American Educational Research Association, San Diego, CA.
- Seoane, J. M., Zambrano, S., & San Juan, M. A. (2008). Teaching nonlinear dynamics and chaos for beginners. *Latin-American Journal of Physics Education*, 2(3), 10.
- Wenzelburger, E. (1992). La matemática contemporánea y su papel en la enseñanza del nivel medio superior. *Educación Matemática*, 4(02), 55-60.

HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS PARA LA PRÁCTICA EXPERIMENTAL EN EL ÁREA DE FÍSICA

Johel Aldo Tarazona Guillen

johel.tarazona@colegiomayor.edu.pe; joheltarazona@gmail.com

Colegio Mayor Presidente del Perú COAR – LIMA, Perú

Universidad Nacional del Callao, Perú

Resumen

Este trabajo tiene por objetivo socializar experiencias obtenidas con estudiantes del 4to año del curso de física en el Colegio Mayor Presidente del Perú de la Red COAR, en el uso de herramientas matemáticas para la experimentación científica. Se muestran evidencias elaboradas por los estudiantes donde se utilizan herramientas tecnológicas de procesamiento de datos, se interpretan y se modelan fenómenos físicos. En la determinación de la aceleración de la gravedad, teniendo como resultados representaciones gráficas de funciones reales (lineal y cuadrática). Además, se describen las etapas de la indagación científica para un aprendizaje significativo, el uso de la matemática en las operaciones algebraicas, la línea de mejor ajuste, interpretación de la pendiente, el significado del coeficiente de determinación, el porcentaje de error y el manejo de incertidumbres.

Palabras clave: Física, indagación, aprendizaje, modelación

Introducción

La física es una ciencia experimental; actualmente es la base del crecimiento científico y tecnológico de una nación. En el Currículo Nacional (2016) de la educación básica regular, el área de ciencia y tecnología (antes ciencia tecnología y ambiente) desarrolla tres competencias: la indagación mediante el uso del método científico para construir sus conocimientos, explica el mundo físico basándose en el conocimiento sobre los seres vivos, materia y energía, biodiversidad, tierra y universo, diseña y construye soluciones tecnológicas para resolver problemas de su entorno. En consecuencia, la enseñanza de la física, la teoría y la práctica son importantes y necesarias para desarrollar significativamente las competencias mencionadas.

Por su propia naturaleza, la enseñanza de la física se presta para la aplicación de un método experimental, y se requiere, no solo, de sesiones de aprendizaje significativas sino también de la planificación de experiencias científicas con el objetivo de que los estudiantes realicen experiencias significativas de un fenómeno natural y/o construyan sus conocimientos o redescubran principios o leyes científicas al establecer relaciones entre variables y promover una actitud científica que parte de su propia curiosidad, admiración y exploración de la naturaleza, entre otras. Al respecto,

La actividad experimental hace más que apoyar las clases teóricas de cualquier área del conocimiento; su papel es importante en cuanto despierta y desarrolla la curiosidad de los estudiantes, ayudándolos a resolver problemas y explicar y comprender los fenómenos con los cuales interactúan en su cotidianidad.

Una clase teórica de ciencias, de la mano de la mano de la enseñanza experimental creativa y continua, puede aportar al desarrollo en los estudiantes de algunas de las habilidades que exige la construcción de conocimiento científico. (López y Tamayo, 2012, p. 148)

En consecuencia, teoría y práctica conforman una unidad dialéctica en el desarrollo de las ciencias específicamente en la enseñanza de la física.

Para desarrollar la competencia Indaga mediante métodos científicos y para construir sus conocimientos se requiere la combinación de las siguientes capacidades.

Problematiza situaciones para hacer indagación: plantea preguntas sobre hechos y fenómenos naturales, interpreta situaciones y formula hipótesis.

Diseña estrategias para hacer indagación: proponer actividades que permitan construir un procedimiento, seleccionar materiales, instrumentos e información para comprobar o refutar las hipótesis.

Genera y registra datos o información: obtener, organizar y registrar datos fiables en función de las variables, utilizando instrumentos y diversas técnicas que permitan comprobar o refutar las hipótesis.

Analiza datos e información: interpretar los datos obtenidos en la indagación, contrastarlos con las hipótesis e información relacionada al problema para elaborar conclusiones que comprueban o refutan las hipótesis.

Evalúa y comunica el proceso y resultados de su indagación: identificar y dar a conocer las dificultades técnicas y los conocimientos logrados para cuestionar el grado de satisfacción que la respuesta da a la pregunta de indagación. (Diseño Curricular, 2016, p.120)

Cuando el estudiante desarrolla la competencia *Indaga mediante métodos científicos en una práctica experimental en el laboratorio*, requiere de habilidades matemáticas. Algunas habilidades requeridas son la interpretación de modelos matemáticos, el dibujo, gráficos a escalas que muestren una relación lineal y no lineal, el dibujo líneas de tendencia en un diagrama de dispersión, la interpretación de los gráficos y su respectiva pendiente, la graficar de la gradiente (pendiente) máxima y mínima, considerando barras de error y la expresión de incertidumbres. Es relevante considerar que estas habilidades requeridas como requisitos tienen un soporte en Currículo nacional (2016) a la competencia del área de matemática *Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre*, la cual se expresa de la siguiente manera:

Consiste en que el estudiante analice datos sobre un tema de interés o estudio o de situaciones aleatorias, que le permitan tomar decisiones, elaborar predicciones razonables y conclusiones respaldadas en la información producida. Para ello, el estudiante recopila, organiza y representa datos que le dan insumos para el análisis, interpretación e inferencia del comportamiento determinista o aleatorio de la situación usando medidas estadísticas y probabilísticas. (Diseño Curricular, 2016, p.141)

La competencia *Indaga mediante métodos científicos para construir sus conocimientos* se relaciona principalmente con la competencia *Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre* como herramienta matemática y desarrollo de las siguientes capacidades:

Representa datos con gráficos y medidas estadísticas o probabilísticas: es representar el comportamiento de un conjunto de datos, seleccionando tablas o gráficos estadísticos, medidas de tendencia central, de localización o dispersión. Reconocer variables de la población o la muestra al plantear un tema de estudio. Así también implica el análisis de situaciones aleatorias y representar la ocurrencia de sucesos mediante el valor de la probabilidad.

Comunica la comprensión de los conceptos estadísticos y probabilísticos: es comunicar su comprensión de conceptos estadísticos y probabilísticos en relación a la situación. Leer, describir e interpretar información estadística contenida en gráficos o tablas provenientes de diferentes fuentes.

Usa estrategias y procedimientos para recopilar y procesar datos: es seleccionar, adaptar, combinar o crear una variedad de procedimientos, estrategias y recursos para recopilar, procesar y analizar datos, así como el uso de técnicas de muestreo y el cálculo de las medidas estadísticas y probabilísticas.

Sustenta conclusiones o decisiones con base en información obtenida: es tomar decisiones, hacer predicciones o elaborar conclusiones y sustentarlas con base en la información obtenida del procesamiento y análisis de datos, así como de la revisión o valoración de los procesos. (Diseño Curricular, 2016, p.141)

Modelamiento matemático en la práctica experimental

Los cálculos son importantes en el trabajo teórico y práctico. Para explicar un fenómeno natural se necesita un modelo matemático para relacionar las magnitudes que se investiga. En la práctica para determinar la aceleración de la gravedad los estudiantes proponen el siguiente modelo matemático mostrada en la Figura 1.

$$s = ut + \frac{1}{2}gt^2 \quad \rightarrow \quad s = 0t + \frac{1}{2}gt^2$$

$$\therefore s = \frac{1}{2}gt^2 \quad \rightarrow \quad y = mx + b$$

Figura 1. Modelo matemático

Nota: Informe de los estudiantes.

Como se observa, se relaciona la variable altura (s) y tiempo (t). El modelo matemático propuesto por los estudiantes establece una relación entre dichas variables la cual permite reconocer las variables (dependiente, independiente y controladas), formular la pregunta de investigación, plantear la hipótesis. Luego que los estudiantes proponen la metodología adecuada, realizan las mediciones para obtener los datos necesarios, teniendo en cuenta la calibración y la manipulación de los instrumentos para disminuir el error sistemático y aleatorio. Lo estimado se registra en tablas de datos agrupados. Los datos se obtienen repitiendo cinco veces la medición del tiempo para cada una de las diferentes alturas con el fin de disminuir el error aleatorio. La información se muestra en la Figura 2.

Datos brutos de las cinco repeticiones del experimento						Datos procesados de las cinco repeticiones del experimento del tiempo		
s / m ± 0.05	t / s ± 0.0001					s / m ± 0.05	t / s	Δt (s)
	t ₁	t ₂	t ₃	t ₄	t ₅			
0.10	0.1317	0.1197	0.1225	0.1447	0.1160	0.10	0.1269	0.0144 ± 0.01
0.20	0.1897	0.1989	0.1859	0.2005	0.1889	0.20	0.1928	0.0073 ± 0.007
0.30	0.2330	0.2365	0.2339	0.2529	0.2398	0.30	0.2392	0.0099 ± 0.01
0.40	0.2669	0.2712	0.2723	0.2721	0.2857	0.40	0.2736	0.0094 ± 0.01
0.50	0.3179	0.3225	0.3097	0.3057	0.3085	0.50	0.3129	0.0084 ± 0.009

Nota: autoría propia

Figura 2. Tabla de datos

Nota: Informe de los estudiantes.

Para construir la tabla de datos procesados se requiere realizar cálculos algebraicos donde $t = \frac{t_1+t_2+t_3+t_4+t_5}{5}$ y $\Delta t = \frac{t_{max}-t_{min}}{2}$. Con la tabla de datos procesados, se construye la gráfica.

Representación y análisis del gráfico

Según Medina (2017), las gráficas de un experimento son instrumentos teóricos- visuales que contiene mucha información (p.66). Con la información de la tabla de datos procesados y el uso del software Excel, se construye la siguiente figura 3:

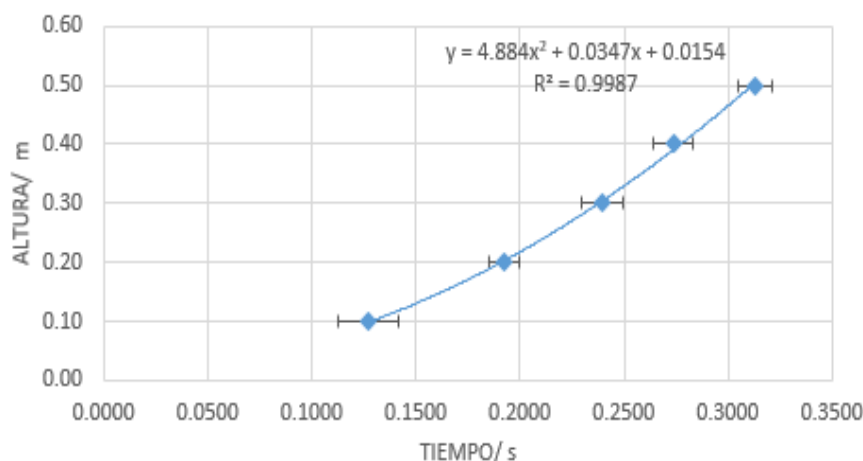


Figura 3. Línea de tendencia de la variable altura y tiempo

Nota. Informe de laboratorio de los estudiantes.

La curva sobre los puntos experimentales representa la tendencia de los datos. La línea de mejor ajuste no pasa exactamente por todos los puntos, debido a la incertidumbre aleatoria de las medidas.

Con la ayuda de Excel, los estudiantes realizan la línea de mejor ajuste y muestran la ecuación de la función. La función es de segundo grado de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$. La curva indica que la velocidad del móvil aumenta. Sobre R^2 , Martínez (2005) declara que es la confiabilidad de la línea de mejor ajuste, sus límites son $0 \leq R^2 \leq 1$; si R^2 es igual a 1, significa un ajuste lineal perfecto (p. 321). En la experiencia desarrollada por los estudiantes el R^2 es 0.9987, el grado de confiabilidad de la línea de mejor ajuste es grande y significa que pasa por la mayor cantidad de puntos de la muestra; y las que no, pasa cortando las barras de error.

Del modelo matemático $s = \frac{1}{2}gt^2$, los estudiantes interpretarán que la altura (s) es proporcional al cuadrado del tiempo (t^2) y realizarán los cálculos adecuados para obtener t^2 para luego construir la Figura 4.

Datos procesados del tiempo promedio al cuadrado (t^2) con su respectiva incertidumbre.

Altura (s) / m ± 0.05	Tiempo promedio al cuadrado (t^2) / s^2	$\Delta(t^2) / s^2$
0.10	0.0162	$0.0037 \cong 0.004$
0.20	0.0372	$0.0028 \cong 0.003$
0.30	0.0573	$0.0048 \cong 0.005$
0.40	0.0749	$0.0052 \cong 0.005$
0.50	0.0979	$0.0053 \cong 0.005$

Nota: Datos para poder obtener una relación directamente proporcional o lineal. Autoría propia

Figura 4. Tabla de datos altura y tiempo al cuadrado

Nota: Informe de los estudiantes.

Teniendo las variables adecuadas según el modelo matemático, se usa el programa Excel para procesar y elaborar la gráfica s versus t^2 . El resultado se muestra en la Figura 5.

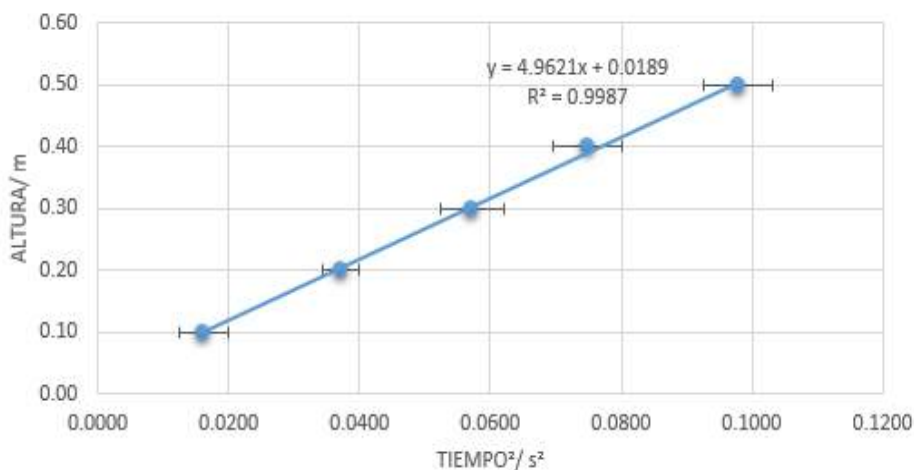


Figura 5. Línea de tendencia altura versus tiempo al cuadrado

Nota: Informe de los estudiantes.

La linealización de la gráfica permite relacionar las variables según el modelo matemático. La ecuación de la función tiene la forma de $f(x) = ax + b$. Como se muestra en la Figura 6.

$$s = \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow s = mt^2 \quad \therefore \frac{1}{2}g = m \rightarrow g = 2m$$

$$m = 4.9621 \quad g = 2 \times 4.9621$$

$$g = 9.9242 \text{ m s}^{-2}$$

Figura 6. Calculo de la pendiente

Nota: Informe de los estudiantes.

Sabiendo que $m = \frac{1}{2}g$ y teniendo en cuenta el valor de pendiente m igual a 4.9621, al realizar las operaciones se obtiene que $g = 9.9242 \text{ m s}^{-2}$. La pendiente es una magnitud física y presenta incertidumbre.

Calculo de la incertidumbre de la pendiente

Los estudiantes usan Excel para representar la pendiente máxima y mínima, considerando su respectivas ecuaciones, y R^2 para realizar el calculo de la incertidumbre de la pendiente con una operación aritmética. Las pendientes se observan en el gráfica elaboradas por los estudiantes en la Figura 7.

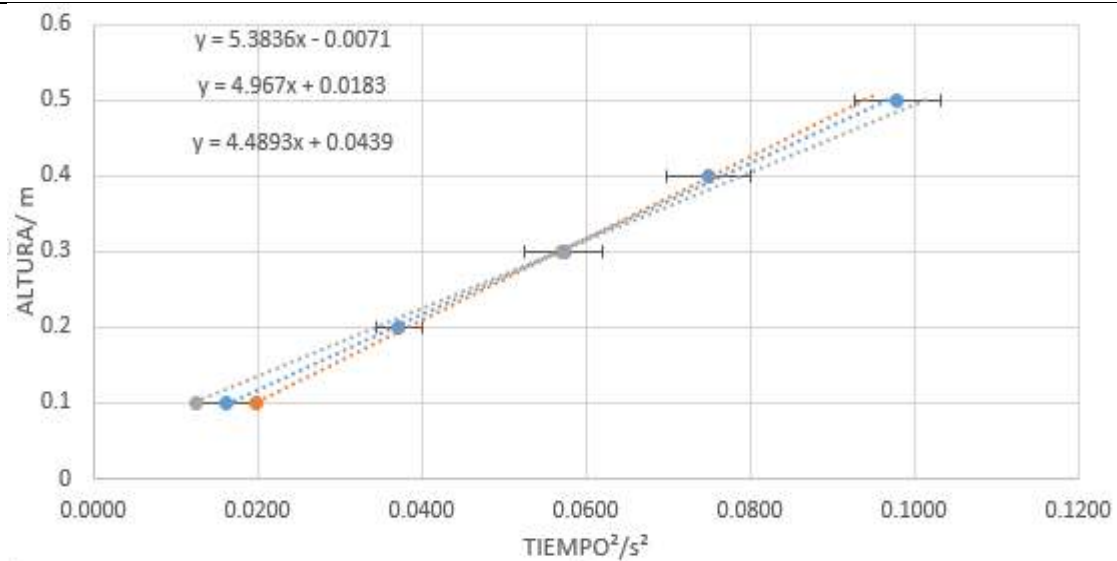


Figura 7. Línea de tendencia para pendiente máxima y mínima.

Nota: Informe de los estudiantes.

Identificando m de cada línea de máxima y mínima pendiente, con el modelo matemático se realiza las operaciones algebraicas para determinar dichas pendientes máxima y mínima. El resultado se observa la Figura 8.

Hallando la aceleración en la gravedad con la pendiente máxima:	Hallando la aceleración en la gravedad con la pendiente mínima:
$g = 2m \rightarrow m = 5.3836$	$g = 2m \rightarrow m = 4.4893$
$g = 2 \times 5.3836 \rightarrow g = 10.7672 \quad \therefore g_{max} = 10.7672 \text{ ms}^{-2}$	$g = 2 \times 4.4893 \rightarrow g = 8.9786 \quad \therefore g_{min} = 8.9786 \text{ ms}^{-2}$
Mediante esto hallamos la incertidumbre de la aceleración de la gravedad:	
$\Delta g = \frac{(g_{max} - g_{min})}{2} \rightarrow \Delta g = \frac{(10.7672 - 8.9786)}{2}$ $\Delta g = 0.8943 \text{ ms}^{-2}$	
Entonces obtenemos que $g = 9.9242 \pm 0.8943 \cong 9.9 \pm 0.9 \text{ m s}^{-2}$	

Figura 8. Operaciones algebraicas para determinación de la pendiente máxima y mínima.

Nota: Informe de los estudiantes.

Los estudiantes en la indagación bibliográfica utilizan como valor teórico de la aceleración de la gravedad es 9.81 m s^{-2} . Para calcular el porcentaje de error aplican la siguiente expresión algebraica: $\%error = \frac{|Valor\ teórico - Valor\ experimental|}{Valore\ teórico} \times 100$, donde el valor teórico y experimental son 9.81 y 9.92 respectivamente; como resultado de la operación, se obtiene que el porcentaje de error es 1,12 %.

En la práctica experimental, es relevante que los estudiantes formulen sus conclusiones, basándose en la interpretación de los resultados obtenidos (valor experimental) con los valores de la literatura (valor teórico) o de otras investigaciones. La conclusión de los estudiantes se observa la Figura 9.

Llegamos a concluir que mediante la experimentación de un objeto en caída libre e incluso con la ayuda del modelo matemático con el que se contaba $s = ut + \frac{1}{2}gt^2$, podemos estimar la aceleración de la gravedad, además es muy importantes trabajar con precisión y responsabilidad al realizar la experimentación para evitar errores aleatorios y sistemáticos que alteren nuestros resultados. Además, cabe mencionar que el trabajo en equipo hace eficaz la obtención de datos y la interpretación de ellos, por tanto, tras todo el proceso se obtuvo como valor experimental que la aceleración de la gravedad es $9.9242 \pm 0.8943 \text{ m s}^{-2} \cong 9.9 \pm 0.9 \text{ m s}^{-2}$ y considerando el valor teórico 9.81 m s^{-2} se obtuvo un error porcentual de 1.12%.

Figura 9. Conclusión

Nota: Informe de los estudiantes.

Conclusiones

La matemática, como herramienta en la práctica experimental en el área de física ayuda a cuantificar y relacionar las variables, es decir, en la comprensión de los principios fundamentales de la ciencia. La competencia Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre del área

de matemática se relaciona significativamente como herramienta matemática con la competencia Indaga mediante métodos científicos para construir sus conocimientos. La actividad experimental no solo se debe considerar una forma de construir conocimientos sino también de redescubrirlos y como una oportunidad de fortalecer y desarrollar otras competencias en los estudiantes. De esta manera, se lograrán estudiantes indagadores, críticos y buenos comunicadores. La metodología de trabajo mostrado en este artículo se realiza con regularidad en los diferentes temas de la malla curricular en CMSPP COAR-LIMA.

Referencias

- Perú, Ministerio de Educación. (2017). *Curriculo Nacional de la Educación Basica*. Lima: Autor
- Lopez, A y Tamayo, O. (2012). *Las prácticas de laboratorio en la enseñanza de las ciencias naturales*. Revista Latinoamericana de Estudios Educativos, 8(1), 145-166. Consultado el 28 de octubre del 2019. Recuperado de <https://www.redalyc.org/pdf/1341/134129256008.pdf>
- Medina, C. (2017). *Breve introducción a la teoría de errores y la graficación* (1a ed.) México, DF: Universidad Autonoma de Aguascalientes.
- Martínez, E. (2005). *Errores frecuentes en la interpretación del coeficiente de determinación lineal*. Anuario Jurídico y Económico Escurialense, XXXVIII, 315-332. Consultado el 26 de octubre del 2019. Recuperado de <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/1143023.pdf>
- Estudiantes del 4to grado de secundaria del Colegio Mayor Secundario Presidente del Perú COAR LIMA (2019). *Determinando la aceleración de la gravedad en CVH*. Informe práctica experimental de laboratorio de física. Lima: Autor

O PROFESSOR EM UMA AULA ASSENTE NO ENSINO EXPLORATÓRIO DE MATEMÁTICA

Vania Sara Doneda de Oliveira

Dalva Spiler Brandelero

Maria Ivete Basniak

vania.oliveira28@escola.pr.gov.br, dalvaspiler@hotmail.com, basniak2000@yahoo.com.br

Universidade Estadual do Paraná, Brasil

Resumen

Este relato objetiva discutir aspectos relacionados ao papel do professor no desenvolvimento de uma tarefa envolvendo o conceito de área de quadrados, na perspectiva do Ensino Exploratório de Matemática (EEM) em que os alunos resolveram apoiados no software GeoGebra. A tarefa foi implementada em uma turma do 6º Ano do Ensino Fundamental de uma escola pública do interior do estado do Paraná/Brasil. Observamos que o GeoGebra pode trazer contribuições para a aula assente no EEM permitindo a visualização e interpretação simbólica dos conceitos matemáticos, favorecendo ainda a percepção e concepção dos objetivos da tarefa proposta. Observamos também que ao planejar e desenvolver a tarefa o professor passa a mediar conhecimentos, significados, estimulando a comunicação oral e escritas de ideias matemáticas, além de gerir a turma para que os objetivos da tarefa sejam alcançados.

Palabras clave: Ensino Exploratório de Matemática, GeoGebra, Educação Matemática.

Introdução

Práticas docentes desenvolvidas pelas professoras, autoras deste trabalho, mostram que a profissão professor se torna cada dia mais apaixonante e desafiadora. Refletir sobre nossas experiências em sala de aula é uma prática necessária para significar o trabalho docente e possibilitar tomada de decisões que contribuam com o processo de ensino e de aprendizagem.

Nesse contexto, este relato objetiva discutir aspectos relacionados ao papel do professor no desenvolvimento de uma tarefa envolvendo o conceito de área de quadrados, na perspectiva do Ensino Exploratório de Matemática (EEM) em que os alunos resolveram apoiados no software GeoGebra. A perspectiva exploratória emerge como uma estratégia em contraposição ao ensino chamado tradicional. Entendemos uma aula tradicional como sendo aquela em que o processo de ensino é centrado no professor, que realiza a transmissão de informação para seus alunos (Oliveira, Menezes e Canavarro 2013). As Tecnologias Digitais (TD) podem auxiliar no desenvolvimento de tarefas exploratórias considerando que o aluno ao interagir com o computador para realizar uma tarefa, necessita empregar técnicas em que o computador é o meio para acessar o conhecimento matemático: "O aluno é inquirido a utilizar e interpretar

representações matemáticas, refletindo sobre seus significados, mobilizando formas complexas de pensamento que, dialogicamente, articulam representações e conceitos diversos, em busca de um significado compartilhado e validado” (Basniak e Estevam, 2019).

Dessa forma, para realização da tarefa com uma turma do 6º Ano do Ensino Fundamental de uma escola pública do interior do estado do Paraná/Brasil utilizamos notebooks com sistema Linux Educacional, com o *software* GeoGebra instalado, com o objetivo de permitir ao aluno conhecer, discutir e explorar o conteúdo por meio do artefato tecnológico.

Na seção que segue, discutimos brevemente o EEM e como as TD podem auxiliar no desenvolvimento de tarefas exploratórias. Na sequência discutimos os aspectos salientes das possibilidades e desafios que o EEM e o uso de TD no ensino de matemática provocaram em nossa prática.

Ensino Exploratório de Matemática e Tecnologias Digitais

Atualmente as TD estão presentes nas atividades diárias das pessoas. Para Basniak (2014, p. 49), “a educação como processo de apropriação cultural não pode ser desvinculada da interferência que a tecnologia exerce na sociedade”. Assim, as TD devem ser incorporadas no contexto escolar para ensino e aprendizagem. Conforme as Diretrizes Curriculares Estaduais de Matemática do Estado do Paraná (2008 p. 65), documento que orienta atualmente a prática docente no estado do Paraná “no contexto da Educação Matemática, os ambientes gerados por aplicativos informáticos dinamizam os conteúdos curriculares e potencializam o processo pedagógico”. Os especialistas em políticas de ensino de Ciências e Matemática da Organização das Nações Unidas para Educação, Ciência e Cultura (Unesco, 2016), sublinham que uma educação de qualidade para todos, hoje em dia, não pode ser obtida sem que se considere a dimensão tecnológica. Embora as TD possam ser utilizadas nas práticas docentes, “uma utilização pertinente da tecnologia ainda permanece relativamente rara” (Unesco, 2016, p. 21). Assim, escolhemos o software GeoGebra como apoio para a resolução da tarefa pelos alunos para que pudessem explorar a representação geométrica do quadrado, especialmente nos seguintes aspectos: i) investigar e compreender o conceito de área do quadrado; ii) estabelecer relação entre o lado do quadrado e sua área, elaborando conjecturas e testando possibilidades ao modificar a medida do lado utilizando o controle deslizante do GeoGebra; iii) estabelecer relações entre a representação numérica e geométrica da área do quadrado por meio da janela de álgebra (em que é exibida a representação numérica, neste caso) e a janela de visualização (em que é exibida a representação geométrica).

Ao proporcionar aos alunos tarefas exploratórias, almejamos oportunizar o desenvolvimento do trabalho autônomo, fazendo emergir ideias matemáticas, desenvolvendo o trabalho coletivo e incentivando a comunicação oral e escrita. O EEM constitui uma perspectiva que se contrapõe ao modelo de transmissão de conhecimento/informação associado às práticas expositivas e diretas (Ponte, 2005). De acordo com Oliveira, Menezes e Canavarro (2013), o EEM sugere que o trabalho seja norteado por uma organização de aulas em fases, que Cyrino e Teixeira (2015) assumem como sendo:

i) *Proposição da tarefa*: quando o professor convida os alunos a resolverem a tarefa, explicando a dinâmica da aula que envolve a forma como os alunos se organizarão para desenvolver a tarefa (em grupo ou individual), o tempo, os recursos e as formas de registro que poderão ser utilizados. É importante salientar que todas as questões precisam ser previamente planejadas pelo professor a partir dos objetivos que estabeleceu ao estruturar a tarefa. É importante também neste momento, explicar aos alunos como se dará a dinâmica posterior da aula, que envolverá a discussão de suas resoluções, chamando a sua atenção para a forma como registrarão suas resoluções para posterior socialização. Pode ainda ser realizada leitura coletiva da tarefa de forma que todos compreendam o que precisa ser realizado.

ii) *Desenvolvimento da tarefa*: nessa fase o papel do professor é de observador e questionador das estratégias de resolução que os alunos estão desenvolvendo. É importante, neste momento que o professor não valide respostas corretas ou incorretas, mas questione os alunos sobre como pensaram, o que discutiram, como chegaram às conclusões que registraram, a fim de que o aluno reveja suas anotações ou falta delas, e reavaliando ou validando suas estratégias.

iii) *Discussão da tarefa*: essa fase exige que o professor tenha acompanhado o desenvolvimento da tarefa pelos alunos. Assim, poderá selecionar e sequenciar as tarefas que serão apresentadas e discutidas no grande grupo, tendo o cuidado de selecionar resoluções diferentes e que estejam corretas, como também aquelas equivocadas ou inconsistentes para que, diante de uma discussão coletiva, as conclusões esperadas sejam alcançadas e, dessa forma, ofereça elementos consistentes para a próxima fase da aula.

iv) *Sistematização das aprendizagens*: como afirma Canavarro (2011, p. 11), o EEM “não advoga que os alunos descubrem sozinhos as ideias matemáticas que devem aprender, nem tão pouco que inventam conceitos e procedimentos ou lhes adivinham os nomes”. Por isso, a mediação do professor é essencial em todo o processo e não menos importante na última fase. É nela em que ocorrerá a sistematização das ideias matemáticas, suas regras, generalizações, definições, propriedades, entre outras, de forma que a tarefa desenvolvida faça sentido para o aluno e que os objetivos delineados sejam alcançados. Conseguir articular o que os alunos apresentaram e as discussões realizadas na fase anterior é um dos maiores desafios do professor.

Para que a aula nessa perspectiva tenha sucesso é indispensável a elaboração de um quadro de *antecipação* que prevê possíveis situações na fase de *desenvolvimento da tarefa* e ações do professor em cada situação (Cyrino e Teixeira, 2015). Assim, é possível o professor prever o quê e como os alunos podem pensar, questionar, conjecturar, afirmar, equivocar, auxiliando-o a agir, expressar, questionar sem validar ou refutar essas ideias, favorecendo explorar o potencial da tarefa diante das situações de aprendizagens matemáticas. Por isso, essa etapa de *antecipação* é considerada tão importante quanto as demais (Canavarro, 2011) pois o professor deve ter muito claro quais são os objetivos específicos que quer atingir com a tarefa. Discutimos na sequência esta etapa em que apresentamos a tarefa elaborada.

A Tarefa

Enquanto professoras da Educação Básica nos deparamos com dificuldades que os alunos apresentam na compreensão do conceito de área de quadrados. Apesar de ser um conteúdo contemplado no currículo do Ensino Fundamental Anos Iniciais percebemos que a defasagem é recorrente por um número significativo de alunos. Assim, nos debruçamos no planejamento e desenvolvimento de uma tarefa que possibilitasse a compreensão desse conceito.

TAREFA QUADRADOS

Considere cada quadrado da malha uma unidade de referência para área e siga os seguintes passos:

- Clique na ferramenta controle deslizante.
- Clique na janela de visualização. Abrirá uma nova janela. Escolha mínimo 1 e máximo 12, incremento 0.1.
- Clique na ferramenta polígono regular, clique no ponto (0,0) e depois no ponto (1,0), abrirá uma janela solicitando o número de vértices, digite 4.
- Clique 2 vezes no ponto B e coloque o ponto (a, 0).
- Configure a malha para 1x1 (Eixo X e Eixo Y).

Com base no enunciado da questão e embasado em seus conhecimentos sobre geometria, analise e responda os itens abaixo:

1 - Clique na ferramenta *Área* do GeoGebra, logo após, clique dentro do quadrado construído. Mova o controle deslizante até a posição 2 e observe a área do quadrado. Faça o mesmo com o controle deslizante nas posições indicadas na tabela.

Lado do quadrado	1	2		3	4,5		8		10,2	15	
Área do quadrado			6,25			36		81			400

- O que o GeoGebra fez para calcular a área dessas figuras?
- Justifique o cálculo feito pelo GeoGebra para determinar o lado dos quadrados de área 6,25; 36; 81 e 400.
- Que relação podemos estabelecer entre a área do quadrado e a medida do seu lado? Justifique sua resposta detalhadamente.
- Se chamarmos a medida do lado de um quadrado de l , como podemos representar a área desse quadrado?
- Construa um quadrado de qualquer tamanho. Em seguida, construa outro quadrado cujo lado seja o dobro do primeiro. Que relações você pode estabelecer entre a área do primeiro e do segundo quadrado.

Quadro 1. Tarefa Quadrados elaborada pelas autoras

Após a elaboração da tarefa pelas autoras, construímos o quadro de antecipação, o qual prevê possíveis ideias, interpretações, ações, questionamentos dos alunos e como a professora deve agir para não validar ou refutar estratégias de resolução. As ações citadas no quadro de antecipação serão discutidas na seção que segue.

O professor e a tarefa quadrados

A professora leciona nessa turma de 6º Ano do Ensino Fundamental com 32 alunos, desde o início do ano letivo de 2019 e obsevou que apresentam certa diversidade social e econômica e que costumam corresponder bem as atividades solicitadas. Para a realização da tarefa *Quadrados* a turma foi dividida em 8 equipes, com 4 alunos cada. Seguindo as fases do EEM, já citadas, a professora distribuiu e leu a tarefa com os alunos para garantir que todos compreendessem. O tempo estipulado foi de cinquenta minutos para os alunos desenvolverem a tarefa. Foi necessário esclarecer os significados das palavras eixo, malha, relação, além de familiarizar os alunos com os termos do software GeoGebra. A professora (primeira autora deste trabalho) solicitou que os alunos registrassem da forma mais clara e detalhada possível suas ideias e justificativas de estratégias de resolução em cada item da tarefa.

Após a leitura a professora apresentou o software no projetor multimídia, mostrando a interface do GeoGebra, malha, eixo, além de algumas ferramentas como ponto, retas paralelas, perpendiculares, polígonos, permitindo também que os alunos explorassem livremente o *software* por alguns minutos. Em seguida, os grupos foram desenvolvendo cada etapa de construção da tarefa no GeoGebra. Alguns grupos apresentaram dificuldades quanto a manipulação do *software* já que não estavam acostumados a utilizarem notebooks, sendo necessário a intervenção da professora. Além disso, alguns notebooks travaram e foi preciso reiniciá-los.

Após a verificação de que todas as equipes concluíram as etapas de construção da tarefa no GeoGebra, a professora acompanhou a resolução da tarefa, passando grupo por grupo, questionando conforme o quadro de orientação da tarefa.

Para o item *a*, um grupo respondeu que o GeoGebra realiza as operações de multiplicação sem explicitar a operação. A professora questionou como eles chegaram a essa conclusão e a resposta foi explicada no notebook com os alunos mostrando que o GeoGebra multiplicou o valor que estava no controle deslizante. Então a professora questionou o que significava esse número apontado no GeoGebra em relação ao quadrado, questionando: "O GeoGebra multiplicou esse valor pelo que?" Os alunos responderam que se tratava do lado do quadrado e que a multiplicação de seus lados resultava na área.

Das oito equipes, cinco preencheram corretamente toda a tabela. No item *a*, cinco equipes concluíram que para calcular a área do quadrado, o software multiplica dois lados do quadrado. As outras três equipes tiveram um ou outro equívoco ao preencher a tabela, porém, responderam corretamente.

Para o item *b* uma equipe chamou atenção porque responderam de forma correta utilizando a linguagem materna escrita, mas não souberam representar numericamente. Essa equipe foi selecionada para apresentar a solução ao grupo. Nesse momento, tomaram consciência de que haviam representado o resultado numérico de forma equivocada. Nesse item da tarefa apenas quatro equipes concluíram de que forma o GeoGebra calculou o lado do quadrado conhecendo a área.

Quanto ao item *c*, seis equipes conseguiram estabelecer algum tipo de relação entre a área do quadrado e a medida do seu lado, sendo que todas a fizeram utilizando a linguagem materna.

Apenas uma equipe teve dificuldades em expressar de forma clara a relação estabelecida entre a área de um quadrado e a medida do seu lado.

Para o item *d*, todos entenderam que a área é lado vezes lado, porém nem todos os grupos conseguiram representar algebricamente, o que era esperado por se tratar de uma turma de 6º ano. No entanto, todos conseguiram apresentar alguma ideia, seja por meio da linguagem escrita, algébrica ou por representação pictórica. Das oito equipes, cinco chegaram à conclusão de que a área do quadrado é ℓ^2 . Acreditamos que isso se deve ao fato de a professora, durante as aulas de potenciação no início do ano, ter mencionado o uso de letras para representação de números em certas situações matemáticas. Em algumas tentativas de representar algebricamente, percebemos que três equipes se equivocaram em relação a multiplicação de potências de mesma base, registrando ℓ vezes ℓ como sendo igual a ℓ . A professora optou que esse grupo apresentasse a solução no momento da discussão da tarefa, pedindo para que os alunos representassem essa mesma ideia com números. Com isso perceberam que haviam se equivocado, porém não conseguiram sozinhos, generalizar para forma algébrica. Nesse momento os colegas auxiliaram o grupo na representação algébrica.

No item *e*, a professora observou que apesar dos grupos representarem na forma de desenho os dois quadrados solicitados, tiveram dificuldades em estabelecer matematicamente a relação entre a área do primeiro e do segundo quadrado. A professora percebendo que os alunos estavam utilizando lápis e papel, sugeriu para que construíssem utilizando o *software*. Também, pediu para que realizassem mais de uma construção, verificando se a relação entre as áreas dos quadrados poderia ser generalizada. Alguns alunos comentaram que no GeoGebra era mais fácil de fazer do que com régua. Na sistematização desse item, a professora optou por apresentar uma tabela relacionando o lado, o dobro do lado do quadrado e suas respectivas áreas, conforme Figura 1.

área quadruplicou	
LADO	ÁREA
1	1
2	4

área quadruplicou	
LADO	ÁREA
3	9
6	36

área quadruplicou	
LADO	ÁREA
10	100
20	400

área quadruplicou	
LADO	ÁREA
ℓ	ℓ^2
2ℓ	$4\ell^2$

Figura 1. Sistematização do item *e* da tarefa Quadrados

Ao planejarmos e elaborarmos a tarefa e o quadro de orientação, pensamos em contemplar grupos que utilizaram estratégias diferenciadas de resolução bem como àqueles que cometeram algum tipo de equívoco na resolução da tarefa.

Na socialização dos grupos alguns alunos se mostraram inseguros na exposição de suas resoluções e alguns não quiseram ir para a frente da sala. Porém, a professora incentivou a comunicação, oportunizando e valorizando suas ideias e conjecturas, mesmo que estivessem equivocadas, propiciando a compreensão do erro. Dessa forma, após as interações e socializações de todos os itens, a professora realizou a sistematização da resolução da tarefa, chamando a atenção para os itens *b*, *d* e *e*, nos quais os grupos apresentaram maior dificuldade. Quanto ao item *b*, alguns grupos justificaram que para calcular o lado seria necessário realizar divisão, conhecendo a área do quadrado, então a professora questionou quanto a como isso aconteceria para outros números, como saber por qual número dividir? Um dos alunos

argumentou que não se tratava de uma divisão e sim um cálculo de raiz quadrada. Nesse momento, a professora validou o que o aluno falou, retomando o conceito de raiz quadrada. Para o item *d* alguns grupos equivocaram-se escrevendo que $1 \times 1 = 1$. A dificuldade de estabelecer a relação de $A=1^2$ já era prevista por se tratar de uma representação algébrica e como previsto no quadro de antecipação, a professora retomou o conceito de potenciação. A dificuldade evidenciada no item *d* estendeu-se para o item *e* visto se tratar de uma relação algébrica que ainda é usual aos alunos devido ao período letivo desses alunos.

Reflexões Sobre a Aula

No dia-a-dia da sala de aula o professor encontra empecilhos para o desenvolvimento de sua prática docente, entre outros fatores, devido a defasagem que os alunos apresentam em alguns conteúdos presentes no currículo escolar. Destacamos aqui as dificuldades que os alunos apresentam na compreensão de conceito de área de quadrados. Apesar de ser um conteúdo que os alunos já deveriam ter aprendido nos anos anteriores, geralmente chegam ao 6º ano com essa defasagem, o que nos motivou a implementar a tarefa *Quadrados*.

Planejar e desenvolver uma aula na perspectiva do EEM foi para nós um grande desafio, além de ser algo inovador em nossa prática docente. Para os alunos a aula nessa perspectiva também foi diferente do modelo tradicional de uma aula de Matemática, o que trouxe certa dificuldade na implementação da tarefa, pois não estavam habituados ao desenvolvimento da aula em fases, bem como a serem protagonistas do processo de ensino e aprendizagem. Mesmo assim, foram muito receptivos quanto ao desenvolvimento da tarefa mostrando-se entusiasmados e curiosos.

Para não comprometermos as análises dos dados optamos por realizar audiografações para avaliar a comunicação e interação entre os alunos, e entre alunos e professora. O quadro de antecipação realizado antes do desenvolvimento da tarefa auxiliou a professora, acostumada a validar ou refutar respostas, a não fazer isso e sim questionar, solicitar justificativas, incentivar a comunicação oral e escrita das ideias dos alunos, de forma clara. A maioria dos grupos teve dificuldades quanto a comunicação escrita de suas justificativas o que não se evidenciou na comunicação oral. Nesse momento percebe-se a necessidade da mediação da professora no sentido de sistematizar os conhecimentos matemáticos.

Apesar de alguns alunos apresentarem dificuldades de manipulação do GeoGebra, no decorrer da tarefa essas dificuldades foram se amenizando. Por meio da experimentação, visualização, simulação e relação dos cálculos com a geometria, o software GeoGebra pode atender requisitos e potencializar o ensino e a aprendizagem de matemática (Basniak, Silva e Gaulovski, 2017). Ao usar o GeoGebra para o desenvolvimento da tarefa, é necessário que o aluno organize e interprete os dados inseridos no computador, usando a ferramenta como instrumento de aprendizagem e não apenas como um artefato tecnológico (Basniak e Estevam, 2019). No caso da tarefa Quadrados, o aluno ao construir um quadrado de lado qualquer

[...] ele precisará relacionar conhecimentos sobre as propriedades do quadrado, as medidas de ângulos, retas, segmentos de retas e, enfim, outros mais, dependendo da(s) estratégia(s) que utilizar. O aluno precisa utilizar sua experiência e conhecimentos anteriores para conseguir se

comunicar com o computador, interpretando as respostas retornadas por ele, e/ou ainda comunicar seus achados e reflexões com o professor e colegas, colaborando com sua aprendizagem e com a dos demais para que consigam, todos, resolver a tarefa proposta (Basniak e Estevam, 2019, p. 744).

Assim, considerando a experiência vivenciada, acreditamos que a aula desenvolvida por meio da perspectiva do EEM aliada às TD, contribui para a expansão e compreensão da comunicação matemática, oral e escrita. Percebemos também, que o GeoGebra pode trazer contribuições para o EEM permitindo a visualização e interpretação simbólica dos conceitos matemáticos, favorecendo ainda a percepção e concepção dos objetivos da tarefa proposta. Ademais, nesse processo, o aluno é inquirido e, dessa forma, utiliza e interpreta diferentes formas de representações matemáticas estimulando e articulando pensamentos matemáticos sistematizados, além de se comunicar de forma coletiva e individual.

Para nós, a experiência proporcionou uma reflexão sobre o nosso desenvolvimento profissional, além de permitir vivenciar o ensino na perspectiva exploratória. Sabemos que se trata de uma mudança de atitudes e habilidades do professor, que ao invés de estar no centro da aula, assume o papel de mediador. Contudo, refletindo sobre essa experiência, acreditamos ser necessário desenvolver outras tarefas assentes no EEM, aliadas ao *software* GeoGebra, para que esse tipo de aula seja efetivada em nossas práticas profissionais, nessa metodologia de ensino que é ativa, inovadora e desafiadora.

Referências

- Basniak, M. I. (2014) "Políticas de Tecnologias na Educação: o Programa Paraná Digital". Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal do Paraná, Curitiba. <https://acervodigital.ufpr.br/handle/1884/36372>, Fevereiro.
- Basniak, M. I. e Estevam, E. J. G. (2019) "Uma Lente Teórica para Analisar o Potencial das Tecnologias Digitais do Ensino Exploratório de Matemática. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, no prelo, v. 32, n.2, p. 738-747.
- Basniak, M. I., Silva, S. C. R. and Gaulovski, J. M. (2017) "Tecnologias Digitais e Ensino da Matemática no Brasil: Uma Revisão da Literatura de 2010-2017". Revista Tecnologias na Educação. ano 9, v. 23, dez.
- Canavarro, A. P. (2011) "Ensino Exploratório da Matemática: Práticas e Desafios". Lisboa: Universidade Aberta.
- Cyrino, M. C. C. T e Teixeira, B. R. (2015) "O Ensino Exploratório e a Elaboração de um Framework para os Casos Multimídia. In Cyrino, M. C. C. T. (Org.). Recurso Multimídia, para Formação de Professores que Ensinam Matemática: Elaboração e Perspectivas. 1ª ed. Londrina: Eduel. p. 83-99.
- GeoGebra (2019) <http://www.geogebra.org>, Maio.

- Oliveira, H., Menezes, L. e Canavarro, A. P. (2013) "Conceptualizando o Ensino Exploratório da Matemática: Contributos da Prática de uma Professora do 3.º Ciclo para a Elaboração de um Quadro de Referência". *Quadrante*, v.22, n.2, p.1-25.
- Paraná (2008) "Diretrizes Curriculares da Educação Básica Matemática". Seed, Curitiba.
- Ponte, J. P. (2005) "Gestão Curricular em Matemática". In GTI (Ed.). *O Professor e o Desenvolvimento Curricular*. Lisboa: APM, p.11-34.
- Unesco (2016) "Os Desafios do Ensino de Matemática na Educação Básica". São Carlos: EdUFSCar.

INSTRUMENTACIÓN DEL ARTEFACTO SIMBÓLICO FUNCIÓN CUADRÁTICA

Daysi Julissa García-Cuéllar

Mihály André Martínez-Miraval

Jesús Victoria Flores Salazar

garcia.daysi@pucp.pe, martinez.ma@pucp.edu.pe, jvflores@pucp.edu.pe

Instituto de Investigación sobre Enseñanza de la Matemáticas, IREM-PUCP, Perú

Resumen

El presente escrito muestra una investigación realizada con estudiantes de cuarto grado (15 años) de secundaria de un colegio privado en Lima-Perú. Tuvo como objetivo la instrumentación del artefacto simbólico función cuadrática mediado por el Geogebra. Se utilizó como marco teórico el Enfoque Instrumental y se usó como método de investigación, el Estudio de Caso. A partir de las acciones de los estudiantes, se logró inferir esquemas de uso y de acción instrumentada relacionados a la función cuadrática, lo que nos dio indicios que los estudiantes lograron instrumentar dicho objeto matemático al resolver actividades mediadas por GeoGebra.

Palabras clave: *función cuadrática, instrumentación, génesis instrumental, GeoGebra*

Introducción

Existen diversas investigaciones en el campo de la Educación Matemática que muestran la necesidad de realizar estudios sobre funciones, pues se evidencian dificultades en el aprendizaje de este objeto matemático (Gómez, Hernández y Chaucanés, 2015; Tabach & NachielI, 2015; Viirman, 2014; García-Cuéllar y Martínez-Miraval, 2018 y Salazar, 2018), como por ejemplo, dificultades con la identificación y uso de los elementos característicos de las funciones, dificultades en el uso de las funciones para modelar situaciones extramatemáticas, dificultades en reconocer cómo varía la gráfica de una función al aplicarle diferentes transformaciones a su regla de correspondencia, lo cual limita al estudiante a reconocer casi intuitivamente el comportamiento de una función, entre otros. Por lo anterior, es necesario reconsiderar los procesos de enseñanza y aprendizaje para dicha noción.

En el Perú, el estudio de la función cuadrática inicia en el tercer año de secundaria de la Educación Básica Regular. Su estudio es de mucha importancia por distintos motivos: se da el paso del manejo lineal al uso de curvas; ya no se trabaja con variaciones constantes, lo que implica hablar de aumentos o disminuciones cada vez mayores o menores debido a la concavidad de sus gráficas; son utilizadas para modelar situaciones de optimización; etc. Sin embargo, la manera cómo se introduce a la función cuadrática es en esencia algebraica, dando fórmulas para determinar el vértice, recetas para representar su gráfica, condiciones para hallar su regla de correspondencia, entre otros, quitándole al estudiante la oportunidad de utilizar sus

conocimientos previos de transformaciones gráficas, de dominio, de rango, de intervalos de monotonía, etc., para caracterizar a la función cuadrática, construyendo el concepto a partir del conocimientos de sus propiedades tanto algebraicas como gráficas aprehendidas a partir de secuencias didácticas.

Por ello, nuestra investigación se centró en el estudio de la función cuadrática, que, al tener características variacionales, es pertinente introducirla con el apoyo de softwares que permitan observar y analizar cómo varía la función a partir de cambios en su variable y en los parámetros que componen su regla de correspondencia, tal como lo menciona Montiel y Buendía (2013).

El objetivo de nuestra investigación es analizar la instrumentación (una de las dimensiones de la Génesis Instrumental) del artefacto simbólico función cuadrática cuando los estudiantes interactúan con el Geogebra al resolver cada una de las actividades propuestas.

A continuación, presentamos los aspectos teóricos y metodológicos que hemos utilizado en nuestra investigación, que son el Enfoque Instrumental y el Estudio de caso, respectivamente.

Enfoque Instrumental

El Enfoque Instrumental es propuesto por Rabardel (1995) y estudia la diferencia que existe entre el artefacto y el instrumento, así como los procesos que desarrollan la transformación progresiva del artefacto en un instrumento, una transformación que él llamó proceso del Génesis Instrumental.

El autor considera tres importantes polos en la Génesis Instrumental: el sujeto, que puede ser un usuario, operador, trabajador o agente; el instrumento, que se refiere a herramientas, máquinas, sistemas, utensilios, etc.; y el objeto, para el cual la acción es dirigida con la ayuda del instrumento, objeto de la actividad u obra.

Para Rabardel (2011), los conceptos de artefacto e instrumento son fundamentales en la Génesis Instrumental. Un artefacto está ligado a lo que se pensaba como herramienta y posee un carácter neutro.

El artefacto está conectado al uso que el sujeto hace como medio para su acción y que puede ser considerado como una máquina, un objeto técnico, objetos y sistemas simbólicos, o sea, que puede ser definido como material o simbólico (Rabardel, 2011, pp. 49-52).

De la cita anterior, por ejemplo, la calculadora, el Abaco pueden ser concebidos como artefactos materiales y el objeto matemático función cuadrática, como un artefacto simbólico. Según Rabardel (1995), el artefacto no restringe su significado a las cosas materiales (físicas). Es por ello, que, en nuestro estudio, nos centramos en el objeto matemático como artefacto simbólico.

El investigador sostiene que el instrumento no existe en sí, sino que es el resultado de asociar el artefacto a la acción del sujeto, como medio para la misma. En nuestro caso, el artefacto simbólico es la función cuadrática. El autor señala que el artefacto pasará al estado de instrumento, cuando el sujeto le asigne los esquemas de utilización correspondientes.

Así, de acuerdo a Rabardel (1995), el Enfoque Instrumental estudia la diferencia que existe entre el artefacto, instrumento y los procesos que desenvuelven la transformación progresiva del artefacto en instrumento, transformación que denominó como proceso de Génesis Instrumental.

En cuanto a la Génesis Instrumental, esta consta de dos dimensiones: La instrumentalización y la instrumentación. Trouche (2004), a partir de los estudios de Rabardel (1995), representa la Génesis Instrumental y sus dimensiones como muestra en la figura 1.



Figura 1. Proceso de la Génesis Instrumental. Adaptado de Trouche (2004)

El proceso de instrumentalización está dirigido hacia el artefacto: selección, agrupación, producción e institución de funciones, usos desviados, atribuciones de propiedades, transformaciones del artefacto, de su estructura, de su funcionamiento, etc.

[...] el proceso de Instrumentación está relacionados con el sujeto: con la emergencia y evolución de los esquemas sociales de utilización y de acción instrumentada: su constitución, su evolución por acomodación, coordinación y asimilación recíproca, la asimilación de artefactos nuevos a los esquemas ya constituidos, etc. (Rabardel, 1995, p. 215).

En ese sentido, Bellemain y Trouche (2016) sostienen que estas dos dimensiones de la Génesis Instrumental no son independientes una de la otra, sino que son entrelazadas. Pero, para distinguirlos en el análisis, se puede focalizar por un lado en el estudiante (¿En qué medida la integración de un nuevo artefacto modifica la forma de su actividad?), y por otro lado, en el artefacto (¿En qué medida este aporta al vestigio de la actividad del estudiante, de su poder creativo?).

Rabardel (1995), a partir de esta noción de esquema de Vergnaud (1996), define los esquemas de utilización como el conjunto estructurado de las características generalizables de la acción que permiten repetir la misma acción o aplicarlas en nuevos contextos. Estos esquemas pueden ser clasificados en esquemas de uso (dirigidas a tareas secundarias), esquemas de acción instrumentada (dirigidas a la tarea principal o primaria), y esquemas de acción colectiva instrumentada (cuando el colectivo comparte el mismo instrumento o trabaja con la misma clase de instrumento, buscando alcanzar una meta en común). En nuestro estudio nos centraremos en los esquemas de uso y de acción instrumentada.

Metodología y experimentación

Nuestra metodología es de corte cualitativo. En ese sentido, Denzin y Lincoln (1994) sostienen que la metodología cualitativa es multimetódica, naturalista e interpretativa, es decir, que las investigadoras e investigadores cualitativos indagan en situaciones naturales, intentado dar

sentido o interpretar los fenómenos en los términos del significado que las personas les otorgan. Asimismo, los investigadores cualitativos tienen más interés por el proceso que por los resultados o productos.

Nuestra investigación tuvo como método al Estudio de Caso. Según Stake (1995), el estudio de caso es el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, llevado a entender su actividad dentro de importantes circunstancias. Según Nisbett y Watts (1978), el estudio de caso tiene tres fases: la fase exploratoria o definición de los focos de estudio, la fase de colecta de datos o de delimitación del estudio y, finalmente, la fase de análisis de los datos.

Respecto a la fase exploratoria, en nuestra investigación se trabajó con un grupo de ocho estudiantes de 15 años de edad en un aula normal; nuestros sujetos de investigación desarrollaron cinco actividades haciendo uso de sus teléfonos móviles, sin embargo, para el análisis de este escrito, hemos usado los procedimientos de uno de los estudiantes al que llamaremos Alonso, debido a la ausencia de conocimientos acerca de las características gráficas de la función cuadrática y cómo estas cambian al variar los parámetros de su regla de correspondencia, o el desconocimiento del uso de dicha función en la resolución de problemas de modelación, es decir, dicho objeto matemático era un artefacto para él dado que al momento de la experimentación no había generado esquemas de utilización sobre dicha función.

En relación a la fase de colecta de datos, esta se dio en tres encuentros donde se desarrollaron todas las actividades, algunas de ellas con el uso del GeoGebra para teléfonos móviles, y otras con applets en GeoGebra enlazados mediante códigos QR. El registro de los procesos fue colocado en una ficha de trabajo que contenía a las cinco actividades propuestas.

Para la fase del análisis de los resultados, nos centramos en las acciones del estudiante que nos dan indicios del desarrollo de los posibles esquemas de uso y esquemas de acción instrumentada al resolver las actividades.

A continuación, en la tabla 1, presentamos las actividades propuestas para el estudio del artefacto simbólico función cuadrática, considerando su representación algebraica de la forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$. Así como los objetivos de cada una de ellas.

Tabla 1

Actividades propuestas y objetivos.

Actividad	Objetivo(s)
1	Identificar la relación del parámetro "a" con la concavidad de la función.
2	Identificar el desplazamiento vertical de la función, según los valores de k.
3	Identificar el desplazamiento horizontal de la función, según los valores de h.
4	Identificar, según su representación gráfica, los desplazamientos vertical y horizontal, y el vértice de la función. Identificar, según su concavidad, el valor máximo o mínimo de la función.
5	Resolver problemas de aplicación de funciones cuadrática en situaciones extramatemáticas

Fuente: Elaboración propia.

En este escrito consideramos las acciones que realiza el estudiante al que denominamos Alonso y presentamos el análisis de la actividad 4, ya que engloba los procedimientos de las actividades 1, 2 y 3, en donde a partir de las acciones y el registro en su ficha de trabajo, nos da indicios que el estudiante Alonso desarrolló esquemas de acción instrumentadas (caracterización de la representación gráfica de la función cuadrática a partir de los parámetros a , h y k). Presentamos también el análisis de la actividad 5.

Actividad 4

La actividad consta de los incisos a, b, c, d y e. Para dar respuesta a la actividad 4, el estudiante debe movilizar los esquemas de acción instrumentada desarrolladas en las actividades 1, 2 y 3 (desplazamiento vertical, horizontal y concavidad).

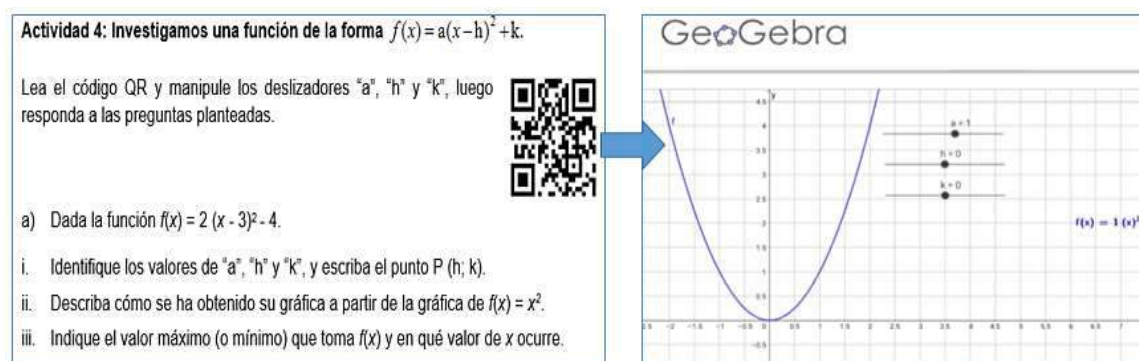


Figura 2. Actividad 4, inciso a). A la derecha la imagen de la lectura del código QR

En la figura 3, se muestra el desarrollo de la actividad 4a realizado por el estudiante Alonso.

i. $a = 2$; $h = 3$; $k = -4$

ii. Con $a = 2$ la función se hace más angosta, las ramas de la parábola se acercan al eje Y, luego con $h = 3$ la gráfica se desplaza 3 unidades a la derecha porque "h" es positiva, finalmente la gráfica baja 4 unidades porque "k" es negativa.

iii. El valor mínimo que toma f es -4, y ocurre en $x = 3$.

Figura 3. Desarrollo de la actividad 4 a) por el estudiante Alonso.

Para la respuesta a la actividad 4 a), el estudiante Alonso en i) identifica que $a = 2$, $h = 3$ y $k = -4$ y sustenta su respuesta en ii) usando los esquemas de acción instrumentada de desplazamiento horizontal hacia la derecha y desplazamiento vertical hacia abajo de la función dada. Asimismo, reconoce que el valor mínimo de la función es cuando $x = 3$.

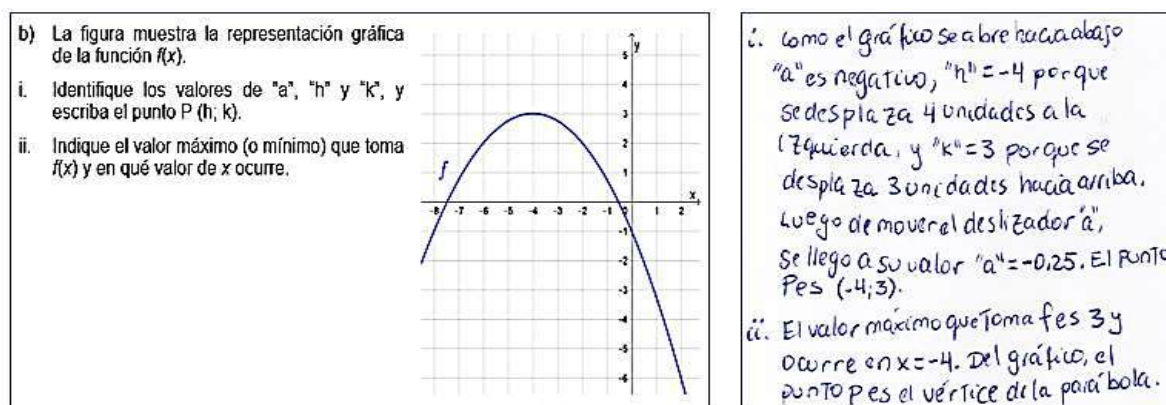


Figura 4. Actividad 4, inciso b. Al lado derecho, desarrollo del estudiante Alonso.

En el lado derecho de la figura 4, se muestra el desarrollo de la actividad 4 b) del estudiante Alonso. En i) el estudiante usa los esquemas de acción instrumentada (esquemas de utilización dirigidos a la tarea primaria) de desplazamiento horizontal hacia la izquierda y desplazamiento vertical hacia arriba de la función dada, generados a partir de los esquemas de utilización adquiridos en las actividades 2 y 3, relacionados con las transformaciones gráficas de traslaciones. En ii) el estudiante, mediante su esquema de uso imagen de una función, esquema adquirido al definir variable dependiente en una clase previa de introducción a las funciones, identifica que el valor máximo ocurre cuando $x = -4$. Asimismo, utiliza el esquema de uso del vértice de la representación gráfica de una función cuadrática.

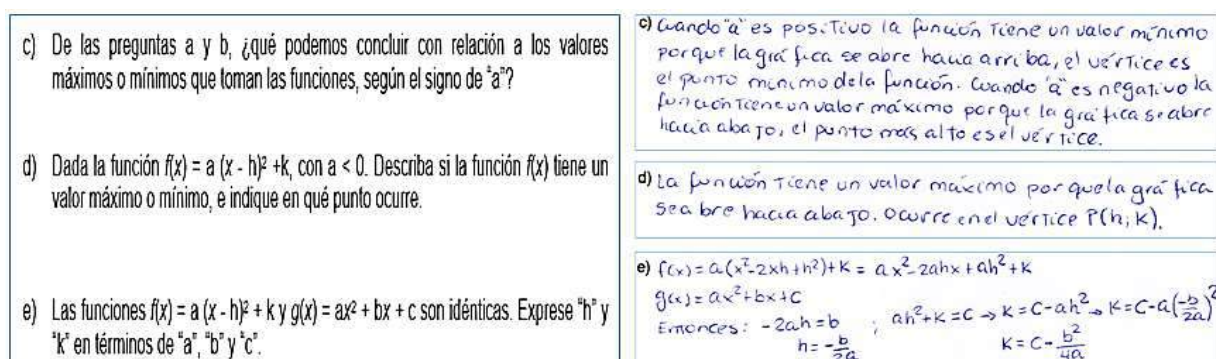


Figura 5. Actividad 4, incisos c, d y e. Al lado derecho, desarrollo del estudiante Alonso.

En la actividad 4 c) de la figura 5, el estudiante Alonso, por sus esquemas ya preexistente sobre concavidad de la representación gráfica de la función cuadrática, identifica el vértice de la función y desarrolla los esquemas de acción instrumentada, cuando $a < 0$, la concavidad es hacia abajo y existe un valor máximo en la función cuadrática, y que cuando $a > 0$, la concavidad es hacia arriba y existe un valor mínimo en la función cuadrática. En la actividad 4 d), el estudiante reconoce que el valor máximo ocurre en el vértice, y en la actividad 4 e), el estudiante Alonso logra expresar los valores de h y k, en términos de "a", "b" y "c", para determinar el vértice.

Actividad 5

Esta actividad consistía en tres casos, a continuación, solo presentamos el primero de ellos.

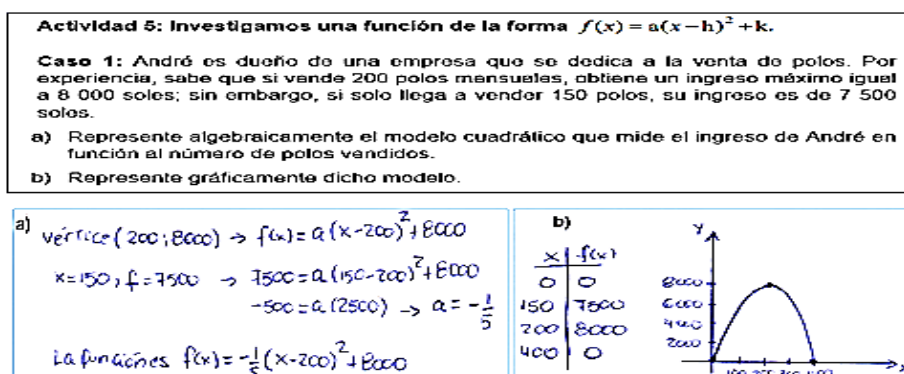


Figura 6. Solución del estudiante Alonso en la actividad 5, caso 1.

En la figura 6, el estudiante Alonso, haciendo uso de sus esquemas de uso de vértice e imagen de una función cuadrática, logra determinar la representación algebraica del modelo matemático de la situación planteada. Luego, en el inciso b), consigue representarla gráficamente.

De estas dos actividades, 4 y 5, se infiere que el estudiante Alonso ha podido generar esquemas de acción instrumentada como el desplazamiento horizontal y vertical de una función cuadrática a partir de sus representaciones gráficas y algebraicas. También ha generado el esquema de acción instrumentada "Si la concavidad es hacia arriba, la función tiene un valor mínimo y este se encuentra en su vértice" o el de "Si la concavidad es hacia abajo, la función tiene un valor máximo y también se encuentra en su vértice". Asimismo, movilizó esquemas de uso como la imagen de una función, dominio de la función, pues en la actividad 5 b) reconoció que la función no puede tomar valores menores que cero.

Consideraciones finales

El objetivo de nuestra investigación fue analizar la instrumentación del artefacto simbólico función cuadrática, y nos centramos en una de las dimensiones de la Génesis Instrumental (instrumentación), y por medio de las acciones de los estudiantes, pudimos tener indicios de los posibles esquemas de uso y acción instrumentada cuando interactúan con el GeoGebra al resolver cada una de las actividades propuestas. El análisis se hizo a partir del desarrollo de cinco actividades: las tres primeras orientadas a que el estudiante relacione cada parámetro de su regla de correspondencia, con una transformación gráfica como la concavidad de la curva a partir del parámetro "a" y las traslaciones horizontales y verticales a partir de los parámetros "h" y "k" respectivamente, generando esquemas de utilización de dichos parámetros en las representaciones de la función cuadrática en los registros algebraico y gráfico, tales como si "a" es positivo la función se abre hacia arriba, o si "h" es negativo el desplazamiento es hacia la izquierda, o si "k" es positivo, el desplazamiento es hacia arriba; y las dos últimas actividades estuvieron orientadas al empleo de estos esquemas para caracterizar a la función cuadrática, tanto en un contexto intramatemático como extramatemático, generando esquemas de acción instrumentada como reconocer valores máximos o mínimos de la función a partir de su concavidad, o de modelar una función cuadrática a partir de sus parámetros, entre otros.

Como resultado de las acciones del estudiante Alonso, inferimos que él logró instrumentar el artefacto simbólico función cuadrática, ya que nos dio indicios de los esquemas de uso y acción

instrumentada de dicho objeto matemático, lo cual nos permite decir que dicho artefacto pasó a hacer un instrumento para él. El diseño de applets en GeoGebra facilitó la generación de esquemas en los estudiantes a fin de caracterizar a la función cuadrática, es decir, se utilizó la tecnología como acompañamiento en el desarrollo de las actividades, mas no como artefacto de estudio.

Se pudo evidenciar que el GeoGebra para teléfonos móviles es un recurso que permite a los estudiantes inferir conjeturas y verificarlas, sin necesidad de salir del aula o requerir de un laboratorio computarizado. Todo ello favoreció en la instrumentación del artefacto simbólico función cuadrática.

Referencias

- Bellemain, F. B., & Trouche, L. (2016). Comprender o trabalho do professor com os recursos de seu ensino, um questionamento didático e informático. *I Simpósio Latino-Americano de Didática da Matemática*, Nov 2016. Bonito, Brasil. Recuperado de: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01560233>
- Denzin, N., & Lincoln, Y. (1994). Introduction entering the field of qualitative research, en Denzin, N. y Lincoln, Y (eds). *Handbook of qualitative research*. Thousand Oaks, California.
- García-Cuéllar, D., y Martínez-Miraval, M. (2018). Estudio del proceso de Génesis *Instrumental* del artefacto simbólico función exponencial. *Revista Transformación*, 14(2), 252-261. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/324515608_ESTUDIO_DEL_PROCESO_DE_GENESIS_INSTRUMENTAL_DEL_ARTEFACTO_SIMBOLICO_FUNCION_EXPONENCIAL/related
- Gómez, E.; Hernández, H., y Chaucanés, A. (2015). Dificultades en el Aprendizaje y el Trabajo Inicial con Funciones en Estudiantes de Educación Media. *Scientia Et Technica*, 20 (3), 278-285. Recuperado de: <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/5344403.pdf>
- Montiel, G. y Buendía, G. (2013). Desarrollo del Pensamiento Funcional-Trigonométrico. En M. Ferrari, G. Martínez y G. Buendía (Coords.), *Resignificación de funciones para profesores de matemáticas*, 169-205. México: Ediciones Díaz de Santos.
- Nisbett, J., & Watt, J. (1978). *Case Study*. Redguide 26: Guides in Educational Research. University of Nottingham School of Education.
- Rabardel, P. (1995). *Les Hommes et les Technologies : une approche cognitive des instruments contemporains*. Université Paris. Armand Colin. Recuperado de: <http://ergoserv.psy.univ-paris8.fr/Site/>
- Rabardel, P. (2011). *Los hombres y las tecnologías: Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos*. (Trad. por M. Acosta) Colombia: Universidad Industrial de Santander.
- Salazar J.V.F. (2018) Semiotic Representations: A Study of Dynamic Figural Register. In: Presmeg N., Radford L., Roth WM., Kadunz G. (eds) Signs of Signification. ICME-13 Monographs. Springer, Cham.
- Stake, R. (1995). *The art of case study research*. Thousand Oaks, CA: Sage.

- Tabach, M., & Nachlieli, T. (2015). Classroom engagement towards using definitions for developing mathematical objects: the case of function. *Educational Studies in Mathematics* (90), 163-187. Recuperado de <https://doi.org/10.1007/s10649-015-9624-0>
- Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized *learning* environments: guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 9: 281-307.
- Vergnaud, G. (1996). A teoria dos campos conceptuais. En Jean Brun (org), *Didáctica das matemáticas*. (pp. 155-189). Lisboa: Horizontes pedagógicos.
- Viirman, O. (2014). *The function concept and university mathematics teaching*. Dissertation. Karlstad, Suecia: Karlstad University, Faculty of Health, Science and Technology. Department of Mathematics and Computer Science. Recuperado de <http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:693890/fulltext01.pdf>

ENFOQUE FREQUENTISTA DE PROBABILIDADES - UM ESTUDO À LUZ DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Cileda de Queiroz e Silva Coutinho*

Auriluci de Carvalho Figueiredo**

cileda@pucsp.br, aurilucy@uol.com.br

PUC-SP, Brasil*

UNIMES, Brasil*

Resumen

O presente texto tem por objetivo discutir os tipos de apreensão mobilizados por alunos de um curso de Licenciatura em Matemática quando observam um gráfico de linha para estimar a probabilidade de um evento a partir da estabilização das frequências relativas acumuladas desse evento. Tais frequências são obtidas a partir da simulação computacional do jogo Franc-carreau, construída com uso de um applet que tem como suporte o software GeoGebra. A pesquisa relatada está em andamento, utiliza o método experimental e a teoria no qual nos embasamos é a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Os resultados observados até o momento indicam que os alunos utilizam prioritariamente a apreensão perceptiva do gráfico para estimarem o valor procurado da probabilidade, sendo que esperávamos que utilizassem também a apreensão discursiva.

Palabras clave: : probabilidade, enfoque frequentista, registros de representação, simulação.

Introdução

Este texto discute aspectos da apreensão do gráfico que ilustra a estabilização da série constituída pelas frequências relativas acumuladas obtidas quando simulamos uma experiência aleatória muitas vezes, com o objetivo de estimar a probabilidade de um evento resultante dessa experiência.

Para atingir a esse objetivo utilizaremos uma metodologia de pesquisa quase experimental, nos termos de Fiorentini e Lorenzato (2009): é aquele em que a variável independente (estratégia desenvolvida pelo aluno) é manipulada pelo pesquisador, operando com grupos de sujeitos escolhidos sem o seu controle. (p. 105). Por meio dele buscaremos elementos que possam nos conduzir à resposta para a seguinte questão “em que medida a apreensão perceptiva e a apreensão discursiva de um gráfico de linhas que represente a evolução dos valores obtidos por meio da simulação de uma experiência aleatória, favorece a construção de elementos do pensamento probabilístico?” Discutiremos as apreensões nos termos estudados por Vieira (2014), sendo os dados utilizados para a construção do gráfico obtidos por meio de simulação computacional do jogo do *Franc-carreau*, construída com o software GeoGebra, que apresentaremos adiante nesse texto.

O jogo a ser utilizado será o do *Franc-carreau* (Badizé, Jacques, Petitpas e Pichard, 1996), proposto pelo matemático e naturalista francês George Louis Leclerc (1707 – 1788), Conde de Buffon, que consiste no lançamento de uma moeda sobre um piso de azulejos de forma quadrada. A posição *Franc-Carreau*, ocorre quando a moeda se imobiliza completamente dentro de um único azulejo.

O papel do gráfico é fundamental uma vez que a série obtida pela simulação é empírica, ou seja, não possui expressão algébrica a partir da qual possamos determinar o valor do limite $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} Fr_n(A)$. A resolução do problema da estimação do valor dessa probabilidade passa seja pela observação dos valores numéricos da série de frequências, em uma planilha eletrônica, seja pela observação do gráfico de linha. Discutiremos primeiramente os obstáculos didáticos advindos da utilização da planilha eletrônica.

A simples observação da série obtida numericamente (não discutiremos a forma de obtenção desses valores) já se constitui em um obstáculo, que é a manipulação de número decimais: quantas casas decimais devem ser consideradas para que possamos decidir pela estabilização da série? Com as oscilações normais de uma série empírica, quando podemos considerar parar a simulação para estimar o valor da probabilidade procurada? Numericamente, tais oscilações tornam-se mais evidentes para um iniciante às estimações probabilísticas, que é o caso dos alunos do ensino médio.

Consideremos também a passagem da simulação em registro figural do jogo Franc-carreau, que é o contexto no qual estamos trabalhando, para o registro numérico em uma planilha eletrônica: os comandos na planilha devem ser transparentes para os alunos. Ainda que o professor os forneça, os alunos precisam compreender o que representa cada coluna ali resultante, de forma a saber que os valores resultantes da última coluna observada são os que devem ser considerados para a observação da estabilização das frequências relativas acumuladas e, conseqüentemente, a estimação da probabilidade procurada. Retornamos nesse ponto ao parágrafo anterior.

Coutinho (2001) indica em seus resultados a importância de se confrontar o valor obtido no cálculo a priori da probabilidade de um evento A, oriundo de uma experiência aleatória, com o valor estimado dessa probabilidade, estimação essa determinada pelo enfoque frequentista e, portanto, pela simulação (nesse nível de escolaridade – ensino médio). Buscamos, assim, discutir os aspectos didáticos da simulação, particularmente a utilização do gráfico para observação da estabilização das frequências relativas acumuladas. O simulador aqui utilizado é uma construção feita com o software GeoGebra e nossa discussão será feita à luz das apreensões figurais propostas por Duval (1994, 2003, 2012) e adaptadas para gráficos estatísticos por Vieira (2014).

Teoria dos Registros de Representação Semiótica

Utilizaremos os Registros de Representação Semiótica (Duval, 1994, 2003, 2012) para analisar a articulação de seu uso na representação e manipulação dos objetos probabilísticos que são tratados por simulação computacional e sua representação gráfica. Embora Duval tenha proposto sua Teoria visando principalmente a Geometria e a Álgebra buscaremos, em nesse artigo estabelecer um paralelo para a representação gráfica dos conceitos probabilísticos.

Para Duval (2003), representações semióticas são produções constituídas pelo uso de símbolos pertencendo a um sistema de representação que tem condições próprias de significado e de funcionamento. Um registro de representação semiótica é um sistema de signos que tem por objetivo não somente a comunicação, mas também o tratamento da informação e a objetivação. Defende que “a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar ao todo o momento de registro de representação” (Duval, 2003, p.14). Considera que um dos principais objetos do ensino da matemática é contribuir para o desenvolvimento geral das capacidades de raciocínio, de análise e de visualização dos alunos. Defende também que a atividade cognitiva requerida pela matemática envolve duas características fundamentais: a importância primordial das representações semióticas e pela grandeza de representações semióticas utilizadas em matemática como sistemas de numeração: figuras geométricas, escritas algébricas formas, representações gráficas e tabulares e em língua natural.

Assim como os objetivos matemáticos, os objetos probabilísticos que envolvem representações gráfica e figural não são facilmente acessíveis ou perceptíveis e o acesso a esses objetos devem passar pela mobilização de registros de representações semióticas.

A representação figural é considerada de grande importância para o estudo da matemática, pois diante de uma atividade matemática, a figura pode mostrar mais facilmente algumas possíveis idéias para sua resolução, sendo mais acessível ao aluno do que outro tipo de representação. Duval (1994, p.123) afirma que há várias maneiras de apreender uma figura em um contexto geométrico, destacando quatro tipos de diferentes apreensões: a apreensão perceptiva, a apreensão discursiva, a apreensão sequencial e a apreensão operatória. Embora esse autor tenha desenvolvido estes estudos em um contexto de Geometria, acreditamos que a representação figural é muito importante na compreensão de conceitos probabilísticos que envolvem a probabilidade frequentista e a sua representação gráfica, e buscaremos compreender as diferentes apreensões no conteúdo de atividades que envolvem simultaneamente simulação computacional, um conjunto de dados obtidos por meio dessa simulação e sua representação gráfica.

Procedimentos metodológicos

A metodologia quase experimental nos conduziu ao levantamento de algumas constatações diante de uma oficina aplicada a alunos da Licenciatura em Matemática. Tal oficina ocorreu durante a semana de Tecnologia que acontece nas Instituições de Ensino Superior (IES) no Brasil. Os sujeitos dessa pesquisa eram todos licenciandos de Matemática: cinco deles cursam o quarto semestre do curso e os outros quatro o segundo semestre. A oficina ocorreu em um laboratório de informática, no qual cada aluno usava um único computador, mas o comportamento era o de grupo colaborativo: trabalhavam em colaboração mútua durante o desenvolvimento da atividade.

A proposta dessa oficina era trabalhar no contexto da articulação entre dois enfoques: o Clássico e o Frequentista utilizando a simulação computacional com o jogo do Franc-carreau, no contexto da articulação entre dois enfoques.

Reflexões teóricas sobre o *Franc Carreau* e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica

A apreensão perceptiva de uma figura permite identificar ou reconhecer imediatamente uma forma ou um objeto matemático (em geometria), Segundo Almouloud (2003, p.2017), apreensão perceptiva é a interpretação das formas da figura. Vieira (2014) estabelece como exemplo de apreensão perceptiva o reconhecimento de um triângulo e faz a hipótese de que no caso de gráficos estatísticos, a apreensão perceptiva é bem mais complexa uma vez que envolve não apenas a leitura dos eixos como também o reconhecimento das variáveis estatísticas em jogo. No nosso caso, por se tratar de um gráfico construído com valores de uma série de frequências com o objetivo de observar sua estabilização, ou melhor, o valor para o qual essa série converge, podemos entender que também se trata de um gráfico estatístico, embora estejamos no campo da probabilidade frequentista.

No que se refere à apreensão discursiva, são explicitadas propriedades da figura, além daquelas já indicadas na legenda ou nas hipóteses. No nosso caso, tratamos de propriedades de convergência em torno da reta $y = k$, seja essa explícita na figura ou não, conforme apresentaremos mais adiante no texto. Para Duval (1994), tais explicitações são de natureza epistemológica e visam a demonstração, ou seja, para nós, a demonstração da convergência, que se dará pela confrontação entre o valor da probabilidade calculada a priori com o valor estimado pela observação da convergência. Já Almouloud (2003) afirma que a apreensão discursiva é a interpretação dos elementos da figura, considerando a rede semântica das propriedades do objeto, o que também satisfaz à interpretação de um gráfico quando se quer observar a estabilização das frequências ali representadas.

Dessa forma, podemos fazer a hipótese que tanto a apreensão perceptiva quanto a discursiva têm papel importante na construção do conceito de probabilidade quando utilizamos o enfoque frequentista por meio da observação da estabilização das frequências relativas acumuladas, conforme Figura 1:

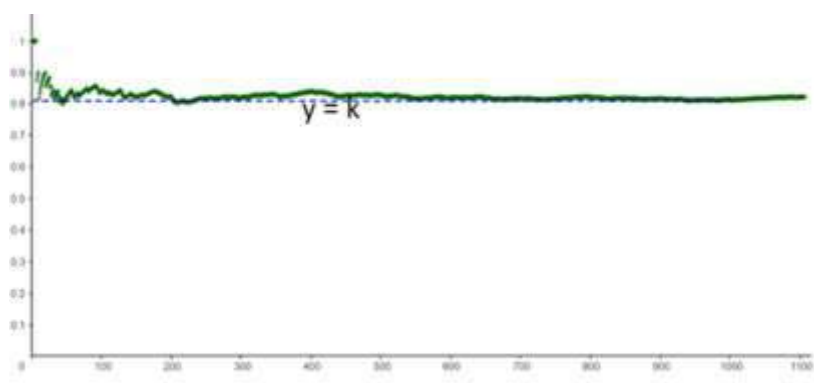


Figura 14. Gráfico com a convergência dos pontos para a reta $y = k$

Fonte: as autoras

A simulação do jogo do *Franc-carreau*

O simulador apresentado fornece dois deslizadores que permitem escolher o número de quadrados por linha representando a pavimentação do piso azulejado sobre o qual se lançará a moeda, assim como escolher o raio do círculo que representa essa moeda. Na outra parte da tela encontra-se o sistema de eixos que apresentará o gráfico das frequências relativas conforme a simulação for ocorrendo, sempre com passo 1, ou seja, resultados tomados 1 a 1, ainda que se realizem 100 simulações simultâneas, o que garante a constituição de uma série de frequências $\sum_{i=1}^{\infty} Fr_i$ e sabendo que $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} Fr_n$. O fato de que Fr conduz a uma série empírica não fornece uma expressão algébrica para a determinação do limite procurado, conduzindo à necessidade do recurso à simulação computacional para a estimação desse valor. Desse fato vem nossa discussão no presente texto.

Podemos obter uma figura (Figura 2) na qual o lado do quadrado maior ($\ell=20$) e o raio do círculo ($r = 1$), e com isso realizamos tanto a simulação quanto a determinação a priori do valor da probabilidade da posição Franc-carreau após o lançamento da moeda sobre o solo ladrilhado: $P(FC) = \frac{(20-2.1)^2}{20^2}$, ou seja, $P(FC) = 0,81$. Dessa forma, a série de frequências a ser obtida pela simulação deve se estabilizar em torno desse valor, e tal observação, como preconiza Coutinho (2001), é fundamental para a construção do conceito de probabilidade pelo aluno do ensino médio.

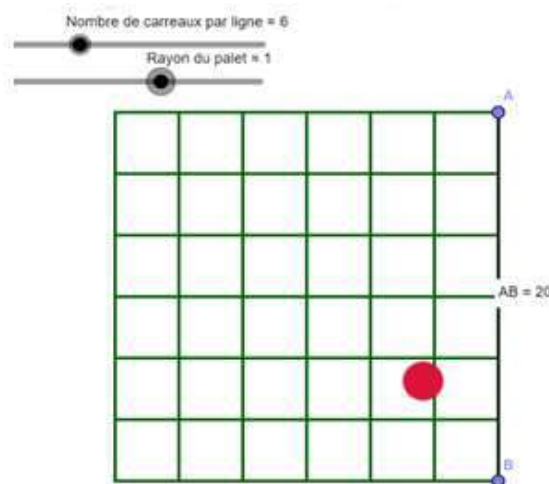


Figura 2. Ladrilhos e moeda para o jogo do Franc-carreau

Fonte: as autoras

Vamos agora à simulação para que possamos estudar as apreensões possíveis do gráfico obtido e assim compreender seus efeitos na construção do pensamento probabilístico.



Figura 3. Gráfico com a convergência dos pontos para a reta implícita $y = k$

Fonte: as autoras

Observemos que chegamos a 507 repetições da experiência aleatória nas mesmas condições (condições para reprodução de uma experiência aleatória em uma simulação) e o gráfico não parece mostrar uma estabilização em torno de um determinado valor como se espera se o analisamos a partir de uma apreensão perceptiva.

Continuemos com as simulações. Após 1100 simulações a apreensão perceptiva já permite uma estimativa a partir da observação de que a linha que representa os resultados parece bastante concentrada ao redor de um número, conforme a figura 4.

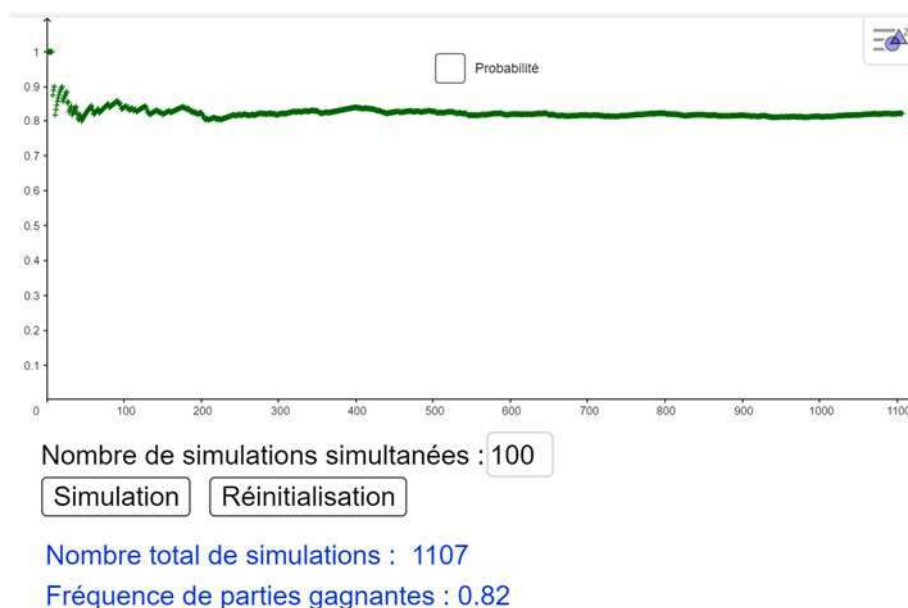


Figura 4. Gráfico com a convergência dos pontos para a reta implícita $y = k$

Fonte: as autoras

Tal número pode ser comparado com o traço obtido na simulação simplesmente clicando no botão "*probabilité*", que nos fornece o valor do cálculo a priori da probabilidade da posição *Franc-carreau* e o representa no gráfico por uma reta pontilhada paralela ao eixo Ox, tal como na figura 1, na qual $k = 0,81$.

Reflexões sobre o jogo do *Franc-Carreau* na perspectiva dos alunos

Todos os alunos da oficina não conheciam o jogo do *Franc-carreau*, mas logo se familiarizaram, e construíram planilhas contendo os resultados da simulação realizada com o *applet* fornecido e construído com o software GeoGebra. A princípio trabalharam com simulações que se constituíam em 20 lançamentos consecutivos, computando as frequências acumuladas e as ocorrências do resultado *Franc-carreau*. Em seguida, fazem o mesmo com repetições de 50 lançamentos consecutivos.

Destacamos que a construção da série de frequências deveria ser computada com lançamentos unitários, e que a escolha do tamanho das séries foi uma escolha didática devido ao tempo cronológico da duração da oficina. Após totalizar 1000 repetições dos lançamentos, os alunos discutem entre eles sobre o que ocorria com as tabelas elaboradas com cada um deles, e se indagavam sobre quando deviam parar a simulação. Até então estes alunos supunham que deveriam chegar a algum número, mas parece que somente a tabela não respondia algo para eles.

Quando passaram para a etapa da construção do gráfico tomando como referência as frequências acumuladas e o respectivo número de posições *Franc-carreau*, estes alunos começaram a discutir também entre eles que existe uma tendência em torno de uma linha do tipo $y = k$ e apontam sobre a proximidade da probabilidade procurada, que nos indica que a apreensão perceptiva no sentido de Duval (2003) favoreceu a estes alunos a compreensão do enfoque frequentista na convergência da probabilidade. Não observamos a presença de diálogos com elementos de apreensão discursiva.

Algumas considerações

Destacamos que esta pesquisa ainda está em desenvolvimento e que devido a isto estes resultados são ainda parciais, e o nosso objetivo é continuar as investigações de modo a aprofundar e responder à questão enunciada no início desse texto: “em que medida a apreensão perceptiva e a apreensão discursiva de um gráfico de linhas que represente a evolução dos valores obtidos por meio da simulação de uma experiência aleatória, favorece a construção de elementos do pensamento probabilístico?”

A atividade desenvolvida com nove alunos de um curso de Licenciatura em Matemática, em laboratório de informática e trabalho em grupo colaborativo, conduziu apenas à estratégias que mobilizaram a apreensão perceptiva do gráfico para a tomada de decisão pelo valor estimado da probabilidade procurada, qual seja, a da posição *Franc-carreau* da imobilização da moeda no piso ladrilhado. Foi realizada a interpretação da forma (gráfico de linha), leitura dos eixos (valor em torno do qual existe a convergência e número de simulações realizadas) e reconhecimento das variáveis, o que caracteriza esse tipo de apreensão.

Com suporte nas reflexões teóricas realizadas à luz da Teoria de Registros de Representação Semiótica, buscamos a compreensão de conceitos probabilísticos que envolvem o enfoque frequentista e a representação gráfica da série constituída pelas frequências relativas obtidas

por meio de simulações computacionais. Buscamos também compreender as diferentes apreensões no contexto de atividades que envolvem simultaneamente simulação computacional, um conjunto de dados obtidos por meio dessa simulação e sua representação gráfica, e aliamos a constatação da importância da apreensão por parte dos alunos quando estes começam a discutir que existe uma tendência em torno de uma reta do tipo $y = k$. Os alunos apontam para a convergência dos pontos para a probabilidade procurada, o que nos indica que a apreensão perceptiva no sentido de Duval (2003), o que favoreceu a sua compreensão.

Acreditamos que há necessidade de mais investigações sobre atividades que mobilizem simultaneamente, o enfoque frequentista de probabilidade, simulações e suas representações gráficas para que estabeleçam relações com as diferentes apreensões presentes na Teoria de Representação Semiótica. Particularmente, nossa pesquisa desenvolve atualmente atividades que permitam aos alunos mobilizar tanto a apreensão perceptiva como a discursiva na construção de estratégias para a resolução de problemas de estimação de probabilidades quando se usa o enfoque frequentista.

Referencias

- Almouloud, Saddo Ag. Registros de Representação Semiótica e Compreensão de Conceitos Geométricos. In: MACHADO, Sílvia Dias Alcântara (Org.). Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica. 3. ed. Campinas, SP: Papirus, 2007. p. 125-147.
- Badizé M., Jacques A., Petitpas M. & Pichard J.-F. (1996). Le jeu du Franc-carreau – une activité probabiliste au Collège. Rouen: IREM de Rouen.
- Duval, Raymond. (1994) Les différents fonctionnements possibles d'une figure une démarche géométrique. *Reperés*, n.17.121-138.
- Duval, Raymond. (2003) Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, Sílvia D. A. (Org.). Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003. p. 7-10.
- Duval, Raymond. (2012) Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. *Revemat*. R. Eletr. de Edu. Matem. eISSN 1981-1322. Florianópolis, v. 07, n. 2, p.266-297. Retirado em 15 de outubro de 2019 de: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266/23465>.
- Florentini, Dario; Lorenzato, Sergio. (2009). Investigação e Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos. 3ª edição. Revisada. Campinas. SP. Autores associados. ISBN: 978-85-7496-147-7
- Ventsel, H. (1962). Théorie des Probabilités (reimpressão em 1973). Moscou: Editora MIR.
- Vieira, M. (2008). *Análise Exploratória de Dados: uma abordagem com alunos do Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo. Retirado em 10 de Agosto de 2019 de <https://sapientia.pucsp.br/bitstream/handle/11347/1/Marcia%20Vieira.pdf>

FORMACIÓN DOCENTE EN GESTIÓN DE DATOS

Augusta Osorio Gonzales

Elizabeth Advíncula Clemente

arosorio@pucp.edu.pe, eadvincula@pucp.edu.pe

Instituto de Investigación sobre Enseñanza de la Matemáticas, IREM-PUCP, Perú

Resumen

La investigación es de carácter aplicado y busca diseñar, aplicar y perfeccionar talleres de capacitación profesional dirigidos a profesores del nivel primario, con el fin de fortalecer los conocimientos estadísticos y didácticos relacionados con la competencia Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre, según el Currículo Nacional de la Educación Básica (2016). El marco teórico de esta investigación es el Pensamiento Estadístico en la Investigación Empírica de Wild y Pfannkuch (1999) y de este tomamos como elemento principal el ciclo investigativo (PPDAC). Los talleres serán creados y aplicados por un grupo de profesores de la UGEL de Arequipa Sur, los cuales se encuentran en proceso de formación como capacitadores en la competencia antes mencionada y que vienen trabajando con el grupo de investigación en la enseñanza de la estadística y probabilidad del IREM-PUCP desde el año 2016.

Palabras clave: Estadística, formación de profesores, PPDAC

Introducción

El Currículo Nacional de la Educación Básica (2016) incluye cuatro competencias relacionadas con el área de Matemáticas, las cuales deben ser trabajadas en forma simultánea dentro de cada bimestre del año escolar. Hay que tener en cuenta que la descripción de los niveles del desarrollo de una competencia define los desempeños que todos los estudiantes deben alcanzar en cada ciclo de su trayectoria escolar. La competencia Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre, busca que los alumnos desarrollen los desempeños relacionados con los contenidos de la estadística y la probabilidad.

En Ruiz (2014), se ha establecido que en el Perú en promedio el 13% del tiempo destinado a las matemáticas es dedicado a la Estadística para el tercer grado de primaria y con una desviación del 6%. Este estudio se ha basado en 163 escuelas de zonas urbanas y rurales, y con él se puede determinar que el trabajo en aula de esta competencia es muy inferior al esperado. Por otro lado, en base a las actividades propuestas en los Cuadernos de Trabajo de Matemática del MINEDU (2017) del nivel primario, observamos que en promedio hay tres sesiones para gestión de datos y una sesión para probabilidad para cada grado. La consecuencia natural de esta

problemática es el nivel de conocimientos estadísticos con que pasa un alumno al nivel secundario, a donde llegará sin la base necesaria para continuar el desarrollo de la competencia.

Esta reflexión nos muestra solo una parte del problema creemos que también hay que considerar el poco interés de los profesores en estos temas o el poco dominio de los mismos en la enseñanza de estos. Sobre estos puntos se han realizado muchas investigaciones, entre ellas, Batanero (2009) muestra un análisis de diferentes investigaciones sobre la formación de profesores para el área de Estadística. Adicionalmente, debemos tener en cuenta que en la formación inicial de los docentes de primaria en Perú no se ofrece un curso de estadística y probabilidad.

El grupo de investigación sobre enseñanza de la estadística y la probabilidad del IREM-PUCP inicio sus labores en el 2012, iniciando una investigación sobre los logros de los estudiantes de los niveles primaria y secundaria en estos contenidos, Osorio y Advíncula (2015). A partir del 2014 venimos trabajando en el fortalecimiento de los profesores del nivel primario mediante talleres y en el 2016 se inició un programa de formación de capacitadores en la competencia. Actualmente, nuestra investigación está relacionada con este último programa, los profesores capacitados deben iniciar su proceso de difusión de conocimientos y hemos optado por la preparación y aplicación de talleres como punto de inicio de su trabajo.

Aspectos teóricos y metodológicos

En la creación de los talleres de fortalecimiento que fueron parte de nuestra investigación del 2015 consideramos que la propuesta del Pensamiento Estadístico en la investigación empírica de Wild y Pfannkuch (1999) era la más pertinente para nuestro trabajo relacionado con la Gestión de datos, dado que hace referencia a como un investigador actúa y piensa en el transcurso de una investigación empírica o cuantitativa. La dimensión 1 de esta teoría, el Ciclo de la Investigación Empírica (PPDAC), la adoptamos como la estructura necesaria para el desarrollo de una situación problemática para la gestión de datos pues nos permitía relacionar todos los indicadores de logro propuestos en el DCN (2015). De esta manera, pudimos mostrar a los profesores que era posible trabajar muchos de los indicadores de logro con una sola situación problemática de gestión de datos.

Para realizar la conexión entre las etapas del ciclo PPDAC y la propuesta de los estándares nacionales, utilizamos inicialmente la idea de preguntas clave que permitan entender que se trabaja en cada fase del ciclo. Ver Figura 1.

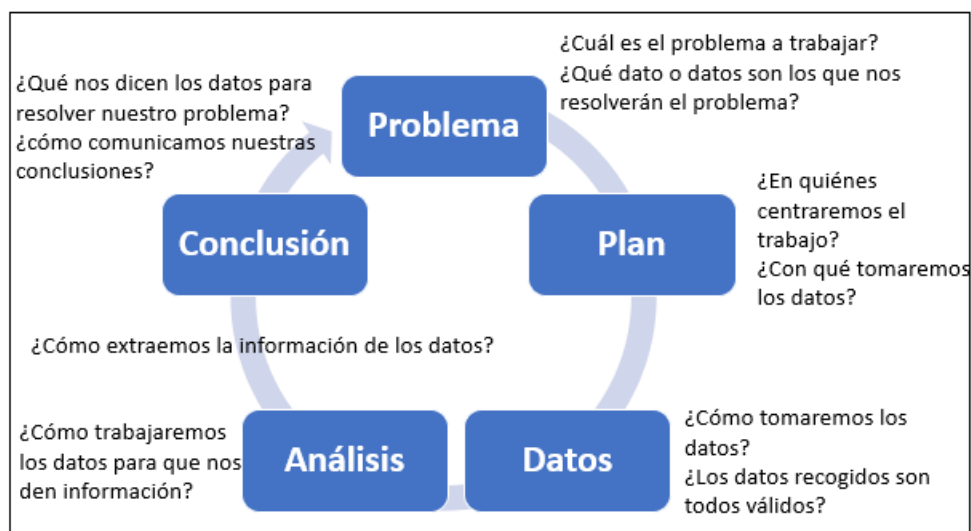


Figura 1. Ciclo PPDAC preguntas clave

Estas preguntas clave son preguntas en lenguaje natural que se relacionan con cada una de las fases del ciclo y posteriormente con los conceptos y procesos estadísticos que se trabajan en la competencia Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre. Ver figura 2.

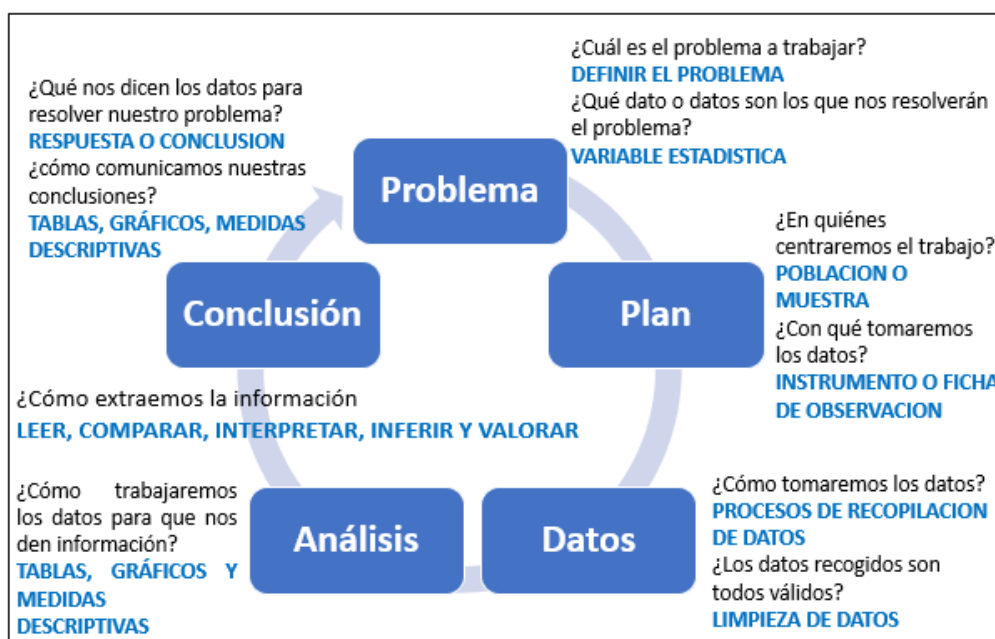


Figura 2. Ciclo PPDAC contenidos y procesos estadísticos

Posteriormente, ante la aparición del Currículo Nacional (2016), buscamos relacionar las etapas del ciclo PPDAC a las nuevas capacidades y desempeños propuestos en dicho documento.

De esta manera, podemos ver con claridad como una sola situación problemática de gestión de datos nos permite manejar por todas las capacidades de la competencia Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre. Ver fig. 3.

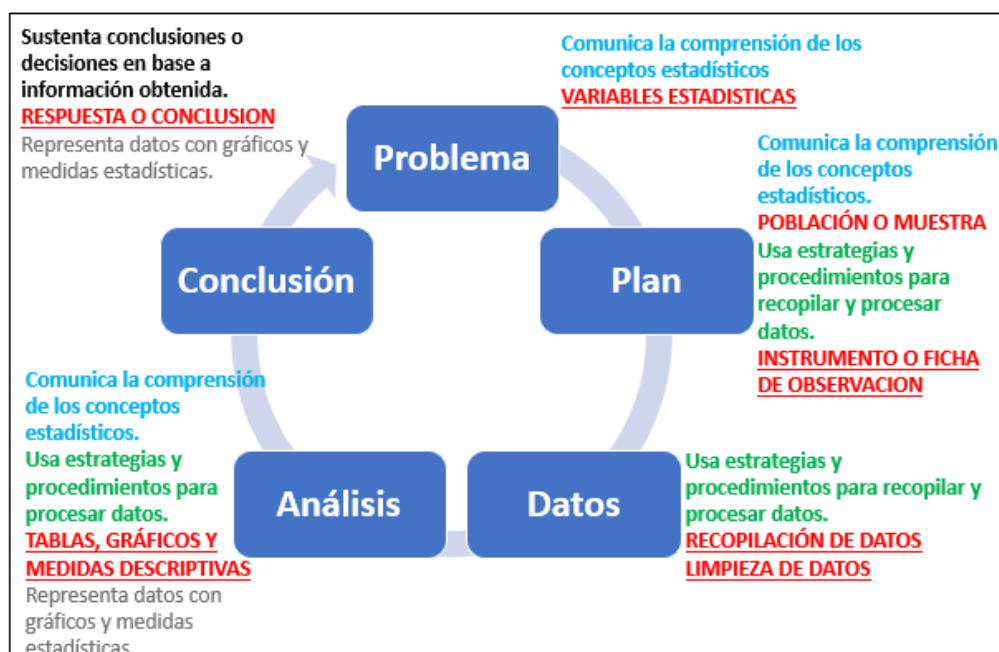


Figura 3. Ciclo PPDAC capacidades del Currículo Nacional (2016)

Una vez mostrada las ventajas del uso del ciclo PPDAC a los docentes, podemos iniciar el trabajo de utilizar el ciclo como una herramienta de análisis para situaciones problemáticas propuestas en sesiones de clase o en libros.

Lo primero a establecer con los profesores es, que no podemos hacer uso del ciclo si no se tiene una situación problema que requiera la recopilación de datos (etapa Problema) para poder transitar por el ciclo PPDAC y que este ciclo siempre debe culminar con la etapa Conclusión. Adicionalmente, se trabaja la idea que no basta tener un problema a resolver, sino que es necesario que este problema tenga un propósito específico así se le da significado al uso de la gestión de datos. Esto se tiene que ilustra con algunos ejemplos que muestre la aplicación de las etapas del ciclo PPDAC a una situación problema de gestión de datos propuesta.

El ciclo PPDAC también se trabaja como una herramienta para establecer el grado de estudios real al que está dirigida la situación problema de gestión de datos, dado que algunas veces el concepto o estrategia utilizada en la etapa Análisis no se ajusta a lo esperado para los desempeños del grado. De esta manera los profesores pueden ajustar la situación problema al grado que requieren.

Un segundo uso del ciclo PPDAC como herramienta de análisis es establecer los desempeños trabajados en la situación problema y a que etapa del ciclo corresponden, de esta manera pueden detectarse las etapas del ciclo que no son cubiertas durante el desarrollo de la situación problema. Lo ideal sería que siempre se toquen todas las etapas del ciclo mediante algún desempeño.

Todos lo expuesto es lo que se usará en el diseño de los talleres producto de la presente investigación. Para llevar a cabo este trabajo planificamos organizar el trabajo atendiendo a los objetivos específicos propuestos:

1. Planificar la estructura de los talleres tomando en cuenta aspectos epistemológicos, didácticos y curriculares en gestión de datos en la educación primaria básica.
2. Diseñar las actividades para cada uno de los talleres tomando en cuenta la planificación previamente realizada y las características propias de cada grupo de docentes en que se aplicaran.
3. Rediseñar los talleres a partir del análisis de los resultados recogidos durante la aplicación de las actividades propuestas para cada uno de ellos.

Estructura de los talleres

Los talleres que están en preparación están divididos en tres tipos: los dirigidos a revisar sesiones de clase ya aplicadas por los capacitadores, los dirigidos a revisar las actividades propuestas en los cuadernos de trabajo del nivel primario del MINEDU y los dirigidos a la creación de situaciones problema.

Cada taller consta de cinco partes y tiene una duración de dos horas, dado que es el único tiempo con el que se cuenta en las reuniones mensuales de las redes de profesores de primaria de la UGEL Arequipa Sur.

Las etapas a tener en cuenta en cada taller son las siguientes:

- Recojo de saberes previos, que permitirá recoger los conceptos estadísticos que conocen los docentes y la importancia de la enseñanza de la competencia Resuelve problemas en gestión de datos e incertidumbre.
- Presentación del propósito del taller y de los procesos didácticos que se trabajan en el área de matemáticas en el nivel primario.
- Presentación del ciclo PPDAC y las preguntas claves para sus etapas.
- Actividad que permita trabajar a los profesores participantes, en función al tipo de taller.
- Cierre con conclusiones sobre la importancia de la contextualización en función a la realidad inmediata del alumno.

Impactos previstos de la investigación

Algunos impactos que podemos prever con esta investigación son los siguientes:

- Al tener un grupo inicial de profesores formadores, éstos replicarán esta experiencia y permitirán la aplicación de los talleres de fortalecimiento en un mayor número de docentes del nivel primario.
- La posibilidad de poder replicar la experiencia de formación de profesores capacitadores en la competencia Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre para el nivel

secundario. Experiencia que se ha iniciado el presente año con un grupo de docentes fortaleza de la UGEL 7 de Lima Metropolitana, que han recibido hasta el momento cinco talleres sobre gestión datos.

- Compartir la experiencia de los talleres con las áreas de formación docente del nivel primario de las diferentes Facultades de Educación, con el fin de concretarse la existencia de cursos relacionados con este tópico durante la formación de docentes.

Referencias

Batanero, C. (2009). *Retos para la formación estadística de los profesores*. II Encontro de Probabilidade e Estatística na Scola. Universidade do Minho, Braga, Portugal.

Minedu (2017). *Matemática 1. Cuaderno de trabajo para primer grado de primaria*.

Minedu (2017). *Matemática 1. Cuaderno de trabajo para segundo grado de primaria*.

Minedu (2017). *Matemática 1. Cuaderno de trabajo para tercer grado de primaria*.

Minedu (2017). *Matemática 1. Cuaderno de trabajo para cuarto grado de primaria*.

Minedu (2017). *Matemática 1. Cuaderno de trabajo para quinto grado de primaria*.

Minedu (2017). *Matemática 1. Cuaderno de trabajo para sexto grado de primaria*.

Minedu (2016). *Currículo Nacional*.

Minedu (2015). *Diseño Curricular Nacional*.

Osorio, A. y Advincula, E. (2015). En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G.R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M.M. Gea y M.M. López (Eds.), *Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, 2 (pp. 381-387). Granada, 2015. Midiendo los logros de estudiantes de la Educación Básica Regular en Estadística y Probabilidad. En Segunda Jornadas Virtuales de Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria. (pp. 381-387) GRANADA: Grupo de Investigación en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria de la Sociedad Española.

Ruiz, N.(2015). La enseñanza de la Estadística en la Educación Primaria en América Latina. REICE. *Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación* [en línea], 13 (Enero-Marzo) : [Fecha de consulta: 12 de septiembre de 2018] Disponible en: <<http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=55133776006>> ISSN

Wild, C. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical Thinking in Empirical Enquiry. *International Statistical Review* (1999), 67, 3, 223-265.

CONCEPÇÕES SOBRE ESTATÍSTICA MOBILIZADAS POR ALUNOS E PROFESSORES DO ENSINO MÉDIO: UM ESTUDO DE CASO

Cassio Cristiano Giordano

ccgiordano@gmail.com

Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil

Resumen

Investigamos as concepções estatísticas mobilizadas por professores e alunos dos anos finais do Ensino Médio (16 a 19 anos de idade), antes e depois do desenvolvimento de projetos, buscando identificar possíveis mudanças nas mesmas, indicador de aprendizagem na Teoria das Concepções, nosso marco teórico. Esse estudo de caso foi organizado em três etapas: Análise Estatística Implicativa de questionários respondidos por 86 alunos, utilizando o software CHIC; análise diagnóstica (modelo CK4) de concepções a partir de gravações de atividades estatísticas realizadas em quatro grupos de alunos; análise de 50 entrevistas realizadas com alunos, professores e gestores, antes e depois da apresentação das pesquisas dos alunos, utilizando o software NVIVO. Identificamos refinamento nos conceitos estatísticos de medidas-resumo, na leitura e interpretação de gráficos e tabelas, bem como na compreensão da Estatística enquanto ciência autônoma e no reconhecimento de seus métodos de investigação.

Palabras clave: Educação Estatística, Teoria das Concepções, Projetos.

Introdução

Pesquisas brasileiras recentemente publicadas revelam que alunos, tanto da Educação Básica quanto do Ensino Superior, embora apresentem alguns conhecimentos sobre a Estatística, demonstram dificuldades em associar seus conceitos básicos aos seus problemas cotidianos. Contudo, ao participar ativamente do desenvolvimento de uma pesquisa estatística, tendem a mudar sua maneira de encarar essa ciência, como indicam os resultados observados por Megid (2002), Jacobini (2004), Biajone (2006), Campos (2007), Mendonça (2008), Conti (2009), Santana (2011), Costa (2012), Dangiό (2014), Albani (2015), Barberino (2016), Freitas (2016), Giordano (2016), Melo (2017), Cobello (2018), Votto (2018) e Oliveira (2019).

A compreensão da Estatística é fundamental para a formação acadêmica, para a vida profissional e, sobretudo, para o exercício pleno da cidadania, no século XXI. Nesse sentido, embasados em nossa revisão da literatura, vemos a abordagem por meio de projetos como elemento com amplo potencial para o desenvolvimento do letramento estatístico, na perspectiva de Gal (2019). Tal entendimento está em consonância com a recém homologada Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Brasil, 2018), documento normativo da Educação Básica brasileira.

Buscamos responder, nesta pesquisa, à questão: “Que concepções são mobilizadas por professores e alunos do Ensino Médio na gestão e desenvolvimento de um projeto estatístico utilizado como abordagem para os conceitos da Estatística”? Julgamos relevante observar a produção dos alunos que realizaram a pesquisa, bem como os professores que os auxiliaram como coorientadores, sobretudo aqueles que não lecionam matemática. Temos por objetivos diagnosticar as concepções estatísticas de professores (tanto na sala de aula quanto na condição de gestores escolares) e de alunos do Ensino Médio, no sentido proposto por Balacheff (2001, 2002), ao longo do desenvolvimento de projetos em Educação Estatística, considerando eventuais mudanças de concepção como indicadores de aprendizagem.

Referenciais teóricos e metodológicos

Realizamos um estudo comparativo entre as concepções mobilizadas por alunos e professores na resolução de problemas estatísticos, antes e depois de sua realização, quando o tema é abordado por meio de projetos, do planejamento e coleta de dados até a análise final e divulgação dos resultados da pesquisa. Optamos pela abordagem metodológica da pesquisa qualitativa, na concepção de Creswell (2010), mais especificamente um estudo de caso.

Na Educação Matemática, segundo Ponte (2006, p.3), essa opção metodológica vem sendo utilizada para “...investigar questões de aprendizagem dos alunos bem como conhecimento das práticas profissionais de professores”. Nossa pesquisa investiga ambos aspectos, pois trata tanto das concepções dos alunos quanto dos professores. Esse autor ainda acrescenta como objetivos do estudo de caso: “... programas de formação inicial e contínua de professores, projetos de inovação curricular, novos currículos, etc”.

Em nosso caso, vivemos um importante momento da História da Educação brasileira, com a implementação da BNCC e a consequente revisão de todos os currículos da Educação Básica em território nacional. Aqui, a entidade em questão é uma escola pública brasileira, situada na cidade de Santo André, no grande ABC, região metropolitana de São Paulo. O perfil de seus alunos e de seus professores, o material didático utilizado e o currículo comum nos permitem considerá-la uma unidade escolar representativa da rede pública paulista.

Yin (2015) afirma que no estudo de caso não se pergunta “o quê”, mas sim o “como” e o “porquê”. Para Ponte (2006), os estudos de caso buscam compreender o “como” e os “porquês” a partir de uma orientação teórica bem definida, que em nosso caso foi a Teoria das Concepções. Ele enfatiza a necessidade de, em um estudo de caso, definir com clareza os objetos de estudo. Em nosso caso, tal objeto é representado pelas concepções dos alunos e professores envolvidos sobre Estatística.

Nossos dados foram coletados de três maneiras, a saber.

Em primeiro lugar, todos os alunos dos anos finais de uma escola pública paulista, com idades de dezesesseis a dezenove anos, que responderam, em junho de 2018, a um questionário composto por vinte e nove questões sobre Probabilidade e Estatística. Descartando os questionários apenas parcialmente respondidos ou com respostas anuladas, ficamos com oitenta e seis questionários válidos.

Vale ressaltar que a proposta curricular paulista (SÃO PAULO, 2012, 2014) prevê, no Ensino Médio, o ensino de Estatística em apenas um bimestre, no segundo semestre do 3º e último ano, portanto, os alunos responderam essas questões antes de estudar o assunto em sua escola. Nosso objetivo era justamente avaliar seus conhecimentos estocásticos prévios.

Estes questionários estão sendo analisados com o auxílio do *software* CHIC (Classificação Hierárquica Implicativa e Coesitiva). Tal *software* permite extrair informações de um conjunto de dados, cruzando sujeitos e atributos, regras de associação entre variáveis, indicando o índice de qualidade de associação além de representar uma estruturação dessas variáveis, como afirmam Couturier e Gras (2005) e Gras (2013).

Prado (2002, p.14) considera a utilização deste software fundamental, por ser capaz de revelar elementos significativos sobre as reflexões tanto de professores quanto de alunos sobre as questões relacionadas à aprendizagem e a prática pedagógica. Segundo ela, o *software* CHIC "...propiciou identificar relações inesperadas, as quais desvelaram novas compreensões sobre o processo de aprendizagem".

Em segundo lugar, quatro grupos de alunos (dois trios e duas duplas), em novembro de 2018, após o desenvolvimento dos projetos, responderam três questões de Estatística bastante completas, em um período que tomou de uma a três sessões de 100 minutos, em três dias distintos de uma mesma semana. Tal produção, registrada por meio de produção escrita e áudio-gravações das interações entre os elementos dos grupos, está sendo analisada à luz da Teoria das Concepções.

Por fim, foram realizadas cinquenta entrevistas, sendo vinte e cinco antes e vinte e cinco depois do desenvolvimento e apresentação dos projetos de pesquisa dos alunos, para avaliar as possíveis mudanças de concepção de quatorze alunos, nove professores de diferentes disciplinas e dois gestores escolares. Tal material, registrado em áudio e vídeo, está sendo agora analisado por meio do software NVIVO. Segundo Lage (2011), este *software* representa uma boa opção como suporte para análise dos dados em pesquisas qualitativas, sobretudo em casos de grande volume de questionários, escassez de tempo e necessidade de cruzamentos entre resultados e atributos dos respondentes. A decisão pelo uso de recursos computacionais para apoio à análise dos dados em uma pesquisa qualitativa cabe ao pesquisador e, em boa parte dos casos, otimiza o trabalho de codificação diante da complexidade de relações e triangulações que essa abordagem metodológica exige.

Quanto ao quadro teórico, a opção pela Análise Exploratória de Dados nos parece uma escolha natural, uma vez que sua abordagem da Estatística valoriza a postura investigativa crítica por parte do aluno e pressupõe uma proposta didático-pedagógica centrada na pesquisa, por parte do professor. Como características básicas da AED, Batanero, Estepa e Godino (1991) destacam a possibilidade de gerar situações de aprendizagem sobre temas de interesse dos alunos, apoiando-se em representações gráficas que favoreçam a percepção de variabilidades, a valorização das medidas de ordem, que minimizem eventuais casos atípicos, o uso de diferentes escalas, além da falta de necessidade de uma teoria matemática complexa, com ferramentas desnecessárias nesse momento.

Gal (2019) destaca como conhecimentos estatísticos básicos para que os professores desenvolvam trabalhos a partir da Análise Exploratória de Dados: reconhecer a necessidade de manipular dados, saber como produzi-los, apresentar familiaridade com os termos e ideias mais elementares da Estatística, bem como de seus registros de representação tabulares e gráficas, dominar noções de probabilidade e conhecer métodos de elaboração de análise estatística inferencial. Segundo esse autor, os conhecimentos estatísticos, a serem desenvolvidos pelos alunos, serão fruto de suas habilidades quanto ao conhecimento estatístico, ao conhecimento matemático, ao conhecimento do contexto e do mundo e a sua capacidade de elaborar perguntas frente aos saberes, associados a elementos de disposição, que envolvem sua postura crítica, bem como suas crenças e atitudes.

Costa (2012) enfatiza a necessidade de promover tais investigações, em particular, com trabalho por meio de projetos é de extrema importância que o professor valorize os conhecimentos prévios dos alunos, pois assim, estes assumem o protagonismo na pesquisa. Porciúncula e Samá (2015) encaram a opção por trabalhar com projetos de aprendizagem não apenas como uma metodologia, mas uma forma de refletir sobre papel na sociedade. Para Batanero e Díaz (2004) projetos estatísticos motivam os alunos, em detrimento à resolução de exercícios descontextualizados. Para as autoras a Estatística é a ciência dos dados, e estes não são apenas números, mas sim números em contexto. Segundo Batanero e Díaz (2004), no trabalho com projetos, a ênfase é dada a tarefas que devem ser realistas.

Batanero e Díaz (2011), ressaltam que o desenvolvimento de projetos de trabalho, visando a Educação Estatística, contribui para a aquisição das seguintes competências, fundamentais para o aluno do Ensino Médio: competência comunicativa linguística, competência matemática, competência de reconhecimento e interação com o mundo físico, competência para o tratamento da informação e competência digital, competência social e exercício da cidadania, competência para “aprender a aprender”, questionar, identificar e gerenciar as diversas técnicas e estratégias para lidar com uma mesma situação-problema, competência para conquista de autonomia e iniciativa pessoal.

A concepção de letramento estatístico que utilizaremos em nossa pesquisa é aquela defendida por Gal (2019). Para ele o letramento estatístico é construído a partir de uma postura crítica e investigativa, de conhecimentos prévios de Estatística e Matemática, habilidades de leitura e análise, conhecimento sobre o homem e o mundo ao seu redor, crenças e atitudes. É uma habilidade-chave necessária para o exercício da cidadania, num mundo sobrecarregado de informação. Tal letramento envolve elementos de conhecimento (habilidades de letramento, conhecimento estatístico, conhecimento matemático, conhecimento do contexto e questionamento crítico) e de disposição (crenças e atitudes, postura crítica). Gal (2019) afirma que, muito embora o conhecimento matemático apoie o letramento estatístico, e do modo mais amplo, todo o conhecimento estatístico, ele não pode ser o elemento central do processo, pois existem recursos tecnológicos que podem subsidiar a investigação estatística de modo eficaz, ainda que os alunos não compreendam bem por quais caminhos, sendo o conhecimento contextual e o questionamento crítico tão ou mais importantes que o conhecimento matemático, na busca pelo conhecimento estatístico.

Em nossa pesquisa buscamos diagnosticar as mudanças nas concepções estatísticas de professores e alunos durante a realização de pesquisas estatísticas. Assim, nos parece adequado a adoção, em nosso quadro teórico, da Teoria $Ck\Phi$.

Segundo Balacheff e Gaudin (2002), o conhecimento não pode ser totalmente reduzido a comportamentos, mas também não pode ser ensinado na ausência destes. Toda ação mobiliza considerável quantidade de conhecimentos. Para desenvolver novos conhecimentos, bem como aprofundar os anteriores, se faz necessária a mobilização de concepções, diretamente relacionadas aos problemas enfrentados pelos alunos. Balacheff (2001) afirma que uma concepção não pode nem deve ser separada do contexto do qual emerge o problema, que a evidencia e lhe dá sentido.

Almouloud (2007) nos lembra que as concepções permitem interpretações, previsões e construção de modelos e, sobretudo, descrever uma parte da estrutura cognitiva, em nosso caso, do aluno. Adotaremos, em nossa pesquisa, as definições de concepção conhecimento e conceito da teoria $ck\Phi$, do modelo proposto por Balacheff (1995, 2002). Para ele, uma concepção é uma estrutura mental, característica de um dado sujeito (em nosso caso, o aluno e o professor), constituída por um observador de seu comportamento (em nosso caso, o pesquisador). A aprendizagem, por sua vez, consiste na passagem de uma concepção para uma nova concepção, mais complexa e abrangente. Pretendemos, com nossa pesquisa, relacionar os níveis de letramento estatístico a partir das concepções mobilizadas por professores e alunos.

Uma concepção, no modelo $ck\Phi$, é um estado de equilíbrio de um sistema, sujeito-meio, considerando as limitações, imposições, ou seja, algo tudo aquilo que influencia ou interfere em seu funcionamento. A concepção pertence ao sujeito e, dessa forma, pode ser correta ou não, do ponto de vista do conhecimento de referência. Outro aspecto importante deste modelo é que a concepção muitas vezes é local, no sentido de que ela funciona para resolver um determinado problema e não outro o que aponta para um domínio de validade.

Uma concepção envolve uma quádrupla (P, R, L, Σ) :

- P é um conjunto de problemas, sobre o qual Φ é operatório;
- R é um conjunto de operadores (ferramentas cognitivas para ação);
- L é um sistema de representação, que permite exprimir os elementos de P e R ;
- Σ é uma estrutura de controle, que assegura a não contradição de Φ .

Nesta quádrupla, um sujeito, diante de um problema a resolver, pode dispor de várias concepções sobre um mesmo objeto matemático e mobilizar uma ou outra em função do problema proposto. No estágio atual de nossa pesquisa, estamos analisando nossos protocolos e já foi possível identificar algumas concepções, como veremos a seguir.

Resultados e discussão

Dentre os dados coletados em nossa pesquisa estão as produções dos grupos de alunos, suas pesquisas estatísticas sobre temas diversos, escolhidos de acordo com seu universo de interesses. Tais trabalhos, fruto das investigações desenvolvidas pelos mesmos durante cerca de 11 semanas, resumiam, passo a passo, a pesquisa estatística por eles realizadas, da justificativa

da escolha do tema até a discussão dos resultados. Eles contaram com o apoio dos professores de matemática e língua portuguesa (orientadores) e um professor de outra disciplina (Artes, Educação Física, Língua Portuguesa, Língua Inglesa, História, Geografia, Filosofia, Sociologia, Biologia, Química e Física). Contamos com o envolvimento de todos, alunos, professores e equipe de gestão escolar). Os resultados finais foram apresentados pelos alunos no anfiteatro da unidade escolar para os alunos de outras turmas, outros professores e funcionários da escola, por meio de um painel.

Nossa análise dos questionários aplicados a alunos do ensino médio, analisados com o auxílio do *software* CHIC (classificação hierárquica implicativa e coesitiva), mostrou, inicialmente, que os conhecimentos prévios apresentados pelos mesmos eram bastante frágeis, possível consequência da quase ausência de Probabilidade e Estatística no currículo formal da escola, alvo da nossa pesquisa, está inserida. Além disso, a que se considerar a inadequação do material didático disponível para os alunos que, como aponta Lajolo (1996), tem um grande impacto sobre o ensino e a aprendizagem.

A análise implicativa mostrou-se uma boa ferramenta para avaliar o instrumento e para analisar as respostas dadas pelos alunos. Confrontando as concepções mobilizadas por alunos e professores referentes aos conteúdos estatísticos, observamos quase total desconhecimento sobre a natureza dessa ciência.

Analizamos, também, registros audiovisuais de alunos e professores. Verificamos que, inicialmente, não havia clareza sobre a natureza da Estatística. Nenhum aluno e poucos professores a definiram como uma ciência autônoma. Muitas de suas definições iniciais trataram a Estatística como um campo da matemática, ou confundiram a ciência com um conjunto de práticas ou procedimentos metodológicos, mencionado, muitas vezes, como 'estatísticas'. Nenhum dos entrevistados, antes do início da gestão e desenvolvimento de projetos, soube detalhar as etapas da pesquisa estatística.

A análise com o auxílio do NVIVO mostrou que, na primeira entrevista com alunos, a palavra 'ciência' não foi mencionada uma única vez. Após a realização da pesquisa, essa palavra foi mencionada nove vezes por sete dos catorze alunos, no contexto da definição de Estatística.

Devemos ressaltar que havia professores das doze áreas de conhecimento que compõem a grade curricular do Ensino Médio, na condição de coorientadores dos projetos dos alunos (Artes, Língua Portuguesa, Língua Inglesa, Educação Física, História, Geografia, Sociologia, Filosofia, Física, Química, Biologia e Matemática). Foram nove professores porque três deles ministravam duas disciplinas, além dos membros da gestão escolar (diretor, vice-diretor e coordenador pedagógico), que apoiaram essa iniciativa.

As concepções mudaram gradativamente na medida em que os alunos desenvolviam sua pesquisa, entrevistando, em alguns casos, alunos de outras séries, professores e funcionários da própria escola, solicitando orientação dos professores de outras disciplinas, expondo suas dificuldades, seus avanços, até resultar da divulgação dos resultados de pesquisa publicamente para toda a escola. Consideramos essencial para o desenvolvimento da abordagem por meio de projetos o envolvimento do corpo docente e da equipe de gestão escolar. Acreditamos que esse trabalho não deva ser realizado pelo professor de matemática isoladamente, pois os elementos

de conhecimento apresentados por Gal (2002) transcendem a esfera da Matemática, como observado por Biajone (2006).

Considerações Finais

Encontramos evidências de que a abordagem da Estatística por meio de projetos pode contribuir para a mudança das concepções de alunos e professores sobre essa área bem como sobre o processo de produção e divulgação de resultados de pesquisa científica. As habilidades de letramento preconizadas por Gal (2002, 2005) podem ser aprimoradas nessa abordagem, com maior envolvimento, motivação e conquista de autonomia dos alunos, como previsto por Batanero e Díaz (2004, 2011). Identificamos, como era nosso objetivo inicial, concepções estatísticas e probabilísticas de alunos e professores e observamos significativas mudanças nas mesmas, fato considerado como indicador de aprendizagem dentro do modelo CK4 (concepção/conhecimento/ conceito).

Um dos resultados de nosso trabalho que julgamos ser mais significativos é que as estruturas de controle expostas por um aluno mobilizam estruturas cognitivas dos demais, promovendo aprimoramento de suas ideias e revisão de suas próprias concepções. Outro resultado que julgamos relevante é que o trabalho cooperativo em pequenos grupos, como na abordagem por meio de projetos, em contextos significativos para os alunos, permite a mobilização de estruturas de controle externas à Matemática e à Estatística, relacionadas ao conhecimento de contexto, fundamentais ao letramento estatístico apresentado por Gal (2002, 2019).

Esperamos, com nossa pesquisa, ter contribuído para a reflexão sobre o papel do trabalho por meio de projetos no estudo de Estatística, destacando a sua importância para a aprendizagem, evidenciada pelas mudanças de concepções dos alunos e dos professores envolvidos, na perspectiva de Balacheff (1995, 2001, 2002).

Referências

- Albani, P. (2015) *Estatística com projetos: uma alternativa de Ensino e de Aprendizagem*. Dissertação (Mestrado), Universidade Tecnológica Federal do Paraná.
- Almouloud, S. A. (2007) *Fundamentos da didática da matemática*. Curitiba, Brasil: UFPR.
- Balacheff, N. (1995) Conception, connaissance et concept. In D. Grenier (Ed.). *Didactique et technologies cognitives en mathématiques, séminaires 1994-1995* (pp. 219-244). Grenoble: Université Joseph Fourier.
- Balacheff, N. (2001). Les connaissances, pluralité de conceptions. Le cas des mathématiques. *Les Cahiers du Laboratoire Leibniz*, 19, 83-90.
- Balacheff, N. (2002). Cadre, registre et conception: note sur les relations entre trois concepts clés de la didactique. *Les Cahiers du laboratoire Leibniz*, 58, 1-18.
- Balacheff, N., e Gaudin, N. (2002). Student conceptions: An introduction to a formal characterization. *Les Cahiers du Laboratoire Leibnitz* 65, p.1-21. Disponível:

<https://telearn.archives-ouvertes.fr/hal-00190425/document>.

- Barberino, M. R. B. (2016). *Ensino de Estatística através de projetos*. Dissertação de Mestrado. Universidade de São Paulo.
- Batanero, C., Estepa, A. e Godino, J. D. (1991). Análisis exploratorio de datos: sus posibilidades en la enseñanza secundaria. *Suma*, 9, 25-31.
- Batanero, C. e Díaz, C. (2004) El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estadística. Em J. P. Royo (Ed.). *Aspectos didácticos de las matemáticas* (pp. 125-164). Zaragoza: ICE.
- Batanero, C. e Díaz, C. (2011). *Estatística con proyectos*. Granada: Universidad de Granada.
- Biajone, J. (2006). *Trabalho de projetos*: possibilidades e desafios na formação estatística do pedagogo. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Campinas.
- Brasil. (2018) *Base Nacional Comum Curricular - Educação é a Base*. Brasília. Ministério da Educação e Cultura. Brasília.
- Campos, S. G. V. B. (2007), *Trabalho de projetos no processo de ensinar e aprender Estatística na Universidade*. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Uberlândia.
- Cobello, L. S. (2018) *Letramento estatístico: análise e reflexões sobre as tarefas contidas no material didático da secretaria estadual de educação de São Paulo para o Ensino Médio*. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de São Carlos.
- Conti, K. C. (2009). *O papel da Estatística na inclusão de alunos da educação de jovens e adultos em atividades letradas*. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Campinas.
- Costa, G. D. F. D. (2012). *A metodologia de projetos como uma alternativa para ensinar Estatística no ensino superior*. Tese de Doutorado. Universidade Estadual de Campinas.
- Couturier, R. D. Gras, R. (2005) CHIC: traitement de données avec l'analyse implicative. En C. Ritschard y Djeraba (Eds.), *Journées d'extraction et gestion des connaissances (EGC'2005)* (Vol.2, pp. 679-684).
- Creswell, J. W. (2010) *Projeto de pesquisa métodos qualitativo, quantitativo e misto*. Porto Alegre: Artmed.
- Dangiό, E. G. Z. (2014) *O Ensino de Estatística no Ensino Médio através de projetos*. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de São Carlos.
- Freitas, M. M. (2016) *Praticando Estatístico no Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado), Universidade de Brasília.
- Gal, I. (2002) Adults' statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International statistical review*, 70(1), 1-25.
- Gal, I. (2019) Understanding statistical literacy: About knowledge of contexts and models. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. Granada, Espanha. Disponível em www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html

- Giordano, C. C. (2016). *O desenvolvimento do letramento estatístico por meio de projetos: um estudo com alunos do ensino médio*. Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.
- Gras, R., Régnier, J. C., Marinica, C. e Guillet, F. (2013) *L'analyse statistique implicative Méthode exploratoire et confirmatoire à la recherche de causalités*. Toulouse: Cépaduès Editions.
- Jacobini, O. R. (2004). *A modelagem matemática como instrumento de ação política na sala de aula*. Tese de Doutorado. Universidade Estadual Paulista.
- Lage, M. C. (2011) Utilização do software NVivo em pesquisa qualitativa: uma experiência em EaD. *ETD-Educação Temática Digital*, v. 12, n. esp., p. 198-226.
- Lajolo, M. (1996) Livro didático: um (quase) manual de usuário. *Em aberto*, 16(69), 3-9.
- Megid, M. A. B. A. (2002). *Professores e alunos construindo saberes e significados em um projeto de Estatística para a 6ª série: estudo de duas experiências em escolas pública e particular*. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Campinas.
- Melo, K. M. F. (2017), *O pensamento estatístico no ensino fundamental: uma experiência articulando o desenvolvimento de projetos de pesquisa com os conceitos básicos da Estatística implementados em uma sequência didática eletrônica*. Tese de Doutorado. Universidade Luterana do Brasil.
- Mendonça, L. D. O. (2008). *A Educação Estatística em um ambiente de modelagem matemática no ensino médio*. Dissertação de Mestrado. Universidade Cruzeiro do Sul.
- Oliveira, A. F. (2019) *Práticas Pedagógicas no Ensino Médio: Por uma Estatística Crítica e Contextualizada*. Universidade Federal de Goiás.
- Ponte, J. P. (2006) Estudos de caso em Educação Matemática. *Bolema*, p. 105-132. Bauru.
- Porciúncula, M. e Samá, S. (2015) Projetos de aprendizagem: uma proposta pedagógica para a sala de aula de Estatística. Em N, Porciúncula e S. Samá (Eds.), *Educação Estatística: ações e estratégias pedagógicas no Ensino Básico e Superior*. Curitiba: Editora CRV.
- Prado, M. (2002) O uso do CHIC na análise de registros textuais em ambiente virtual de formação de professores. *Revista do Programa de Pós-Graduados em Educação Matemática– PUC-SP* 4(2), 103-123.
- Santana, M. D. S. (2011). *A Educação Estatística com base num ciclo investigativo: um estudo do desenvolvimento do letramento estatístico de estudantes de uma turma do 3º ano do ensino médio*. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Ouro Preto.
- São Paulo. (2012) *Currículo do estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias: Ensino Fundamental ciclo II e Ensino Médio*. São Paulo. SE/CENP.
- São Paulo. (2014) *Proposta curricular*. Caderno do Aluno – Ensino Médio: Matemática. São Paulo. IMESP, v. 2.
- Votto, T. R. (2018) *As potencialidades lúdicas nas estratégias para o ensino e aprendizagem de Estatística nos anos iniciais do Ensino Fundamental*. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Rio Grande

Yin, R. K. (2015) *Estudo de Caso: Planejamento e métodos*. Bookman Editora. Porto Alegre.

O ENSINO PARA O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO NOS ANOS INICIAIS FACE ÀS ATITUDES EM RELAÇÃO À MATEMÁTICA E ÀS CRENÇAS DE AUTOEFICÁCIA DE PROFESSORES IN-SERVICE E PRE-SERVICE

Roseli Regina Fernandes Santana

Nelson Antonio Pirola

roselirfernandes@professor.educacao.sp.gov.br, npirola@uol.com.br

UNESP-Bauru, Brasil

Resumen

O presente artigo refere-se a um recorte de uma pesquisa de mestrado que investigou o desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos iniciais com 128 estudantes de Pedagogia (pre-service) de instituições privadas e 119 professores (in-service) dos anos iniciais, da rede pública de ensino, de dois municípios do Estado de São Paulo, face às suas crenças de autoeficácia para o ensino e quanto ao conhecimento especializado e das atitudes em relação à Matemática. Apresentaremos apenas os resultados da primeira etapa dessa pesquisa de metodologia mista, coletados a partir de um questionário para caracterização dos participantes, uma Escala de Atitudes e um questionário estruturado em duas subescalas do tipo likert sobre as crenças de autoeficácia. A análise dos dados evidenciou que os pre-service apresentaram ter atitudes negativas em relação à Matemática; nos dois grupos, as crenças de autoeficácia mostraram-se positivas, e ainda, identificamos alguns fatores que podem ter influenciado esses resultados.

Palabras clave: *Pensamento Algébrico. Anos Iniciais. Crenças de Autoeficácia. Atitudes em relação à Matemática.*

Introdução

Esta pesquisa de mestrado foi desenvolvida no âmbito das investigações realizadas pelo Grupo de Pesquisa de Psicologia da Educação Matemática (GPPEM), vinculado ao Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência da UNESP de Bauru/SP que, por influência das aproximações com os temas discutidos no grupo de pesquisa, as contribuições e inquietações da trajetória e experiência profissional e pessoal da pesquisadora (primeiro autor) e orientador (segundo autor) durante a docência na Educação Básica e na formação de professores que ensinam ou ensinarão Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental foram razões inicialmente determinantes para enveredarmos na elaboração desse estudo.

Ao aprofundarmos os conhecimentos por meio da revisão da literatura existente, da fundamentação teórica, das novas demandas curriculares brasileiras (BRASIL, 2017) destacando

a Álgebra como uma unidade temática no ensino da Matemática, das dificuldades cada vez mais acentuadas dos alunos em tarefas que requerem pensar algebricamente evidenciadas pelo baixo desempenho nas avaliações de larga escala do país e a escassez de trabalhos nacionais acerca da temática, vislumbramos no ineditismo dessa pesquisa, uma significativa contribuição para o campo de Psicologia e/da Educação Matemática e para a formação inicial e continuada de professores, consequentemente para o processo de ensino e aprendizagem da Álgebra.

Nesse sentido, realizamos uma análise comparativa de aspectos cognitivos e afetivos relacionados ao ensino de Álgebra nos anos iniciais, com estudantes do curso de Pedagogia e professores, relacionando suas atitudes em relação à Matemática e crenças de autoeficácia para o desenvolvimento do pensamento algébrico (conhecimento e ensino), a fim de investigarmos o seguinte problema de pesquisa: *“De que maneira se apresentam e se relacionam as crenças de autoeficácia, as atitudes em relação à Matemática e o conhecimento especializado de professores in-service e pre-service para o ensino do desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos iniciais do Ensino Fundamental?”*.

O estudo possibilitou também evidenciarmos os saberes conceituais que os participantes apresentavam em relação ao pensamento algébrico, suas percepções e julgamentos acerca de suas capacidades de planejar e ensinar tarefas algébricas para alunos dos anos iniciais, assim como a capacidade de identificação de elementos caracterizadores desse pensamento matemático e aspectos que afetam nessas atitudes e crenças de autoeficácia de professores e futuros professores para o ensino do desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos iniciais, além de enfatizar a indissociabilidade entre os aspectos afetivos e cognitivos nas aprendizagens matemáticas.

Pensamento Algébrico: o que a literatura e os documentos curriculares nos dizem?

A fundamentação teórica e a revisão de literatura dessa pesquisa acerca do ensino para o desenvolvimento do pensamento algébrico foi embasada em importantes pesquisas portuguesas e norte-americanas por se tratarem de estudos pioneiros a respeito da temática. Por meio desses trabalhos, discutimos a importância do ensino do pensamento algébrico desde os anos iniciais, trazendo ao leitor algumas concepções de Álgebra, elementos caracterizadores do pensamento algébrico, a fim de clarificar conceitos e elementos relevantes deste conhecimento matemático aos professores.

Os estudos de Canavarro (2007), Kaput (1995, 2008), Blanton; Kaput (2005), Kieran (1996, 2004) Mestre (2014) ressaltam a importância do desenvolvimento do pensamento algébrico desde os anos iniciais. A experiência, ainda embrionária, de professores dos anos iniciais, bem como aqueles que ainda se encontram na formação inicial a respeito do ensino para o desenvolvimento do pensamento algébrico pode ser evidenciada em alguns estudos (CANAVARRO, 2007; MESTRE, 2014; SANTANA, 2019). Segundo Ponte; Branco; Matos (2009) é imprescindível que essa imersão ocorra primeiramente com o professor precisamos, para então alcançar-se efetivamente o aluno.

A aposta por parte do professor no pensamento algébrico implica, talvez sobretudo, uma aposta no raciocínio dos alunos e um acreditar na possibilidade destes construírem conhecimento matemático — atividade na qual o professor precisa também de se envolver. A necessidade do desenvolvimento de “hábitos da mente” não pode incidir apenas nos alunos — eles devem necessariamente instalar-se e transbordar dos professores. (CANAVARRO, 2007, p. 113)

Ao discutirmos o ensino da Álgebra nos anos iniciais a partir do desenvolvimento do pensamento algébrico destacamos que nas últimas décadas a abordagem dos documentos curriculares (BRASIL, 1997, 2012, 2017) embora faça referência a esse pensamento matemático, não trazem concepções claras e caracterização sobre ele, o que contribui para que esse ensino não ocorra de forma intencional na sala de aula, ou seja, por vezes as tarefas algébricas estão presentes, mas por falta desse conhecimento especializado o professor não se sente seguro ou capaz de realizar intervenções e discussões que favoreçam o desenvolvimento de habilidades voltadas para a generalização, cerne do pensamento algébrico.

Nesse sentido, adotamos na pesquisa desenvolvida a concepção de que o pensamento algébrico *“é um processo no qual os alunos generalizam ideias matemáticas de um conjunto particular de exemplos, estabelecem generalizações por meio do discurso de argumentação, e expressam-nas, cada vez mais, em caminhos formais e apropriados à sua idade”* (BLANTON; KAPUT, 2005, p. 413, *tradução e grifo nosso*), em que as sequências, regularidades e padrões (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009; BORRALHO et al., 2007; CANAVARRO, 2007), os diferentes significados do sinal de igualdade (BANDARRA, 2011; TRIVILIN, 2013), as relações entre os números, operações e suas propriedades (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009; MESTRE, 2014) e a generalização ((BRIZUELA; SCHLIEMANN, 2004; SCHLIEMANN; CARRAHER; BRIZUELA, 2007; RADFORD, 2010) constituem-se como importantes elementos caracterizadores desse pensamento matemático por meio da aproximação com a Aritmética Generalizada e o Pensamento Funcional.

As Atitudes em relação à Matemática e as Crenças de Autoeficácia Docente

As predisposições positivas ou negativas estão presentes ao longo da vida de qualquer indivíduo e podem ser aprendidas ou modificadas a partir das experiências vividas e sentidas. Assim, ao considerar o contexto educacional, essa predisposição positiva ou negativa em relação ao ensino de Matemática, chamada atitudes é considerada um construto mental por Klausmeier (1977) e podem ser afetada por diferentes variáveis, como gênero, desempenho, resolução de problemas, influências familiares, memória, concepções, habilidades, crenças.

Nos últimos anos, no cenário acadêmico nacional, desenvolveram diversas pesquisas no âmbito da Psicologia da Educação Matemática sob a influência do estudo pioneiro de Brito (1996) acerca das atitudes em relação à Matemática. A autora afirma que no início da escolaridade as crianças apresentam atitudes positivas em relação à Matemática e isso vai se transformando ao longo da vida escolar, por isso defende que a atitude

Uma disposição pessoal, idiossincrática, presente em todos os indivíduos, dirigida a objetos, eventos ou pessoas, que assume diferente direção e intensidade de acordo com as experiências do indivíduo. Além disso, apresenta componentes [...] dos domínios cognitivos (conhecimento sobre o objeto da atitude), afetivo (sentimento em relação ao objeto de atitude) e conativo (predisposição para agir de uma certa maneira em relação ao objeto de atitude). (BRITO, 1996, p. 11-12)

Muitas dessas investigações advêm de trabalhos dos GPPEM⁹ (UNESP/Bauru) e PSIEM¹⁰ (UNICAMP/Campinas). Por meio da revisão de literatura, essas pesquisas destacam que boas experiências com a Matemática logo no início da alfabetização podem contribuir para que os alunos desenvolvam a confiança e o prazer em aprender Matemática e que, os professores trazem consigo experiências vividas em sua escolarização, essas por sua vez desencadeiam atitudes positivas ou negativas que podem ser transferidas aos seus alunos. Tem-se enfatizado também o quanto a formação continuada tem contribuído para a mudança de atitudes dos docentes e de práticas educativas. Além disso, professores com atitudes mais positivas em relação à Matemática propõem em suas aulas uma tipologia maior de problemas e recursos materiais para sua resolução e não meramente os considerados problemas-padrão. Portanto, fica evidente que as emoções e sentimentos do professor em relação à Matemática e aos conteúdos, suas experiências escolares, suas concepções e suas atitudes estão intimamente ligadas ao exercício de sua função.

Ao tratarmos de aspectos afetivos na pesquisa desenvolvida, buscamos na Teoria Social Cognitiva, proposta por Albert Bandura (1977), compreender as crenças de autoeficácia dos participantes desta pesquisa quanto ao julgamento de suas capacidades, motivação, perseverança e segurança em seu conhecimento matemático e para o ensino de Álgebra nos anos iniciais. Explicitamos que, de acordo com o autor, as crenças de autoeficácia são julgamentos que o indivíduo tem de suas capacidades para organizar e realizar percursos de ações para alcançar certas metas e objetivos, determinando a motivação, a quantidade de esforços, empenho e tempo para realizar tais tarefas, desenvolvendo comportamentos proativos ou autorreguladores no controle sobre o pensamento, os sentimentos e ações.

Ao pensarmos no contexto educacional, tanto as crenças positivas como negativas influenciam os aspectos das vidas humanas. Pesquisas apontam, portanto que, crenças podem impactar na motivação e desempenho dos alunos, no próprio comportamento do professor, acarretando consequências positivas ou negativas na escola como um todo, que as influências das atitudes dos pais podem impactar na crença de autoeficácia dos filhos. Quando o professor encoraja seus alunos por meio de retornos positivos, está contribuindo para o aumento da autoeficácia dos estudantes e isso é importante, pois os alunos que apresentam crenças de autoeficácia mais elevadas, se dedicam mais nos estudos, demonstram melhor desempenho nos testes

⁹ Grupo de Pesquisa de Psicologia em Educação Matemática (GPPEM, UNESP – *Campus* Bauru), formado por pedagogos e educadores matemáticos graduados e pós-graduados.

¹⁰ Grupo de Pesquisa em Psicologia da Educação Matemática (PSIEM), liderado inicialmente pela professora doutora Márcia Regina Ferreira de Brito, considerada uma das pioneiras no desenvolvimento de pesquisas em Psicologia da Educação Matemática no Brasil

matemáticos e na resolução de problemas, contribuindo no enfrentamento de bloqueios, sentimentos de incapacidade e medo.

Metodologia

No contexto das produções em Educação Matemática, mais especificamente, na perspectiva da Psicologia da Educação Matemática, na investigação do problema de pesquisa já explicitado na introdução, o objetivo geral da pesquisa foi de analisar a maneira que professores dos anos iniciais e estudantes de Pedagogia se apresentam quanto suas atitudes em relação à Matemática e crenças de autoeficácia para o ensino do desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos iniciais. A investigação foi ancorada numa abordagem mista, quanti-qualitativa, fundamentada nos estudos de Creswell e Park (2013). Encontramos nos métodos mistos a metodologia adequada para o percurso investigativo deste estudo, que é “como os achados qualitativos proporcionam um entendimento dos resultados quantitativos para explorar as desigualdades” (CRESWELL; PLANO CLARK, 2013, p. 153).

Por meio da metodologia mista utilizada na pesquisa, foi possível validar a Escala de Crenças de Autoeficácia em relação ao conhecimento especializado para o desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos iniciais, aplicável em outras pesquisas que envolvam professores *in-service* e *pre-service* dos anos iniciais a respeito da temática; avaliar as crenças de autoeficácia dos participantes para o ensino do desenvolvimento do pensamento algébrico, identificando o conceito e as concepções que eles têm a respeito do pensamento algébrico e o ensino da Álgebra nos Anos Iniciais. Analisamos também, possíveis fatores que poderiam influenciar na autoeficácia e atitudes dos participantes para o ensino do desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos iniciais, comparando os grupos.

Os participantes da pesquisa foram cento e vinte e oito (128) estudantes do curso de Pedagogia (*pre-service*) de instituições privadas e cento e dezenove (119) professores (*in-service*) dos anos iniciais, da rede pública de ensino. Para tanto, os instrumentos utilizados para essa investigação contaram em sua primeira etapa com um questionário para caracterização dos participantes, sendo um para os *pre-service* e outro para os *in-service*; uma Escala de Atitudes traduzida e validada por Brito (1996); um questionário estruturado em duas subescalas, uma sobre as crenças de autoeficácia dos participantes em relação ao conhecimento especializado para o desenvolvimento do pensamento algébrico e a outra para o ensino desse pensamento matemático nos anos iniciais. Tanto a Escala de Atitudes quanto sobre as crenças são do tipo *likert*, em que os participantes deveriam se valer das opções com as seguintes pontuações intrínsecas: 1 - discordo totalmente; 2 - discordo; 3 - concordo e; 4 - concordo totalmente.

A Escala de Atitudes apresentava vinte e um itens, sendo dez afirmações positivas e onze afirmações negativas, nos quais não existiam respostas certas ou erradas, uma vez que expressam os sentimentos dos participantes em relação à Matemática, tais como: “1. Eu fico sempre sob uma terrível tensão na aula de Matemática.; 4. A Matemática é fascinante e divertida. ; 10. A Matemática me faz sentir como se estivesse perdido (a) em uma selva de números e sem encontrar a saída.; entre outras afirmativas.

A Escala elaborada e validada nessa pesquisa sobre as crenças de autoeficácia passou por várias versões, revisões e aplicações-teste até chegar a sua versão final para aplicação com os

professores *in-service* e *pre-service*, estruturada em duas subescalas, uma voltada para o conhecimento matemático do participante (com 17 itens) e a segunda, com foco nas crenças para o ensino do pensamento algébrico, contendo 29 afirmações. Vejamos na tabela 1 algumas das afirmações contidas nessa escala.

Tabela 1

Alguns dos itens da Escala de Crenças de autoeficácia docente validada

Subescala 1: crenças quanto ao conhecimento algébrico do participante	Subescala 2: crenças para o ensino do pensamento algébrico nos anos iniciais
3. Eu acredito que eu consiga construir sequências de números reais em ordem crescente ou decrescente a partir de um número qualquer, utilizando uma regularidade estabelecida.	2. Eu acredito que eu posso ensinar as crianças dos anos iniciais a descrição, após o reconhecimento e a explicitação de um padrão (ou regularidade), os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.
7. Eu acredito que eu sou capaz de compreender a ideia de igualdade para escrever diferentes sentenças de adições ou de subtração de dois números naturais que resultem na mesma soma ou diferença.	6. Eu acredito que eu consiga ensinar as crianças dos anos iniciais a identificação de regularidades em sequências ordenadas de números naturais, resultantes da realização de adições ou subtrações sucessivas, por um mesmo número, descrever uma regra de formação da sequência e determinar elementos faltantes ou seguintes.
14. Eu acredito que eu consiga resolver e elaborar problemas cuja conversão em sentença matemática seja uma igualdade com uma operação em que um dos termos é desconhecido.	24. Eu acredito que sou capaz de avaliar meus alunos quanto aos conceitos algébricos propostos para os anos iniciais.
15. Eu acredito que eu consiga resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas, para associar a quantidade de um produto ao valor a pagar, alterar as quantidades de ingredientes de receitas, ampliar ou reduzir escala em mapas, entre outros.	

Fonte: Autores

Os três instrumentos explanados utilizados nesta primeira etapa, puderam ser respondidos via celular ou computador pelos participantes, pois estavam disponíveis em um site contendo o *link* para os formulários de cada grupo participante, a carta de apresentação da pesquisa, o termo de consentimento livre e esclarecido, informações a respeito dos pesquisadores e o contato do pesquisador para qualquer dúvida. A experiência em utilizar um formulário *on-line*, apesar de ser uma ferramenta ainda pouco usada entre os pesquisadores, possibilitou alcançar um número maior de participantes, em diversas localidades, ao mesmo tempo e, podendo ser acessado de acordo com a disponibilidade de tempo do sujeito para responder a pesquisa.

Análise dos dados

Na Escala de Atitudes os indivíduos poderiam apresentar pontuações a partir das respostas às afirmativas num intervalo de 21 a 84 pontos, com ponto central em 52,5. Assim, sendo, pessoas com atitudes positivas em relação à Matemática deveriam estar acima do ponto central e, consequentemente valores abaixo, caracterizariam participantes com atitudes negativas em relação à Matemática.

Ao considerarmos tais referências para a Escala de Atitudes, descobrimos que 64,06% dos estudantes de Pedagogia mostraram-se abaixo do ponto central, enquanto apenas 12,60% dos professores estavam nessa mesma condição. Esses dados nos levam a concluir que os *in-service* apresentaram atitudes mais positivas do que *pre-service*, ou melhor, dizendo, os **pre-service** apresentaram atitudes mais negativas em relação à Matemática quando comparados a professores que já atuam no magistério, corroborando com os resultados de outros estudos já realizados, como os de Gonzalez (1995); Moron (1998); Ardiles (2007); Tortora, Sander e Pirola (2013); Sander (2014). A seguir, sintetizamos esses resultados na Tabela 2.

Tabela 2

Classificação dos participantes na Escala de Atitudes, por grupo.

Grupos	Atitude Negativa	Atitude Positiva
Pre-service	64,06%	35,94%
In-service	12,61%	87,39%

Fonte: Autores

Quanto à Escala de Crenças de Autoeficácia validada, a pontuação do participante poderia variar no intervalo de 17 a 68 pontos e na Subescala 2, de 29 a 116 pontos. Nesse sentido, definimos o ponto central de 42,5 para a Subescala 1 e, de 72,5 para a Subescala 2, sendo que, pontuações abaixo desses valores, representam crenças negativas em relação ao conhecimento para o ensino no desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos iniciais.

Constatamos que as crenças de autoeficácia apresentaram-se positivas nos dois grupos analisados, tanto em relação ao conhecimento algébrico, como para o seu ensino. Vale ressaltar,

como vemos na Tabela 3, que ainda sim, os in-service evidenciaram ter crenças mais positivas que os pre-service.

Tabela 3

Classificação dos participantes, por grupo, em relação às Crenças de Autoeficácia

Grupo	Subescala 1		Subescala 2	
	Positiva	Negativa	Positiva	Negativa
Pre-service	89,06%	10,94%	86,72%	13,28%
In-service	100%	0,0%	98,32%	1,68%

Fonte: Autores

Identificamos ainda, na análise dos dados, alguns fatores que influenciaram nas atitudes em relação à Matemática e nas crenças de autoeficácia em relação ao conhecimento especializado para o ensino do pensamento algébrico dentro da amostra investigada: idade, tempo de magistério, reprovação, julgamento do seu desempenho nas aulas de Matemática, formação inicial, possuir pós-graduação ou não, entre outros que destacamos no estudo em sua íntegra.

Acreditamos que essa pesquisa trará grandes contribuições para estudos posteriores, fomentando novas investigações e contribuindo para a apropriação de conceitos e elementos acerca do desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos iniciais do Ensino Fundamental, enfatizando a relevância de aspectos cognitivos e afetivos das aprendizagens desse pensamento matemático, em alunos e professores (in-service e pre-service).

Considerações finais

Ao abordarmos nessa investigação o trabalho envolvendo o desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos iniciais do Ensino Fundamental, a partir das contribuições de professores e futuros professores que ensinarão Matemática, mais especificamente, Álgebra nos anos iniciais, tema esse considerado relativamente novo em nosso país, haja vista a escassez de pesquisas nessa área, bem como a abordagem superficial dada a este tema nos documentos curriculares oficiais.

Assim, considerando a necessidade do trabalho com foco no ensino para o desenvolvimento do pensamento algébrico desde os primeiros anos de escolaridade, reforçando para tal o papel crucial desempenhado pelo professor na apropriação das aprendizagens pelos alunos, seja em relação a aspectos cognitivos, seja afetivos, retomamos o problema de pesquisa que abordamos no presente artigo: "De que maneira se apresentam e se relacionam as crenças de autoeficácia, as atitudes em relação à Matemática e ao conhecimento especializado de professores in-service e pre-service para o ensino do desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos iniciais do Ensino Fundamental?".

A análise dos dados, em suas diferentes etapas, evidenciou que: i) os pre-service apresentaram ter atitudes negativas em relação à Matemática, enquanto os in-service, positivas; ii) quanto às crenças de autoeficácia para o conhecimento especializado e ensino do desenvolvimento do pensamento algébrico mostraram-se positivas nos dois grupos, apesar dos in-service serem crenças mais positivas; iii) os participantes se sentiram menos seguros para o ensino do pensamento algébrico do que quanto ao conhecimento de conteúdo curricular, embora revelassem conhecer pouco a respeito de elementos conceituais e pedagógicos, bem como os caracterizadores desse pensamento matemático. Além disso, alguns fatores identificados, influenciaram tais atitudes e crenças, tais como: idade, tempo de magistério, reprovação, julgamento do seu desempenho nas aulas de Matemática, formação inicial, possuir pós-graduação, entre outros que destacamos no estudo.

As necessidades de superação das fragilidades formativas de professores apontadas nesse trabalho contribuirão para a garantia dos direitos de aprendizagens dos alunos dos anos iniciais, ademais defendemos a prática pedagógica voltada para o desenvolvimento do pensamento algébrico desde os primeiros anos de escolaridade (BLANTON; KAPUT, 2005; CANAVARRO, 2007; PONTE et al., 2009), enfatizando ainda na relação professor/aluno e processo de ensino e aprendizagem a relevância de construtos como as atitudes (BRITO 1996) e as crenças (BANDURA, 1986) que podem afetar tais relações e processos.

Esperamos que esse estudo contribua para novos olhares na formação inicial e continuada, que as relações afetivas sejam fortalecidas, assim como os aspectos conceituais e metodológicos das aprendizagens, base para a compreensão da Matemática Escolar. Almejamos ainda, que o ensino para o desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos iniciais não passe a ser apenas um conteúdo matemático a mais no currículo, mas que professores e futuros professores dos anos iniciais sintam-se capazes e capacitados para explorar tarefas algébricas, oportunizando um espaço de encorajamento e superação das dificuldades.

Referências

- Bandura, A. (1977). *Self-efficacy: toward a unifying theory of behavioral change*. Psychological Review.
- Blanton, M. L.; Kaput, J. J. (2005). *Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning*. Journal for research in mathematics education, p. 412-446, 2005.
- BRASIL. *Base Nacional Curricular Comum*. Brasília: MEC (2017). Disponível em http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_20dez_site.pdf>. Acesso em: 25 de outubro de 2019.
- Brito, M. R. F. de. (1996). *Um estudo sobre as atitudes em relação à Matemática em estudantes de 1º e 2º graus*. 1996. 383 f. Tese (Livro Docência) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.
- Canavarro, A. P. (2007). *O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos*. Quadrante, Lisboa-PT, v. 16, n. 2, p. 81-118.
- Creswell, J. W.; Plano Clark, V. L. (2013). *Pesquisa de Métodos Mistos*. 2. ed. Porto Alegre: Penso.

- Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In: J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 5–17). New York: Lawrence Erlbaum Associates.
- Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it. *The Mathematics Educator*, v. 8, n. 1, p. 139-151.
- Mestre, C. M. M. V. (2014). *O desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 4º ano de escolaridade: uma experiência de ensino*. 2014. 379 f. Tese (Doutorado) – Universidade de Lisboa, Lisboa.
- Santana, R. R. F. (2019). *Um estudo sobre as relações entre o desenvolvimento do pensamento algébrico, as crenças de autoeficácia, as atitudes e o conhecimento especializado de professores pre-service e in-service*. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Ciências, Universidade Estadual Paulista, Bauru.

PROGRAMA INSTITUCIONAL DE BOLSAS DE INICIAÇÃO À DOCÊNCIA, PIBID: O QUE DIZEM AS ESCOLAS, A UNIVERSIDADE E OS BOLSISTAS

Maria Aparecida Silva de Souza*

Saddo Ag Almouloud**

heva.mariaaparecida@gmail.com , saddoag@gmail.com

BRASIL, IFES- Instituto Federal do Espírito Santo*
Pontificia Universidad católica de Sao Paulo, Brasil*

Resumen

O presente trabalho nasceu das reflexões acerca do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (Pibid) no curso de Licenciatura em Matemática do IFES campus Cachoeiro de Itapemirim. Foi criado para o aperfeiçoamento e valorização da formação de professores para a educação básica, apoiando a iniciação à docência, valorizando o magistério contribuindo para a elevação do padrão de qualidade da educação básica, pela integração entre teoria e prática e entre universidade e escola. Objetivamos mostrar o significado do Pibid para as escolas, a universidade e os bolsistas. Na investigação utilizamos uma abordagem qualitativa com dados coletados em entrevistas junto aos bolsistas do Pibid. Para a revisão de literatura, pautamos em estudos sobre potencialidades da formação de professores e prática docente necessária à formação inicial do professor. Foi possível afirmar que as ações e/ou atividades realizadas tiveram impactos para as escolas parceiras, para o Ifes e para os bolsistas.

Palabras clave: *Pibid; licenciatura, docência, matemática*

Resumen

El presente trabajo nació de las reflexiones sobre el Programa Institucional para Becas de Iniciación Docente (Pibid) en el curso de Licenciatura en Matemáticas en el campus IFES Cachoeiro de Itapemirim. Fue creado para mejorar y mejorar la formación docente para la educación básica, apoyando el inicio de la enseñanza, valorando la enseñanza y contribuyendo a elevar el estándar de calidad de la educación básica, a través de la integración entre la teoría y la práctica y entre la universidad y la escuela. Nuestro objetivo es mostrar el significado de Pibid a las escuelas, la universidad y los académicos. En la investigación, utilizamos un enfoque cualitativo con datos recopilados en entrevistas con becarios Pibid. Para la revisión de la literatura, nos basamos en estudios sobre las potencialidades de la formación docente y la práctica docente necesarias para la formación inicial del profesorado. Fue posible afirmar que las acciones y / o actividades llevadas a cabo tuvieron un impacto en las escuelas asociadas, Ifes y los becarios.

Palabras llave: *Pibid; licenciatura, enseñanza, matemática*

Introdução

Lançado em dezembro de 2007 pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), o Pibid é um programa que compõe a Política Pública de Formação Inicial de Professores do Ministério da Educação e destacou-se como o maior programa de valorização do magistério, integrando, na última década, o EPIBIDnsino Superior público e privado para a formação de professores da Educação Básica. Uma das características desse programa é o aprimoramento do processo de formação de docentes, no que se refere às ações e as atividades acadêmicas voltadas para a formação inicial de professores nas Instituições de Ensino Superior (IES), ao inserir os licenciandos no cotidiano do ambiente escolar por meio de ações estratégicas e metodológicas de ensino.

O programa se destacou pelo aumento nacional de sua importância, o que justifica a realização de pesquisas sobre suas formas de atuação e as potencialidades para ensinar a realização de pesquisas que investiguem sua contribuição ou impactos na formação inicial ou continuada dos participantes. Existe também uma grande contribuição do PIBID para a formação continuada dos professores em serviço, porque há uma relação direta neste fazer pedagógico.

O PIBID

O PIBID é uma iniciativa para o aperfeiçoamento e a valorização da formação de professores para a educação básica. O programa concede bolsas a alunos de licenciatura participantes de projetos de iniciação à docência desenvolvidos por Instituições de Educação Superior (IES) em parceria com escolas de educação básica da rede pública de ensino.

Os projetos promovem a inserção dos estudantes no contexto das escolas públicas desde o início da sua formação acadêmica para que desenvolvam atividades didático-pedagógicas sob a orientação de um docente da licenciatura e de um professor da escola de educação básica.

O Decreto n.º 7.219, de 24 de junho de 2010 instituiu formalmente o PIBID. e considera o papel a ser desempenhado por cada bolsista¹¹.

Para Gatti, André, Gimenes e Ferragut (2014), o Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) traduz de forma inequívoca os princípios e o compromisso da Capes com a formação de professores. Iniciando em 2009 com 3.088 bolsistas e 43 instituições federais de ensino superior, no ano de 2014, o PIBID alcançou 90.254 bolsistas, distribuídas em 855 campi de 284 instituições formadoras públicas e privadas (em 29 delas há também programas para as áreas da educação escolar indígena e do campo). O PIBID é um Programa de política pública de formação inicial de professores com a segunda maior quantidade de bolsistas, verbas para material de consumo e subprojetos de ensino das diversas áreas do conhecimento, implementados nas principais IES públicas e privadas, com e sem fins lucrativos, que oferecem cursos de licenciatura.

Para esses autores, o PIBID não é simplesmente um programa de bolsas. Trata-se de uma proposta de incentivo e valorização do magistério e de aprimoramento do processo de formação de docentes para a educação básica. Os alunos de licenciatura exercem atividades pedagógicas em escolas públicas de educação básica, contribuindo para a integração entre teoria e prática, para a aproximação entre universidades e escolas e para a melhoria de qualidade

¹¹ <https://capes.gov.br/educacao-basica/capes-pibid/pibid>

da educação brasileira. Para assegurar os resultados educacionais, os bolsistas são orientados por coordenadores de área, docentes das licenciaturas, e por supervisores docentes das escolas públicas, onde exercem atividades.

Com seu desenho, o PIBID é para Gatti et al. (2014), uma formação inicial para os alunos das licenciaturas; é, também, formação continuada para os professores das escolas públicas e para os professores das instituições de ensino superior participantes, abrindo-lhes amplas oportunidades de estudos, pesquisa e extensão. A ação dos Licenciandos e de seus orientadores têm o potencial de elevar a qualidade do trabalho nas escolas públicas e nas instituições formadoras.

O PIBID proporciona um espaço de formação docente, com contribuições para o processo de formação inicial do professor de matemática, por funcionar como um programa que promove a inserção dos estudantes no contexto das escolas públicas desde o início da sua formação acadêmica, desenvolvendo lhes habilidades didático-pedagógicas. Trata-se de um programa que implementa uma política de melhoria da formação de professores.

As experiências vivenciadas no PIBID e o trabalho colaborativo entre os envolvidos enriquece a experiência com os pares, fortalecendo o fazer docente. O trabalho colaborativo possibilita o resgate de valores tais como: o compartilhamento e a solidariedade, que são fundamentais para as relações estabelecidas entre os envolvidos na ação educativa/formativa. Para Damiani (2008) este processo gera resultados diferenciados nas atividades que envolvem professores e estudantes. Trata-se, pois, de um espaço de aprendizagem para a docência no qual o futuro professor, baseado nas experiências vivenciadas, constrói sua práxis pedagógica de maneira pessoal o seu jeito de ser professor, com saberes construídos em sua própria prática, nos procedimentos nos discursos e nos conhecimentos adquiridos.

O diálogo e a interação entre licenciandos, coordenadores e supervisores geram um movimento dinâmico e virtuoso de formação recíproca e crescimento contínuo envolvendo as escolas, a universidade e os bolsistas envolvidos no Programa.

Para Souza (2016), o aspecto fundamental a assinalar reside nas relações estruturais articuladas pelo PIBID (teoria-prática, universidade-escola e formadoresformandos), as quais proporcionam uma nova cultura nas escolas de educação básica. Dessa forma, o desenho estratégico do PIBID proporciona ao professor em formação inicial a interação de diferentes saberes sobre a docência. O programa considera como eixo orientador da formação a interação profícua de diferentes saberes sobre a docência: conhecimentos prévios e representações sociais manifestas principalmente pelos estudantes das licenciaturas, o contexto, vivências e conhecimentos teórico-práticos dos professores em exercício na educação básica; e, por fim, os saberes da pesquisa e da experiência acadêmica dos formadores de professores, atuantes nas instituições de ensino superior (BRASIL, 2013, p. 69).

Os princípios pedagógicos que norteiam o PIBID são embasados nos estudos de Antônio Nóvoa para a formação e desenvolvimento profissional de professores que serve de referência para a formação no trabalho, na escola e na vivência concreta de fatos; uma formação combinada do conhecimento teórico e metodológico dos professores das IES com o conhecimento prático dos professores da educação básica. (BRASIL, 2014).

A partir dos estudos de António Nóvoa são apresentados os seguintes princípios pedagógicos do PIBID:

1. Formação de professores referenciada no trabalho na escola e na vivência de casos concretos;
2. Formação de professores realizada com a combinação do conhecimento teórico e metodológico dos professores das instituições de ensino superior e o conhecimento prático e vivencial dos professores das escolas públicas;
3. Formação de professores atenta às múltiplas facetas do cotidiano da escola e à investigação e à pesquisa que levam à resolução de situações e à inovação na educação;
4. Formação de professores realizada com diálogo e trabalho coletivo, realçando a responsabilidade social da profissão (NOVOA, 2013).

Esses princípios pedagógicos possibilitam a participação da IES, das escolas parceiras e dos futuros professores no processo de formação inicial de professores. De acordo com os estudos de Medeiros e Pires (2014), a formação docente proposta pelo PIBID tem como finalidade: indução e fomento da formação inicial e continuada dos profissionais do magistério, articulação entre os sistemas de ensino e estímulo à valorização docente em todos os níveis e modalidades. Sendo assim, o PIBID atende à perspectiva de proporcionar a curto prazo, a inserção do licenciando na escola contribuindo para sua formação inicial, possibilitando-lhe que experencie seu futuro ambiente de trabalho e seu reconhecimento como integrante do processo de busca pela qualidade do ensino voltado para o humano, para os valores sociais, éticos, e estéticos da sociedade brasileira.

O PIBID no Ifes Campus Cachoeiro de Itapemirim

A participação inicial do IFES Campus Cachoeiro de Itapemirim se deu por meio da participação do EDITAL Nº001/2011/CAPES que objetivava a concessão de bolsas de iniciação à docência para alunos de cursos de licenciatura e para coordenadores e supervisores responsáveis institucionalmente pelo Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência – PIBID e demais despesas a ele vinculadas.

Assim, no Curso Superior de Licenciatura em Matemática do IFES/Campus Cachoeiro de Itapemirim, o PIBID teve início no segundo semestre de 2011 com três escolas parceiras, expandindo-se para mais três escolas em 2014. Participaram do PIBID as escolas da Rede Estadual de Ensino do Município de Cachoeiro de Itapemirim: EEEFM “Agostinho Simonato”; CEI “Átila de Almeida Miranda”; EEEFM “Lions Sebastião de Paiva Vidaure”; EEEFM “Liceu Muniz Freire”; EEEFM “Presidente Getúlio Vargas” e EEEFM “Professora Hosana Salles”.

Nas escolas parceiras os alunos bolsistas do PIBID desenvolveram atividades de docência, supervisionados por um professor de matemática da escola cuja função é supervisionar o trabalho desses alunos no desenvolvimento das atividades, as quais trazem contribuições para a prática dos alunos. As atividades são desenvolvidas com alunos do Ensino Fundamental II e com alunos do Ensino Médio.

As ações previstas no subprojeto do PIBID em Matemática no IFES Campus Cachoeiro de Itapemirim foram concebidas na perspectiva de proporcionar a formação qualitativa do licenciando em matemática, favorecendo-lhe a aquisição de conhecimentos e preparando-o

para o atendimento às novas exigências do sistema educacional, desempenhando o papel de profissional da educação.

O subprojeto do PIBID em Matemática no IFES Campus Cachoeiro de Itapemirim foi coordenado por duas professoras lotadas na Coordenadoria do Curso de Licenciatura em Matemática e tem por objetivo potencializar a formação inicial de professores de Matemática por meio de ações, experiências metodológicas e práticas inovadoras que ressignifiquem o ensino Matemática, de modo a levar os futuros docentes a refletirem criticamente sobre a sua prática na sala de aula.

Os Coordenadores do Subprojeto de Matemática do IFES campus Cachoeiro de Itapemirim acompanham o trabalho dos supervisores da Educação Básica nas escolas parceiras por meio de reuniões semanais e da análise dos materiais e métodos desenvolvidos, com vistas ao redirecionamento dos trabalhos em caso de necessidade ou nova demanda. Cabe também aos Coordenadores de Área do campus coordenar e acompanhar os grupos de estudos planejando com os bolsistas as atividades que serão desenvolvidas nas escolas parceiras, avaliando os bolsistas e a satisfação dos alunos nas escolas parceiras.

O que dizem as escolas, a universidade e os bolsistas

Nos relatos dos Professores Supervisores, a presença dos bolsistas do PIBID na sala de aula contribui para o aprendizado dos alunos inseridos no programa e faz com que eles tenham maior interesse no desenvolvimento das atividades, por se tratarem de atividades e métodos bem atrativos.

Os bolsistas do PIBID trouxeram contribuições para as escolas parceiras com a atividade de revitalização e manutenção do LEM - Laboratório de Ensino de Matemática das escolas. Para aqueles que possuem uma visão atualizada de educação matemática, Lorenzato (2012) afirma que o laboratório de ensino é uma grata alternativa metodológica porque, mais do que nunca, o ensino da matemática se apresenta com necessidades especiais e o LEM pode prover a escola para atender a essas necessidades.

Segundo Gatti (2014), o PIBID estimula estudantes a escolher a docência e a nela permanecerem, valorizando o curso de licenciatura nas instituições que acolhem e implementam o programa. As atividades desenvolvidas pelos bolsistas do PIBID nas escolas parceiras propiciam a interação no ambiente escolar, fator fundamental no processo de formação, que favorece ao futuro professor o conhecimento da realidade do seu campo de trabalho.

Uma bolsista do PIBID relata que:

É muito gratificante e emocionante pra nós alunos de licenciatura em matemática do IFES Campus Cachoeiro, participantes do projeto PIBID, termos participado desses eventos na escola. Os alunos participam e se superam nas apresentações. A Mostra é visitada por alunos do Ensino Fundamental e por alunos do Ensino Médio. Os alunos apresentam os trabalhos, as pesquisas e experiências aos demais. Vi na Mostra alunos tímidos falarem e explicarem com tanta clareza que sentia vontade de chorar ao vê-los com tanta dedicação falarem de assuntos complexos. Me sinto feliz em saber que tive participação na aprendizagem desses alunos e saber que aprendi muito com eles. Essa experiência com o PIBID me trouxe segurança no meu curso, deixei de lado o medo de frente de sala, o medo de errar, porque sei que se me preparar tudo é possível. Vi não só o meu crescimento, como de colegas de faculdade que entraram no PIBID e a superação foi visível a todos (Registro da Bolsista Nº 13).

O PIBID enquanto um programa de fomento, de valorização da licenciatura e de atuação docente, tornou-se um importante programa no IFES, capaz de situar a formação docente sob a identidade institucional. Entre as contribuições do programa para o IFES, as escolas de educação básica e os licenciandos, destacamos: a relação entre o ensino superior e a educação básica; a vivência escolar; o desenvolvimento profissional; a valorização docente; a formação do professor pesquisador; a qualificação do ensino; o desenvolvimento de novas metodologias de ensino e o trabalho colaborativo. O PIBID contribui significativamente para a formação de futuros professores e com isso elevou a qualificação profissional. (IFES, 2016, p. 182).

Sobre o ambiente de aprendizagem que o PIBID proporciona e as mudanças que o programa traz na atuação profissional, os relatos dos bolsistas do PIBID foram claros e significativos:

Com certeza para minha formação o PIBID foi melhor ou muito melhor do que o próprio estágio em sala de aula o que nos deixa muito próximo do professor e do aluno a gente tem o contato com o supervisor que nos orienta com o coordenador que nos dá a dica que nos dá referência para gente melhor estudar, esse trabalho de integração nosso aqui na escola e com o professor e supervisor lá nos orientando isso contribui muito para o desenvolvimento do nosso papel aqui na escola a gente consegue ver a aprendizagem acontecendo ali no dia-a-dia e um aluno satisfeito porque aprendeu (bolsista do PIBID nº 33 da Escola Parceira D)..

Participar do PIBID e desenvolver as atividades fortaleceu a minha formação eu me sinto bem quando chego lá na escola e sou reconhecido como professor. O PIBID me mostra como é a escola na realidade da escola para gente conhecer como realmente vai ser quando for atuar. (bolsista do PIBID nº 8 da Escola Parceira A).

Os relatos se direcionam para um outro objetivo¹² do PIBID, que trata de elevar a qualidade da formação inicial de professores nos cursos de licenciatura, promovendo a integração entre educação superior e educação básica. Quando questionados sobre a importância do bolsista do PIBID na escola, os professores supervisores, relatam:

As aulas com as atividades desenvolvidas pelos bolsistas do PIBID proporcionaram aos alunos um momento de suprir as dificuldades encontradas em sala de aula. Os bolsistas do PIBID com essas atividades observaram como é na realidade uma sala de aula, o planejamento de uma

¹² Sobre os objetivos do PIBID ver: <https://capes.gov.br/educacao-basica/capespibid/pibid>

turma, o atendimento ao aluno, isso tudo colaborou para o crescimento deles (Registro Textual da Supervisora da Escola A).

As atividades que os bolsistas do PIBID elaboram são importantes tanto para os alunos como para nós professores, elas reforçam a nossa prática (Registro Textual da Supervisora da Escola B).

Os alunos têm melhorado seu rendimento escolar e sua participação durante as aulas. As turmas aonde o projeto vem sendo desenvolvido estão se destacando em relação às outras turmas. Com as aulas de reforço, os alunos com dificuldades têm melhorado o rendimento em sala e suas notas em avaliações (Registro Textual da Supervisora da Escola D).

Em pesquisa realizada, Felício (2014) aponta que um dos sentidos atribuídos pelos licenciandos ao PIBID reconhece-o como espaço vivencial em que se consideram novas e múltiplas possibilidades de atuação com base em diversificadas estratégias pedagógicas. Acentua-se, assim, o desenvolvimento da compreensão crítica que aponta para a valorização e o resgate do professor como agente de transformação e construção das alternativas pedagógicas para o sucesso escolar dos educandos. Sobre os reflexos do PIBID na definição profissional, a autora destaca que:

Um reflexo identificado diz respeito à mudança de concepção sobre a profissão docente. Ou seja, percebemos que os licenciandos vão se afastando de um senso comum que reduz à docência à transmissão de conteúdo, ao mesmo tempo em que se aproximam de uma compreensão mais epistemológica da docência e de seu papel como ator social (FELICIO, 2014, p 430).

Para os bolsistas, a experiência no PIBID contribuiu para a sua formação inicial uma vez que ao serem questionados sobre a relevância do programa os mesmos relatam que ele significa:

Uma excelente oportunidade de me inserir no meio que me aguarda (bolsista do PIBID nº 4).

O PIBID é uma oportunidade de experiência e desenvolvimento no qual todos poderiam ter a oportunidade de participar, pois é de grande ajuda e qualificação para o futuro docente (bolsista do PIBID nº 7).

Um programa que insere o aluno de licenciatura na escola e o prepara por meio de diversas experiências (bolsista do PIBID nº 9).

A alavanca que eu necessitava para continuar no curso de licenciatura. O programa tem mediado para mim a oportunidade de aprender e ensinar ao mesmo tempo. O PIBID significa para mim parte da minha graduação, pois, a partir dele tive suporte para continuar estudando (bolsista do PIBID nº 13).

Uma oportunidade de experienciar a prática na sala de aula (bolsista do PIBID nº 17).

Os relatos ilustram os resultados revelando características da relação estabelecida pela universidade com a escola. (i) a inserção dos bolsistas do PIBID no contexto das escolas públicas; (ii) a contribuição para a formação de professores; (iii) a articulação entre a teoria e a prática; (iv) a vivência em casos concretos, atendendo aos objetivos do Programa.

Sobre este papel do PIBID, Gatti (2014) aponta que:

O PIBID é uma proposta de incentivo e valorização do magistério e de aprimoramento do processo de formação de docentes para a educação básica. Os alunos de licenciatura exercem atividades pedagógicas em escolas públicas de educação básica, contribuindo para a integração entre teoria e prática, para a aproximação entre universidades e escolas e para a melhoria de qualidade da educação brasileira GATTI, 2014, p. 5).

No PIBID do IFES Campus Cachoeiro de Itapemirim, os coordenadores desenvolvem funções de acordo com o Decreto¹³ que instituiu formalmente o programa conforme no Capítulo terceiro. Os coordenadores, questionados sobre como avaliariam o PIBID para a formação dos alunos do curso de Licenciatura em Matemática do IFES Campus Cachoeiro de Itapemirim, relataram da seguinte forma:

Avalio positivamente o PIBID, uma vez que a participação dos estudantes no programa contribui para uma maior aproximação com o trabalho docente possibilitando uma reflexão sobre a teoria e prática necessárias para sua formação (Coordenador A).

Avalio positivamente o PIBID. O programa possibilita essa articulação teoria e prática descrita anteriormente e insere os estudantes em uma “comunidade de prática” que permite que esses sujeitos reflitam sobre a docência, ensino de matemática, a escola, o ensino e a aprendizagem ao longo de sua formação inicial. Formando com o auxílio do PIBID, profissionais críticos e conscientes da realidade educacional (Coordenador B).

O subprojeto do PIBID no IFES Campus Cachoeiro de Itapemirim merece destaque, já que foi evidenciado nos depoimentos dos coordenadores, a necessidade da implementação da formação inicial de professores desde o início da formação dos licenciandos com sua inserção na escola de Educação Básica. A intensa ida da universidade à escola de Educação Básica, a participação dos bolsistas do PIBID em eventos, a realização das atividades nas escolas servem de exemplo para o intenso diálogo estabelecido entre os espaços de formação e os de atuação docente. Assim como Souza (2016), destacamos que em função do PIBID, as escolas parceiras mudaram sua organização por conta da qualidade das atividades desenvolvidas as quais foram inseridas no cotidiano das escolas o que proporciona a criação de espaços híbridos, na perspectiva de Zeichner (2010), de conhecimento prático profissional e acadêmico, como uma nova metodologia para aprimorar a aprendizagem dos bolsistas do PIBID, futuros professores de Matemática.

Referencias

Brasil DEB - Diretoria de Educação Básica Presencial/CAPES – Relatório de Gestão 2009 – 2013. Disponível em < <https://www.capes.gov.br/images/stories/download/bolsas/2562014-relatorio-DEB2013- web.pdf>>. Acesso em: 21 de setembro de 2017.

Brasil. Conselho Nacional de Educação. Define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação inicial em nível superior (cursos de licenciatura, cursos de formação pedagógica para graduados e cursos de segunda licenciatura) e para a formação continuada.

¹³ [DECRETO Nº 7.219, DE 24 DE JUNHO DE 2010](#)

- Brasil, DEB - Diretoria de Educação Básica Presencial/Capes – Relatório de Gestão 2009 – 2013. Disponível em < <https://www.capes.gov.br/images/stories/download/bolsas/2562014-relatorio-DEB2013-web.pdf>>. Acesso em: 05 de jul. de 2018.
- Damiani, M. F. Entendendo o ensino colaborativo em educação e revelando seus benefícios. Revista Educar. Curitiba, n. 31, p. 213-230, abr. 2008.
- Gatti, Bernardete Angelina, André, Marli E. D. A., Gimenes, Nelson A. S., Ferragut, Laurizete. Um estudo avaliativo do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação   Docência (PIBID). São Paulo: FCC/SEP, 2014.
- Souza, Fabiano dos Santos. Política Nacional de Formação de Professores: análise da implementação do PIBID de matemática pela Universidade Federal Fluminense no Período de 2009-2013. Tese de Doutorado. 2016 - Doutorado em Educação UFF
- Ifes. Pró-Reitoria de Ensino. Relatório Final de atividades do PIBID no IFES. Vitória ES, 2012 a 2017.
- Felício, Helena Maria dos Santos. O PIBID como "terceiro espaço" de formação inicial de professores - Rev. Diálogo Educ., Curitiba, v. 14, n. 42, p. 415-434, maio/ago. 2014.
- Medeiros, Josiane Lopes e Pires, Luciene Lima. O PIBID no Bojo das políticas educacionais de formação de professores. Cad. Pes., São Luís, v. 21, n. 2, mai./ago. 2014
- Novoa. A. Os professores e a sua formação (3a ed.). Lisboa: Publicações Dom Quixote.1997. Novas disposições dos professores: A escola como lugar da formação; Adaptação de uma conferência proferida no II Congresso de Educação do Marista de Salvador (Baía, Brasil), em julho de 2003.Disponível em: http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/685/1/21205_ce.pdf. Acesso em 05 de jul. de 2018.
- Zeichner, K. Repensando as conexões entre a formação na universidade e as experiências de campo na formação de professores em faculdades e universidades. Educação, Santa Maria, v. 35, n. 3, p. 479-504, set./dez. 2010.

PROPUESTA DE UN PERFIL DE INGRESANTE A LA CARRERA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE PIURA

Gloria Solvey Crespo Guerrero

gcrespog@unp.edu.pe

Universidad Nacional de Piura, Perú

Resumen

El propósito de la investigación es validar el proceso de formulación de una propuesta de perfil del ingresante para la Carrera Profesional de Matemática de la Universidad Nacional de Piura, con un enfoque curricular por competencias desde una perspectiva socioformativa. Se analiza si el perfil del ingresante contenido en el plan curricular 2017, responde a las exigencias del contexto educativo actual en cuanto a competencias genéricas y específicas requeridas para afrontar con éxito los retos académicos del primer año de estudios en la carrera. Para la identificación de las competencias genéricas y específicas formuladas en el perfil se analizaron propuestas de competencias de diversas organizaciones y proyectos internacionales, contenidos mínimos obligatorios de la Educación Básica, que se relacionan directamente con los cursos del primer año, perfiles de ingreso de carreras de matemáticas de diversas universidades y experiencias tanto nacionales como internacionales en evaluación de competencias al ingreso a la universidad.

Palabras clave: Perfil del ingresante, competencias genéricas, competencias específicas y enfoque socioformativo.

Introducción

El Perfil del Ingresante (PI) propuesto para la Carrera Profesional de Matemática de la Universidad Nacional de Piura (UNP) ha sido elaborado siguiendo la metodología de diseño curricular por competencias que responde al enfoque socioformativo planteado por el investigador Sergio Tobón. Esta propuesta de PI responde a este enfoque pues destacan particularidades transversales que no contienen otros enfoques como: necesidades educativas actuales (sociales, culturales, ambientales), un enfoque centrado en habilidades más que en conocimientos, y le añade un toque personal (humanismo y ética); particularidades que se ajustan a los requerimientos de la propuesta de PI elaborado.

Ya que el PI propuesto es en base a competencias, se tomaron en cuenta los aspectos conceptuales y metodológicos esenciales de las competencias. En el PI contenido en el Plan Curricular 2017 de la Carrera Profesional de Matemática de la UNP, se ha observado que con respecto a la redacción y la estructura de las competencias la mayoría de ellas están formadas por un verbo y un contenido conceptual. No presentan la estructura completa planteada en el

enfoque socioformativo (verbo - contenido conceptual - finalidad - condición del contexto) tal como se fundamenta en el marco teórico de esta investigación. Tampoco reflejan una integración de los tres saberes (saber hacer - saber ser - saber conocer). Son más bien descripciones de rasgos del perfil de ingreso, cuyo énfasis radica en el contenido conceptual. Por lo tanto, las competencias del PI contempladas en dicho plan no se ajustan al concepto de "actuación integral" del enfoque socioformativo, es por ello, que la intención de esta propuesta es mejorar lo que ya está hecho y agregar lo que le falta en cuanto a las competencias específicas de la Carrera de Matemática.

Problema de investigación

Se observó en el Plan Curricular 2017 de la Carrera Profesional de Matemática de la UNP que el PI formulado comprende un conjunto de rasgos que caracterizan al ingresante de la UNP, más no contiene los rasgos y características que debe tener el ingresante para abordar los estudios de la carrera de matemática. Según Montufar (2002), el perfil del ingresante en el marco de la universidad, tiene dos dimensiones claramente diferenciadas: la primera, es la dimensión institucional que da respuesta a la pregunta ¿qué competencias debe poseer el futuro estudiante para poder ingresar a la universidad?; la segunda es la dimensión de carrera que da respuesta a la pregunta ¿qué competencias y características específicas se requieren para ingresar a una determinada carrera?; interrogante aún no resuelta en la Escuela Profesional de Matemática (EPM) de la UNP, pues no existen estudios para determinar si el PI formulado en dicho plan responde a las exigencias del contexto educativo actual en cuanto a las competencias requeridas para afrontar con éxito los retos académicos del primer año de estudios en la carrera.

Por otro lado, el nuevo Modelo de Acreditación para Programas de Estudios de Educación Superior Universitaria publicado por SINEACE, en noviembre del 2016, establece entre sus 34 estándares de calidad, dos estándares relacionados al perfil de ingreso, dentro de la dimensión Formación Integral. El estándar número 9, expresa que el plan de estudios incluye entre otros componentes los perfiles de ingreso y egreso, y que el programa de estudios tiene definidas las competencias que debe tener un estudiante cuando ingresa y egresa. El estándar número 18, expresa que el programa de estudios ha definido el perfil de ingreso, el cual contemplará los mecanismos de admisión institucionales; y que el programa de estudios reporta la tasa de ingreso por proceso de admisión, así como el resultado de desempeño de los ingresantes en dicho proceso, en función del perfil de ingreso.

Este trabajo tiene como uno de sus puntos de enfoque, la intención de brindar un aporte para alcanzar estos indicadores de calidad.

Aspectos teóricos y metodológicos

Tobón (2013) señala que el perfil del ingresante describe las competencias básicas, genéricas y específicas que deben tener los estudiantes al momento de ingresar al programa, acorde con el estudio de los contextos interno y externo.

La metodología empleada para la elaboración del PI propuesto para la Carrera Profesional de Matemática de la UNP consistió en validar el proceso de formulación de perfiles de ingreso propuesto por el investigador Sergio Tobón, quien en su metodología propone tres actividades: revisar el contexto interno y externo de la carrera, determinar qué se espera del ingresante para

que logre el perfil de egreso e identificar las competencias esenciales que deben demostrar los estudiantes al momento de ingresar a la carrera.

Con respecto a la primera actividad se hizo una exhaustiva revisión y análisis de documentos primero del contexto interno en el cual se desarrolla esta propuesta que es la EPM de la UNP, para ver la pertinencia y vinculación con las características de la institución, así como su concordancia con la normativa vigente: Modelo Educativo UNP, Plan Curricular y el Plan de Estudios de la carrera; segundo del contexto externo, del cual se recoge información relevante que responde a las exigencias del contexto educativo actual en cuanto a las competencias genéricas y específicas requeridas para afrontar con éxito los retos académicos del primer año de estudios en la carrera: aportes teóricos de las competencias con enfoque socioformativo, tendencias de diversas organizaciones y proyectos internacionales y latinoamericanos de desarrollo educativo como Tuning América Latina, la Unión Europea (UE), DeSeCo, el Instituto CIFE y OCDE/PISA; al considerar su relevancia en un gran número de sistemas educativos europeos y de nuestro continente, contenidos mínimos obligatorios de la Educación Básica (EB), que se relacionan directamente con los cursos de la Carrera Profesional de Matemática de la UNP, perfiles de ingreso de carreras de matemáticas de otras universidades (3 internacionales y 3 nacionales) y conocimientos y habilidades del área disciplinar Matemática de evaluaciones que se aplican en algunas universidades mexicanas (EXANI II) para el ingreso a la licenciatura de matemática y otras carreras específicas; y las de la evaluación que se aplica para el ingreso a la Unidad Académica de Estudios Generales Ciencias (EE.GG.CC) de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP), que recibe a los que ingresan a carreras de ciencias e ingenierías.

Con respecto a la segunda actividad para determinar qué se espera del ingresante para que logre el perfil de egreso se hizo un análisis comparativo entre las competencias del perfil del ingresante (competencias que se espera tengan desarrollado los estudiantes cuando ingresan), con las competencias del perfil de egreso de la carrera (competencias que se espera tendrán desarrolladas cuando egresan), ambos documentos contenidos en el Plan Curricular de la Carrera; usando como fundamentación teórica las competencias, capacidades, así como los estándares de aprendizaje correspondientes al nivel 7 de las distintas áreas curriculares de la educación básica.

Finalmente, como resultado de estas dos actividades se llegaron a identificar las competencias genéricas y específicas del perfil del ingresante propuesto para la Carrera Profesional de Matemática de la UNP.

Resultados obtenidos

Los principales resultados obtenidos en la investigación son:

1. En el PI contenido en el Plan Curricular 2017 de la Carrera Profesional de Matemática de la UNP, están incorporadas 22 (70,97%) de las 31 competencias establecidas en el Currículo Nacional de la Educación Básica (CNEB).
2. Del análisis comparativo de las competencias genéricas establecidas en el Modelo Educativo UNP, las competencias del PI contenido en el Plan Curricular 2017 de la Carrera Profesional de Matemática de la UNP, las competencias de la EB contenidas en el Currículo Nacional y las competencias de la UE, DeSeCo, Tuning América Latina y el Instituto CIFE; se llegó a

identificar nueve rasgos de competencias comunes (comunicación en lenguas maternas, uso de las TIC, comunicación en lenguas extranjeras, investigación, matemática y ciencia y tecnología, trabajo en equipo, gestión de proyectos de emprendimiento, compromiso ético, ciudadano y responsabilidad social, gestión de su propio aprendizaje) a partir de los cuales se formularon las competencias genéricas del PI propuesto. Además, se pudo observar que de estos 9 indicadores de competencias genéricas 7 indicadores presenta el PI contenido en el Plan Curricular 2017 de la Carrera de Matemática de la UNP, correspondiendo a un aproximado de 77 %, evidenciando con esto que dicho plan si tiene incorporadas la mayoría de competencias genéricas; sin embargo, no las incorpora al 100 %.

3. Del análisis de la correspondencia entre las competencias y capacidades del área de matemática de la educación secundaria contenidas en el Currículo Nacional con las del Programa PISA/OCDE, de si estas están en coherencia con los conocimientos y habilidades de la evaluación PUCP y el EXANI II; de cuáles son los conocimientos, habilidades y actitudes de perfiles de ingreso a la carrera de Matemática de diversas universidades nacionales e internacionales, se llegó a determinar los siguientes rasgos comunes de competencias específicas:
 - 1) Conocimientos básicos de aritmética, álgebra, geometría, trigonometría, estadística descriptiva y probabilidad.
 - 2) Habilidades disciplinares de matematización, comunicación y representación de ideas matemáticas, elaboración y uso de estrategias para resolver problemas.
 - 3) Capacidad de análisis y síntesis.
 - 4) Interés, gusto y valor a las matemáticas.
 - 5) Creatividad en la resolución de problemas.
 - 6) Actitudes disciplinares de perseverancia, responsabilidad y rigurosidad.

A partir de estos seis rasgos de competencias se formularon las competencias específicas del PI propuesto para la Carrera Profesional de Matemática de la UNP, considerando que también se corresponden con los conocimientos, capacidades y actitudes de las competencias matemáticas de la educación secundaria y que se relacionan directamente con los contenidos matemáticos de los cursos del primer año de la carrera. Además, se pudo observar que de estos seis indicadores de competencias específicas ningún indicador presenta el PI contenido en el Plan Curricular 2017 de la Carrera de Matemática de la UNP, evidenciando con esto que este perfil no tiene incorporadas competencias específicas de la carrera de matemática que respondan a los requerimientos que exige el contexto educativo actual. Finalmente, como resultado de la revisión bibliográfica realizada y de las acciones ejecutadas en la investigación en base a los criterios considerados en la metodología de elaboración de perfiles de ingreso propuesta por el investigador Sergio Tobón se determinaron las competencias genéricas y específicas del perfil de ingresante propuesto para la Carrera Profesional de Matemática de la UNP.

Propuesta: Perfil del Ingresante a la Carrera de Matemática de la UNP

Dimensión	Competencias Genéricas
Conocimientos y habilidades generales	1. Comunica asertivamente sus mensajes en forma oral y escrita tanto en su lengua materna como en una lengua extranjera, para relacionarse con los demás en contextos sociales y culturales variados. 2. Comprende y produce diversos tipos de textos en su lengua materna, atendiendo a sus propiedades de cohesión, coherencia y adecuación; además teniendo en cuenta sus dimensiones fonológicas, sintácticas, semánticas y pragmáticas; para expresar creativamente sus ideas. 3. Gestiona el conocimiento y la información para desempeñarse interactivamente, demostrando dominio de los diferentes programas y herramientas tecnológicas con un sentido crítico. 4. Indaga mediante métodos científicos acerca del funcionamiento y estructura del mundo natural y artificial que lo rodea, aplicando el análisis, síntesis de la información y verificando la procedencia de las fuentes, para construir su conocimiento y aplicar este nuevo conocimiento en la práctica, con responsabilidad y sentido crítico. 5. Comprende y resuelve problemas matemáticos relacionados con su contexto, que implican el uso de estrategias de razonamiento aritmético, algebraico, geométrico y estadístico, para desarrollar el pensamiento y las habilidades lógicas necesarias para un aprendizaje eficiente posterior de los conceptos básicos de la matemática superior. 6. Demuestra conocimiento de los principios básicos de las áreas de Biología, Química y Física, para la comprensión de su entorno, asumiendo una postura crítica, así como un compromiso ético con su medio ambiente.
Recursos Sociales	7. Participa y lidera actividades colaborativas en un determinado equipo de trabajo para alcanzar una determinada meta, con planeación y objetivos bien definidos, mostrando empatía, tolerancia y asertividad. 8. Gestiona responsablemente proyectos de emprendimiento económico y social para fomentar la iniciativa y el espíritu emprendedor.

Recursos Psicológicos	9. Demuestra compromiso ético, ciudadano y responsabilidad social, para actuar con responsabilidad y justicia en aquellos asuntos públicos que lo involucran como ciudadano responsable y reflexivo frente a la problemática de su contexto.
	10. Conviene democráticamente, relacionándose bien con los demás y desarrollando estrategias para resolver conflictos.
	11. Gestiona sus aprendizajes, planes de vida y proyectos de manera autónoma, para alcanzar la realización personal y las metas de aprendizaje establecidas, con perseverancia, confianza y seguridad; y desarrollando la autocritica para autorregular sus aprendizajes.

Competencias Específicas

- 1) Conoce e identifica los distintos conjuntos numéricos (naturales, enteros, racionales e irracionales y reales) y sus operaciones, y los utiliza junto con sus propiedades para representar, interpretar y comunicar información cuantitativa presente en diferentes contextos de la vida cotidiana y para resolver problemas del contexto real y matemático, comprendiendo y valorando la utilidad de los números en sus distintas expresiones (notación científica, fracción, decimal, porcentaje), demostrando confianza en sus propias capacidades y perseverancia en la búsqueda de soluciones.
 - 2) Reconoce patrones o la regla de formación de sucesiones o secuencias numéricas y gráficas en situaciones problemáticas; y los usa para hacer generalizaciones y predicciones sobre los resultados esperados y resolver problemas asociados a las mismas, utilizando distintos procesos de razonamientos intuitivo, inductivo y deductivo; con autonomía y sentido crítico.
 - 3) Reconoce e interpreta relaciones de igualdad, desigualdad y dependencia en situaciones problemáticas y las modela a través de ecuaciones, inecuaciones, sistemas de ecuaciones y funciones; reconociendo datos, relaciones entre los datos, condiciones y variables de la situación; aplicando el análisis, razonamiento lógico y valorando el lenguaje algebraico como una herramienta de modelación para resolver distintas situaciones de la vida real.
-

-
- 4) Plantea y resuelve ecuaciones, inecuaciones y sistemas de ecuaciones en el conjunto de los números reales, aplicando adecuadamente los procedimientos de cálculo, fórmulas y algoritmos, para encontrar el conjunto solución que la satisfice e interpretar la solución en sus distintas representaciones gráfica, simbólica y conjuntista; comprobando la solución obtenida con rigurosidad y confianza en sus capacidades.
 - 5) Analiza y utiliza las funciones reales de variable real, para modelar situaciones problemáticas del contexto real, reconociéndolas a partir de sus descripciones verbales, sus tablas, sus gráficas o sus representaciones simbólicas; relaciona las diferentes formas de representación de acuerdo con la situación y el propósito particular, y valora la modelización matemática como un recurso para hacer predicciones sobre el comportamiento de la situación problemática que representa.
 - 6) Conoce los conceptos y procedimientos básicos de la geometría analítica plana y los utiliza para representar, describir y analizar configuraciones geométricas sencillas como puntos, rectas y cónicas en el plano cartesiano, teniendo en cuenta sus características y sus modelos algebraicos, para resolver situaciones problemáticas de contexto real y matemático; con autonomía, perseverancia y creatividad.
 - 7) Calcula perímetros, áreas y volúmenes de figuras geométricas bidimensionales y tridimensionales, entendiendo y aplicando estos conceptos geométricos para dar solución a problemas contextualizados; seleccionando y utilizando con precisión la fórmula y la unidad de medida convencional pertinente al atributo que se quiere medir; argumentando y reflexionando sobre la validez de los resultados en el contexto real del problema.
 - 8) Identifica y representa figuras geométricas bidimensionales y tridimensionales a partir de enunciados que expresan sus características y propiedades, para aplicar en la resolución y formulación de problemas geométricos del contexto real y matemático reconociendo conexiones entre conceptos geométricos y la realidad; mostrando autonomía y perseverancia en el logro de resultados; valorando tanto los procesos matemáticos como los resultados obtenidos.
 - 9) Identifica y expresa relaciones y propiedades de los triángulos relacionados a su congruencia, semejanza y relaciones métricas, aplicando y justificando los criterios de congruencia y semejanza entre triángulos y las relaciones métricas para resolver y formular problemas geométricos; expresándose de manera eficaz, haciendo uso del lenguaje algebraico, gráfico y simbólico adecuados al contexto y a la situación.
 - 10) Reconoce y utiliza las razones, identidades y funciones trigonométricas para interpretar, describir y resolver problemas trigonométricos del contexto real y matemático, empleando estrategias, procedimientos matemáticos, y recursos gráficos de manera
-

flexible y eficaz en el proceso realizado, para analizar y resolver las diversas situaciones donde se aplican estos conceptos trigonométricos.

11) Organiza e interpreta datos provenientes de diferentes fuentes de información, mediante el uso adecuado de variables estadísticas (cualitativas o cuantitativas) y procedimientos matemáticos de recolección (encuesta), procesamiento (tablas de frecuencia, gráficos estadísticos) y valoración de los datos; para elaborar conclusiones y tomar decisiones adecuadas en investigaciones estadísticas simples o situaciones que expresan características o cualidades de una población; mostrando honestidad y transparencia al comunicar procesos de solución y resultados.

12) Usa conceptos y procedimientos de la teoría de probabilidades como: la realización de conteos y cálculo de probabilidades, para medir la probabilidad de un evento o suceso, resolver problemas de situaciones aleatorias a partir de modelos probabilísticos que ayuden a tomar decisiones en situaciones de incertidumbre, de azar o de riesgo, en las que no es posible predecir con seguridad lo que va a pasar; considerando el contexto, las condiciones y restricciones para la determinación de su espacio muestral en un experimento aleatorio; tomando conciencia de que su ocurrencia y sus resultados son impredecibles para elaborar conclusiones y tomar decisiones adecuadas con honestidad y sentido crítico.

Referencias

- Beneitone, P., Esquetine, C., González, J., Maletá, M., Siufi, G., Wagenaar R., eds. (2007). *Reflexiones y perspectivas de la Educación Superior en América Latina. Informe final-Proyecto Tuning América Latina 2004-2007*. España: Universidad de Deusto, Universidad de Groningen. Recuperado de http://tuning.unideusto.org/tuningal/index.php?option=com_docman&Itemid=191&task=view_category&catid=22&order=dmdate_published&ascdesc=DESC
- EXANI-II. (2018). *Guía del Examen Nacional de Ingreso a la Educación Superior*. 23a. Ed. México: Centro Nacional de Evaluación para la Educación Superior CENEVAL.
- Ministerio de Educación MINEDU (2016). *Currículo Nacional de la Educación Básica*. Recuperado de: <http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-2017.pdf>
- Ministerio de Educación MINEDU (2015). *La Competencia Matemática en el Marco de PISA 2015. Orientaciones Didácticas*. Recuperado de: http://recursos.perueduca.pe/sec/images/competencia_matematica_2015.pdf
- Ministerio de Educación MINEDU (2015). *Diseño Curricular Nacional modificado por RM. 199-2015-MINEDU*. Recuperado de: <http://www.tudocente.com/disenio-curricular-nacional-modificado-por-rm-199-2015-minedu/>
- Ministerio de Educación MED (2015). *Rutas del Aprendizaje. Versión 2015. ¿Qué y cómo aprenden nuestros estudiantes? VII Ciclo. Área Curricular Matemática*. Recuperado de: <http://www.minedu.gob.pe/DeInteres/pdf/documentos-secundaria-matematica-vii.pdf>
- Montúfar, J. (2002). *El Rediseño del Perfil Profesional de las Carreras de la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán en el Marco del Plan de Mejoramiento Académico*. Tesis de Maestría. Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán. Honduras.
- Oficina Central de Admisión e Informes a la Pontificia Universidad OCAI (2016). *Sistema de Admisión a la Pontificia Universidad Católica del Perú*. Católica del Perú. OCAI. Recuperado de: www.pucp.edu.pe/admision/publicaciones/2016-sistema-admision-pucp.pdf
- Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico OCDE (2005). *La definición y selección de competencias clave. Resumen ejecutivo*. Recuperado de: http://comclave.educarex.es/pluginfile.php/130/mod_resource/content/3/DESECO.pdf
- SINEACE (2016). *Modelo de Acreditación para Programas de Estudios de Educación Superior Universitaria*. Sistema Nacional de Evaluación, Acreditación y Certificación de la Calidad Educativa. Recuperado de: <https://www.sineace.gob.pe/wp-content/uploads/2017/07/Anexo-Resoluci%C3%B3n-175-2016-SINEACE-CDAH-P.pdf>

Tobón, S. (2013). *Metodología de Gestión Curricular. Una perspectiva socioformativa. 1ra Ed.* México: Trillas, 2013.

Unión Europea UE (2006). *Competencias Claves para el aprendizaje permanente. Un marco de referencia europeo.* Recuperado de <https://www.mecd.gob.es/dctm/ministerio/educacion/mecu/movilidad-europa/competenciasclave.pdf?documentId=0901e72b80685fb>

Universidad Nacional de Piura UNP (2014). *Modelo Educativo.* Piura – Perú.

Universidad Nacional de Piura UNP (2017). *Plan Curricular de la Carrera Profesional de Matemática.* Piura-Perú.

EL SISTEMA MÉTRICO DECIMAL EN LAS ESCUELAS DE PERÚ: UN ANÁLISIS DEL MANUAL DE ARITMÉTICA PRÁCTICA DEL AÑO DE 1864

Elenice de Souza Lodron Zuin

elenicezuin@gmail.com

Pontificia Universidade Católica de Minas Gerais, Brasil

El sistema métrico decimal ha se constituido en un contenido relevante en las matemáticas por cambiar los programas escolares con la introducción de otros tópicos como los números decimales. En Perú, el referido sistema ha sido oficializado en 1863. Había una prioridad política para su transmisión, adquisición y difusión en toda la sociedad. En este artículo, presento algunos resultados de la investigación realizada, a través de un análisis descriptivo del contenido sistema métrico decimal presente en el libro de texto "Manual de Aritmética Practica", publicado en 1864, escrito por Nicanor Boloña, profesor de la Escuela Normal Central, en Lima, Perú. Para el análisis, fue considerada las categorías de la metodología del análisis didáctico. Como el país pasaba por un período de transición de los estándares de medición, el autor decide mantener las medidas antiguas e incluye el sistema métrico en una perspectiva informativa, pero no agrega aspectos históricos.

Palabras clave: Aritmética, Sistema métrico decimal, Siglo XIX, Perú.

Introducción

En todo el mundo hubo tentativas para unificar los pesos y medidas. Por muchos siglos, los diversos padrones no oficiales o los que no tenían la correspondencia exigida circulaban entre la población, mismo que hubiese leyes y punición para los infractores.

En fines del siglo XVIII, en los escenarios de la Francia Revolucionaria, entre los ideales de libertad, fraternidad e igualdad, estaba la intención de establecer un sistema de mediciones, único, racional, basado en la naturaleza, no solo para ser utilizado en el territorio francés, sino internacionalmente. La Asamblea Nacional francesa le encomendó en 1790 a la Academia de las Ciencias de París que creara un otro sistema. Decidieron tomar para la unidad de medida lineal la diezmillonésima parte de un cuarto del meridiano terrestre que pasa por París, más precisamente, de Dunkirk, Francia, hasta el Castillo de Montjuic, ubicado en Barcelona, España. A nueva unidad de longitud, el metro, y las otras medidas que forman el sistema métrico decimal cambian las formas de medición.

Entre los primeros países a adoptar el sistema francés de pesas y medidas está el Perú. La ley de 16 de Diciembre de 1862 estableció en el país el sistema métrico decimal, durante la

presidencia del Gran Mariscal, Miguel de San Román y Meza (1802-1863) y, en 14 de febrero de 1863, también en el régimen monetario.¹⁴ (Romero, 2006).

Cambiar los estándares de medición no era una tarea sencilla, pues estos cambios significaban rupturas de códigos culturales, de la tradición de la población. En todos los países que adoptaran el sistema de medidas decimales, la escuela ha sido la principal aliada de los gobernantes. Los maestros y, después, los alumnos tendrían un papel fundamental en el proceso de cumplimiento de la ley. Había urgencia por incluir los nuevos saberes en las Aritméticas escolares, publicar otros libros de texto con la inclusión del sistema métrico y preparar a los estudiantes, futuros ciudadanos, para usar los nuevos estándares de medición. Era necesario hacer las correlaciones adecuadas entre las medidas nuevas y antiguas y llevar el conocimiento de cómo operar con las medidas decimales. En Perú no ha sido diferente. A través de los niños, preparados para operar con los nuevos patrones, los conocimientos sobre las medidas decimales podrían transmitirse para sus padres y otras personas mayores en su familia y comunidad.

Había toda una clase de personas que necesitaban conocer y saber operar las nuevas medidas, los ciudadanos comunes, los empleados y empleadores que estaban en el comercio e industria y los funcionarios de los demás sectores de la administración pública. Las autoridades gubernamentales esperaban que los libros de texto de Aritmética levasen los nuevos "*conocimientos a enseñar y conductas a inculcar*, y un conjunto de prácticas que permiten la transmisión de esos *conocimientos* y su incorporación." (Julia, 2001, p. 10).

En la Educación Matemática, la escolarización del sistema métrico decimal es un tema de gran relevancia, pues, la introducción de ese contenido en las instituciones de enseñanza ha requerido un cambio en la aritmética escolar. No se trataba solo de introducir el sistema métrico, sino de agregar otros conocimientos, como fracciones y números decimales, requisitos fundamentales para una comprensión completa del nuevo sistema metrológico. En esta perspectiva, Chervel (1990) alega que una disciplina escolar es definida como un conjunto conexo entre objetivos, contenidos, métodos y prácticas. Es innegable que los manuales pedagógicos participan e interfieren en la producción de una cultura escolar (Choppin, 2000).

El análisis de los libros de texto nos posibilita observar más de cerca los contenidos que eran propuestos, lo que nos permite hacer inferencias sobre los planes de estudio que se practicaron en las escuelas en los siglos pasados.

Los textos de la matemática escolar publicados, en el siglo XIX, en Brasil, Portugal y España han sido las principales fuentes primarias de mis investigaciones con foco en el análisis del tratamiento dado al Sistema Métrico Decimal en los libros. Ahora, mi mirada se vuelve a los libros de texto publicados en Perú que han incluido el Sistema Métrico. Siguiendo estos propósitos, presento una descripción y un análisis del contenido del sistema métrico decimal que se encuentra en el libro *Manual de Aritmética Práctica*, cuyo autor es Nicanor Boloña,

¹⁴ La "Ley sobre amonedación conforme al Sistema Métrico Decimal" estableció el sistema bimetalista en el proceso económico de cambio. El *Sol*, la nueva unidad monetaria, divisible en 100 centavos. Han sido adoptadas, como unidades monetarias, el *Sol de Plata* y el *Sol de Oro*. Pero, la Municipalidad hizo conocer, en 4 de septiembre de 1916, que el Sistema Métrico Decimal quedaba establecido obligatoriamente, al menos en Lima.

publicado en Lima, Perú, en el año de 1864, poco después de la oficialización del sistema francés de medidas en el país.

Este estudio se convierte para el campo de la Historia de la Educación Matemática, se constituyendo en una investigación cualitativa-descriptiva. Ha sido utilizado el Análisis de Contenido con fundamentación en Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez (2008). Nuestro análisis evidencia a los conceptos, procedimientos, sistemas de representación y aspectos de la fenomenología.

El *Manual de Aritmetica Practica*: aspectos generales

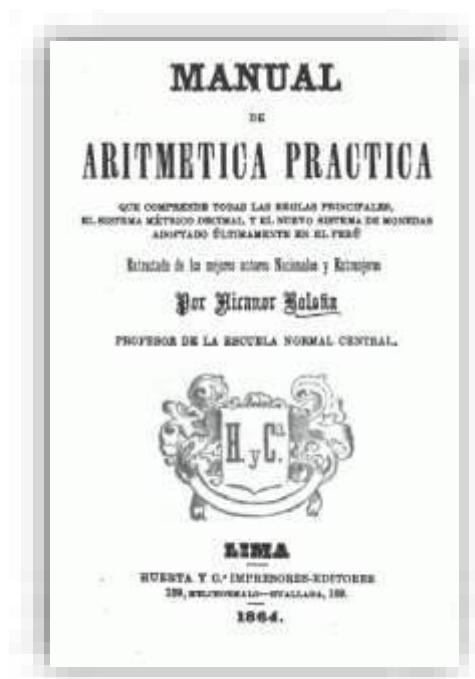


Figura 1 – Portada del Manual de Aritmética Practica (1864)

El libro intitulado Manual de Aritmetica Practica ha sido publicado en 1864, en la capital peruana, por Huerta y Cia Impresores Editores. Justo después del título, hay la información de que el libro “comprende todas las reglas principales, el sistema métrico decimal y el nuevo sistema de monedas adoptadas últimamente en el Perú” y aún que el texto ha sido “extractado de los mejores autores Nacionales y Extranjeros”. Su autor, Nicanor Boloña, ha sido profesor de la Escuela Normal Central.

El libro, con destinación a la enseñanza primaria, contiene 246 páginas, divididas en capítulos. El texto es presentado de forma secuencial, sin numerar a los subtemas. El autor comienza con las nociones generales de la Aritmética y añade los siguientes tópicos: Numeración; Operaciones fundamentales; Divisibilidad de los números; Quebrados comunes; Fracciones decimales; Números denominados; De las medidas en general (incluyendo el Sistema Métrico Decimal); Razones y proporciones; Regla de tres en general; Regla de interés; Descuentos; Regla de aligación; Regla conjunta; Resolución de problemas; Reglas para abreviar varios cálculos aritméticos.

Boloña empieza su obra con la advertencia:

Consagrado hace algunos años á la carrera del profesorado, he sentido la necesidad, cada día más imperiosa, de uniformar la instrucción primaria en sus diferentes ramos, sacándola del estado de verdadera anarquía en que hoy se halla.

Multitud de textos escritos dentro y fuera del país, conteniendo muchas veces doctrina diametralmente opuestas, circulan en nuestros colegios, resultando de aquí, como es fácil suponer, que los estudiantes al pasar de un establecimiento de educación á otro, lo que sucede con frecuencia, se encuentren en la necesidad de cambiar de textos, haciendo nuevos gastos y lo que es más triste aun, perdiendo lo que han estudiado para comenzar de nuevo el aprendizaje.

Con el fin, pues, de satisfacer de algún modo una necesidad tan imperiosa, he resuelto dar á luz el presente manual de Aritmética Práctica, confiado mas en la rectitud de mis intenciones, que mis propias fuerzas. (Boloña, 1864, p. III).

El autor prosigue informando que reunió las mejores obras nacionales y extranjeras y las consultó detenidamente. Guiado por su experiencia como maestro, escribió un tratado que “se halla al alcance de los niños, todo lo que, con más sencillez, claridad y precisión se ha escrito sobre la materia”. Su redacción ha priorizado que los estudiantes adquiriesen conocimientos aritméticos puramente prácticos y que pudiesen, “si lo creyeren conveniente, dedicarse al comercio”. (Boloña, 1864, p. IV).

El libro tiene una función educativa e formativa. Hay un carácter pragmático en este manual le confiriendo una utilización, también, por personas que no estuviesen en la escuela, pero que necesitasen de una ampliación de sus conocimientos, incluso sobre el sistema métrico decimal.

El sistema métrico decimal en el *Manual de Aritmetica Practica*

El tema de la adopción del sistema métrico en Perú comparece dos veces en el Manual de Aritmetica Practica. La primera, en el prefacio, cuando hay una breve consideración del autor:

El sistema métrico decimal, por las grandes ventajas que ofrece en los cálculos, así como por haberse adoptado entre nosotros, ha sido tratado con alguna extensión en este compendio, en el cual se halla, además, expuesto el nuevo sistema de monedas que en consonancia con aquel, ha comenzado á regir en el país. (Boloña, 1864, p. IV).

Posteriormente, en el capítulo que trata de los “Números denominados”¹⁵, que hacía parte del currículo para que se pudiese operar con las medidas antiguas, el autor llama la atención:

A primera vista se observa las diferentes subdivisiones que hacemos de la unidad en los varios sistemas particulares de medidas pesos, monedas, tiempo, etc. Esta desemejanza de sistemas caerá por tierra con la adopción de uno general de pesas y medidas; y el sistema métrico adoptado ya en muchas naciones civilizadas, es el llamado á hacer cesar entre nosotros, el desorden tan perjudicial que ahora reina, facilitando sobremanera las transacciones

¹⁵ *Números denominados* son los que constan de dos ó más especies de unidades que se refieren a una unidad principal. Por ejemplo, 9@ — 9 arrobas, 6 lb — 6 libras, 3 onz — 3 onzas, son *números denominados* segun las especies de unidades de que constan con referencia todas a la arroba, que es la principal. (Boloña. 1864).

mercantiles. Mientras esto se verifique conformándonos con el orden establecido hasta aquí, y que en el día rige, advertimos que, para el cálculo que vamos á explicar, es necesario tener en la memoria, ó á la vista, las diferentes divisiones de la unidad principal según el caso de que se trate; cuya explicación expondremos independientemente al fin de este tratado, para que sirva de guía á los principiantes. (Boloña, 1864, p. 108-109).

A partir de estas dos consideraciones, el autor marca su posición favorable para la implementación del sistema métrico en el país. Boloña comienza el octavo capítulo “De las medidas en general”, con las siguientes palabras:

El nuevo sistema de pesos y medidas adoptado últimamente en el Perú por ley de 16 de Diciembre de 1862, se llama métrico, por ser el metro su base; y se llama también decimal, porque las divisiones de sus unidades proceden de diez en diez, guardando el mismo orden que en el sistema de numeración; por manera que cada unidad, diez veces mayor que la de un orden inferior, es diez veces menor que la de un orden superior. (Boloña, 1864, p. 128).

Das 246 páginas del libro, 19 están dedicadas al sistema métrico, entre estas, 5 incluyen solamente tablas de conversión. El sistema métrico, juntamente con el sistema monetario, es presentado en el octavo capítulo intitulado “De las medidas en general”.

Nuestra opción ha sido utilizar el Análisis de Contenido con fundamentación en Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez (2008, p. 9), los cuales proponen el análisis de contenido, tomada como “una herramienta técnica para establecer y estudiar la diversidad de significados de los contenidos de las matemáticas escolares”. Nuestro análisis evidencia a los conceptos, procedimientos, sistemas de representación y aspectos de la fenomenología.

- Conceptos Matemáticos

En las nociones generales, en el primer capítulo, es definida *cantidad ó magnitud* como todo lo que puede sufrir aumento ó disminución, como el peso, el tiempo, la velocidad, el calor, el número. Se destaca que la cantidad se divide en *discreta* y *continua* y que la *unidad* es la cantidad que sirve de término de comparación para valuar otra de la misma especie. El número es dado como el resultado de la comparación de una cantidad cualquiera con su unidad.

El autor comienza su planteamiento con la presentación de algunas definiciones preliminares:

Medir una cantidad cualquiera, es averiguar su relación numérica ó de magnitud con otra de su misma especie, que se toma por unidad de medida.

Así la unidad de medida es una cantidad conocida, tomada por término de comparación entre cantidades de una misma especie, cuyos valores se quieren expresar en números.

Las medidas se aplican á seis cosas, á saber: á la *longitud*, á la *superficie* al *volumen* ó *solidez* y la *capacidad*, al *peso*, á las *monedas*, y al *tiempo* ó *duración*. (Boloña, 1864. p. 128).

Después, clasifica cada una de las medidas indicando su utilización.

El autor propone la cantidad relacionada a lo que es medible. La unidad se pone como una cantidad establecida y conocida, la cual se compara con otra de misma especie y el número se establece como el resultado de comparación entre la unidad y la cantidad. Las magnitudes citadas son longitud, superficie, capacidad, masa, volumen y moneda.

Al final del libro, hay 12 cuadros con las relaciones entre las medidas antiguas. Boloña justifica la necesidad de los mismos:

Como el sistema decimal, en la parte relativa á pesos y medidas, no rige todavía entre nosotros, siendo necesario por lo tanto hasta que eso se verifique, el cálculo con los números complejos, ponemos á continuación las tablas de las divisiones y subdivisiones de las diferentes unidades de pesos y medidas, cuyo conocimiento es indispensable para resolver las operaciones con aquella especie de números. (Boloña, 1864. p. 236).

Encontrase también una tabla para “reducir con prontitud y facilidad” conversiones de la moneda *Sol* para *pesos*. El capítulo XVIII presenta “Reglas para abreviar varios cálculos aritméticos, pero solo contiene las medidas antiguas.

– Procedimientos

Boloña conduce el texto sin utilizar numeración secuencial para los temas desarrollados. Él trata de las denominaciones, oral y escrita de los numerales.

El metro se presenta a partir de los puntos de vista científico-técnico, instrumental y también etimológico. El primero, cuando es definido como “la diez millonésima parte de un cuadrante de meridiano, desde el polo Norte a Ecuador. Se ha buscado, pues, la longitud del arco de meridiano que mide esa distancia, y se ha encontrado ser de 5’130,740 toesas.” (Boloña, 1864. p. 128-129). El segundo, compareciendo como al informar que el metro es la unidad básica para mediciones de longitud. Etnológicamente, al decir que el vocablo *metro* es una palabra griega que significa medida.

El sistema métrico se presenta como un conjunto de trece términos, entre unidades y sus múltiplos, sacados del griego, y sus submúltiplos, del latín – estos “proceden de diez en diez, guardando el mismo orden que en el sistema de numeración; por manera que cada unidad, diez veces mayor que la de un orden inferior, es diez veces menor que la de un orden superior.” (Boloña, 1864. p. 128). Las unidades de medida son mencionadas indicando su empleo para la medición de distintas magnitudes.

Se presentan la origen y formación de las denominaciones de múltiplos y submúltiplos, notaciones, ejemplos de lectura y escrita de números métricos. En este sistema todas las medidas están ligadas entre si y derivan del metro.

Desde el punto de vista científico-técnico están el Gramo:

[...] igual á un centímetro cúbico, ó sea á una millonésima parte de un metro cúbico de agua destilada á la temperatura de 4 grados sobre cero del termómetro centígrado, y pesada en el vacío.

Se ha empleado el agua destilada, porque entonces está pura de toda otra sustancia extraña.

Se empleó á la temperatura de 4 grados del termómetro centígrado, porque el volumen de los cuerpos cambia con la temperatura. Pero el agua por una excepción notable, llega á su máximum de condensación ó de densidad á 4 grados (...) por manera que y volumen de una misma masa aumenta ó disminuye, partiendo de 4 grados centígrados sobre cero.

[...] el litro encierra mil centímetros cúbicos, resulta que el gramo es igual á 1 centímetro cúbico de agua destilada á la temperatura de 4 grados centígrados y pesados en el vacío. (Boloña, 1864. p. 135),

Algunos problemas resueltos están relacionados con el sistema métrico cuando se trata de los tópicos regla de tres simples y compuesta en los capítulos posteriores.

– Sistemas de Representación

En el libro, la representación predominante es la verbal, seguida por el uso de los modos simbólico y tabular. La representación gráfica es ausente, pues no hay ninguna ilustración en todo el libro. Hay cinco representaciones tabulares con las medidas de longitud, de superficie, agrarias, de solidez, de capacidad y ponderales. Estas representaciones tienen la función de destacar y organizar las informaciones de forma clara y objetiva.

MEDIDAS DE CAPACIDAD.			
NOMBRE DE LA MEDIDA.	ABREVIATURA.	CLASE.	VALOR.
Litro	L.	Unidad	Igual al decímetro cúbico.
Decálitro	DL.	Múltiplo	10 litros ó 10 decímetros cúbicos.
Hectólitro	HL.	idem	100 litros ó 100 decímetros cúbicos.
Kilólitro.....	KL.	idem	1000 litros ó 1000 decímetros cúbicos ó metro cúbico, tonelada de arqueo.
Decilitro	DL.	Divisor	$\frac{1}{10}$ de litro ó de decímetro cúbico.
Centilitro.....	CL.	idem	$\frac{1}{100}$ de litro ó decímetro cúbico.

Figura 2 – Ejemplo de una representación tabular (Boloña, 1864. p. 144)

La representación simbólica para las medidas métricas, incluyendo la combinación de letras o números, son utilizadas en algunas situaciones – solo aparecen en las notaciones de las medidas y, posteriormente, en el capítulo relativo a la regla de tres, con la resolución de algunos problemas de aplicación práctica.

El autor asigna que ha sido su objetivo colocar en el libro los conocimientos aritméticos puramente prácticos, siendo apropiado para aquellos que viesen a dedicarse a las áreas comerciales. Uno de los problemas presentados, que incluye la representación simbólica, tiene el siguiente enunciado: “4 obreros han fabricado 20^m. de paño, 9 obreros ¿cuántos metros fabricarán?”, con una explicación para su resolución y la solución aritmética (figura 3).

$$4 : 9 :: 20 : X, \text{ de donde } X = \frac{20 \times 9}{4} = 45. \text{ m.}$$

Figura 3 – Ejemplo de una representación simbólica (Boloña, 1864, p. 157)

- La fenomenología

El análisis fenomenológico permite verificar “la vinculación de conceptos y estructuras matemáticas con ciertos fenómenos que están en su origen, y que los vinculan con los mundos natural, cultural, social y científico”. (Rico et al., 2008, p. 17).

En el Manual, en los tópicos que comparece el sistema métrico decimal, se identifican, en la presentación de situaciones con fenómenos matemáticos y sociales, este último con una intención de contextualización, aproximando de los aspectos laborales, comerciales, de compra y venta. Sin embargo, en los capítulos posteriores, cuándo se incluye las medidas, hay algunos problemas que mantienen las medidas antiguas. Los fenómenos matemáticos están presentes en los problemas que incluyen las operaciones aritméticas básicas. La descripción del gramo incluye elementos físico-naturales como el agua destilada á la temperatura de 4 grados sobre cero del termómetro centígrado, y pesada en el vacío.

Consideraciones finales

Los impresos con una destinación pedagógica nos permiten conocer algunas de las determinaciones gubernamentales y tener una mirada sobre el “currículo real” fijado pelos maestros. Las concepciones del autor también están inseridas en su texto.

En la segunda mitad del siglo XIX en Perú, el libro escolar, con su difusión de las normativas metrológicas, cumple un papel político, legislativo y también social-educativo, con el propósito de habilitar los ciudadanos para utilizar e operar con los estándares decimales. Habían “*conocimientos a enseñar y conductas a inculcar*”, y un conjunto de prácticas que permiten la transmisión de esos *conocimientos* y su incorporación”, como señala (Julia, 2001, p. 10).

Nicanor Boloña defiende el sistema métrico, apunta brevemente sus ventajas sobre los sistemas antiguos. Pero, a pesar de incluir las fracciones decimales en el libro, no realiza ninguna reducción entre la unidades de medida. Tampoco hay un tema específico que aborde

las operaciones con las medidas decimales. En este sentido, el sistema métrico decimal parece más novedoso, sin más detalles, el libro no colabora para una mayor apropiación del tema. En las escuelas que adoptaran el Manual, los maestros tendrían que complementar las informaciones del libro e ir más allá para permitir a los estudiantes comprender el nuevo sistema y saber cómo operar con las medidas decimales. Sin embargo, podría ser una concepción del autor que los estudiantes de primaria no necesitarían informaciones más detalladas. Pero el contenido del libro avanza a temas más complejos que realmente servirían a quienes trabajaban en el comercio y la parte del sistema métrico no era completa.

En ningún momento Boloña menciona que el nuevo sistema, adoptado en el Perú, es obra de científicos franceses. ¿Esta omisión tendría un vínculo con sus opciones políticas? ¿Pretendía el autor evitar asociar estándares métricos con Francia para que no fueran rechazados por la población? En la propia Francia hubo una no aceptación de los estándares métricos al principio.

Sea por ideales políticos, sea por seguir una recomendación de superiores, sea por garantizar la adopción del sistema métrico sin asociación a los ideales de la Francia Revolucionaria, el fato es que la historia del sistema métrico no tiene lugar en el Manual de Aritmética Practica. Sin embargo, este libro de texto sería uno de los primeros publicados, después de la ley de 1862, en ayudar al gobierno a difundir el nuevo sistema e intentar romper la intrincada red de la tradición peruana de los pesos y medidas.

Referencias

- Boloña, N (1864). *Manual de Aritmetica Practica*. Lima: Huerta y Cia Impresores Editores.
- Chervel, A. (1990). História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. *Teoria & Educação*, 2, 177-229.
- Choppin, A. (2000). Pasado y presente de los manuales escolares. En: Berrio, J. R. (ed.) *La cultura escolar de Europa*. Tendências históricas emergentes, (107-141). Madrid: Biblioteca Neva.
- Julia, D. (2001). A cultura escolar como objeto histórico. *Revista Brasileira de História da Educação*, Campinas, n.1, 9-43.
- Rico, L.; Marín, A.; Lupiáñez, J. L. & Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *SUMA*, 58, 7-23.
- Romero, E. (2006). Historia econômica del Perú. Lima: Universidad Alas Peruanas.
- Viñao Frago, A. (2002). *Sistemas educativos, culturas escolares y reformas*. continuidades y cambios. Madrid: Morata.

ELABORAÇÃO DE LIVRO PARADIDÁTICO PARA O ENSINO DE ESTATÍSTICA: O TRILHAR DE UMA PROPOSTA PARA O NONO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Anneliese de Oliveira Lozada

Ailton Paulo de Oliveira Jr

ans.lozada@gmail.com, ailton.junior@ufabc.edu.br

Universidade Federal do ABC, Brasil

Resumen

O objetivo deste trabalho é apresentar o processo de elaboração de tarefa para um livro paradidático que subsidia o ensino de conteúdos estatísticos no nono ano do Ensino Fundamental. Para a elaboração das tarefas seguimos os princípios da Teoria Antropológica do Didático – TAD de Yves Chevallard, na organização praxeológica didática e matemática (estatística) que contemple aspectos relacionados aos conteúdos estatísticos indicados na Base Nacional Comum Curricular – BNCC e às Diretrizes para Avaliação e Instrução na Educação Estatística para a Educação Básica - GAISE dos Estados Unidos da América, focado na resolução de problemas estatísticos como um processo investigativo. Buscamos organizar os conteúdos com base na TAD composto por tarefas que podem ser realizadas utilizando diversas técnicas, justificadas pela tecnologia que utiliza a Estatística como objeto de estudo. A intenção é inseri-lo como elemento essencial à formação dos alunos da Educação Básica em relação aos conteúdos estatísticos.

Palabras clave: Livro paradidático, Ensino de estatística, Ensino Fundamental, TAD.

Introdução

A Lei de Diretrizes e Bases 9394/96(LDB) Brasil (1996), em seu artigo 32, inciso I, aponta a grande necessidade de trabalhar com leitura, escrita e interpretação de textos na Educação Básica, com o intuito do desenvolvimento da capacidade de aprender, devendo se voltar para a construção de futuros leitores competentes, desenvolvendo um trabalho interdisciplinar, estimulando o aluno a ser sujeito do seu próprio aprendizado.

Além disso, em uma sociedade democrática é necessário que os cidadãos façam parte das decisões tomadas por ela, porém para que isso ocorra, é necessário ao público que a incorpora saber interpretar as inúmeras informações disponibilizadas pelos diversos meios de comunicação.

Esse processo democrático se realiza e se sustenta mediante a ação do meio educativo, e um dos seus objetivos é tornar os cidadãos letrados estatisticamente, para que assim eles compreendam aspectos sociais, econômicos, políticos e possam exercer a cidadania.

O ensino de Estatística que se oferta aos alunos deve permitir a construção de conhecimentos necessários para compreensão da sociedade atual. Compreender, comparar e interpretar dados estatísticos torna-se relevante para a construção da cidadania.

Nesse contexto, Kataoka et al. (2011), o ensino de Estatística assume papel importante na formação do cidadão, referente à compreensão de sua realidade por meio da discussão e da manipulação dessas informações e, até mesmo, capacitando-o para tomar decisões, permitindo, assim, que não se torne um refém da interpretação de dados.

Assim, tendo em vista o tema e o problema de pesquisa, o objetivo deste trabalho é apresentar o processo de elaboração de tarefa que compõe um livro paradidático para subsidiar o ensino de conteúdos estatísticos dos anos finais do Ensino Fundamental, nono ano.

Considerando-se o objetivo indicado, estabelecemos a seguinte questão de pesquisa: O processo de elaboração de livros paradidáticos de narrativa ficcional no Ensino da Estatística fornece material didático para facilitar a apreensão dos conceitos estatísticos nas atividades sugeridas ao aluno, com o intuito de estimular a aprendizagem do aluno, e ao professor, elementos que deem suporte ao ensino desses conteúdos?

Referencial Teórico

O Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), Brasil (2017), destaca critérios que, pela sua maior importância relativa, são considerados como eliminatórios (aspectos sobre correção conceitual, pedagógicos-metodológicos, construção do conhecimento científico e sobre a construção da cidadania), para efeito de inclusão do livro didático em seu guia.

Para entender a razão da criação do termo paradidático, Borelli (1996) apresenta o sentido do termo paraliteratura, a partir da interpretação da formação da palavra como “o prefixo para denota tanto o significado de proximidade – ao lado de, ao longo de – quanto à conotação de acessório, subsidiário, e, também, o sentido de funcionamento desordenado ou anormal”.

Segundo Lima (2012) a opção de nomear esses livros de paradidático e não paraliteratura, ou outro termo tenha se dado pelo primeiro termo sugerir uma aproximação com livros didáticos.

Segundo Trevizan (2008), nos textos paradidáticos os temas costumam ser apresentados de forma menos comprometido com o isolamento e a fragmentação, possibilitando assim a relação com outras áreas de conhecimento.

Em relação ao ensino de Estatística, poucos trabalhos têm sido desenvolvidos, como o de Oliveira Júnior et al. (2015) que tratou da apresentação do processo de elaboração de um livro paradidático no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência – PIBID subprojeto Matemática no eixo temático: Tratamento da Informação da Universidade Federal do Triângulo Mineiro – UFTM em parceria com escolas públicas de Uberaba-MG.

Procedimentos Metodológicos

Para elaborar as tarefas a serem desenvolvidas a partir do livro paradidático, ou seja, a produção de material didático, consideraremos aspectos relacionados aos conteúdos estatísticos para os anos finais do Ensino Fundamental sugeridos pela BNCC (Brasil, 2017) e à leitura, com o intuito de proporcionar aos alunos a vivência dos processos apontados por Nacarato e Lopes (2005), ou seja, que processos como comunicação de ideias, interações, práticas discursivas, representações matemáticas, argumentações e negociação de significados sejam utilizados.

No quadro 1 estão organizados os objetos de conhecimento e as habilidades da unidade temática Probabilidade e Estatística para os anos finais do Ensino fundamental na BNCC (Brasil, 2017).

Além disso, com base na TAD, apresentaremos a elaboração de livro paradidático para subsidiar o ensino de conteúdos estatísticos dos anos finais do Ensino Fundamental, que será composto por situações problema ou tipos de *tarefa*, que identificaremos por (T), constituída de uma sequência de subtarefas (t), que podem ser realizadas utilizando diversas *técnicas* (τ) justificadas pela *tecnologia* (θ) que se utiliza da *teoria* (Θ) Estatística como objeto de estudo.

Assim, serão tomadas como referência as propostas de Chevallard (1999) para avaliar tarefas, técnicas, tecnologias e teorias. Dessa forma, as tarefas propostas têm como objetivo serem bem identificadas conforme os conteúdos e a razão de sua proposta e se ela é adequada para alunos do ciclo a que se destina (anos finais do Ensino Fundamental); se o conjunto de tarefas fornece uma visão das situações matemáticas (estatísticas) utilizadas no livro paradidático. A técnica será disponibilizada de maneira completa, ou seja, passo a passo, ou somente esboçada, no bloco tecnologia/teoria - será expresso no decorrer do livro e com justificativas tecnológicas.

A elaboração do livro paradidático obedecerá fundamentalmente aos seguintes passos: (1) Apresentar pelo menos uma técnica para resolver tarefas solicitadas; (2) Para as técnicas descritas, estabelecer, pelo menos um esboço de um discurso tecnológico; (3) Apresentar tarefas propondo o estudo sobre tabelas e gráficos estatísticos segundo a resolução de problema do documento GAISE (Diretrizes para Avaliação e Instrução na Educação Estatística para a Educação Básica) de Franklin et al. (2005); (4) Articular diversos tipos de tarefas em torno dos conceitos estatísticos.

Quadro 1

Objetos de conhecimento e habilidades referentes aos conteúdos estatísticos propostos pela BNCC para os anos finais do Ensino Fundamental no Brasil.

ANO	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
6º	Leitura e interpretação de tabelas e gráficos (de colunas ou barras simples ou múltiplas) referentes a variáveis categóricas e variáveis numéricas	(EF06MA31) Identificar as variáveis e suas frequências e os elementos constitutivos (título, eixos, legendas, fontes e datas) em diferentes tipos de gráfico.
	Leitura e interpretação de tabelas e gráficos (de colunas ou barras simples ou múltiplas) referentes a variáveis categóricas e variáveis numéricas	(EF06MA32) Interpretar e resolver situações que envolvam dados de pesquisas sobre contextos ambientais, sustentabilidade, trânsito, consumo responsável, entre outros, apresentadas pela mídia em tabelas e em diferentes tipos de gráficos e redigir textos escritos com o objetivo de sintetizar conclusões.
	Coleta de dados, organização e registro Construção de diferentes tipos de gráficos para representá-los e interpretação das informações	(EF06MA33) Planejar e coletar dados de pesquisa referente a práticas sociais escolhidas pelos alunos e fazer uso de planilhas eletrônicas para registro, representação e interpretação das informações, em tabelas, vários tipos de gráficos e texto.
	Diferentes tipos de representação de informações: gráficos e fluxogramas	(EF06MA34) Interpretar e desenvolver fluxogramas simples, identificando as relações entre os objetos representados (por exemplo, posição de cidades considerando as estradas que as unem, hierarquia dos funcionários de uma empresa etc.).
7º	Estatística: média e amplitude de um conjunto de dados	(EF07MA35) Compreender, em contextos significativos, o significado

		de média estatística como indicador da tendência de uma pesquisa, calcular seu valor e relacioná-lo, intuitivamente, com a amplitude do conjunto de dados.
	Pesquisa amostral e pesquisa censitária Planejamento de pesquisa, coleta e organização dos dados, construção de tabelas e gráficos e interpretação das informações	(EF07MA36) Planejar e realizar pesquisa envolvendo tema da realidade social, identificando a necessidade de ser censitária ou de usar amostra, e interpretar os dados para comunicá-los por meio de relatório escrito, tabelas e gráficos, com o apoio de planilhas eletrônicas.
	Gráficos de setores: interpretação, pertinência e construção para representar conjunto de dados	(EF07MA37) Interpretar e analisar dados apresentados em gráfico de setores divulgados pela mídia e compreender quando é possível ou conveniente sua utilização.
8º	Gráficos de barras, colunas, linhas ou setores e seus elementos constitutivos e adequação para determinado conjunto de dados	(EF08MA23) Avaliar a adequação de diferentes tipos de gráficos para representar um conjunto de dados de uma pesquisa.
	Organização dos dados de uma variável contínua em classes	(EF08MA24) Classificar as frequências de uma variável contínua de uma pesquisa em classes, de modo que resumam os dados de maneira adequada para a tomada de decisões.
	Medidas de tendência central e de dispersão	(EF08MA25) Obter os valores de medidas de tendência central de uma pesquisa estatística (média, moda e mediana) com a compreensão de seus significados e relacioná-los com a dispersão de dados, indicada pela amplitude.
	Pesquisas censitária ou amostral Planejamento e execução de pesquisa amostral	(EF08MA26) Selecionar razões, de diferentes naturezas (física, ética ou econômica), que justificam a realização de pesquisas amostrais e não censitárias, e reconhecer que a seleção

		da amostra pode ser feita de diferentes maneiras (amostra casual simples, sistemática e estratificada).
	Pesquisas censitária ou amostral Planejamento e execução de pesquisa amostral	(EF08MA27) Planejar e executar pesquisa amostral, selecionando uma técnica de amostragem adequada, e escrever relatório que contenha os gráficos apropriados para representar os conjuntos de dados, destacando aspectos como as medidas de tendência central, a amplitude e as conclusões.
9º	Análise de gráficos divulgados pela mídia: elementos que podem induzir a erros de leitura ou de interpretação	(EF09MA21) Analisar e identificar, em gráficos divulgados pela mídia, os elementos que podem induzir, às vezes propositadamente, erros de leitura, como escalas inapropriadas, legendas não explicitadas corretamente, omissão de informações importantes (fontes e datas), entre outros.
	Leitura, interpretação e representação de dados de pesquisa expressos em tabelas de dupla entrada, gráficos de colunas simples e agrupadas, gráficos de barras e de setores e gráficos pictóricos	(EF09MA22) Escolher e construir o gráfico mais adequado (colunas, setores, linhas), com ou sem uso de planilhas eletrônicas, para apresentar um determinado conjunto de dados, destacando aspectos como as medidas de tendência central.
	Planejamento e execução de pesquisa amostral e apresentação de relatório	(EF09MA23) Planejar e executar pesquisa amostral envolvendo tema da realidade social e comunicar os resultados por meio de relatório contendo avaliação de medidas de tendência central e da amplitude, tabelas e gráficos adequados, construídos com o apoio de planilhas eletrônicas.

Fonte: Brasil (2017, p. 302-303; 308-309; 312-313; 316-317).

Segundo Lopes (2011), um dos documentos norteadores desta pesquisa, o *GAISE*, foi aprovado em agosto de 2005 e publicado em 2007 pela Associação Americana de Estatística (ASA). O documento indica a necessidade de que o trabalho com análise de dados na educação básica priorize a formulação de questões que possam ser tratadas mediante a coleta, organização e apresentação dos dados de maneira relevante para responder a essas questões. Ressalta também a importância de selecionar e usar de forma apropriada métodos estatísticos para analisar dados, desenvolver e avaliar inferências e previsões que sejam baseadas em dados.

Ainda reforçamos que, conforme o documento *GAISE* (Franklin et al., 2005), a resolução de problemas estatísticos é um processo investigativo que envolve os componentes: formulação de perguntas; coleta de dados; análise de dados; e interpretação dos dados, focando no papel da variabilidade e enfatiza que a educação estatística deve ser visto como um processo de desenvolvimento.

O documento *GAISE* (Franklin et al., 2005), descreve os quatro componentes da seguinte forma: (1) Formular perguntas: Esclarece o problema e formula uma (ou mais) perguntas que podem ser respondidas com dados (informações); (2) Coletar dados: Elabora um plano apropriado e emprega o plano para coletar os dados; (3) Analisar: Seleciona métodos gráficos ou numéricos adequados e utiliza esses métodos para analisar os dados; (4) Interpretar os resultados: Interpreta a análise e relata a interpretação de acordo com a pergunta inicial ou provocadora do problema.

Publicação de livros paradidáticos em estatística no Brasil

Realizamos até o momento a busca de livros publicados no mercado editorial brasileiro voltados ao ensino de Estatística para a Educação Básica, mesmo que já não mais estejam sendo comercializados, quadro 2.

Quadro 2

Livros paradidáticos publicados no mercado editorial brasileiro

Atividades e jogos com Estatística de Smoothey (1998)



A partir de situações cotidianas para trabalhar conceitos onde o aluno se familiariza com o tema e pode adquirir conhecimentos para resolver jogos e atividades propostas em forma de quebra cabeças, jogos,

Estatística: "Pra que Serve a Matemática" de Imenes, Jakubo e Lellis (2001)

Pretende mostrar ao aluno a utilidade prática da Matemática, relacionando-a com fatos do dia a dia. Com um visual de revista de histórias em quadrinhos, apresenta textos curtos, agrupados por temas, como "Estatística"

trilhas, labirintos e
dobraduras.



Fonte: Organizado pelos autores.

Elaboração do livro paradidático sobre o ensino de probabilidade para os anos finais do ensino fundamental à luz da TAD e da resolução de problemas do documento GAISE

A ideia de criação do paradidático “As aventuras no Mundo da Estatística” foi proposta pensando em trazer subsídios para o ensino de estatística nos anos finais do Ensino Fundamental.

Realizou-se levantamento bibliográfico de outros livros paradidáticos com conteúdos matemáticos, analisou-se o contexto a ser empregado, as características de linguagem, adequação à faixa etária e nível de escolaridade.

As ideias iniciais da criação dos personagens surgiram a partir do filme *Toy Story*, onde os brinquedos tomam vida na ausência de seus donos, Figura 1.



Fonte: <http://www.colorir-desenhos.com/2011/05/desenhos-toy-story-para-colorir.html>

Figura 1. Personagens do filme “Toy Story” que despertou a ideia de construção dos personagens do livro paradidático.

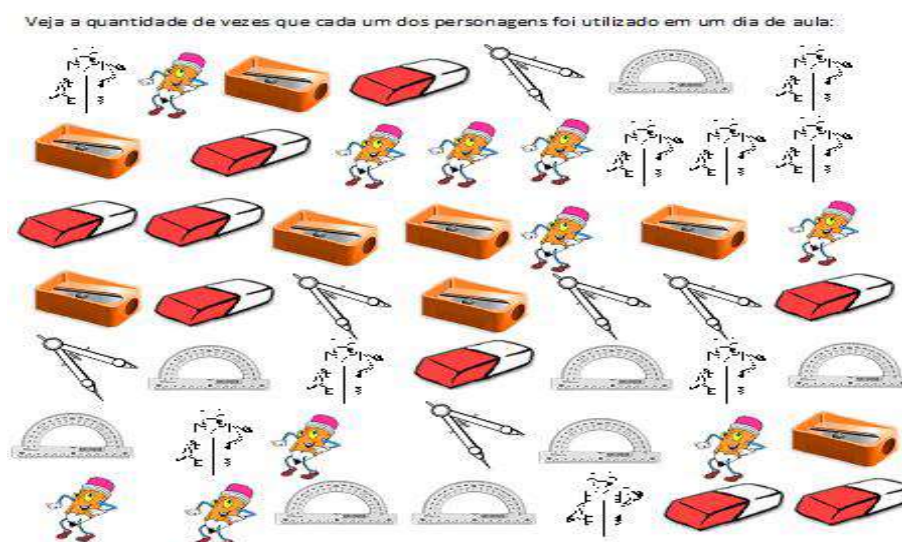
Assim, nomes foram dados ao compasso (Sr. Perninha), ao transferidor (Transferildo), ao Lápis (Estatildo), a régua (Reguita), a borracha (Medialina) e ao apontador (Modacildo). O grupo também fará uma homenagem a um professor que será o mestre, ensinando aos personagens conteúdos ligados à Estatística.

Os objetos tomam vida na hora do recreio em que todos os alunos saem da sala de aula e começam a conversar sobre o número de vezes em que foram utilizados e a partir daí, com a

ajuda do professor, os personagens apresentam os conceitos básicos de Estatística, tais como: distribuição de frequência, frequência absoluta e relativa, média, moda, mediana e confecção de gráficos de colunas, barras e setores.

Apresentamos a seguir uma tarefa que constará do paradidático correspondendo ao proposto, inicialmente, na Figura 1 abordando a apresentação de alguns dados referentes aos personagens do livro e partir deles elaborar uma tabela estatística. A tarefa é focada na habilidade (EF01MA22) indicada na BNCC (Brasil, 2017) que é a realização de pesquisa, envolvendo até duas variáveis categóricas do interesse do aluno e que o universo apresentado seja de até 30 elementos, e assim, organizar dados por meio de representações pessoais.

Voltamos ainda para o documentos GAISE que indica em a formulação de um pergunta que esclarece o problema e formula uma (ou mais) perguntas que podem ser respondidas com dados (informações). Nesse caso, a pergunta é de que maneira pode-se verificar qual é a quantidade de vezes que os personagens do livro paradidáticos foram utilizados em um dia de aula, já que os personagens são figurações de elementos que podem ser utilizados em uma sala de aula como: borracha, lápis, apontador de lápis, régua, transferidor e compasso.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Figura 1. Dados iniciais constantes da tarefa 1 do livro paradidático.

Outro componentes do GAISE é coletar dados, considerando que é a elaboração de um plano apropriado e emprego de planejamento para coletar os dados. Este componentes é abordado na medida em que é apresentado o número de vezes em que cada personagem aparece em atividades em sala de aula, configurando-se como a coleta de dados.

Na sequência solicita-se que seja preenchida a Tabela 1 (figura 2), e respondendo a seguinte questão: "Vamos organizar em uma tabela de dados?". A proposição desta tarefa converge para

o componente “Analisar” do GAISE ao ser proposto a utilização de representação tabular e numérica dos dados voltado à análise dos dados.

Além disso, permite-se também, na sequência, trabalhar a componente “Interpretar os resultados” quando se permite interpretar e relatar os dados de acordo com a pergunta inicial ou provocadora do problema.

Considerando a praxeologia matemática (estatística), figura 2, a tarefa T_1 busca-se a verificação do número de vezes que os personagens do livro paradidáticos foram utilizados em um dia de aula, já que os personagens são figurações de elementos que podem ser utilizados em uma sala de aula como: borracha, lápis, apontador de lápis, régua, transferidor e compasso.

A técnica (τ_1) configura-se em pesquisar e/ou observar o número de vezes que os personagens aparecem na atividade que foi proposta no livro paradidático convergindo para trabalhar com componentes do documento GAISE.

O discurso teórico-tecnológico (θ_1, θ_1), que permite justificar e explicar a técnica τ_1 pode ser descrito de acordo com Gal (1998) quando considera que se o contexto for ativo, os alunos envolvem-se em todas as fases de um projeto estatístico, ficando aptos para compreenderem a informação contida nos dados e os conceitos e ideias estatísticas, refletirem e discutirem sobre as implicações e o significado da informação; se o contexto for passivo, ao contrário, os alunos não se envolvem na criação e comunicação dos dados.

	Personagem	Número de vezes que o personagem foi utilizado
	Estatildo	
	Modacildo	
	Senhor Perninha	
	Medialina	
	Reguita	
	Transferildo	

Fonte: Elaborado pelos autores.

Figura 2. Tarefa proposta para a construção de uma tabela de distribuição de frequências.

As tarefa 2 (T_2) consiste em determinar o número de vezes que cada personagem do livro paradidático e que são utilizados em sala de aula na proposto de uma pesquisa.

A técnica (τ_2) que responde à tarefa T_2 corresponde à cardinalidade ao estabelecer que o último número utilizado na contagem de um conjunto indica o número de elementos dele (numerosidade). Reflete-se a indicação do número correto de um conjunto sem contar quando este conjunto foi previamente contado, ou seja, é respondido com a cardinalidade da primeira contagem. Deve-se contar o número de vezes que cada personagem aparece para identificar quantos são e associar à frequência de sua aparição na atividade em sala de aula.

A tecnologia θ_2 , que permite justificar e explicar as técnicas (τ_2) pode ser descrita ao considerar Duval (2003) ao descrever que a leitura e a interpretação de tabelas é considerado por muitos como sendo simples devido a sua organização e a rapidez de consulta, porém essa leitura e interpretação não se dá de forma simples, pois precisa ativar todas as funções cognitivas, na questão da tabelas a função identificação é a mais utilizada, devido à visualização dos dados de forma separada. A teoria θ_2 que explica e justifica a tecnologia θ_2 é fundamentada em Duval (2003), ao dizer que o estudo de tabelas deve ser pautado no trânsito entre diferentes tipos de registros, pois proporciona-se a visualização de um mesmo objeto matemático sob diferentes formas, levando-se alunos ao não “enclausuramento de registros”.

Considerações finais

A elaboração deste material, não apenas contribuirá para expor uma história e a importância dos livros paradidáticos, mas também para abrir as portas e estimular as produções acadêmicas e publicações de novos títulos para o Ensino de Estatística, além de nos mostrar o quanto é importante a leitura para abranger seu vocabulário, seu conhecimento de mundo, sem sair de sua cidade, de melhorar sua escrita e oralidade.

Consideramos que os textos paradidáticos são utilitários, constituídos de informações objetivas que pretendem transmitir conhecimento e informação e, em geral, abordam assuntos paralelos ligados às matérias do currículo regular, de forma a complementar os livros didáticos. Por isso, é necessário que desde o processo de formação inicial esses livros possam ser de uso comum pelos professores.

Referências

- Borelli, S. H. S. (1996). *Ação, suspense, emoção: Literatura e cultura de massa no Brasil*. São Paulo: EDUC/Estação Liberdade.
- Brasil. (1996). Ministério da Educação e Cultura. Lei n. 9.394/96 de 20 de dezembro de 1996. *Diretrizes e Bases da Educação*. LDB.

- Brasil. (2017). *Base Nacional Comum Curricular (BNCC): Educação é a Base*. Brasília. Recuperado em 20 outubro de 2019 de http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_20dez_site.pdf.
- Brasil. (2018). Ministério da Educação. PNLD 2018: *Apresentação: Guia de livros didáticos – Ensino Médio/ Ministério da Educação – Secretária de Educação Básica – SEB – Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação*. Brasília, DF: Ministério da Educação, Secretária de Educação Básica.
- Chevallard, Y. (1999). L' analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. La Pensée Sauvage-Editions, Grenoble, França, 19(2), 221-265.
- Chevallard, Y., Bosch, M., & Gascón, J. (2001). *Estudar Matemáticas: O Elo Perdido entre o Ensino e a Aprendizagem*. Porto Alegre: Artes Médicas.
- Duval, R. (2003). Registro de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: S. Diaz (Ed.), *Aprendizagem em matemática: registro de representação semiótica* (pp. 11-33). Campinas, São Paulo: Papirus.
- Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D. S., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., & Scheaffer, R. (2005). *A curriculum framework for K-12 statistics education*. GAISE report. American Statistical Association. Recuperado em 20 outubro de 2019 de www.amstat.org/education/gaise/
- Gal, I. (1998). Assessing statistical knowledge as it relates to students' interpretation of data. In: S. P. Lajoie (Ed.), *Reflections on statistics: learning, teaching, and assessment in K-12* (pp. 275-295). New Jersey: Lawrence Erlbaum.
- Godino, D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.
- Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN — Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.
- Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM*, 39(1-2), 127-135.
- Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2008). Um enfoque ontosemiótico do conhecimento e a instrução matemática. *Acta Scientiae - Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 10(2), 7-37.
- Imenes, L. M., Jakubo, J. J., & Lellis, M. (2001). *Para que serve a Matemática? – Estatística*. São Paulo: Editora Atual.
- Kataoka, V. Y; et al. (2011). Educação Estatística no ensino fundamental II de Lavras, Minas Gerais, Brasil: Avaliação e Intervenção. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 14(2), 233-263.

- Lima, E. G. (2012). *Iconografias no livro didático de história: leituras e percepções de alunos do Ensino Fundamental*. Pará de Minas, MG: Virtual Books.
- Lopes, C. A. E. (2011). A Estocástica no Currículo de Matemática e a Resolução de Problemas. Anais do 2 Seminário de Resolução de Problema – SERP. Universidade Estadual Paulista, Rio Claro (SP).
- Nacarato, A. M., & Lopes, C. A. E. (2005). *Escritas e leituras na Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica.
- Oliveira Júnior et al. (2015). Livro paradidático no ensino de estatística no Ensino Fundamental. Anais do 14 Conferência Interamericana de Educação Matemática - CIAEM-IACME. Chiapas, México.
- Pimentel, J. R. (2006). Livros didáticos de Ciências: a Física e alguns problemas. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, 15(3), 308-318.
- Smoothey, M. (1998). *Atividades e Jogos com Estatística*. São Paulo: Editora Scipione.
- Trevizan, W. A. (2008). O uso do livro paradidático no ensino de matemática. Recuperado em 21 de outubro de 2019 de www.usp.br/siicusp/Resumos/16Siicusp/807.pdf

A CONTRIBUIÇÃO DA AUTOSCOPIA NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA DA REDE ESTADUAL DO ENSINO MÉDIO NO ESTADO DO AMAZONAS

Aldemir Malveira de Oliveira*

Floriano Augusto Veiga Viseu**

aldemir@seuc.net, fviseu@ie.uminho.pt

Centro de Mídias do Estado do Amazonas (CEMEAM/SEDUC Am), Brasil*

Universidade do Minho, Portugal**

Resumen

A presente pesquisa foca as ideias reflexivas sobre a prática eletiva de uma professora de Matemática do Ensino Médio do Estado do Amazonas apoiada pela estratégia de intervenção reflexiva denominada autoscopia trifásica, analisando o antes e o depois da aula ministrada. Essa estratégia simula o que SCHÖN (2000) denomina de “Sala de Espelhos”, levando a professora a refletir as fases pré-ativa e pós-ativa de suas aulas. Essa metodologia foi apresentada à professora como forma de contribuir com sua formação inicial no sentido de corroborar com os baixos índices apresentados por seus alunos da terceira série do Ensino Médio. As reflexões da docente demonstram que suas aulas lhe permitem reconsiderar ações, afim de promover mudanças, se necessárias ou oportunas em sua prática eletiva, vindo a contribuir na elevação dos índices de aprendizagens de seus alunos.

Palabras clave:

Formação, Prática Eletiva, Estratégia Reflexiva, Autoscopia Trifásica, Ensino Médio.

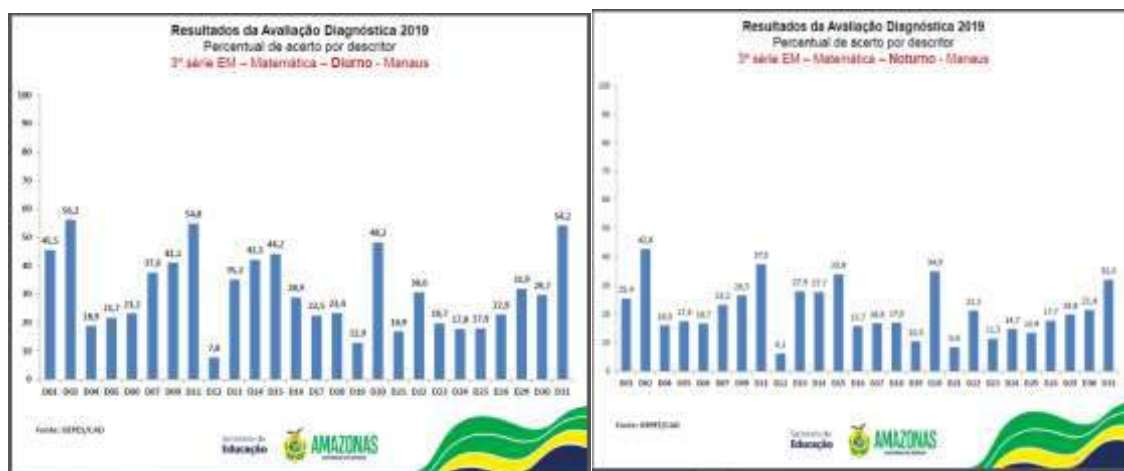
Introdução

A presente pesquisa resulta da devolutiva sobre a avaliação diagnóstica aplicada no início do ano de 2019 em toda a Rede Estadual de Educação do Amazonas. Nessa devolutiva os alunos da terceira série do ensino médio estadual do Amazonas apresentaram baixos índices de desempenho em diversos descritores que, por sua vez, retratam habilidades que os alunos deveriam ter desenvolvido ao longo de seus estudos. O quadro 1 apresenta essas devolutivas para evidenciar as fragilidades no ensino e nas aprendizagens dos alunos dos turnos diurno e noturno da Rede Estadual do Amazonas. Para realizar e aplicar a metodologia nesse trabalho,

optou-se por considerar os descritores que sinalizassem um desempenho abaixo de 20% oriundo dessa avaliação diagnóstica. No noturno surgiram mais descritores, no entanto, optamos pela interseção desses resultados. Os descritores a serem analisados serão: D04 - Utilizar relações métricas do triângulo retângulo para resolver problemas, D12- Resolver situações-problema envolvendo a área total de figuras tridimensionais (prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera, paralelepípedo, D19 - Resolver situações-problema, envolvendo o cálculo de porcentagens, D21- Resolver situações-problema,envolvendo progressão geométrica, D23 - Resolver problemas reconhecendo a progressão aritmética como uma função do 1º grau definida no conjunto dos números inteiros positivos, D24- Resolver problemas que envolvam função do 2º grau e D25 – Resolver problemas envolvendo função exponencial.

Quadro 1

Resultados da avaliação diagnóstica de alunos do ensino Diurno e Noturno



Fonte: Avaliação diagnóstica da Rede Estadual do Amazonas

No intuito de ajudar a professora da terceira série do ensino médio de matemática em relação a esses baixos desempenhos apresentados por seus alunos que compõem a rede estadual de ensino, foi apresentado a autoscopia como método de promover a reflexão sobre momentos da sua prática e que incide sobre irá a sua formação inicial e continuada. Para Sadalla e Larocca (2004), a autoscopia debruça-se sobre uma videogravação de uma prática, com o objetivo de observar e realizar uma análise e autoavaliação pelo sujeito dessa prática. Os momentos videogravados são submetidos à análise após o desenvolvimento da ação, no intuito de capturar todo o processo reflexivo do ator em estudo, através da suas falas. Para Ferrés (1996), o vídeo tem a função de espelho em que o ator se contempla, porém sem se olhar nos olhos. Schön (2000) propõe em sua "sala de espelhos", a existência entre paralelismo, prática de formação docente e o ensino prático de sala de aula, de maneira que surgem situações homólogas, que proporcionam

para os pesquisadores formadores, maneiras de auxiliar os professores a problematizarem o seu trabalho em sala de aula, através da demonstração de práticas educacionais semelhantes ou iguais às suas. A professora concordou em gravar as aulas em vídeo de acordo com a série/turma que o pesquisador estava realizando as observações, no caso, 3ª A do ensino médio. Ao propor a autoscopia para a professora, foi especificado que a mesma iria acontecer no momento em que se sentisse preparada didaticamente para ministrá-la. No início da conversa, a professora ficou um pouco apreensiva e relatou '*estou com medo de fazer alguma besteira*'. Dessa forma, optou-se pela autoscopia trifásica, dividindo-a em três fases da ação docente propostas por Jackson (1968 apud Saint-Onge, 2001) como pré-ativa, interativa e pós-ativa, e adaptando-a de acordo com o contexto da pesquisa:

- a) Na fase pré-ativa, a professora foi estimulada a preparar as suas atividades de ensino em que ocorreram reflexões para a ação, cujo fim foi conhecer idéias acerca da sua prática letiva. Para essa fase, teremos as reflexões que a professora realizou sobre as atividades de sala de aula, abordando aspectos que mais a preocuparam tais como: o que desenvolveria em sala de aula, como seria desenvolvido, quais as habilidades a serem desenvolvidas e suas expectativas. Na devolutiva desse quesito através de um diálogo entre o pesquisador e a professora, foi observado que a mesma estava confusa quanto a delinear os parâmetros para discutir as atividades que seriam desenvolvidas em sala de aula. Essa sessão de diálogo foi gravada em áudio, através de um breve roteiro norteador.
- b) Na fase interativa, a aula da professora foi videogravada. Procuramos videogravar ações com foco na desenvoltura da professora e da interação entre os seus alunos. A videogravação foi transcrita na íntegra, analisada e foram selecionados os momentos que enfatizavam o critério de confronto que havíamos acordado na fase pré-ativa para o momento seguinte.
- c) Na fase pós-ativa, acordamos uma sessão de discussão a respeito de certas ações que ocorreram em sala de aula. Foi ressaltado que a reflexão sobre a ação seria norteador por um roteiro, com questões reflexivas e provocadoras, sendo gravado em áudio e depois transcrito na íntegra.

O produto final emergiu do confronto entre as reflexões e as ações realizadas pela professora nas fases pré-ativa e interativa.

Metodología

A investigação aconteceu numa escola da zona leste de Manaus-Amazonas, onde existem 120 escolas e uma área das mais populosas da cidade. A professora tem formação inicial de Licenciatura em matemática, com especialização em metodologia da pesquisa científica e com uma carga horária de 40 horas semanal. Efetiva nas duas matrículas, ministra aulas no vespertino e no noturno na terceira série do Ensino Médio na mesma escola. Foram disponibilizadas, para esse estudo de investigação, quatro horas/ atividade semanais durante três meses no ano letivo de 2019. O acompanhamento das atividades pedagógicas para registrar e investigar as reflexões

acerca do trabalho da professora foi realizado no segundo bimestre de 2019 entre os meses de maio, junho e julho de 2019. Foram feitas dezesseis visitas na fase pré-ativa. Nessa fase, capturou-se que haviam situações embaraçosas e conflituosas entre os alunos da professora. Essas situações são marcadas pela indisciplina de seus alunos ocasionando o não desenvolvimento de suas aulas e essa questão a deixava apreensiva. Nesse contexto, o processo acabou se tornando uma parceria entre o investigador e a professora, no sentido de assessorar a mesma em suas dificuldades pedagógicas por meio de ações que nos levassem a uma reflexão colaborativa sobre os conteúdos da prática eletiva. Para tanto, fez-se necessário conhecer a professora em reais situações de ensino e aprendizagem na sala de aula. Nessa fase da investigação foi apresentada à docente a “sala de espelhos”, metodologia essa que possibilitaria colocar a professora a refletir sobre a ação, tendo como referência a sua própria prática eletiva.

A professora concordou em gravar as aulas em vídeo de acordo com a série/turma selecionada por ela (3.^a A e B) e na ocasião em que se sentisse preparada para tal ação. De imediato também conseguimos capturar que a professora não tinha realizado o planejamento ‘*o meu planejamento do ano passado é o mesmo do ano anterior*’. Também, expressou que ‘*tomara que ocorra tudo bem!*’.

No período da investigação foram realizadas cinco autoscopias. Dessas cinco, apenas duas foram tomadas para discussão e análise. Sendo uma sobre ‘atividade’ e a outra sobre ‘avaliação’. No entanto, somente a autoscopia sobre a ‘avaliação’ será retratada neste trabalho por corroborar com as reflexões que a professora deverá realizar sobre a sua prática eletiva, considerando a ‘avaliação’ como um meio do processo pedagógico e não como fim. Como síntese, será exposto um quadro com alguns temas reflexivos da prática eletiva da professora. A escolha de duas autoscopias que foram realizadas baseou-se no conteúdo das reflexões mais significativas da professora tomadas como referência na fase pré-ativa. A caracterização da fase pós-ativa foi baseada nas reflexões que confrontam as ideias centrais analisadas na fase pré-ativa, com o objetivo de identificar as correlações entre as reflexões das duas fases. Os meses que aconteceram foram os de maio e junho, momentos esses acordados com a professora e a equipe pedagógica da escola. Cada momento teve a duração de 1 hora e 40 minutos, dois tempos de aula da professora. O resultado do momento da autoscopia que aconteceu em junho está retratado no quadro 2 a seguir.

Quadro 2

Tópicos reflexivos da prática eletiva da professora

Tópicos reflexivos da prática avaliativa	Autoscopia	
	Fase pré-ativa: reflexão para ação	Fase pós ativa: reflexão sobre a ação
	Características da prática letiva	

	Ideias centrais	Citações das reflexões	Citações das reflexões
Dimensão emocional da avaliação	Angústia	Professor não vai reparar se eu ficar nervosa, porque em dia de avaliação, eu fico muito estressada.	[...] tem uma turma de alunos que não parou de conversar [...], isso me irrita.
Dimensão cognitiva da avaliação	Conhecimento	Eu não quero aprofundar nada.	Quero saber se o aluno consegue abrir o livro e ver que o item envolve o conjugado de um número complexo e a igualdade entre eles.
Aprendizagem dos alunos na avaliação	Memorização	Quem tiver lido o livro didático antes da avaliação vai direto e nem vai pensar, vai direto lá (na página onde está o item)	[...] expliquei em sala folhando o livro didático para que eles procurassem observar os itens resolvidos do livro didático.
Ação dos alunos	Passivos	Quem for inteligente nem vai pensar, irá direto na resolução.	[...] tem uns que ficam conversando.
Objetivos da avaliação	Empirismo do conhecimento	É saber se eles tem tudo organizado no caderno e se estão fazendo a tarefa do livro didático.	[...] se eles entenderam os conceitos iniciais sobre 'Números Complexos' e, se conseguem realizar o desenvolvimento dos itens através de consulta.

Expectativa da professora com a autoscopia	Alta	Sim, claro! Estou chegando a conclusão que isso rende mais porque está lidando diretamente com a prática eletiva.	Eu tinha muita vontade de lidar com minha prática.

Fonte: Autoscopias realizadas pelo investigador

Ao analisar o quadro 2, ressaltamos que essa autoscopia sobre a avaliação evidencia que a professora concebe esse instrumento como verificador de tarefas, cadernos organizados etc, menos o desenvolvimento de habilidades e competências para o ensino e aprendizagem de seus alunos. Conjectura-se que essa concepção seja fruto da indisciplina retratada pela professora no momento pré-ativo ou por desconhecimento da essência do processo avaliativo para o trabalho pedagógico do professor. Também podemos inferir que a professora concebe o conhecimento como produto de repetição de exercícios que os alunos realizaram em seus cadernos e/ou livro didático. Em se tratando da aprendizagem dos alunos no processo avaliativo, a professora preza pela memorização de conteúdos e pela transcrição de conteúdos, sem aprofundamento do mesmo.

Algumas considerações

Ao tomar a análise e discussão dos resultados, constatamos que o processo avaliativo escolar é um tomo do currículo que leva a reflexões sobre a prática eletiva do professor, assim como a desdobramentos para outros tomos, os quais estão intimamente relacionados com um “efeito dominó” que implica um impacto no outro através da reflexão, de acordo com a epistemologia que subjaz o conhecimento na ação do professor. Na fase pré-ativa, capturou-se exemplos da prática eletiva da professora como a não realização de planejamento anual e nem bimestral tal como capturado por sua fala *“eu sempre replico o meu planejamento do ano anterior pois, a pedagoga da escola nem olha”*.

Na fase da ação, conseguimos capturar o perfil da professora com extrema preocupação na memorização dos conteúdos pelos alunos. Portanto, ao repetir itens já realizados em sala de aula na avaliação, caracteriza esse processo com Baixa exigência cognitiva.

Na pós ação, que aconteceu por meio das gravações, a professora reconhece o que não deveria ter feito, como por exemplo ter se irritado com a questão da conversa, *“eu não estou nem aí para as conversas deles”*. Existem autores, como Perrenoud (2002), que salientam sobre as reflexões distantes do calor da ação e sustentam que possuem dois focos a saber: um foco retrospectivo em que a professora procurou analisar e criticar o que foi realizado e o outro, mais prospectivo,

em que a professora faz considerações, tais como: "*quem tiver lido o livro didático, vai direto na página em que se encontra o item da avaliação*". Também, foi observado que a professora admite que os alunos possuem capacidade de pensamento, essa reflexão rompe com uma das partes da sua epistemologia empirista, uma vez que se evidencia que os seus alunos pouco interagem com os conteúdos ministrados em sala de aula.

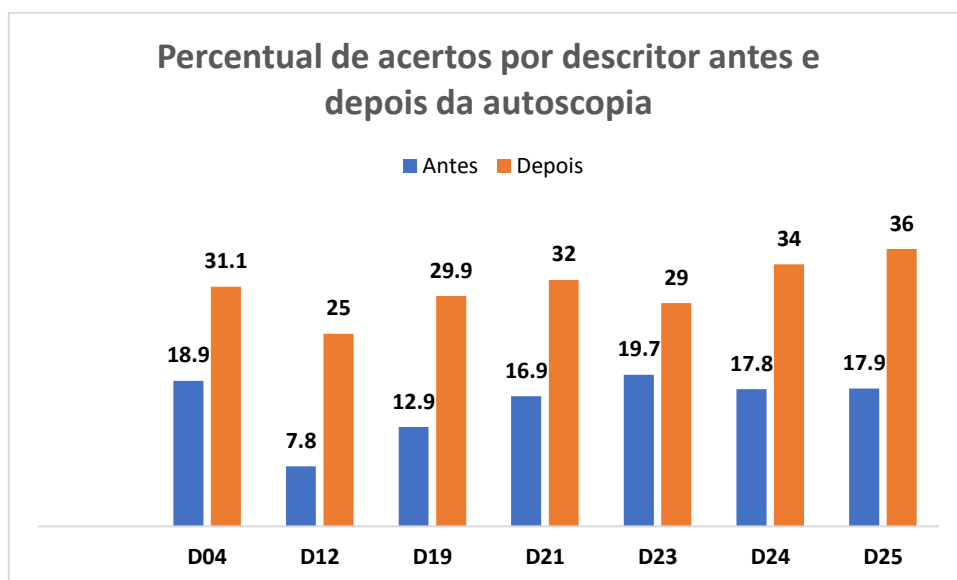
No contexto da investigação, entende-se que a parceria colaborativa proporcionou um conhecimento a mais em relação à formação da professora, pois a autoscopia como metodologia da "sala de espelhos", de certa forma, colaborou na compreensão da ação pela professora. Fato capturado por essa fala da docente '*eu tinha vontade de lidar com a minha prática*'.

Em relação à formação continuada, recomenda-se que investigadores-formadores de professores e gestores de escola não meçam esforços para promover a criação e ou implementações de momentos reflexivos que conduzam os professores a refletirem sobre a sua prática eletiva.

Ao retornarmos aos descritores escolhidos para essa investigação, no caso, D04, D12, D19, D21, D23, D24 E D25, a professora realizou um planejamento para cada habilidade e procurou por metodologias ressignificadoras como por exemplo, a sala de aula invertida e espaços não formais de aprendizagens para potencializar o ensino e aprendizagem de seus alunos. O resultado foi observado pela professora quando refere "*cada aluno possui um tempo para aprimorar o conteúdo ensinado em sala de aula*". Esse fato foi abordado no momento pré-ativo da autoscopia, onde o investigador sugeriu algumas metodologias à professora para seu planejamento. O resultado é apresentado no quadro 3 a seguir.

Quadro 3

Resultado após a autoscopia em relação aos descritores investigados



Fonte: Avaliação pós autoscopia

Ao analisar o quadro 3, observa-se que houve um ganho em relação a cada habilidade investigada e que, após as reflexões realizadas pós autoscopia e realização de um planejamento, ocorreram elevações em todos os descritores. Em relação ao D04, o percentual de acerto se elevou em 12,2%, D12 em 17,2%, D19 em 17%, D21 em 15,1%, D23 em 9,3%, D24 em 16,2% e o D25 em 18,1 %, quando comparados a avaliação diagnóstica inicial realizada na Rede Estadual de Ensino do Amazonas.

Foi observado que os momentos pós-ativo da professora foram ressignificados e a metodologia da autoscopia apresentada foi concebida como um potencializador do ensino e aprendizagem para os seus alunos.

Referências

- Alarcão, I. Reflexão crítica sobre o pensamento de D. Schön e os programas de formação de professores. In: _____, Formação reflexiva de professores: estratégias de supervisão. Porto: Porto Editora, 2000. p. 9-39.
- _____. Professores reflexivos em uma escola reflexiva. 2. ed. São Paulo: Cortez, 2003. 102p.

- Becker, F. A Epistemologia do professor: o cotidiano na escola. 6. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 1998. 344p.
- Boa Vida, A. M.; Ponte, J. P. Investigação colaborativa: potencialidades e problemas. In: GTI (org). Reflectir e investigar sobre a prática profissional. Lisboa: APM, 2002. p. 43-55.
- Gauthier, Clermont et al. Por uma Teoria da Pedagogia: pesquisas contemporâneas sobre o saber docente. Ijuí, RS: UNIJUÍ, 2006.
- Haddad, S. Juventude e escolarização: uma análise da produção de conhecimentos. Brasília/DF: MEC/Inep/Comped, 2002.
- Oliveira, Aldemir M. O uso dos descritores como ferramenta eficiente no ensino de matemática no Estado do Amazonas – Simpósio Nacional de Formação do Professor de Matemática – Brasília – Agosto de 2015- Brasil
- Oliveira, Aldemir M. O uso dos descritores como ferramenta eficiente no ensino de matemática no Estado do Amazonas – Norte do Brasil – I Conferência do Espaço Matemático em Língua Portuguesa – Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra – Outubro – 2015 – Coimbra – Portugal
- Perrenoud, P. A Prática reflexiva no ofício do professor: profissionalização e razão pedagógica. Porto Alegre, ArtMed, 2002. 232p.
- Sadalla, A. M. F. A.; LAROCCA, P. Autoscopia: um procedimento de pesquisa e de formação. Educação e Pesquisa. São Paulo, v. 30, n. 3, p. 419-433, set./dez. 2004.
- Schon, D. A. Educando o profissional reflexivo: um novo design para o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000. 256p.
- Saint-Onge, M. O ensino na escola: o que é, como se faz. 2. ed. São Paulo: Loyola, 2001.
- Schon, D.A. Educando o Profissional Reflexivo: um novo design para o ensino e aprendizagem. Trad. Roberto Cataldo Costa. Porto Alegre: Artmed, 2000, 256p
- Shulman, Lee S. Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. Educational Researcher. v.15, n.2. fev. 1986, pp.4-14.
- Tardif, Maurice. LESSARD, Claude. O trabalho docente: elementos para uma teoria da docência como profissão de interações humanas. 6ª Ed. Rio de Janeiro: Vozes, 2011.

FORMACIÓN DOCENTE QUE ENSEÑA MATEMÁTICAS DESDE UNA PERSPECTIVA COLABORATIVA

Zionice Garbelini Martos Rodrigues

Roseli Regina Fernandes Santana

Luciane de Castro Quintiliano

Adriana de Bortoli

zionice@ifsp.edu.br ,roselirfernandes@professor.educacao.sp.gov.br,
luciane.quintiliano@ifsuldeminas.edu.br, adrianadebortoli1@hotmail.com

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP), campus Birigui,
Universidade Estadual Paulista (UNESP), campus Bauru, Instituto Federal de Educação, Ciência e
Tecnologia do Sul de Minas (IFSULDEMINAS), Faculdade de Tecnologia de Lins – Brasil

Resumen

El trabajo tiene como objetivo presentar historias de y en la trayectoria formativa de un grupo de investigación desarrollado desde una perspectiva colaborativa para la formación de profesores que enseñan matemáticas. El Grupo Colaborativo de Educación Matemática (GCEMC) cuenta con la contribución de profesores universitarios, maestros de Educación Básica y graduados del curso de Pedagogía y Matemáticas en su constitución, actúa con instituciones asociadas que corroboran la formación inicial y continua de maestros que enseñan o enseñarán Matemáticas. en diferentes niveles de educación, desarrollando estudios, proyectos de investigación y extensión promovidos por el Instituto Federal de Educación, Ciencia y Tecnología (IFSP), campus de Birigui. Entendemos que el contexto colaborativo tiene mucho que contribuir a la formación docente, dadas las debilidades y lagunas de la educación inicial, además de las necesidades y las nuevas demandas curriculares que fomentan la educación continua, y varios estudios apuntan a prácticas colaborativas (BOAVIDA; PONTE, 2002; COSTA, 2006; GAMA, 2007; CRISTÓVÃO, 2009; FIORENTINI, 2009; NACARATO, 2013; CIRÍACO, 2016) como herramienta en la construcción del conocimiento para la enseñanza.

Palabras clave: *formación docente, colaboración, educación matemática.*

Introducción

Este resumen tiene como objetivo presentar historias de y en la trayectoria formativa de un grupo de investigación desarrollado desde una perspectiva colaborativa para la formación de profesores que enseñan matemáticas. El Grupo Colaborativo de Educación Matemática (GCEMC) cuenta con

la contribución de profesores universitarios, maestros de Educación Básica y graduados del curso de Pedagogía y Matemáticas en su constitución, actúa con instituciones asociadas que corroboran la formación inicial y continua de maestros que enseñan o enseñarán Matemáticas en diferentes niveles de educación, desarrollando estudios, proyectos de investigación y extensión promovidos por el Instituto Federal de Educación, Ciencia y Tecnología (IFSP), campus de Birigui.

Entendemos que el contexto colaborativo tiene mucho que aportar a la capacitación docente, dadas las debilidades y lagunas de la educación inicial, además de las necesidades y las nuevas demandas curriculares que fomentan la educación continua, y varios estudios apuntan a prácticas colaborativas (BOAVIDA; PONTE, 2002; COSTA, 2006; GAMA, 2007; CRISTÓVÃO, 2009; FIORENTINI, 2009; NACARATO, 2013; CIRÍACO, 2016) como herramienta en la construcción del conocimiento para la enseñanza.

El GCEMC, a pesar de tener más de cuatro años de desarrollo de sus actividades, busca un diálogo con otros dos grupos de investigación que son el HIFEM (Historia y Filosofía de la Educación Matemática) y el GPPEM (Grupo de Investigación de Psicología Educativa). Por lo tanto, se puede afirmar que esta conexión se debe al hecho de que las relaciones sobre la formación docente impregnan todas las dimensiones, ya sea de la Historia de la Educación Matemática o de la Psicología de la Educación Matemática.

En la investigación postdoctoral de uno de los autores, fue posible identificar que existen diferentes formas de tratar el término - colaborativo - (Martos-Rodrigues, 2016). En nuestro grupo de investigación hemos entendido el término muy de cerca a lo que Fiorentini (2009) discutió en su investigación, y también a Ferreira (2003). La investigación llevada a cabo en Portugal difería de Brasil: el aspecto peculiar es que el modo de colaboración entendido en Portugal se desarrolló relativamente mientras se desarrollaba la investigación de doctorado o maestría. Nos parece que tanto el GPA (Rio Claro Action Research Group) como el GdS (Saturday Group) tuvieron características de continuidad durante los años posteriores a la finalización de sus respectivas investigaciones, es decir, una colaboración centrada en el aprendizaje y el desarrollo de participantes, no necesariamente vinculados a la investigación académica.

A continuación, presentamos algunas experiencias de capacitación e investigación que involucran a maestros o futuros maestros con respecto a la enseñanza de las Matemáticas en Educación Básica.

Experiencias formativas grupales en contextos colaborativos.

Desde 2014, año de formación de GCEMC, el grupo ha coordinado la capacitación y la investigación en un contexto de colaboración, produciendo obras escritas, publicadas en libros, actas de conferencias y revistas de renombre en el campo de la educación matemática.

El grupo participó en la producción de dos capítulos del libro organizado por Ciriac y Martos-Rodrigues (2016). El título incluía informes de prácticas colaborativas y trabajos de investigación

en situaciones de formación docente que enseñan matemáticas en educación básica. Uno de los capítulos describe la experiencia de un trabajo colaborativo del grupo para desarrollar el plan de estudios oficial del estado de São Paulo, cuyo objetivo era desarrollar algunas situaciones de aprendizaje para el sexto grado de la escuela primaria, a través del Proyecto Estadístico, fortaleciendo la formación de docentes en el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación para la enseñanza de las Matemáticas.

El otro capítulo se refiere a un informe de experiencia de un proyecto piloto desarrollado a través de talleres y juegos, los contenidos relacionados con conceptos algebraicos, en una escuela pública en São Paulo. El propósito del proyecto, como una mejora del plan de estudios oficial, era trabajar la enseñanza del álgebra a través de estrategias innovadoras, promoviendo la construcción del conocimiento de una manera significativa y contextualizada.

En 2017, el Seminario GPEP e HIFEM: Reuniones de investigación sobre la historia de la educación matemática, celebrada en la Universidad Federal de Rio Grande do Norte en Natal, fue el momento en que dos miembros del grupo de investigación comenzaron su trabajo con posibles diálogos con Historia de la Educación Matemática y comenzar un proyecto de investigación que busca investigar qué conocimiento se puede mejorar con el uso de la Historia de la Educación Matemática? que describe el trabajo realizado en Herminio Cantisani y una primera capacitación en la escuela Geracina. Aunque los entrenamientos se llevaron a cabo en los momentos otorgados por la coordinación pedagógica de ambas escuelas en una de estas escuelas, solo se realizó uno de estos entrenamientos. La investigación tiene como tema cuatro maestros que enseñan Matemáticas, de la Escuela Estatal Hermínio Cantizani y les proponemos cinco reuniones que tuvieron lugar con registros narrativos, a partir de sesiones de estudio sobre el tema mencionado. Durante las reuniones, hicimos las grabaciones de video para poder analizar más adelante los frutos de estas actividades, modificándolos con cada nueva reunión y reflexionando sobre los aspectos teóricos relacionados con la práctica docente.

Como resultado de estas formaciones, se produjeron dos textos "Reuniones de (re) investigación en Historia de las Matemáticas" (en prensa), en las que tenemos un capítulo titulado: "Potencialidades de un trabajo colaborativo basado en problematizaciones históricas; centrarse en el área temática y los perímetros "y será publicado por el editor de la Universidad Federal de Río Grande del Norte, y" Una propuesta para el uso de la historia de las matemáticas en la formación continua del profesorado, una experiencia con docentes del interior del estado de São Paulo ", que se presentó en el Séptimo Seminario Internacional de Investigación sobre Educación Matemática en noviembre de 2018. Además, como resultado de SIPEM, fuimos invitados a una nueva publicación en la revista de Historia de la Educación Matemática.

Como resultado de este estudio, tuvimos las acciones iniciales presentadas en forma de una comunicación científica en la que buscamos dialogar sobre los resultados de nuestra investigación que se estaban realizando para investigar la asociación de dos tendencias de enseñanza en Educación Matemática: Historia de las Matemáticas y Tecnologías de Información y Comunicación como una posibilidad de mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas.

Se publica en los anales de la XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática celebrada en Medellín, Colombia.

Es de destacar que entendemos que la retroalimentación de uno de los participantes del grupo aporta aspectos favorables a este tipo de acción de capacitación, en palabras de uno de los participantes justifica nuestra acción de capacitación. En tus palabras, *"Mi acercamiento al software Geogebra tuvo lugar hace unos cinco años [...], tuve la oportunidad de participar en algunos cursos cortos, que exploraron todo el potencial pedagógico de Geogebra en otros contenidos matemáticos (áreas, perímetros, geometría espacial, planetas). , etc.) En este sentido, la asociación con el Instituto Federal - Campus Birigui, ha traído grandes contribuciones formativas para nosotros, los maestros de matemáticas de la red estatal. Digo esto porque en la educación continua generalmente incluye temas generales y comunes de práctica educativa. La oportunidad para la mejora específica del conocimiento matemático, así como los recursos y estrategias de enseñanza, siempre es muy enriquecedora para los educadores, pero especialmente para los estudiantes. (PARTICIPANTE DEL CURSO DE FORMACIÓN, 2018).*

En 2017, el líder del grupo fue invitado a asistir al Noveno Día Nacional de Educación de Naviraí y al Séptimo Coloquio Nacional de Ciencias Sociales en la ciudad de Naviraí, en el estado de Mato Grosso. Ampliación de las acciones del grupo, destacamos que la actividad realizada en los Viajes se realizó por la mañana, mientras que la actividad realizada con el software Geogebra se realizó por la tarde en la misma institución.

Consideraciones finales

Como cada grupo que desarrolla sus actividades y busca ampliar nuevos horizontes de investigación, GCEMC, a partir de una capacitación ofrecida a un grupo de graduados de pedagogía en una facultad en la región de Birigui, tiene la intención de dirigir sus actividades a los grados iniciales de educación básica.

Como actividad para el segundo semestre, el grupo comprende que el estudio y la discusión del conocimiento matemático del maestro que enseña matemáticas es una demanda apremiante.

La participación de Profa. La Dra. Giovana Sander Pereira viene a agregar el equipo de acciones en la perspectiva del trabajo con la serie inicial y trae el tema de la psicología cognitiva del tema de la creencia en la autoeficacia y sus relaciones con la Educación Básica, especialmente en la serie inicial.

En 2019, obtuvimos un título de posdoctorado en progreso en la Universidad de Huelva en España que analiza el tema del Conocimiento especializado del maestro en la enseñanza de las matemáticas y el uso de la Historia de las matemáticas en la formación del maestro, que busca investigar la formación de maestros y maestros. posibles relaciones entre la historia de las matemáticas y las tecnologías.

En 2018 y 2019, respectivamente, el Prof. Anderson Cangane Pinheiro y Profa. Roseli Regina Fernandes Santana defendió sus disertaciones sobre pensamiento algebraico y creencias de autoeficacia. Desde el comienzo de GCEMC, ambos maestros han experimentado numerosos momentos de estudio, reflexión, capacitación e investigación, destacando así las contribuciones del grupo colaborativo a la formación de investigadores. Consideramos que tanto la dinámica colaborativa como las actividades desarrolladas en el grupo fomentaron y subsidiaron la formación y la mejora académica de los participantes. Los trabajos de los profesores Anderson Cangane Pinheiro y Roseli Regina Fernandes Santana, a su vez, contribuyeron a uno de los últimos trabajos de graduación defendidos en el grupo que también se ocupó del pensamiento algebraico y sus relaciones con SARESP, por Fernando Martinelli.

El GCEMC ha demostrado un potencial de producciones formativas y académicas con importancia relevante para la Educación Matemática en una perspectiva de colaboración en la cual los participantes son agentes en formación y formadores que en sus procesos de actuación pueden contribuir cada vez más a mejorar la calidad de la enseñanza.

Referencias

- BOAVIDA, A. M.; PONTE, J. P. (2002). Investigación colaborativa: Potencialidades e problemas. In: GTI (Org.). *Refletir e investigar sobre a prática profissional*. Lisboa: APM, p. 43-55.
- CASTRO L. Q. & FERNANDES R. Martos-Rodrigues Z. M. (2016). Relato de Experiências com oficinas envolvendo conceitos algébricos no Ensino Fundamental nos anos finais In: CIRIACO Klinger Teodoro & MARTOS-RODRIGUES, Zionice Garbelini. (Orgs). *Práticas de colaboração em contextos de formação* Curitiba:1ª ed. Editora CRV.
- CIRIACO Klinger Teodoro & MARTOS-RODRIGUES Zionice Garbelini (Orgs). (2016) *Práticas de colaboração em contextos de formação*. CRV Curitiba.
- COSTA, G. L. M. (2019). O trabalho colaborativo e as tecnologias de informação e comunicação na formação e na prática pedagógica do professor de Matemática: indícios de mudança da cultura docente. In: *29ª Reunião Anual da ANPED*, Caxambu – MG, 2006. Disponível em: <http://29reuniao.anped.org.br/trabalhos/trabalho/GT19-2234--Int.pdf>, Acesso: 18, jul. 2019.
- CRISTÓVÃO, E. M. (2009). O papel da colaboração na construção de uma postura investigativa do professor de Matemática. In: CARVALHO, D. L.; CONTI, K. C. (Orgs.). *Histórias de colaboração e investigação na prática pedagógica em Matemática: ultrapassando os limites da sala de aula*. Campinas, SP: Editora Alínea.
- FIORENTINI, D. (2007). Pesquisar práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente? In: *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica p. 47-76.

GAMA, R. P. (2007) *Desenvolvimento profissional com apoio de grupos colaborativos: o caso de professores de matemática em início de carreira*. Tese (Doutorado) – Faculdade de Educação. Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP,

FERREIRA, Ana Cristina. (2003) *Metacognição e desenvolvimento profissional de professores de matemática: uma experiência de trabalho colaborativo*. 390 f. Tese (Doutorado em Educação) Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

MARTOS-RODRIGUES Zionice Garbelini. (2016). Grupos de investigação colaborativos em Educação Matemática: um exercício de diálogos possíveis. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática Acta Scientiae* Canoas: v. 18, n. 3.

QUINTILIANO Luciane de Castro, SANTOS Helen de Freitas (2017). Trilhando saberes: a trajetória da criação de um grupo em contexto colaborativo In: *Revemat*. SBEM SP. São Paulo.

MARTOS- RODRIGUES et alli. (2016). Grupo Colaborativo de Educação Matemática e Científica: A experiência de um trabalho em contexto colaborativo para o desenvolvimento do Currículo Oficial do Estado de São Paulo In: CIRIACO Klinger Teodoro & MARTOS-RODRIGUES Zionice Garbelini (Orgs). *Práticas de colaboração em contextos de formação*. 1ª ed. Curitiba: Editora CRV.

NACARATO, A. M. (2013). O grupo como espaço para aprendizagem docente e compartilhamento de práticas de ensino de Matemática. In: NACARATO, A. M. (Org.). *Práticas docentes em educação matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental*. 1ª ed. Curitiba: Editora Appris.

O ENSINO E A APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA NO PROCESSO DE LETRAMENTO DA LÍNGUA MATERNA: REFLEXÕES PARA A PRÁTICA PEDAGÓGICA

Dimas Cássio Simão

dimas.simao@sumare.edu.br

Sumaré Centro Universitário, Brasil

Resumen

Este trabalho faz parte de um estudo do grupo de pesquisa sobre alfabetização e letramento matemático do Centro Universitário Sumaré, instituição localizada em São Paulo, Brasil. O grupo possui cinco integrantes, sendo um coordenador e quatro alunas dos sétimo e oitavo semestres do curso de Pedagogia da instituição. Tem como objetivo geral estudar a alfabetização e o letramento matemático como contribuição ao processo de letramento da língua materna. Investigar e refletir sobre como o professor que ensina matemática, a partir de sua concepção de educação e de sua prática pedagógica, concebe a alfabetização e o letramento das crianças dos anos iniciais do ensino fundamental. Neste estudo de caráter qualitativo, serão realizadas pesquisas de campo pelas alunas integrantes do grupo nas escolas onde são estagiárias. As alunas pesquisadoras farão observação de aulas mediante um roteiro pré-estabelecido, entrevistas com as professoras, análise de planos de aula e das atividades elaboradas e desenvolvidas pelas crianças. Nossa hipótese para questão norteadora, a partir dos primeiros relatos das alunas pesquisadoras, apontam que as professoras ainda têm uma prática meramente conteudista se limitando à memorização da tabuada e focando nos algoritmos das quatro operações.

Palabras clave: *Educação Matemática, Alfabetização Matemática, Letramento Matemático, Professores que ensinam Matemática.*

Introdução

A pesquisa em desenvolvimento tem como motivação a minha experiência como docente nas disciplinas de Letramento Matemático e Metodologia do Ensino de Matemática do curso de Pedagogia do Centro Universitário Sumaré, localizada na cidade de São Paulo, Brasil. Percebo o medo e as dificuldades das alunas com a matemática, o que é historicamente normal, apesar de o tempo todo nas aulas tentar desconstruir a concepção tradicional do ensino de matemática, baseada em memorização e aplicação de técnicas e algoritmos.

A Matemática é responsável pelo desenvolvimento de várias habilidades importantes que vão ajudar as crianças na vida, na sua cidadania. Segundo Brasil (1997) a matemática desempenha um

papel decisivo na vida cotidiana, pois tem muitas aplicações no mundo do trabalho e também contribui para a construção de conhecimentos em outras áreas curriculares. Neste sentido, aprender matemática contribui para o desenvolvimento de habilidades intelectuais, do raciocínio lógico e dedutivo, entre outras coisas o que certamente fará diferença na vida adulta das crianças dos anos iniciais do ensino fundamental.

Os educadores e formadores de professores têm um grande desafio que é o de buscar caminhos para que a escola de educação básica forme efetivamente o cidadão mediante o desenvolvimento da capacidade de aprender, tendo como meios básicos o pleno domínio da leitura, da escrita e do cálculo, Brasil (1996). E certamente não é com a concepção de ensino e aprendizagem como meros acúmulos de informações e memorização que vamos atingir esta formação. Infelizmente essa concepção ainda se faz presente na escola em todos os níveis da educação no Brasil e esta visão não mais satisfaz as exigências da sociedade.

Acredita-se que a alfabetização matemática e o letramento matemático são caminhos importantes no processo de formação do cidadão. Para Brousseau (1996), o professor deve propor problemas para que as crianças possam agir e refletir, falar e evoluir por iniciativa própria, criando assim condições para que tenham um papel ativo no processo de aprendizagem.

A definição do objeto, do problema da pesquisa considerou a minha experiência como formador de professores e principalmente como formador de professores dos anos iniciais do ensino fundamental a partir do ano de 2014.

Problema de investigação e aspectos teóricos e metodológicos

Este trabalho é uma pesquisa que pretende analisar práticas de professores sobre o processo de alfabetização matemática na perspectiva do letramento de crianças dos anos iniciais do ensino fundamental. Estabeleceu-se então, o seguinte problema de pesquisa: como o professor trabalha os princípios fundamentais da matemática e de que forma as aprendizagens podem contribuir para as crianças atuarem e compreenderem o mundo?

Considerando as deficiências em Matemática e a concepção de ensino e aprendizagem de grande parte dos professores que ensinam matemática, esta pesquisa tem como objetivos: refletir sobre o processo de alfabetização matemática e o letramento matemático como contribuição ao processo de letramento da língua materna por meio da interpretação, resolução e construção de situações problemas; refletir sobre como o professor, a partir de sua concepção de educação e de sua prática pedagógica usual, concebe a alfabetização e letramento das crianças dos anos iniciais do ensino fundamental. Além desses objetivos, queremos propor a discussão, a reflexão e a produção de conhecimentos acerca dos conceitos matemáticos abordados nos anos iniciais do ensino fundamental para a compreensão e facilitação na resolução de problemas pelos alunos.

Esta pesquisa se justifica considerando que os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática, documento norteador do trabalho docente, alertam que o ensino de matemática prestará sua contribuição à medida que forem exploradas metodologias que priorizem a criação

de estratégias, a comprovação, a justificativa, a argumentação, o espírito crítico, e favoreçam a criatividade, o trabalho coletivo, a iniciativa pessoal e a autonomia advinda do desenvolvimento da confiança na própria capacidade de conhecer e enfrentar desafios. Brasil (1997). E também por conta do mais recente documento do Ministério da Educação do Brasil, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que estabelece o conjunto de aprendizagens essenciais e indispensáveis à que todos os estudantes, crianças, jovens e adultos, têm direito. A BNCC afirma com relação ao ensino da matemática:

O Ensino Fundamental deve ter compromisso com o desenvolvimento do letramento matemático, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. É também o letramento matemático que assegura aos alunos reconhecer que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo e perceber o caráter de jogo intelectual da matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e pode ser prazeroso. (Brasil, 2018, p. 264)

A pesquisa e o estudo da alfabetização e do letramento matemático podem contribuir não só para a melhoria do processo de ensino e aprendizagem da matemática como para a reflexão da prática pedagógica dos professores que ensinam matemática, bem como dos alunos recém-formados do curso de Pedagogia.

São muitas as propostas inovadoras para o processo de ensino e aprendizagem da matemática, no entanto, muitas vezes a implantação destas propostas esbarra, entre outras coisas, na existência de concepções pedagógicas e de educação inadequadas para a atualidade, tanto das escolas como dos professores. Tradicionalmente o ensino de matemática é visto como a simples definição de conceitos e utilização de algoritmos para a resolução de exercícios e certamente somente esta prática não atende ao processo de letramento e na formação de um aluno crítico e reflexivo. É necessário que a prática pedagógica dos professores seja refletida à luz de uma didática que venha ao encontro de um ensino que realmente forme o aluno integral. Acreditamos que a Didática da Matemática pode contribuir muito para a reflexão dos professores e futuros professores que vão ensinar matemática. Segundo Bloch (2007), a Didática da Matemática é uma ciência humana para construir teorias para a análise dos fenômenos de ensino e de aprendizagem da matemática em um ambiente didático, ou seja, um meio social concebido para o ensino. Apesar de em alguns currículos de cursos de licenciaturas, seja em Matemática ou Pedagogia, essas

teorias estarem presentes, as pesquisas com formação de professores não demonstram que professores de matemática ou professores que ensinam matemática tenham uma prática condizente com os anseios da sociedade. As avaliações de larga escala, também não mostram resultados satisfatórios significativos no processo de ensino e aprendizagem de matemática.

Segundo Almouloud (2007) as pesquisas em Didática da Matemática têm sua origem no fracasso da reforma da matemática nos anos de 1970, fazendo com que pesquisadores franceses, entre outros, a se interessarem pelo estudo e pela investigação de problemas relativos ao ensino e à aprendizagem da matemática. Segundo este autor a Didática da Matemática é uma ciência que tem como objetivo investigar os fatores que influenciam o ensino e a aprendizagem da matemática e o estudo de condições que favorecem a sua aquisição pelos alunos. Algumas teorias da aprendizagem da Matemática como a Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau (2007) e a Teoria dos Campos Conceituais de Gerard Vergnaud (1997) podem ajudar os professores que ensinam matemática, bem como os alunos a entenderem e dar significado aos conceitos da matemática. Estas duas teorias de aprendizagem vêm ao encontro do que recentemente chamamos de alfabetização matemática ou a compreensão dos princípios fundamentais da matemática, bem como o letramento matemático que é o instrumento para a leitura e compreensão do mundo.

Segundo Brasil (2012a), temos vivenciado a dura realidade de identificar que muitas crianças têm concluído sua escolarização sem estarem alfabetizadas. A matemática que faz parte da vida das pessoas é vivenciada no cotidiano, mas não da forma como foi ou é aprendida. Desta maneira a escola deve garantir que o ensino da matemática perpassa pela alfabetização matemática, que entendemos como a compreensão dos princípios fundamentais da matemática. Deste modo as crianças têm a oportunidade de ampliar, aprofundar e mobilizar os conhecimentos matemáticos que devem ser construídos de maneira autônoma, a fim de que possam viver socialmente e culturalmente e compreender melhor as situações do cotidiano, estabelecer relações, tomar decisões, entre outras habilidades importantes, ou seja, que consigam fazer a leitura do mundo. Segundo Brasil (2012a) a alfabetização Matemática é entendida como um instrumento para a leitura do mundo, uma perspectiva que supera a simples decodificação dos números e a resolução das quatro operações básicas. Neste sentido é necessário e urgente fazer com que os professores e futuros professores reflitam suas concepções sobre o processo de ensino e aprendizagem da matemática a terem uma prática pedagógica que realmente possa contribuir para o processo de alfabetização e letramento das crianças dos anos iniciais do ensino fundamental. Ainda sobre o processo de alfabetização e letramento:

... aprender Matemática em um ambiente colaborativo é importante para a leitura e a escrita. Ler e escrever são ações não somente restritas ao campo da linguagem e da alfabetização em língua. Compreender um texto em língua materna, que apresenta escritas próprias da Matemática e representações de conceitos e ideias matemáticas, exige um conhecimento pelo aluno para além da decodificação da língua para um

conhecimento de uma linguagem específica matemática. Nesse sentido, da mesma forma que os conceitos matemáticos vão sendo construídos pelos alunos por meio das investigações e problematizações, uma linguagem matemática também vai sendo produzida a fim de comunicar ideias ou mesmo servir de instrumento de reflexão do conhecimento produzido. Dessa forma, focamos na importância da valorização da leitura e escrita em aulas de Matemática como possibilidade de acesso a uma cultura escrita, ao letramento. (Brasil, 2012b, p. 19).

Entendemos que a sala de aula é o ambiente colaborativo importante para que, juntamente com a mediação do professor as crianças possam relacionar a matemática com suas práticas sociais, lendo, escrevendo e compreendendo um texto na língua materna que tenha escritas próprias da matemática, como porcentagens, tabelas, gráficos, algarismos romanos, números na forma decimal e fracionário, entre outros conceitos e ideias. Sobre as práticas sociais Fonseca (2013) pontua:

as práticas sociais envolvendo quantificação, medição, orientação, ordenação ou classificação compõem os modos de usar a língua escrita e são por eles constituídas, não só porque representações matemáticas aparecem nos textos escritos ou porque nossa herança cultural nos legou modos escritos de fazer Matemática, mas porque a própria cultura escrita, que permeia e constitui as práticas matemáticas das sociedades grafocêntricas, é, em geral, permeada também por princípios calcados numa mesma racionalidade, que forja ou parametriza essas práticas matemáticas e que é por elas reforçada. (p. 9)

Portanto a escrita nas aulas de matemática se faz necessária como forma de registro e comunicação das ideias favorecendo o processo de letramento da Língua Materna e também da Matemática.

Para a realização desta pesquisa está atuante um grupo de estudos e pesquisas no Centro Universitário Sumaré coordenado pelo Prof. Me Dimas Cássio Simão e composto por 4 integrantes que são alunas dos sétimo e oitavo semestres do curso de Pedagogia. Durante os encontros semanais do grupo são realizados estudos, discussões, reflexões e produções a partir da literatura referente à resolução de problemas, alfabetização e letramento tanto da Língua Materna como da Matemática. Nesses encontros as alunas integrantes são questionadas a respeito de como devem ser ensinados os conteúdos matemáticos nos anos iniciais do ensino fundamental e

também contam suas experiências sobre os estágios. São submetidas a desenvolver sequências didáticas e situações-problemas envolvendo as operações fundamentais sempre focando a alfabetização matemática na perspectiva do letramento. Além dos estudos dos textos, as atividades elaboradas serão analisadas à luz de teorias e eventualmente validadas em sala de aula durante o período dos seus estágios. Espera-se com isso que essas alunas reflitam sobre como deve acontecer o processo de ensino e aprendizagem segundo os documentos oficiais PCN e BNCC.

Para responder a questão norteadora deste trabalho, de caráter qualitativo, as alunas durante os estágios vão coletar os dados junto às professoras dos anos iniciais do ensino fundamental de escolas públicas da cidade de São Paulo. Os instrumentos a serem utilizados na pesquisa serão depoimentos escritos dos professores envolvidos, a observação das práticas pedagógicas dos professores mediante um roteiro pré-estabelecido, os planos de aula e as produções das crianças. Posteriormente os dados serão analisados à luz dos documentos oficiais do Ministério da Educação e dos autores que fundamentam este trabalho.

Resultados esperados

Este trabalho encontra-se na sua fase inicial de leituras, estudos dos textos referentes ao tema e relatos das alunas pesquisadoras sobre os estágios com as professoras nas escolas. Ao final deste estudo pretende-se responder como o professor trabalha os princípios fundamentais da matemática e de que forma pode contribuir para a leitura do mundo. Nossa hipótese para esta questão a partir dos primeiros relatos das alunas pesquisadoras apontam que as professoras ainda têm uma prática meramente conteudista se limitando à memorização da tabuada e focando nos algoritmos das quatro operações. Os alunos aprendem de maneira mecânica, normalmente não gostam das aulas de matemática e não conseguem resolver os problemas propostos e quando resolvem não identificam os significados das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão.

Considerações finais

Acreditamos que este estudo deve proporcionar às alunas do curso de Pedagogia e participantes deste projeto, a reflexão sobre suas concepções do processo de ensino e aprendizagem da matemática. Que também possa contribuir para ampliar as reflexões de professores e futuros professores dos anos iniciais do ensino fundamental em relação às práticas pedagógicas sobre a alfabetização matemática na perspectiva do letramento da língua materna, bem como da concepção de ensino e aprendizagem da matemática. Acreditamos que somente com a reflexão da prática pedagógica o processo de ensino e aprendizagem pode começar a mudar, melhorando a qualidade e a compreensão dos alunos. Sobre a reflexão trazemos Brousseau (2007), que salienta: "o professor pode esperar da didática as condições que devem ser criadas em situações

de ensino e aprendizagem e que podem ajudá-lo a modificar suas regras, sua formação e suas relações com a sociedade. Ou seja, que ele possa refletir a sua prática pedagógica e sobre a prática pedagógica reflexiva do professor. Mizukami et al. (2002) afirmam que, na literatura não há um consenso sobre a natureza da reflexão, mas há um acordo geral no sentido de que o professor reflexivo é aquele capaz de analisar a própria prática e o contexto no qual ela ocorre, de avaliar diferentes situações de ensino, de tomar decisões e tornar-se responsável por elas.

Espera-se que este trabalho possa contribuir com a Educação Matemática no sentido das discussões acerca do processo de ensino e aprendizagem da matemática a partir de teorias de aprendizagem.

Referências

- Almouloud Saddo Ag. (2007). Fundamentos da didática da Matemática. Curitiba: Editora UFPR.
- Brasil. (2016). Base nacional comum curricular. *Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. Brasília.*
- Brasil. (1997). Parâmetros Curriculares Nacionais: introdução aos Parâmetros Curriculares Nacionais. *Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF.*
- Brasil. (2014a). Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa: Apresentação. *Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. Brasília: MEC, SEB.*
- Brasil. (2014b). Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa: Organização do Trabalho Pedagógico. *Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. Brasília: MEC, SEB.*
- Brousseau, Guy. (2007) Introdução ao Estudo das Situações Didáticas: conteúdos e métodos de ensino. *São Paulo: Ática.*
- Brousseau, Guy. (1996). Os diferentes papéis do professor. *In Didática da Matemática – Reflexões Psicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed.*

Fonseca, M. C. F. R. (2013). Prefácio. *In: Nacarato, A. M.; Lopes, C. E. (Org.). Indagações, reflexões e práticas em leituras e escritas na educação matemática. Campinas: Mercado de Letras. p. 7-9.*

Mizukami, Maria da Graça Nicoletti et al. (2002). Escola e aprendizagem da docência: processos de investigação e formação. São Carlos: EdUFSCar.

Vergnaud, Gerard. (1996). A Teoria dos Campos Conceptuais. *In: Brun, Jean. Didáctica das Matemáticas. Lisboa: Instituto Piaget.*

CRENÇAS DE AUTOEFICÁCIA E O ENSINO DA ÁLGEBRA NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Anderson Cangane Pinheiro*

Nelson Antonio Pirola**

anderson.pinheiro@educacao.sp.gov.br, npirola@uol.com.br

SEDUC/SP, Brasil*

UNESP-Bauru, Brasil**

Resumen

Esta pesquisa teve como objetivo analisar as crenças de autoeficácia docente para o desenvolvimento do pensamento algébrico em alunos do ensino fundamental da rede pública do Estado de São Paulo. Apresentaremos neste artigo o resultado da pesquisa somente com os professores dos anos finais do ensino fundamental. Para a análise das crenças de autoeficácia dos docentes que lecionam matemática nos finais do Ensino fundamental foi utilizada uma escala elaborada e validada na qual os participantes da pesquisa manifestaram seus julgamentos sobre suas capacidades em tarefas que visam ao desenvolvimento do pensamento algébrico. Participaram da pesquisa 39 professores dos anos finais do Ensino Fundamental. Para a análise e interpretação dos resultados utilizamos a metodologia mista. Constatamos que os professores demonstram crenças de autoeficácia positivas, porém essas crenças não são fortes. Dentre as variáveis que podem influenciar nas crenças citamos formação inicial, pós-graduação, persuasão social, autoconceito, materiais fornecidos pela SEE-SP e interesse dos alunos.

Palabras clave: autoeficácia, afetividade, álgebra, pensamento algébrico.

Introdução

O GPPEM – Grupo de pesquisa em Psicologia da Educação Matemática, vinculado a uma universidade estadual brasileira, vem desenvolvendo pesquisas com o objetivo de investigar aspectos cognitivos e afetivos envolvidos no processo de aprendizagem e do ensino da Matemática escolar. Entre os aspectos cognitivos são realizados estudos que abarcam os processos de resolução de problemas, formação conceitual, habilidades matemáticas, entre outros. No campo da afetividade são conduzidas pesquisas sobre atitudes em relação à Matemática, e as crenças de autoeficácia. Já foram produzidas várias dissertações e teses envolvendo esses temas, entre elas a de Pinheiro (2018). Por meio de uma extensa revisão da literatura, foi mostrada a inexistência, no campo da Matemática, de estudos que envolvem as

crenças de autoeficácia e o ensino de álgebra. Dessa forma, a preocupação com o ensino de álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental e as suas relações com as crenças de autoeficácia se constituíram os elementos motivadores para a realização dessa pesquisa.

O Pensamento Algébrico

Para Almeida e Santos (2017), em um ensaio teórico sobre a caracterização do pensamento algébrico, há um consenso sobre a importância de desenvolver esse tipo de pensamento nos estudantes, entretanto, quando se trata de conceituá-lo, esse consenso não existe. Quando nos deparamos com os diversos artigos em que há a caracterização do pensamento algébrico, entendemos que não há uma única caracterização e isso se deve ao “extenso escopo de objetos (por exemplo, equações, funções, padrões, ...) e processos algébricos (inversão, simplificação, ...) bem como os vários modos possíveis de conceber o pensamento em geral” (Radford, 2006, p. 2 como citado por Almeida & Santos, 2017, p. 34). Entretanto, apesar da dificuldade é importante ressaltar que a Álgebra não pode ser entendida somente como um conjunto de técnicas, mas, também, como uma forma de raciocínio e pensamento acerca de situações matemáticas (Kieran, 2007 conforme citado por Canavaro, 2007) ou de situações que possam ser matematizadas.

Na literatura acadêmica é possível observar que o pensamento algébrico está associado a capacidades de manipular objetos/símbolos, desenvolver processos, estabelecer relações e realizar representações algébricas. Em uma dessas perspectivas encontradas, o pensamento algébrico é entendido como:

“[...] a capacidade de lidar com expressões algébricas, equações, inequações, sistemas de equações e de inequações e funções. Inclui, igualmente, a capacidade de lidar com outras relações e estruturas matemáticas e usá-las na interpretação e resolução de problemas matemáticos ou de outros domínios. A capacidade de manipulação de símbolos é um dos elementos do pensamento algébrico, mas também o é o “sentido de símbolo” (symbol sense), como diz Abraham Arcavi , que inclui a capacidade de interpretar e usar de forma criativa os símbolos matemáticos, na descrição de situações e na resolução de problemas (Ponte, Branco & Matos, 2009, p. 10).”

Para os autores Ponte, Branco e Matos (2009), além das capacidades citadas anteriormente, realizar generalizações também é um aspecto central do pensamento algébrico. Ainda, para esses autores, esses aspectos do pensamento algébrico revelam uma Álgebra que vai muito além do simbolismo e das manipulações algébricas que muitas vezes são o foco do ensino da álgebra escolar.

As Crenças de Autoeficácia

No contexto da TSC, as crenças de autoeficácia são consideradas a base da Agência Humana, pois influenciam diretamente nas motivações para se realizar cursos de ação ou na perseverança diante

dificuldades (Bandura, 2008).

Bandura (1986, p. 391, tradução nossa) define as crenças de autoeficácia como “julgamentos das pessoas em suas capacidades para organizar e executar cursos de ação necessários para alcançar certos tipos de desempenho”. Esses julgamentos sobre suas próprias capacidades, para a realização de determinadas tarefas, são a base para a motivação humana, o bem-estar e as realizações pessoais (Pajares & Olaz, 2008). Se um indivíduo não acreditar que possa obter um resultado esperado, em uma determinada tarefa, haverá pouca motivação para a realização dela ou, ainda, para a superação de dificuldades ou desafios para se concretizá-la. O sucesso em uma tarefa, em muitos casos, depende de inúmeras tentativas ou, ainda, de mudanças nos cursos de ação, o que requer esforço e perseverança. Por isso, as motivações são importantes para a determinação de comportamentos favoráveis à realização de uma determinada tarefa. Nesse sentido, se uma pessoa julga que não consegue produzir um resultado esperado, isso lhe trará pouca motivação e bem-estar na realização de ações que façam concretizar esse resultado. Portanto, Para Bandura (1997, p. 2 citado por Pajares & Olaz, 2008, p. 102) “o nível de motivação, os estados afetivos e as ações das pessoas baseiam-se mais no que elas acreditam do que no que é objetivamente verdadeiro”.

A eficácia de uma pessoa não tem relação somente com as suas capacidades presentes, mas, também, com aquilo que ela acredita que pode fazer com as suas capacidades para a realização de uma tarefa. Nesse sentido, as crenças de autoeficácia fornecem condições para prever comportamentos mediante determinadas tarefas ou objetivos a serem alcançados, pois:

“[...] pode-se prever melhor a maneira como as pessoas agirão por meio de suas crenças em suas capacidades do que pelo que são realmente capazes de realizar, pois essas percepções de autoeficácia ajudam a determinar o que os indivíduos fazem com o conhecimento e as habilidades que possuem (Pajares & Olaz, 2008, p. 102).”

É importante ressaltar a diferença entre ter o conhecimento e habilidades e ter a crença de tê-las e saber usá-las em determinadas circunstâncias. Isso, segundo Bandura (1986), justifica o fato de que pessoas com os mesmos conhecimentos e habilidades produzam resultados diferentes para uma mesma tarefa visando um mesmo objetivo, ou ainda, o fato de que uma mesma pessoa possa produzir resultados diferentes para uma mesma tarefa em momentos distintos. Não é suficiente, então, ter capacidades para a realização de uma determinada tarefa, ou seja:

“Não é questão de se possuir ou não tais capacidades; não basta que estejam presentes. Trata-se de a pessoa acreditar que as possua. Além disso, são capacidades direcionadas para organizar e executar linhas de ação, o que significa uma expectativa de “eu posso fazer” determinada ação (Bzuneck, 2001, p. 116).”

De maneira geral, as crenças de autoeficácia determinam a motivação para realizar tarefas (mesmo que difíceis) a quantidade de esforço e o tempo de compromisso com essas tarefas. Desse modo, pessoas com um sentido positivo de autoeficácia demonstram comportamentos favoráveis para a realização de tarefas. Quanto mais forte a crença, mais esforço e tempo será dispendido em cursos de ação que visem alcançar determinado resultado. Se altas crenças de autoeficácia proporcionam sentimentos favoráveis como prazer, serenidade, perseverança e outros, na realização de tarefas, mesmo que difíceis, o oposto provoca ansiedade, estresse e depressão, provocando assim, desmotivação para a realização da tarefa.

Metodologia

O presente trabalho, no âmbito da Psicologia da Educação Matemática, visou responder a seguinte questão central: Como se apresentam e quais fatores podem influenciar as crenças de autoeficácia docente no desenvolvimento do pensamento algébrico em alunos do ensino fundamental da rede pública do Estado de São Paulo?

Participaram da pesquisa 39 professores de matemática dos anos finais do ensino fundamental, da rede pública do Estado de São Paulo, escolhidos por meio de uma amostra de conveniência.

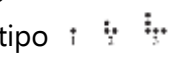
Os instrumentos utilizados para a coleta de dados foram: um questionário contendo dados gerais dos participantes e uma escala de autoeficácia, elaborada e validada nesse estudo.

No questionário solicitamos informações para caracterização dos participantes da pesquisa. Essas informações eram sobre a formação inicial e continuada. Em relação à formação inicial, verificamos se há relação entre a modalidade de formação e as crenças de autoeficácia dos professores para o desenvolvimento do pensamento algébrico nos alunos.

Além das questões para a caracterização dos participantes, apresentamos algumas questões para levantar e analisar as concepções dos professores acerca da Álgebra e de seu ensino. São elas: (1) O que é Álgebra para você? (2) Qual importância você dá para o ensino de Álgebra nos anos finais do ensino fundamental? Por quê? (3) Na sua opinião, o que deve ser ensinado em Álgebra nos anos finais do ensino fundamental? (4) Para você, quais as principais dificuldades que os alunos demonstram na aprendizagem de conceitos ou na realização de tarefas algébricas nos anos finais do ensino fundamental? (5) Na sua opinião, os alunos considerados "bons" em matemática devem demonstrar quais capacidades de pensamento em relação à Álgebra?

O formulário de pesquisa para os professores dos anos finais do ensino fundamental foi composto por trinta e quatro afirmações das quais vinte e seis compunham a escala de autoeficácia. Em relação à escala elaborada para professores dos anos iniciais há algumas diferenças devido a especialidade dos professores, o nível escolar dos alunos e o que se espera em termos de pensamento algébrico.

Quadro 1 – Exemplo de itens contidos na escala de autoeficácia docente – Professores anos finais

Item da escala de autoeficácia	
5	Estou seguro(a) em adequar para todos os alunos as atividades propostas nos materiais oferecidos pela Secretaria de Estado da Educação de São Paulo para a aprendizagem de conceitos algébricos
8	Estou seguro(a) em desenvolver nos alunos a capacidade reconhecer e expressar por meio da linguagem materna (língua portuguesa) regularidades em sequências numéricas
9	Estou seguro(a) em desenvolver nos alunos a capacidade de usar a linguagem algébrica para expressar a regularidade de sequências numéricas
10	Estou seguro(a) em desenvolver nos alunos a capacidade de reconhecer uma relação entre os termos de uma sequência pictórica repetitiva do tipo  e expressar essa relação em linguagem materna e algébrica
11	Estou seguro(a) em desenvolver nos alunos a capacidade reconhecer regularidades em sequências pictóricas crescentes do tipo  ... e expressá-las por meio da linguagem materna ou outras formas de representação (tabela, gráfico etc.)
12	Estou seguro(a) em desenvolver nos alunos a capacidade de usar a linguagem algébrica para expressar a regularidade em sequências pictóricas crescentes do tipo  ...
13	Estou seguro(a) em desenvolver nos alunos a capacidade de usar a linguagem algébrica para expressar situações-problema diversos

Fonte: Autores.

A escala de autoeficácia é composta por itens do tipo likert, com 4 pontos. A cada afirmação, o participante escolhe uma das opções que vai de concordo totalmente a discordo totalmente. A pontuação de cada item varia de 1 a 4. A seguir, as pontuações são somadas e uma média aritmética do grupo é feita.

Na pesquisa optamos pela metodologia mista. Uma pesquisa que utiliza a metodologia mista é:

"[...] aquela em que o pesquisador tende a basear as alegações de conhecimento em elementos pragmáticos (por exemplo, orientado para consequência, centrado no problema e pluralista). Essa técnica emprega estratégias de investigação que envolvem coleta de dados simultânea ou sequencial para melhor entender os problemas de pesquisa. A coleta de dados também envolve

a obtenção tanto de informações numéricas (por exemplo, em instrumentos) como de informações de texto (por exemplo, em entrevistas), de forma que o banco de dados final represente tanto informações quantitativas como qualitativas (Creswell, 2007, p. 35)".

Pesquisadores como Santos Filho e Gamboa (1995), Tashakkori e Teddlie (1998); Shaffer e Serlin (2004); Coutinho (2006); Morais e Pestana Neves (2007) apontam potencialidades para uma pesquisa com as metodologias mistas qualitativa e quantitativa. Segundo Gamboa (1995), apesar das pesquisas nas áreas das ciências sociais apresentarem resultados numéricos, quando analisados sob uma perspectiva social mais ampla, tornam-se qualitativas. Isso, porque, quando os dados numéricos são inseridos no contexto amplo da dinâmica social, "é preciso articular as dimensões qualitativas e quantitativas em uma inter-relação dinâmica, como categorias utilizadas pelo sujeito na explicação e compreensão do objeto" (Gamboa, 1995, p.106).

Análise dos dados

A escala de autoeficácia docente de professores dos anos finais do ensino fundamental para o desenvolvimento do pensamento algébrico nos alunos, elaborada para a realização da pesquisa que norteia o presente trabalho, é uma medida que vai de 26 pontos, obtido quando em todos os itens é assinalada a opção discordo totalmente até 104 pontos que é alcançado quando em todos os itens da escala é assinalada a opção concordo totalmente. O ponto médio da escala está em 65 pontos. Um professor que obtenha valor acima de 65 pontos terá sua crença de autoeficácia avaliada como positiva. Caso o valor seja menor ou igual a 65 pontos a sua crença será avaliada como negativa.

A tabela 1 apresenta o escore total dos professores dos anos finais em relação à escala de autoeficácia.

Tabela 1 - Medidas de resumo do escore total dos professores dos anos finais e classificação sobre as crenças de autoeficácia docente

Anos Finais	Mínimo	Média	Mediana	Máximo	Desvio padrão	Crença	
						Negativa	Positiva
	61	80,79	78	103	10,89	2	37

Fonte: Autores

Na amostra o valor mínimo obtido na escala foi 61 pontos e valor máximo foi de 103 pontos. Do total de professores, dois apresentaram uma crença de autoeficácia negativa com valores de 61 e 65 pontos na escala.

A média de pontos obtidos pela amostra foi de aproximadamente 81 pontos. Apesar dos professores apresentarem, de maneira geral, uma crença positiva, o valor médio obtido está mais

próximo ao ponto médio da escala do que do ponto máximo, ou seja, apesar de positivas, as crenças não são fortes. Se dividirmos o sentido positivo da escala em três intervalos ([65, 78]; [78, 91]; [91, 104]) para uma classificação sentido positivo fraco, sentido positivo médio e sentido positivo forte, 22 professores apresentaram valores do primeiro intervalo, 11 professores no segundo intervalo e 06 professores no terceiro intervalo. Portanto, apesar de positivas, mais da metade dos professores demonstram fracas crenças de autoeficácia docente para o desenvolvimento do pensamento algébrico nos estudantes do ensino fundamental anos finais.

Para as crenças de autoeficácia dos professores dos anos finais encontramos uma relação com as seguintes variáveis: formação inicial, pós-graduação, persuasão social, autoconceito, materiais fornecidos pela SEE-SP e interesse dos alunos.

De maneira geral, as crenças nas duas amostras foram positivas, porém, essas não são tão robustas ou fortes. É importante se considerar que as crenças de autoeficácia estão continuamente em formação e revisão por meio das quatro fontes de informação: experiências diretas, experiências vicárias, persuasão social e estados físicos e emocionais (Azzi, Polydoro & Bzuneck, 2006). Mesmos que essas crenças se apresentem diferentes nos dois níveis de ensino, fortes ou fracas, elas podem ser modificadas a partir de revisões com base nas quatro fontes de informação citadas. Conhecer os resultados apresentados nesta pesquisa ou de outras relacionadas às crenças de autoeficácia docente são:

"[...] particularmente, importantes, pois podem guiar o planejamento, orientação e acompanhamento dos formadores e gestores na direção da construção e da manutenção de uma elevada auto-eficácia do professor que, por sua vez, será medidor de um ambiente de aprendizagem, promotor de altas crenças de auto-eficácia dos estudantes em seus processos de aprendizagem (Azzi, Polydoro & Bzuneck, 2006, p.153)."

Nesse sentido, conhecer os fatores que influenciam as crenças de autoeficácia é necessário para um fortalecimento das mesmas. Particularmente, em relação às crenças de autoeficácia docente para o desenvolvimento do pensamento algébrico nos alunos, os fatores mais relevantes para ações de formação continuada de professores são as concepções sobre álgebra, o uso de materiais didáticos-pedagógicos e a percepção do interesse dos alunos. Conforme discutido, as crenças podem ser fortalecidas por meio de experiências e feedbacks positivos e, dessa maneira, as ações de formação continuada devem considerar esses elementos. No contexto de formação e nas práticas cotidianas En "o professor deve se perceber, de fato, como tendo papel central nas tomadas de decisões e escolhas a respeito das metas educacionais" (Enderlin-Lampe, 2002 citado por Azzi, Polydoro & Bzuneck, 2006, p. 157).

Não há trabalhos na literatura acadêmica que possam corroborar ou contrapor os resultados obtidos na presente pesquisa que tratou especificamente das crenças de autoeficácia docente

para o desenvolvimento do pensamento algébrico nos alunos do ensino fundamental, porém, a metodologia e as análises realizadas estão de acordo com as pesquisas no mesmo âmbito de estudo da autoeficácia, como as de: Zambon, De Souza e De Rose (2012); Serpa (2012); Machado (2013); Souza (2013); Casanova (2013); Alvarenga (2014); Guerreiro-Casanova (2014); Azzi, Guerreiro-Casanova e Dantas (2014); Machado (2014); Masotti (2014); Vignoli (2014); Brito e Souza (2015); Oliveira (2015); Rodrigues (2015); Schmid (2015); Souza e Porciúncula (2015); Mansão (2016); Souza e Porciúncula (2016); Vilela e Rossi (2016); Pinheiro e Pirola (2017).

Considerações finais

O presente trabalho teve o objetivo de responder à principal questão: Como se apresentam e quais fatores podem influenciar as crenças de autoeficácia docente no desenvolvimento do pensamento algébrico em alunos do ensino fundamental?

Para respondê-la, realizamos uma pesquisa fundamentada na Teoria da Autoeficácia (Bandura, 1986) e nos entendimentos do pensamento algébrico presentes na literatura acadêmica. As crenças de autoeficácia, assim como em outros trabalhos acadêmicos, são avaliadas por meio de escalas (Bandura, 2006) compostas por itens que descrevem ações referentes ao foco do estudo. O foco deste trabalho foi o desenvolvimento do pensamento algébrico nos alunos do ensino fundamental.

Verificamos, por meio de uma escala, que as crenças de autoeficácia dos professores de matemática dos anos finais, para o desenvolvimento do pensamento algébrico nos alunos do ensino, são positivas, entretanto, essas crenças não são fortes. Com isso, os professores demonstraram estar mais facilmente suscetíveis a obstáculos educacionais e, especificamente na tarefa de desenvolver o pensamento algébrico nos alunos, a dificuldades decorrentes dos processos de ensino e de aprendizagem de álgebra (Pajares & Olaz, 2008). Potencialmente, este estudo pode dar uma nova perspectiva para formação docente, inicial e continuada, em especial para o ensino de álgebra, em que se considere aspectos além dos cognitivos. Outros "estudos têm confirmado a associação entre a crença de auto-eficácia do professor e importantes resultados educacionais" (Azzi, Polydoro & Bzuneck, 2006).

Na literatura acadêmica, não encontramos nenhum outro trabalho que trata, concomitantemente, das temáticas autoeficácia e desenvolvimento do pensamento algébrico e, com isso, atribuímos a este trabalho um caráter de ineditismo.

Por fim, concordamos com Azzi, Polydoro e Bzuneck (2006, p. 158) que é cada vez mais "relevante inserir na agenda de discussões e ações sobre a formação docente, inicial ou continuada, a promoção do desenvolvimento da auto-eficácia docente".

Referencias

- Almeida, J. R., Santos, M. C. (2006). Pensamento Algébrico: Em Busca De Uma Definição. *Revista Paranaense de Educação Matemática* (pp. 34-60).
- Azzi, R. G., Polydoro, S. A. J. (2006). *Auto-eficácia Proposta por Albert Bandura: Algumas discussões*. In: Azzi, R. G., Polydoro, S. A. J. Auto-Eficácia em diferentes contextos. Campinas: Editora Alínea, 9-23.
- Azzi, R. G., Polydoro, S. A. J., Bzuneck, J. A. (2006). *Considerações Sobre a Auto-Eficácia Docente*. In: Azzi, R. G., Polydoro, S. A. J. Auto-Eficácia em diferentes contextos. Campinas: Editora Alínea, 149-159.
- Bandura, A (2008). *A evolução da teoria social cognitiva*. In: Bandura, A., Azzi, R. G. e Polydoro, S. Teoria Social Cognitiva: Conceitos Básicos. Porto Alegre: Artmed, 15-41.
- Bzuneck, J. A. (2001). *As crenças de auto-eficácia e o seu papel na motivação do aluno*. In: A motivação do aluno: contribuições da psicologia contemporânea, 116-133.
- Canavarro, A. P. O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. In: Quadrante, v. VXI, n. 2. Portugal, 2007.
- Creswell, J. W. (2007). *Procedimentos de Métodos Mistos*. _____. Projeto de pesquisa: métodos qualitativos, quantitativos e mistos. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 211-229.
- Pajares, F., Olaz, F (2008). *A teoria social cognitiva na perspectiva da agência*. In: Bandura, A., Azzi, R. G. e Polydoro, S. Teoria Social Cognitiva: Conceitos Básicos. Porto Alegre: Artmed, 97-114.
- Pinheiro, A. C. *O Ensino De Álgebra E A Crença De Autoeficácia Docente No Desenvolvimento Do Pensamento Algébrico*. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Ciências, Universidade Estadual Paulista, Bauru, 2018.
- Ponte, J. P. da, Branco, N., Matos, A. (2009). *Álgebra e pensamento algébrico*. In: Ponte, J. P. da; Branco, N., Matos, A. Álgebra no ensino básico. Portugal: ME-DGIDC, 5-11.

LA TASA DE VARIACIÓN: UNA MIRADA DESDE EL ETM PERSONAL DE ESTUDIANTES DE SECUNDARIA

Marco Antonio Ticse Aucahuasi*

Jesús Victoria Flores Salazar*

Elizabeth Montoya Delgadillo**

marco.ticse@pucp.pe, jvflores@pucp.pe, elizabeth.montoya@pucv.cl

Instituto de Investigación sobre Enseñanza de la Matemáticas, IREM-PUCP, Perú*

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile**

Resumen

El siguiente reporte presenta un avance de investigación, parte de la tesis en ejecución realizada en la maestría en Enseñanza de las Matemáticas del primer autor, y tiene por objetivo estudiar el trabajo matemático personal que realizan los estudiantes de secundaria (16-18 años) en una institución educativa al resolver tareas sobre la tasa de variación de una función real de variable real. Para la ejecución consideramos el marco teórico de Espacio de Trabajo Matemático (ETM) pues permite caracterizar el valor epistémico y cognitivo en el trabajo matemático personal del estudiante. Mediante un estudio de caso se utilizará el GeoGebra como recurso tecnológico en situaciones didácticas para contribuir a la aproximación de noción de derivada en los estudiantes.

Palabras clave: ETM, tasa de variación, velocidad.

El Cálculo, la derivada y la tasa de variación

El cálculo diferencial, también conocido como Cálculo, es una rama fundamental en el estudio de las matemáticas, siendo requisito obligatorio e indispensable en la introducción a muchas áreas de las ciencias exactas e ingenierías, así como en las ciencias administrativas y económicas. Sin embargo, un alto índice de estudiantes tiene dificultades en comprender conceptos relacionados a esta rama de estudios; sea en los tópicos de Números reales, funciones, límites y continuidad, derivadas y aplicaciones. (Artigue, 1995; Dolores, 2000).

Así mismo, en el trabajo realizado por Vivier y Okaç (2016) se muestra una vasta recopilación de investigaciones sobre el aprendizaje de nociones del cálculo en distintas latitudes; estas dan muestra de las dificultades y obstáculos que enfrentan estudiantes en nociones basales del cálculo. Por otro lado, las conferencias International Network for Didactic Research in University Mathematics (INDRUM 2016, 2018) dan muestra de la investigación y las dificultades que tienen los estudiantes en el dominio del Análisis en la universidad, pero así también, de nociones que se

estudian a nivel del liceo y que no son contruidos por todos los estudiantes, tales como la construcción de los Números reales o la densidad que es confundida como una continuidad.

Por su parte, diferentes autores (Artigue, 1995; Azcárate, 2000; Dolores, 2000; Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2008), a partir de reflexiones científicas referenciadas en opiniones de expertos en el área de la matemática y didáctica de la misma, han podido evidenciar algunas dificultades en la enseñanza y aprendizaje de conceptos relacionados al cálculo. Los autores señalan algunas dificultades como: la construcción parcial de un saber y la falta de concepciones previas, donde la primera obstaculiza el desempeño académico y la segunda ocasionan aspectos contradictorios. Adicionalmente, describen a la enseñanza tradicional (en particular la superior) como practicas algorítmicas y algebraicas donde cantidades significativas de estudiantes no logran comprender tales conceptos. En otras palabras, existen dificultades sobre una comprensión satisfactoria de concepciones atañidos al cálculo.

Para delimitar nuestra investigación, dirigiremos nuestro interés en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la *derivada*, pues en palabras de Sánchez-Matamoros, García y Llinares (2008, p. 269), “es necesario comprender los procesos a través de los cuales los estudiantes dotan de significado al concepto de derivada”. Con respecto a las dificultades asociadas a este objeto, Dolores (2000) indica algunos hechos causales como: la planificación y ejecución del proceso de enseñanza (relación escasa entre los programas de estudio y fenómenos de variación física); asimilación de conceptos básicos (preconcepciones y obstáculos epistemológicos); y la formación de concepto (uso de ideas geométricas, aproximaciones y procesos infinitesimales).

Frecuentemente, tales dificultades se presentan en estudiantes en los primeros cursos de nivel superior, pues la derivada es uno de los primeros temas contenidos en programas de estudios correspondiente a diversas carreras profesionales. También, algunas instituciones educacionales de nivel secundario, como parte de sus programas curriculares, introducen la derivada repitiéndose las mismas dificultades. Producto de ello, diferentes autores (Silva, 2012; Vrancken y Engler, 2013; Villa-Ochoa, 2012; Ruiz, Córdoba y Rendón, 2014; Villa-Ochoa, Gonzáles-Gómez y Carmona-Mesa, 2017; Viseu, 2017; Paragua et al. 2018) realizaron investigaciones a dichos niveles con el objetivo de solventar las dificultades mencionadas en el párrafo anterior. Tales investigaciones se caracterizan principalmente por coincidir y señalar que la *tasa de variación*, considerada como razón de cambio y velocidad, es el medio idóneo hacia la comprensión de la derivada en un punto.

En ese sentido, Dolores (2000), Sánchez-Matamoros, García y Llinares (2008) y Vrancken y Engler (2013) y Vara y Salazar (2018) justifican la afirmación anterior al señalar a la razón de cambio como idea fundamental en el cálculo, pues el análisis de la variación en los fenómenos dinámicos condujo al estudio de la derivada. Se añade a esta justificación que conceptos como pendiente, velocidad y tasa de variación media son importantes en sí mismos y constituyen la estructura del cálculo frente a las habilidades en el manejo de símbolos y expresiones algebraicas. (Azcárate, 2000, p. 259)

Por otro lado, es importante enfatizar que existe una ausencia de libros de textos dirigidos al nivel secundario concernientes a la tasa de variación y derivada. Sin embargo, mediante una breve síntesis a tres textos en la literatura del cálculo (Leithold, 1998; Stewart, Redlin y Watson, 2008; Stewart, 2018) se observa que la noción de derivada es asociada al *problema de las tangentes*, como se puede ver en la figura 1. Los textos describen una breve imagen de tasa de variación en la introducción a la conceptualización de la derivada en un punto, sin embargo, no presentan tareas en las que el estudiante pueda construir la noción de derivada; por el contrario, la tasa de variación es presentada en aplicaciones matemáticas posterior a la definición formal de la derivada.

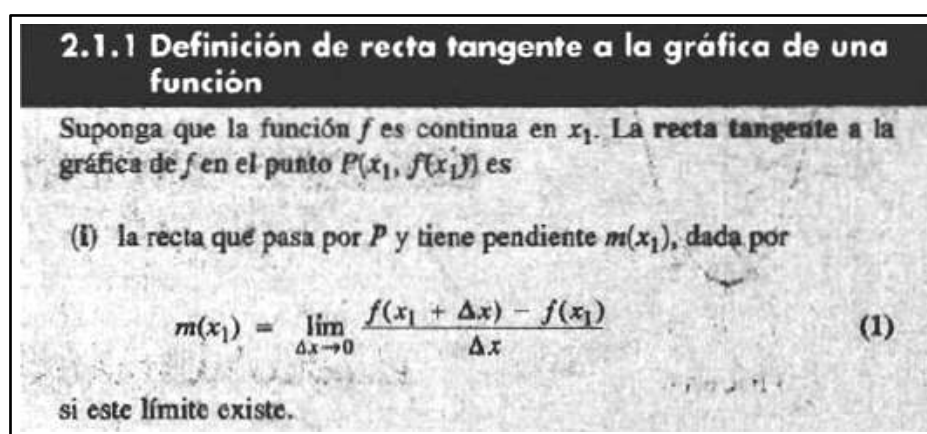


Figura 15. Definición de recta tangente a la gráfica de una función (Leithold, 1998; p. 102)

A partir de lo expuesto, planteamos como punto de partida que la tasa de variación no es lo que se privilegia al momento de enseñar la derivada, por lo que surge nuestra problemática en relación al proceso de enseñanza y aprendizaje de la derivada como tasa de variación en estudiantes (16-18 años) de nivel secundario. Por lo tanto, el objetivo de esta investigación es estudiar, en el tránsito hacia la construcción de la noción de derivada en un punto como tasa de variación, el trabajo matemático realizado por los estudiantes. Particularmente, nos desplazaremos entre la tasa de variación media e instantánea a través de secuencias de tareas mediadas de un recurso tecnológico. En consecuencia, declaramos necesario y relevante hacer este estudio pues nos permitirá conocer “el qué hacer” de los estudiantes de secundaria cuando realizan tareas que lo dirigen a construir la noción de derivada como tasa de variación.

Para llegar al objetivo planteado, nos encaminaremos hacia una aproximación teórica que nos permita caracterizar el trabajo matemático del estudiante. Así, utilizaremos como referente teórico el Espacio de Trabajo Matemático (Kuzniak, 2011), pues este marco permite caracterizar el valor epistémico y cognitivo del sujeto cuando se enfrenta a tareas, en este caso relacionadas a la tasa de variación.

Espacio de Trabajo Matemático (ETM)

Como ya habíamos anunciado, los análisis de la presente investigación se sustentan bajo la teoría de Espacios de Trabajo Matemático (ETM de aquí en adelante) formulada por Kuzniak en el año

2011, la cual fue desarrollada a partir de la generalización del espacio de trabajo geométrico iniciada por Houdement y Kuzniak en 1996 y 2006, respectivamente.

Esta teoría se subraya como una estructura organizada que permite observar y detallar las actividades de los individuos cuando se enfrentan a problemas matemáticos. Según, Gómez-Chacón et al. (2016, p. 5): "el espacio de trabajo matemático y su estudio deben permitir dar cuenta de cómo un determinado conjunto de tareas y actividades terminan por estructurar (o no) un trabajo matemático complejo y rico por parte de profesores y estudiantes". El ETM consiste en la articulación de dos planos: epistemológico y cognitivo, los cuales interactúan entre sí a través de un proceso de génesis. (Kuzniak, Tanguay y Elia, 2016).

El plano epistemológico permite estructurar la organización matemática del ETM al situar los objetos y/o herramientas que permiten desenvolver el trabajo matemático y está conformado por tres polos: el representamen, el artefacto y el referencial. Por otra parte, el plano cognitivo permite estructurar y dar cuenta del espacio de trabajo del individuo a través de sus tres polos también llamados procesos: la visualización, la construcción y la prueba (Kuzniak, Montoya-Delgadillo y Vivier, 2016). La articulación de dichos planos se da mediante un conjunto de génesis (semiótica, instrumental y discursiva) que no son independientes una de otras. y deben ser entendidas como una coordinación entre dos o más génesis que componen los llamados planos verticales. Estas composiciones planares varían según las génesis involucradas; en diferentes trabajos (Kuzniak y Richard, 2014; Gómez-Chacón, Kuzniak y Vivier, 2016; Kuzniak, Tanguay y Elia, 2016), se describe: el plano semiótico-instrumental ([Sem-Ins]), que asocia a la génesis semiótica e instrumental, el plano instrumental-discursivo ([Ins-Dis]), que asocia a la génesis instrumental y discursiva y por último el plano semiótico-discursivo ([Sem-Dis]), que asocia las génesis semiótica y discursiva (ver figura 2).

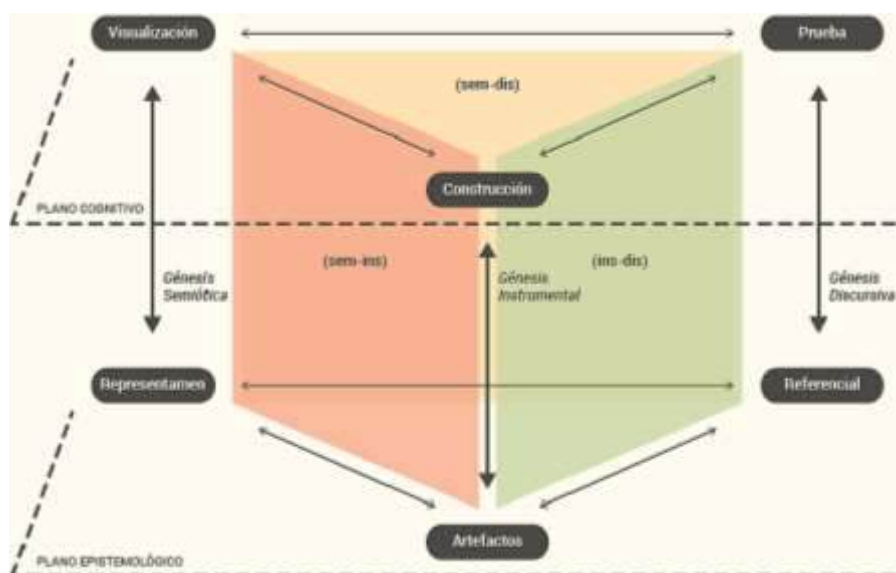


Figura 16. Diagrama del Espacio de Trabajo Matemático

Otro aspecto que este modelo teórico considera es la noción de paradigma que en palabras de

Gómez-Chacón, Kuzniak y Vivier: "es el conjunto de creencias, técnicas y valores compartidos por un grupo científico" (2016, p. 5). Este término orienta, caracteriza y participa en la estructuración del ETM en un dominio específico. Particularmente, en el dominio del análisis se distinguen los siguientes paradigmas: análisis geométrico-aritmético (AG), que permite interpretaciones nacidas de la geometría, del cálculo aritmético o del mundo real; análisis calculatorio (AC), donde las reglas de cálculo son definidas, más o menos explícitamente, y se aplican independientemente de la reflexión de la existencia y naturaleza de los objetos introducidos; y el análisis real (AR) que es caracterizado por un trabajo a partir de nociones matemáticas con reglas que depende de la topología usada (Montoya-Delgadillo y Vivier; 2016).

Por otro lado, esta teoría caracteriza tres niveles de espacios de trabajo matemático: el ETM de referencia, que se refiere al espacio de trabajo definido de manera ideal en función de criterios matemáticos; el ETM idóneo, que se refiere al espacio definido en términos didácticos; y el ETM personal, que se refiere al trabajo efectivo de quien resuelve un problema matemático. Para nuestra investigación nos situaremos en el dominio del análisis y nos basaremos en el ETM personal del estudiante asociado al objeto matemático: tasa de variación de una función real de variable real. Puntualmente analizaremos las circulaciones emergentes intencionadas en el ETM entre los planos verticales, pues dicha circulación propicia el conocimiento. (Montoya-Delgadillo, Mena-Lorca y Mena-Lorca, 2012)

En virtud a nuestra problemática y el referencial teórico a utilizar, nos planteamos la siguiente pregunta que encamina esta investigación: ¿Cuál es el trabajo matemático personal que realizan los estudiantes de último año de secundaria al resolver tareas sobre la tasa de variación de una función real de variable real? Por consiguiente, para responder tal interrogante, nos propusimos: diseñar, aplicar y registrar una situación de aprendizaje a estudiantes de último año de secundaria en una institución educativa de nivel medio; e identificar y caracterizar la activación las génesis, la circulación entre planos verticales y paradigmas involucrados, que están en el trabajo matemático de los estudiantes de secundaria al resolver tareas que involucran tasa de variación.

Metodología

A partir de la pregunta que nordea esta investigación, se ha considerado una metodología de carácter cualitativo y se empleará el método de investigación estudio de caso. En términos de Yin (1989, p. 29, citado en Martínez, 2006, p 179) para desarrollar una investigación basada en tal estudio se propone un diseño que considera: la pregunta de investigación, las proposiciones teóricas, la unidad de análisis, la vinculación lógica de los datos a las proposiciones y los criterios para la interpretación de los datos.

En consecuencia, el caso será *La tasa de variación de una función real de variable real* pues a partir de exploraciones se pretende averiguar lo que sucede en el camino a la construcción de la noción de derivada cuando los estudiantes trabajaban con este objeto matemático.

Consideraciones del experimento

Diseñamos *una secuencia de tareas (divididas en dos partes) relacionadas a la tasa de variación de una función real de variable real*. La secuencia está dirigida a un grupo de cinco estudiantes entre los 16 y 18 años de una institución de educación secundaria; estos estudiantes tienen nociones previas de velocidad rectilínea uniforme y geometría analítica (rectas y pendientes). La secuencia está estructurada para ser implementada en dos sesiones de aula con una duración de sesenta minutos cada una, donde a cada estudiante se le entregará una ficha de trabajo, laptops y applets de GeoGebra. También, para la recolección de información, se utilizarán cámaras de video (GoPro) y el software aTube Catcher.

Análisis preliminar

En este apartado presentaremos el análisis a preliminar de la secuencia de tareas; hemos tomado aspectos de la teoría de espacios de trabajo matemático (ETM) y considerado los resultados y experiencias de diferentes autores (Silva, 2012; Ruiz, Córdoba y Rendón, 2014; Villa-Ochoa, Gonzáles-Gómez y Carmona-Mesa, 2017; Viseu, 2017).

Secuencia de tareas - Parte N°1:

En la primera parte, la secuencia tuvo la intención de que el estudiante desarrolle intuitivamente el tránsito entre la tasa de variación y la tasa de variación media (velocidad media), afirmando que la tasa de variación media en relación a un intervalo de tiempo corresponde a la pendiente de la recta secante correspondiente a tal intervalo. Esta parte tiene una duración 60 minutos y contiene 8 tareas (incluida la construcción de gráficos en el Applet de GeoGebra).

Las cuatro primeras tareas están destinadas a estudiar e interpretar la diferencia de valores en un intervalo como la variación de cantidades, calcular el valor de la velocidad en un intervalo y significar la velocidad media a partir de la velocidad en un intervalo. La quinta tarea está direccionada a graficar una curva, trazar rectas secantes en par de puntos fijos y determinar la pendiente a cada una de ellas. Las siguientes dos tareas encaminan al estudiante a relacionar la pendiente de la recta secante y la velocidad media en un intervalo de tiempo. La tarea final dirige al estudiante a cuestionarse sobre la velocidad en un punto específico.

Secuencia de tareas - Parte N°2:

En la segunda parte, la secuencia tuvo como intención desarrollar intuitivamente el tránsito entre la tasa de variación media y la tasa de variación instantánea (velocidad instantánea), identificando la pendiente de la recta tangente de una función (curva) en un punto como la tasa de variación instantánea. Esta parte tiene una duración de 60 minutos y contiene 10 tareas (incluida la construcción y manipulación de herramientas en el Applet de GeoGebra).

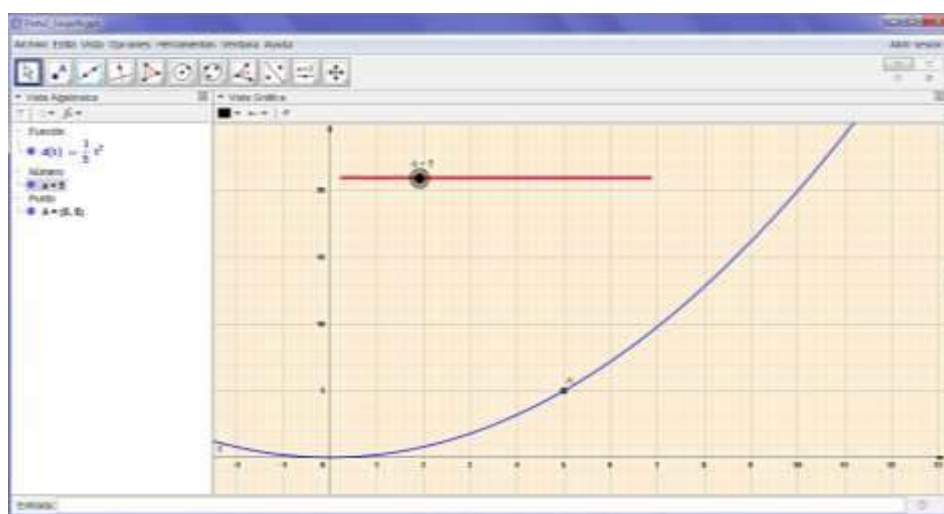


Figura 17. Imagen del archivo Parte2_GrupoN.ggb: Curva d, deslizador a y punto A.

La primera tarea está dirigida para que el estudiante construya, sobre el applet, la recta secante de dos puntos (uno fijo y el otro asociado al deslizador) y la pendiente de la misma. Las siguientes cinco tareas se encaminan a calcular la variación de la velocidad media o pendiente de la recta secante en un intervalo de tiempo cada vez más pequeño. La tarea seis y siete está destinada a expresar y relacionar matemáticamente la velocidad media en cualquier intervalo, en particular cuando es muy pequeño (casi 0). Las últimas tres tareas corresponden a establecer la relación entre la pendiente de la recta tangente y la velocidad instantánea.

Consideraciones finales

A partir de las producciones obtenidas en la implementación de la secuencia de tareas (ambas partes), notamos la activación de los planos epistemológicos y cognitivos en el ETM. En la primera parte los estudiantes relacionaron la pendiente de una recta secante como la velocidad media en un intervalo de tiempo a través de representaciones graficas proporcionadas por el software GeoGebra; este hecho evidencia la activación de la génesis semiótica y la génesis instrumental. En la segunda parte, notamos que los estudiantes tuvieron dificultades para representar algebraicamente ciertas expresiones (por ejemplo, la tasa de variación media en el intervalo $[a, a + h]$). Sin embargo, observamos las circulaciones en el espacio de trabajo matemático personal del estudiante al familiarizarse con la construcción de la noción de derivada. Se le suma a ello, que el artefacto utilizado en la segunda parte tuvo una participación esencial.

En esta investigación se pudo observar lo fundamental que se vuelve el artefacto utilizado (deslizador), debido a que gracias a él se pueden visualizar de manera más económica y concreta las rectas secantes con sus respectivas pendientes en intervalos cada vez más pequeños. Además, este artefacto induce a que el estudiante conjeture, de forma natural, sobre aproximaciones cuando un numero se acerca a 0 (nociones de limite). En consecuencia, se cuenta con una herramienta que auxilia la interpretación grafica del objeto y promueve la génesis instrumental.

Finalmente, esta investigación nos permitió estudiar el trabajo matemático personal de los

estudiantes cuando transitan entre la tasa de variación, tasa de variación media y tasa de variación instantánea como velocidad; es decir, cuando construyen la noción de derivada como tasa de variación.

Agradecimientos

A la Pontificia Universidad Católica del Perú y la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso por el apoyo brindado en el marco de la realización de la tesis de maestría en Enseñanza de las Matemáticas del primer autor. Del mismo modo, agradecemos al Programa de Intercambio Universitario CINDA.

Referencias

- Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática (un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas)* (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Azcárate, C. (1998). El pre cálculo, un eslabón necesario entre las funciones y el análisis. *Las matemáticas del Siglo XX, una mirada en 101 artículos*, 101, 259-262. Recuperado de: <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=571226>
- Dolores C. (2000). Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada. El futuro del cálculo infinitesimal. Capítulo V: ICME-8 Sevilla, España. Cantoral R. (Coord.). México: Grupo Editorial Iberoamérica. pp. 155-181.
- Gómez-Chacón, Inés M., Kuzniak, A., y Vivier, L. (2016). El rol del profesor desde la perspectiva de los Espacios de Trabajo Matemático. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 30(54), 1-22. Recuperado de: <http://www.scielo.br/pdf/bolema/v30n54/1980-4415-bolema-30-54-0001.pdf>
- Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 9-24.
- Kuzniak, A., y Richard, P. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, 17(4-1), 5-39.
- Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E., y Vivier, L. (2016). El espacio de trabajo matemático y sus génesis. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, pp. 237-251.
- Kuzniak, A., Tanguay, D., y Elia, I. (2016). Mathematical working spaces in schooling: an introduction. *ZDM Mathematics Education*, 48(6), 721-737.
- Martínez, P. (2006). El método de estudio de caso: estrategia metodológica de la investigación científica. *Pensamiento y Gestión*, 20, 165-193.
- Montoya-Delgadillo, E., Mena-Lorca, A., Mena-Lorca, J. (2012). Los artefactos y la visualización: en

un ambiente geométrico y algebraico.

Leithold, L. (1998). *El cálculo*, Harla, México: Oxford University Press.

Oktaç, A., & Vivier, L. (2016). Conversion, change, transition in research about analysis. In B. R. Hodgson, A. Kuzniak, & J. B. Lagrange (Eds.), *The didactics of mathematics: approaches and issues. A homage to Michèle Artigue* (pp. 87–122). New York: Springer.

Ruiz, K., Córdoba, Y., y Rendón, C. (2014). La comprensión del concepto de derivada mediante el uso de GeoGebra como propuesta didáctica. *Revista Colombiana de Matemática Educativa*, 1 (1), 125-130.

Sánchez-Matamoros, G.; García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, 11 (2), 267-296.

Silva, E. (2012). *Uma Proposta Para o Ensino da Noção de Taxa de Variação Instantânea no Ensino Médio*. (Tesis de Maestría) Pontificia Universidade Católica de São Paulo, Brasil. Disponible en: <https://tede2.pucsp.br/handle/handle/10934>

Stewart, J. (2018). *Cálculo Trascendentes Tempranas* (8 ed.). México: Cengage Learning.

Stewart, J., Redlin, L., y Watson, S. (2008). *Precálculo. 5ª. Edición*. México: Cengage Learning.

Vara, T. N. P., & Salazar, J. V. F. (2018). Mathematics Education Art and Architecture: Representations of the Elliptic Paraboloid. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 14(2), 643-655. <https://doi.org/10.12973/ejmste/80628>

Villa-Ochoa, J. A., Gonzáles-Gómez, D., y Carmona-Mesa, J. A. (2017). Modelación y Tecnología en el Estudio de la Tasa de Variación Instantánea en Matemáticas. *Formación Universitaria*, 11(2), 25-34. DOI: 10.4067/S0718-50062018000200025

Viseu, F. (2017). Representações na aprendizagem da derivada de uma função por alunos do ensino secundário. *Zetetiké*, 25(2), 265-288.

Vrancken, S., y Engler, A. (2013). Estudio de la derivada desde la variación y el cambio. Análisis histórico-epistemológico. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (5)33, 53-70.

ESTUDIO HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO DE LAS NOCIONES TRIGONOMÉTRICAS SENO Y COSENO

Gilder Samuel Vargas Vargas

Mihály Martínez-Miraval

samuel.vargas@pucp.edu.pe, martinez.ma@pucp.edu.pe

Instituto de Investigación sobre Enseñanza de la Matemáticas, IREM-PUCP, Perú

Resumen

El estudio forma parte del trabajo de maestría desarrollado por el primer autor. El objetivo es mostrar que las identidades trigonométricas tienen un papel importante en la historia de la matemática y pueden ser consideradas como un ente articulador de las nociones trigonométricas seno y coseno. Se presenta un recorrido histórico-epistemológico de estas nociones desde las antiguas civilizaciones de Oriente hasta la época medieval, donde adquieren el estatus de objetos matemáticos; este recorrido incluye a los principales exponentes, sus respectivos aportes en el campo de la trigonometría, se identifica el desarrollo y uso de las identidades trigonométricas. Del estudio realizado, concluimos que dichas identidades forman parte de la génesis de la trigonometría y permitieron su avance, a través de la articulación de diferentes etapas de su desarrollo.

Palabras clave: *Identidades trigonométricas, seno, coseno, estudio histórico-epistemológico.*

Introducción

La historia de las matemáticas permite conocer el origen, la evolución y el desarrollo de las definiciones y representaciones asociadas al seno y coseno, las condiciones y problemáticas que determinan su emergencia, así como las preguntas que se plantean para resolver dichas cuestiones. Para este estudio se asume una postura epistemológica en el sentido que le otorgan Sierpinska y Lerman (1996), es decir "como una reflexión sobre la naturaleza de los conceptos matemáticos, sobre los procesos y condiciones de su desarrollo, sobre las características de la actividad matemática actual y pasada" (p. 22).

Las nociones trigonométricas seno y coseno están estrechamente ligadas al origen de la trigonometría. Esta nueva rama de las matemáticas surge motivada por el deseo de construir una astronomía cuantitativa, que luego sería utilizada para predecir trayectorias y posiciones de algunos cuerpos celestes, para la medición del tiempo, para la navegación y la geografía (Kline, 1972).

Tal como lo afirma Montiel (2005) se cree que los conceptos trigonométricos emergen en la astronomía, se desarrollan en la trigonometría esférica y plana, y pasan a formar parte del análisis matemático, dando explicación a diversos fenómenos astronómicos, físicos y químicos, los mismos que están relacionados con los movimientos, el sonido y el calor.

La trigonometría evoluciona desde las antiguas civilizaciones de occidente, como la egipcia y la babilónica, donde se encontraron papiros y tablillas de arcilla que contienen ciertos rudimentos trigonométricos, posteriormente la cultura árabe introduce la circunferencia de radio igual a la unidad y desarrolla nuevas identidades trigonométricas como las transformaciones trigonométricas. Finalmente, se analiza la época medieval, donde el seno y coseno adquieren el estatus de objetos matemáticos tal como se conocen en la actualidad y pasan a formar parte del análisis funcional.

Desarrollo histórico-epistemológico de las nociones trigonométricas seno y coseno

A continuación, se presentan en orden cronológico cómo se desarrollaron las nociones de seno y coseno, los principales representantes del campo de la trigonometría, sus trabajos y demostraciones para algunas identidades trigonométricas.

Edad Antigua

Los primeros vestigios de trigonometría aparecen en la civilización egipcia y babilónica con ciertas proporciones entre números y entre los lados de triángulos semejantes (Lobo Da Costa, 1997).

En la cultura egipcia encontramos los documentos matemáticos más importantes que han sobrevivido hasta nuestros días: el papiro de Rhind, descubierto por el escocés A. Henry Rhind en 1858 y que se conserva en el British Museum, y el papiro de Moscú, que se encuentra en un museo de la capital rusa (Kline, 1972).

En el problema 56 del papiro de Rhind, se encuentra uno de los primeros vestigios de lo que podría ser una razón trigonométrica. En dicho problema se pide calcular el *seket* de una pirámide que tiene 250 codos de altura y 360 codos de largo en su base (Boyer, 1986). El término *seket* significa "la separación horizontal de una recta oblicua del eje vertical por unidad de variación en la altura" (Boyer, 1986, p. 40).

En la pirámide de base cuadrada $ABCD$ de la figura 1, donde F es su centro, H su vértice y E es el punto medio del lado BC , el *seket* sería igual al cociente entre la longitud del segmento EF y la altura FH , que es equivalente a la cotangente del ángulo formado entre la base $ABCD$ y la cara lateral BHC de la pirámide (Maor, 1998).

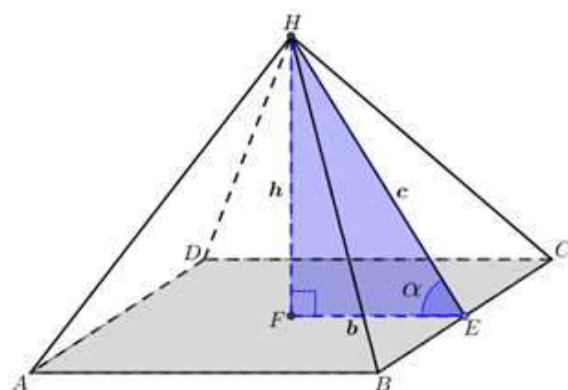


Figura 1. Relación entre “Seket” y la actual cotangente. Vargas (2019, p. 31)

Los egipcios usaban la noción de seketa para mantener la pendiente constante de las caras de las pirámides; sin embargo, no se puede ubicar en su matemática el nacimiento de la trigonometría, debido a que su cálculo era netamente numérico y aun no se tenía la noción de ángulo.

Los babilonios desarrollaron un sistema numérico posicional y sexagesimal bastante avanzado para su época, el mismo que se ha podido evidenciar gracias a las tablillas de arcilla encontradas al sur de Irak. Según Maor (1998) se cree que el grado sexagesimal como unidad de medida angular se originó con ellos. Además, conocían algunas relaciones para los lados de un triángulo rectángulo y trigonometría básica (Raiol, 2014).

La tablilla Plimpton 322 que se conserva en la Universidad de Columbia, contiene otro “germen” de las razones trigonométricas. En dicha tablilla se puede observar una lista de ternas pitagóricas formadas por números enteros positivos y aparece también la razón entre la hipotenusa y un cateto que sería el equivalente a nuestra actual secante.

En consonancia con Da Fonseca (2015), la trigonometría tiene sus inicios con el estudio de los triángulos, donde se observan lados y ángulos que deben ser medidos. Luego, con la observación y la comparación entre triángulos de diferentes tamaños, comienza la percepción y la sistematización de las primeras propiedades para la configuración geométrica de la trigonometría, es decir, la semejanza de triángulos.

El conocimiento matemático de los egipcios y babilonios fue superado por los grandes matemáticos griegos quienes fueron unos de los primeros en presentar un estudio sistemático y organizado de las relaciones entre los ángulos centrales de una circunferencia y las longitudes de las cuerdas que las subtienden (Boyer, 1986).

Dentro de estos matemáticos griegos tenemos a Hiparco de Nicea (180 a. C. – 125 a.C.) considerado como el gran astrónomo de la antigüedad y padre de la trigonometría por haber sido uno de los primeros en elaborar una tabla de cuerdas trigonométricas.

Según Bressoud (2010), Euclides calculó longitudes de cuerdas al trabajar con polígonos regulares como pentágonos y decágonos, y al calcular sus lados. Para calcular cuerdas correspondientes a

otros ángulos, Hiparco utiliza los resultados geométricos que en lenguaje actual serían como las que aparece en la figura 2.

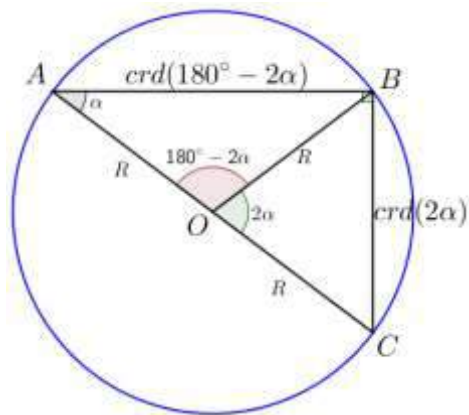


Figura 2. Triángulo rectángulo inscrito en una circunferencia. Adaptado de Oliveira (2010, p. 31)

Por el teorema de Pitágoras en el triángulo ABC , tenemos:

$$\begin{aligned} crd^2(2\alpha) + crd^2(180^\circ - 2\alpha) &= (2R)^2 \\ crd(180^\circ - 2\alpha) &= \sqrt{(2R)^2 - crd^2(2\alpha)} \end{aligned}$$

Mediante resolución de triángulos en el triángulo OBC podemos relacionar la longitud de la cuerda BC con el radio de la circunferencia es decir $crd(2\alpha) = 2R\text{sen}(\alpha)$, que usaremos en la expresión anterior: $2R\text{sen}(90^\circ - \alpha) = \sqrt{(2R)^2 - (2R\text{sen}(\alpha))^2}$

$$\begin{aligned} 2R\cos(\alpha) &= \sqrt{(2R)^2 - (2R\text{sen}(\alpha))^2} \\ (2R)^2\cos^2(\alpha) &= (2R)^2(1 - \text{sen}^2(\alpha)) \\ \text{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) &= 1 \end{aligned}$$

Esta expresión viene a ser una de las identidades fundamentales de la trigonometría. Hiparco también estableció el siguiente teorema:

$$crd^2(\alpha) = R(2R - crd(180^\circ - 2\alpha)).$$

Utilizando convenientemente la relación $crd(2\alpha) = 2R\text{sen}(\alpha)$, tenemos:

$$\begin{aligned} \left(2R\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2 &= R(2R - 2R\text{sen}(90^\circ - \alpha)) \\ \text{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{1 - \cos\alpha}{2} \end{aligned}$$

Con estos resultados Hiparco fue capaz de construir la primera tabla trigonométrica de cuerdas para ángulos que son múltiplos de $7,5^\circ$. Por ejemplo, el ángulo de 15° se obtenía a partir del ángulo de 30° , el mismo que se puede obtener fácilmente del ángulo de 60° .

Hiparco representa la transición entre la astronomía babilónica y gran matemático Claudio Ptolomeo (85 d. C. – 165 d. C.). Uno de los mayores aportes de Ptolomeo es el *Almagesto*, que es un resumen de la astronomía desarrollada hasta su época, conformado por trece libros, al igual que los Elementos del Euclides. Ambas obras han ejercido una enorme influencia sobre las matemáticas; sin embargo, "a diferencia de los Elementos, que hasta la actualidad constituye el núcleo de la geometría clásica, el *Almagesto* perdió gran parte de su autoridad cuando el sistema heliocéntrico de Copérnico fue aceptado" (Maor, 1998, p. 25).

Para el cálculo de sus cuerdas Ptolomeo usa el siguiente teorema:

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$$

En otras palabras, la suma de los productos de los lados opuestos de un cuadrilátero convexo inscrito, es igual al producto de sus dos diagonales (ver Figura 3).

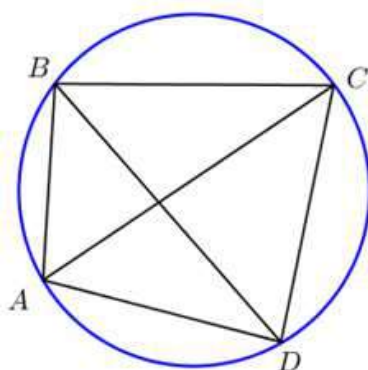


Figura 3. Teorema de Ptolomeo.

Con base en este teorema, Ptolomeo deduce las primeras identidades para la suma y diferencia de dos ángulos y que son usados con mucha frecuencia dentro de la trigonometría.

En la figura 4, se tiene una circunferencia de centro O y radio R , donde 2α y 2β son las medidas del ángulo centrales AOC y AOB respectivamente.

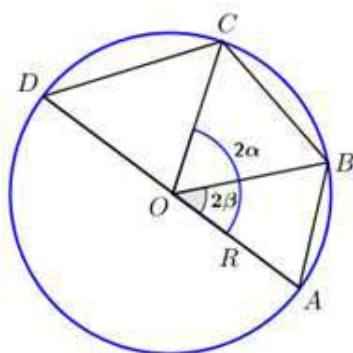


Figura 4. Deducción de la cuerda para la diferencia de dos arcos. Adaptado de Oliveira (2010, p. 35)

En el cuadrilátero $ABCD$ inscrito en la circunferencia de diámetro AD por el teorema de Ptolomeo, se tiene: $AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$

Las longitudes de las cuerdas en términos de los ángulos quedarían de la siguiente manera:

$$\text{crd}(2\beta) \cdot \text{crd}(180^\circ - 2\alpha) + \text{crd}(2\alpha - 2\beta) \cdot 2R = \text{crd}(2\alpha) \cdot \text{crd}(180^\circ - 2\beta)$$

$$\text{crd}(2\alpha - 2\beta) \cdot 2R = \text{crd}(2\alpha) \cdot \text{crd}(180^\circ - 2\beta) - \text{crd}(2\beta) \cdot \text{crd}(180^\circ - 2\alpha)$$

Como $\text{crd}(2\alpha) = 2R\text{sen}(\alpha)$ y $\text{sen}(90^\circ - \theta) = \cos\theta$, de la ecuación anterior podemos deducir la siguiente expresión moderna:

$$2R\text{sen}(\alpha - \beta) \cdot 2R = 2R\text{sen}\alpha \cdot 2R\text{sen}(90^\circ - \beta) - 2R\text{sen}\beta \cdot 2R\text{sen}(90^\circ - \alpha)$$

$$\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \text{sen}\beta$$

Ptolomeo conocía, a partir de los pitagóricos, el valor de la cuerda del ángulo de 36° , que viene a ser el lado del decágono regular inscrito en una circunferencia. Así, por cálculo de la diferencia de

cuerdas, él fue capaz de calcular la cuerda de 6° como la diferencia de $36^\circ - 30^\circ$. Luego por bisecciones, llegó a las cuerdas de 3° , de $1,5^\circ$, y de $0,75^\circ$. De ahí en adelante construyó una tabla de cuerdas con variaciones de $0,75^\circ$ en $0,75^\circ$ (Oliveira, 2010).

Edad Media

Una contribución importante de la cultura india a la trigonometría fue la introducción del equivalente a la función seno para reemplazar a las tablas de cuerdas griegas, las mismas que figuran en los Siddhantas y en el Aryabhatiya (Boyer, 1986). En estas tablas se dan valores del seno para ángulos menores o iguales a 90° en intervalos que van de $3\frac{3}{4}^\circ$ cada uno.

Según Esteban, Ibañez y Ortega (1998) ya en los inicios del siglo VI los matemáticos de la india desarrollaron algunos conceptos de algunas razones trigonométricas. Usaron la palabra *jya-ardha* para semicuerda y su abreviatura (*jya* o *jiva*) se empleó para denominar a la razón seno (ver figura 5).

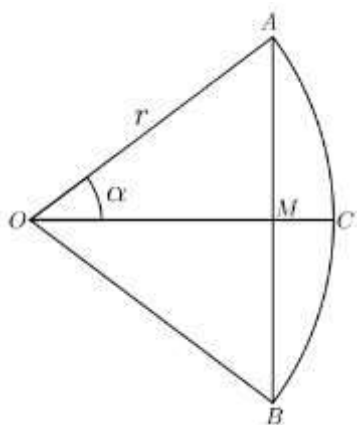


Figura 5. Arco de un ángulo. Adaptado de Esteban, Ibañez y Ortega (1998, p. 61)

Los matemáticos indios definieron y desarrollaron la teoría de tres razones trigonométricas, cuyos equivalentes modernos a partir de la resolución de triángulos rectángulos sería los siguientes:

$$jya(\alpha) = AM = r \sin(\alpha)$$

$$kojya(\alpha) = OM = r \cos(\alpha)$$

$$ukramajya(\alpha) = MC = OC - OM = r[1 - \cos(\alpha)]$$

La trigonometría árabe, según Boyer (1986), se construyó en base al estudio de la llamada función seno y fue gracias a ellos que pasó a Europa como la trigonometría del seno.

El imperio musulmán o árabe logra importantes avances en las ciencias y en las artes entre los siglos VIII y XI, debido a la difusión de la lengua árabe, que sustituye al griego como lengua universal. Esta influencia árabe se inicia con la fundación de la Escuela de Bagdad en el siglo IX,

siendo uno de sus máximos exponentes Al Battani conocido como el Ptolomeo de Bagdad (Lobo Da Costa, 1997).

Al Battani (850 d. C. – 929 d. C.), en su libro titulado *Sobre el movimiento de las estrellas*, deja algunas fórmulas trigonométricas como la siguiente $b = \frac{a \operatorname{sen}(90^\circ - A)}{\operatorname{sen} A}$, donde aparecen el seno y la función seno verso (Boyer, 1986). Estas expresiones ya son ideas básicas de la trigonometría moderna. Además, introduce la circunferencia de radio igual a la unidad y demuestra que la razón jiva es válida para cualquier triángulo rectángulo, independiente del valor de la longitud de la hipotenusa (Lobo Da Costa, 1997).

Según Lobo Da costa (1997), Al Battani estaba interesado en calcular la altitud del sol, para lo cual fue necesario construir tablas trigonométricas en intervalos de un cuarto de grado.

Abu'l-Wefa (939-998) trabaja la tangente en una circunferencia de radio igual a la unidad y demuestra las fórmulas para el seno del ángulo doble como y el ángulo mitad, además formula el teorema de senos para triángulos esféricos (Boyer, 1986). También construye una nueva tabla trigonométrica de senos en intervalos que van de un cuarto de grado ($15'$), con hasta ocho decimales, también introdujo las funciones secante y cosecante y con esto definió todas las razones trigonométricas en la circunferencia unitaria, pues hasta entonces, dichas relaciones solo habían sido trabajadas en el triángulo rectángulo (Raiol, 2014).

Ibn-Yunus (m. 1008) introdujo la fórmula $2\cos x \cos y = \cos(x + y) + \cos(x - y)$, que en la actualidad se le conoce como una identidad trigonométrica para la transformación de producto de cosenos a suma de cosenos. Según Boyer (1986), esta fórmula se usó en Europa durante el siglo XVI antes de la invención de los logaritmos, para convertir productos en sumas.

Jamshid Al-Kashi (1390-1450), al igual que sus predecesores Abu'l-Wefa y al-Biruni, también calculó el $\operatorname{sen} 1^\circ$ con un altísimo grado de aproximación, aplicando la identidad del seno para el ángulo triple.

De lo anterior, se puede concluir que una de las principales tareas en la edad media fue la construcción de tablas trigonométricas para lo cual era necesario el cálculo de los valores del seno y coseno con varias cifras decimales; en un primer momento mediante técnicas asociadas a las construcciones geométricas de polígonos regulares inscritos en circunferencias, en donde se asociaba las cuerdas con los ángulos, y en una segunda instancia, con las identidades trigonométricas que aparecen al trabajar los triángulos rectángulos en la circunferencia de radio igual a la unidad.

Edad Moderna

La trigonometría inicia su periodo de consolidación como una rama independiente de las matemáticas a mediados del siglo XV.

Johann Müller (1436 - 1476), astrónomo y matemático de origen alemán más conocido como Regiomontano, es considerado como el padre de la trigonometría moderna. En 1464 presenta su

obra titulada *De triangulis omnimodis*, donde se exponía de forma sistematizada los métodos de resolución de triángulos (Boyer, 1986). Asimismo, trabajó "en una nueva versión corregida del Almagesto y en 1471 calculó una nueva tabla de senos y de tangentes" (Stewart, 2008, p. 95) utilizando como radios 600 000 y 100 000 unidades respectivamente.

François Viète (1540 - 1603), con su trabajo *Canon mathematicus seu ad triangula cum appendicibus* publicado en 1579, es uno de los primeros en hacer un tratamiento sistemático para resolver triángulos planos y esféricos, utilizando las seis funciones trigonométricas (Montiel, 2011). Además, desarrolla las otras tres fórmulas para las identidades trigonométricas de transformación de suma de senos y cosenos a producto; por ejemplo, $\text{sen}A + \text{sen}B = 2\text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$.

La trigonometría de Viète, así como su álgebra, tienen como característica principal la generalización. Además, fue el fundador del enfoque analítico para la trigonometría, introdujo la noción del triángulo polar en el estudio de la trigonometría esférica (Boyer, 1986).

Según Boyer (1986), en su obra *Canon mathematicus* (1579), Viète calculó tablas trigonométricas para intervalos de un minuto y en su *Variorum de rebus mathematicis* (1593) encontramos un teorema equivalente a la actual ley de tangentes $\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}$.

La transición de las razones trigonométricas a las funciones periódicas comenzó con Viète en el siglo XVI, tuvo un nuevo impulso con la aparición del cálculo Infinitesimal en el siglo XVII y culminó con los trabajos de Euler.

En la obra póstuma *Harmonia mensurarum* de Roger Cotes (1682- 1716), "se reconoce el carácter periódico de las funciones trigonométricas, apareciendo quizás por primera vez en forma impresa los ciclos de las funciones tangente y secante" (Boyer, 1986, p. 536), quien señala que se trataría de uno de los primeros textos que sistematiza el cálculo aplicado a las funciones circulares y logarítmicas.

Según Boyer (1986), el famoso teorema de Abraham de Moivre (1667- 1754) que relaciona al seno y coseno $(\cos\theta + i\text{sen}\theta)^n = \cos(n\theta) + i\text{sen}(n\theta)$ no viene dado de forma explícita, pero sí se puede reconocer a través de sus obras. Por ejemplo, en las *Philosophical Transactions* de 1707 y en su *Miscellanea analytica* de 1730 aparecen las siguientes fórmulas:

$$\frac{1}{2}(\text{sen}n\theta + \sqrt{-1}\cos n\theta)^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{2}(\text{sen}n\theta - \sqrt{-1}\cos n\theta)^{\frac{1}{n}} = \text{sen}\theta$$

$$(\text{sen}\theta \pm i\cos\theta)^{\frac{1}{n}} = \cos\left(\frac{2k\pi \pm \theta}{n}\right) \pm i\text{sen}\left(\frac{2k\pi \pm \theta}{n}\right)$$

La última expresión era utilizada para descomponer $x^{2n} + 2x\cos\theta + 1$ en factores cuadráticos de la forma $x^2 + 2x\cos\theta + 1$.

Leonhard Euler (1707-1783), en su obra *Introductio*, realiza el estudio analítico de las funciones trigonométricas donde, por ejemplo, el seno de un ángulo "ya no era un segmento, sino simplemente un número, la ordenada de un punto de la circunferencia unidad, o bien el número

definido por la serie" (Boyer, 1986, p. 558). Con Euler la trigonometría toma su forma actual, cuando adopta como medida del radio de la circunferencia a la unidad y define funciones aplicadas a números reales y no a ángulos como se hacía hasta entonces.

A través de este recorrido histórico, se puede evidenciar que la trigonometría nace como una rama auxiliar de la astronomía, luego se independiza y pasa a formar parte del análisis matemático expresando relaciones entre números complejos, sin la necesidad de recurrir a ángulos o arcos (Lobo Da Costa, 1997).

Conclusiones

Del estudio realizado, se concluye que la razón de ser de las nociones trigonométricas seno y coseno a lo largo de la historia son las identidades trigonométricas porque están presentes en la génesis de la trigonometría, y porque han permitido el avance de la misma, logrando ser el ente articulador entre las diferentes etapas de su desarrollo, en un primer momento mediante técnicas asociadas a las construcciones geométricas de polígonos regulares inscritos en circunferencias y, en una segunda instancia, al trabajar los triángulos rectángulos en la circunferencia trigonométrica, razón por la cual su estudio debe estar presente en las organizaciones matemáticas a enseñar.

Referencias

- Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática*. (M. Martínez Pérez, Trad.). Madrid: Alianza Editorial.
- Costa, N. M. L. D. (1997). *Funções Seno e Cosseno: Uma seqüência de ensino a partir dos contextos do "Mundo Experimental" e do Computador*. (Tesis de Maestría). Universidade de Sao Paulo. Brasil.
- Da Fonseca, L. (2015). *Um estudo sobre o Ensino de Funções Trigonométricas no Ensino Médio e no Ensino Superior no Brasil e França*. (Tesis de Doctorado). Universidade Anhanguera de São Paulo. Brasil.
- Kline, M. (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times*. New York: Oxford University Press.
- Maor, E. (1998). *Trigonometric Delights*. New Jersey: Princeton University Press.
- Montiel, G. (2005) Estudio Socioepistemológico de la Función Trigonométrica. (Tesis de Doctorado no publicada). CICATA-IPN. México.
- Oliveira, C. (2014). *Trigonometria: o radiano e as funções seno, cosseno e tangente*. (Tesis de Maestría). Universidade Federal de Campina Grande. Brasil.
- Raiol, E. (2014). *O surgimento das trigonometrias em diferentes culturas e as relações estabelecidas entre elas*. (Tesis de Maestría) Universidad federal do Pará. Brasil.
- Sierpinska, A., & Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. In *International handbook of mathematics education* (pp. 827-876). Springer, Dordrecht.

Vargas, G. S. (2019). *Propuesta de un modelo praxeológico de referencia para la enseñanza del seno y coseno en quinto de secundaria*. (Tesis de Maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú. Perú.

ESTUDO DOS QUADRILÁTEROS: UMA REVISÃO DA LITERATURA

Daysi Julissa García-Cuéllar*

Saddo Ag Almouloud**

garcia.daysi@pucp.pe, saddoag@pucsp.br

Instituto de Investigación sobre Enseñanza de la Matemáticas, IREM-PUCP, Perú*
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil**

Resumen

O artigo tem como objetivo apresentar uma revisão de literatura sobre pesquisas que tem foco no ensino e aprendizagem dos quadriláteros. Para a revisão se usou tese, dissertações e artigos em revistas e eventos acadêmicos. A metodologia foi uma pesquisa bibliográfica do tipo estado da arte. Para delimitar a análise estabelecemos as seguintes categorias: (i) Pesquisa que desenvolveram estudos com estudantes; (ii) Pesquisas que desenvolveram estudos na formação docente; (iii) Pesquisas que desenvolveram estudos com livros didáticos (iv) Ensaio teórico. Ante ao exposto nas pesquisas, é possível perceber que as quatro categorias elencadas convergem para um ponto comum, que é que os quadriláteros são estudados como um produto acabado na Educação Básica, sem questionamento de suas diferentes caracterizações.

Palabras clave: : *Quadriláteros, Revisão da literatura, Estudo de bibliografia*

Introdução

O presente artigo forma parte da tese de doutorado da primeira autora que visa no estudo dos quadriláteros como saber a ensinar no sistema educativo peruano. Mostra-se uma revisão da literatura focado no ensino e na aprendizagem de dito objeto matemático. Consideramos que este estudo pode contribuir aos pesquisadores interessados na temática para saber sobre o que já foi feito e fornecer informações para futuros estudos na área.

Metodologia

Realizou-se uma pesquisa bibliográfica do tipo estado da arte de teses, dissertações e artigos. De acordo com Fiorentini e Lorenzato (2006), os estudos do estado da arte procuram inventariar, sistematizar e avaliar a produção científica numa determinada área (ou tema) do conhecimento, buscando identificar tendências e descrever o estado do conhecimento de uma área ou de um tema de estudo.

Procuramos teses e dissertações no banco de teses da CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) no Brasil e no Peru, no portal do Registro Nacional de Trabalhos de Investigação da SUNEDU (Superintendência Nacional de Ensino Superior Universitário). Além disso, procuramos no Google acadêmico e no banco de teses de outros países. Também, procurou-se artigos em revistas e em anais de congressos nacionais e internacionais.

Categorias da revisão da literatura

Utilizamos quatro categorias para separar às pesquisas, no quadro 1 apresentamos as categorias e as pesquisas que usamos para a revisão de literatura.

Quadro 1

Categorias da revisão de literatura

Categoria		Pesquisas
I	Desenvolveram estudos com estudantes	Borja (2015), Espinoza (2015) e Forsythe (2015)
II	Desenvolveram estudos na formação inicial docente	Dalcín e Molino (2012), Escudero e Carrillo (2014) e Ferreira (2016).
	Desenvolveram estudos na formação continuada docente	Maioli (2002) e Gómez (2015)
III	Desenvolveram estudos com livros didáticos	Micelli e Crespo (2012) e Becerra (2015)
IV	Ensaaios teóricos	Gascón (2003) e Huerta (1996)

Fonte: Elaboração própria

Primeira categoria

Borja (2015) tinha por foco o estudo de quadrilátero, Trapézio. Objetivou analisar como os estudantes de nível *secundário* encontram a medida da área do trapézio, a partir de sua reconfiguração. A autora utilizou a Teoria de Registros de Representação Semiótica (TRRS), mais especificamente o registro figural e na apreensão operatória de reconfiguração, que consiste no fracionamento da figura que representa o trapézio para obter uma nova figura para logo determinar a medida da área deste objeto matemático. Os sujeitos da pesquisa foram alunos de segundo ano de nível secundário no Peru (12 a 15 anos).

Na parte experimental, Borja (2015) fez uma sequência de três atividades que foram planejadas para que os alunos desenvolverem no trapézio a operação de reconfiguração no registro figural com o uso da malha quadriculada e software GeoGebra. A autora identificou a apreensão perceptiva, discursiva, sequencial e operatória que os estudantes desenvolvem quando dão

solução as atividades da sequência. Além disso, observou que os estudantes mobilizaram seus conhecimentos prévios sobre a medida da área do trapézio quando usam a fórmula para encontrar a medida da área do trapézio.

Uma conclusão importante que autora fez é que os estudantes, apresentam dificuldades em determinar a medida da área do trapézio, porque dão maior importância ao uso da fórmula que não é compreendida por eles e em alguns casos é esquecida, há ausência de outros procedimentos que permitam resolver esta questão como a operação de reconfiguração que é dada no registro figural.

Espinoza (2015), estudou o trapézio, com o foco na base média de esse objeto matemático. O objetivo da pesquisa foi analisar como estudantes de quarto ano de nível secundário no Peru (15 ou 16 anos de idade) conjecturam a propriedade da base média do trapézio quando articulam as apreensões no registro figural em uma sequência didática apoiada no GeoGebra. A pesquisadora usou como quadro teórico alguns aspectos da TRRS e a Engenharia Didática como quadro metodológico.

Na parte experimental, Espinoza (2015) realizou uma sequência de atividades que focam o conceito de trapézio, as propriedades e a conjecturar relacionada à propriedade da base média do trapézio. A pesquisadora conclui que os estudantes mostraram dificuldade em construir o trapézio isósceles, ao contrário, eles construíram o trapézio escaleno. Essa ação revelou que eles conseguiram desenvolver sua apreensão sequencial do trapézio escaleno porque seguiram uma sequência ordenada de passos para construí-lo. Além disso, Espinoza (2015) percebeu que os estudantes mostraram algumas limitações em termos de conhecimento sobre o trapézio, e o uso de uma linguagem matemática adequada para dar a conhecer as suas conjecturas.

Forsythe (2015), em seu artigo, apresenta uma pesquisa com estudantes britânicos de 13 anos de idade, baseado em desenvolvimento de raciocínio Geométrico de Van Hiele e na forma de classificação hierárquica proposta por De Villiers. O objetivo do estudo foi verificar se uma tarefa pedagógica baseada em uma figura dinâmica projetada em um programa de Software de Geometria Dinâmica poderia ser útil no desenvolvimento do raciocínio geométrico dos estudantes. Para isso, a pesquisadora usou a ferramenta arrastre no software *Geometers Sketchpad*, e focou as relações entre formas geradas a partir da figura dinâmica, especialmente, o losango como um caso especial de trapézioide simétrico.

A autora indicou que o desenvolvimento da ideia de inclusão de figuras não foi automático para os estudantes. Observar a animação (Figura1) permitiu que os estudantes assistissem à natureza contínua da mudança de figura e provou ser o catalisador para mover seu raciocínio para perceber relações inclusivas entre o losango e o trapézioide simétrico.

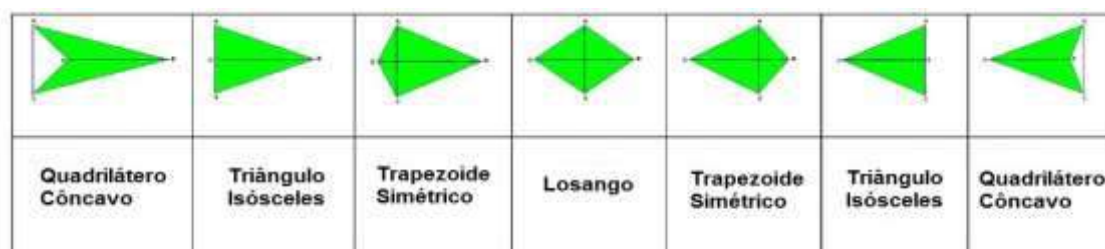


Figura 1. Formas geradas durante a animação. Forsythe (2015, p. 213)

A pesquisadora indica que, quando os estudantes trabalham em um ambiente de DGS, a representação visual é claramente o foco principal de sua atenção. Arrastar uma figura na tela é uma atualização visual que os matemáticos costumam fazer quando animam figuras mentalmente para perceber as variantes e invariantes (Leung, 2008; Sinclair et al., 2009, *em* Forsythe, 2015, p. 217). Daí que reside o poder da geometria dinâmica como sendo mais intuitivo e mais próximo de como as nossas mentes trabalham, e pode ajudar os estudantes que acham tais visualizações mentais difíceis.

Segunda categoria

Nesta categoria, consideramos dois subcategorias, a primeira formada pelas pesquisas que são baseadas na formação inicial e uma segunda subcategoria, por pesquisas de formação continuada de professores.

Subcategoria: formação inicial de professores

Dalcín e Molino (2012) investigaram as possibilidades de construção e justificação de propriedades dos quadriláteros geradas a partir de classificações não tradicionais deles. A pesquisa foi realizada trabalhando-se em equipes de três ou quatro estudantes em formação para se tornar professores no Uruguai, tanto em lápis e papel quanto em Geogebra, e coletivizando ao final de cada atividade. Os autores usaram os paradigmas do Espaço de Trabalho Geométrico propostos por Houdement y Kuzniak (1993, *em* Dalcín e Molino, 2012, p.4) para planejar as atividades propostas em sua pesquisa.

Os pesquisadores, depois da aplicação das atividades, concluíram que os estudantes fizeram classificações dos quadriláteros tomando como critérios exclusivamente a igualdade de seus lados ou a igualdade de seus ângulos. Essas classificações nunca foram feitas antes pelos estudantes e nem aparecem nos livros didáticos do Uruguai, mas que no início, eles só conseguiram fazer a classificação pelo paralelismo de seus lados (paralelogramos, trapézios e trapezoides).

Além disso, os estudantes em formação para se tornar professores, foram capazes de conceber e construir famílias de quadriláteros que nunca haviam considerado antes, como quadriláteros com apenas três lados iguais (ou ângulos). Dalcín e Molino (2012), indicam que a construção em GeoGebra de algumas famílias de quadriláteros, embora muitas vezes significasse um grande

desafio, permitiu apreciar a amplitude da família considerada e ir além dos quadriláteros conhecidos pelos estudantes.

No mesmo sentido, os pesquisadores observam que os estudantes poderiam também estabelecer, no campo da Geometria I e / ou no campo da Geometria II, a equivalência ou não de diferentes definições, e apreciar que essas definições, e, portanto, a equivalência, depende se a classificação considerada é hierárquica ou por partição.

Escudero e Carrillo (2014), em seu artigo, fizeram uma análise sobre o conhecimento que os professores em formação inicial têm sobre os quadriláteros. Para isso, basearam-se no modelo teórico de Conhecimento Especializado do Professor de Matemática (MTSK). Os sujeitos foram 51 estudantes do segundo ano de Licenciatura em Educação Primária da Universidade de Sevilla. A coleta de informações sobre o conhecimento matemático foi realizada por meio da aplicação de um questionário e uma entrevista que só foi aplicada a 12 participantes. A análise dos achados mostra que os estudantes comparam características comuns e não comuns de figuras, e depois classificá-las.

O resultado das atividades desta pesquisa permitiu que os pesquisadores conhecessem a imagem conceitual dos professores em formação inicial, dos diferentes quadriláteros, incluindo o trapézio. Os autores, com base nos resultados obtidos, mostram, também, que alguns estudantes tiveram dificuldades em reconhecer quadriláteros e, dentro deles, o trapézio. A posição não convencional em que as figuras foram apresentadas parece ter sido uma das origens das dificuldades enfrentadas pelos alunos. Eles também observaram que muitos dos estudantes em formação inicial docente têm sérias dificuldades em representar um quadrilátero convexo. Finalmente, os pesquisadores afirmam que as principais deficiências estão na falta de compreensão das noções geométricas, como as propriedades comuns aos quadriláteros, porque a forma da figura e o que é percebido por intermédio da sua representação superam seus conhecimentos geométricos, mais especificamos os relacionados aos quadriláteros. Além disso, os autores mencionam que a imagem prototípica das figuras incentiva os estudantes a indicar propriedades incorretas das figuras.

Ferreira (2016) fez um estudo sobre uma proposta didática cujas tarefas articulam provas e demonstrações como estratégia metodológica de ensino para minimizar as dificuldades relacionadas ao tópico 'quadriláteros' em um curso de licenciatura em matemática.

A pesquisadora utilizou como marco teórico a Teoria Antropológica do Didático (TAD) para a análise de livros didáticos e modelar as situações de ensino, a TRRS, dando ênfases às diferentes apreensões de uma figura, a Teoria de Situações Didáticas para a elaboração e experimentação da sequência e na análise didática da situação de ensino, e as concepções de prova e demonstração de Balacheff (2000, em Ferreira, 2016). Além disso, usou como marco metodológico a Engenharia Didática. Os sujeitos da pesquisa foram 12 estudantes da licenciatura de matemática na Universidade do Estado da Bahia no Brasil.

Nos resultados desta pesquisa, a autora indica que apesar da verificação que os estudantes praticaram provas formais, eles mostraram fragilidade no desenvolvimento de uma demonstração e apresentaram deficiências em articular propriedades e conceitos geométricos.

No estudo dos livros didáticos, Ferreira (2016) indica que os livros abordam quadriláteros de maneira direta, no sentido da formalização para a resolução de problemas. A organização didática do tópico quadrilátero não parece ter potencial para permitir ao estudante participar da construção da teoria, mas apenas compreender o que foi feito por outro. A pesquisadora evidenciou dificuldades conceituais relativas à caracterização de quadriláteros notáveis e às relações entre eles. Algumas dessas dificuldades estão relacionadas com o foco dado à apreensão perceptiva quanto às justificativas propostas pelos estudantes.

Subcategoria: formação continuada de professores

Maioli (2002) tinha por objetivo como professores de matemática de ensino médio no Brasil desenvolvam conhecimento sobre o objeto matemático quadriláteros e também conheceram teorias na área de educação matemática, como a Teoria de Situações Didáticas e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, a fim de promover uma reflexão de suas práticas na sala de aula. Participaram dessa pesquisa dez professores do ensino médio.

Para analisar a participação e o processos de formação dos professores, a autora estabeleceu seis categorias, as quatro primeiras correspondem às dificuldades que apresentam em relação à geometria, sobre aspectos conceituais e visuais, situações e livros didáticos; as duas últimas categorias estão relacionadas à visão de pesquisa e registros de representação. As atividades foram projetadas levando em consideração as quatro fases de ação, formulação, validação e institucionalização propostas por Brousseau (1986, em Maioli, 2002), e a maioria das atividades foram trabalhadas em diferentes registros (enunciados verbais, representação figural e discurso matemático).

O objeto matemático foi analisado em vários tópicos: aspectos visuais, definição, propriedades, construções geométricas, conjecturas, demonstrações, contraexemplos, teorema recíproco e discussão entre o grupo de professores. A metodologia adotada permitiu que os professores participantes experimentassem dois momentos: no primeiro, propõe-se que os professores se coloquem no lugar de seus alunos para resolver situações problemáticas e, no segundo momento, os professores conduzirem uma reflexão sobre pesquisas em que usa a teoria da situação e a teoria dos registros de representação semiótica para relacioná-los na sua prática de ensino.

Com relação ao desenvolvimento da sequência de atividades, foi possível observar, a partir da TRRS, o seguinte: dificuldade em verbalizar conceitos, como: "ponto médio da reta AB", "reta tangente a uma curva em um ponto". A autor afirma que não é uma consequência de falhas conceituais, mas que os professores afirmam que não estavam acostumados a verbalizar uma construção. O que significa que eles dão mais importância ao aspecto visual do que conceitual, porque é mais fácil para eles.

Em relação às dificuldades na área da geometria, a autora observou o uso de termos impróprios, confusão entre propriedades e definições, a diagonal de um polígono é sempre interna, a ideia de "base" no contexto da geometria é confundida com a ideia de base no sentido comum.

Gómez (2015) analisou como um estudo de quadriláteros que envolve o processo de visualização mediado pela GeoGebra pode contribuir na formação continuada de professores de nível *secundário* no Peru. Fundamentou sua pesquisa na TRRS com ênfases na visualização e na articulação nas apreensões sequenciais, perceptivas, operativas e discursivas desse registro e como quadro metodológico usou à Engenharia Didática.

A pesquisadora elaborou e implementou uma oficina com quinze professores que atuam no nível *secundário* no Peru que já tinham conhecimento do uso do GeoGebra. A oficina estava composta por quatro atividades que tinham como foco o estudo do paralelogramo, a configuração, a reconfiguração e o arraste. A pesquisadora assevera que os professores mobilizaram seus conhecimentos anterior relevante para o estudo de quadriláteros, uma vez que conseguiram realizar tratamentos no registro figural ao utilizar ferramentas específicas do GeoGebra. No entanto, a autora percebeu que os professores tinham problemas para coordenar este registro com seu discurso. Eles conseguiram articular as apreensões: perceptivo-operatória, perceptivo-discursiva e perceptivo-operatória-discursiva. O que dá indícios de que os professores, participantes da pesquisa, desenvolveram processos de visualização do objeto matemático quadrilátero. Além disso, a pesquisadora indica que se os professores desenvolvem suas apreensões eles serão capazes de criar situações do objeto matemático que propiciem em seus estudantes o desenvolvimento dessa habilidade.

Terceira categoria

De modo similar, Micelli e Crespo (2012) apresentam um estudo em que analisam 16 livros de textos escolares de ensino médio utilizados nos últimos vinte anos na Argentina. Para categorizar o tipo de classificação que é abordado em cada livro didático, as autoras tomaram os tipos de classificação (hierárquica e por partição) de De Villiers (1994, em Micelli e Crespo, 2012).

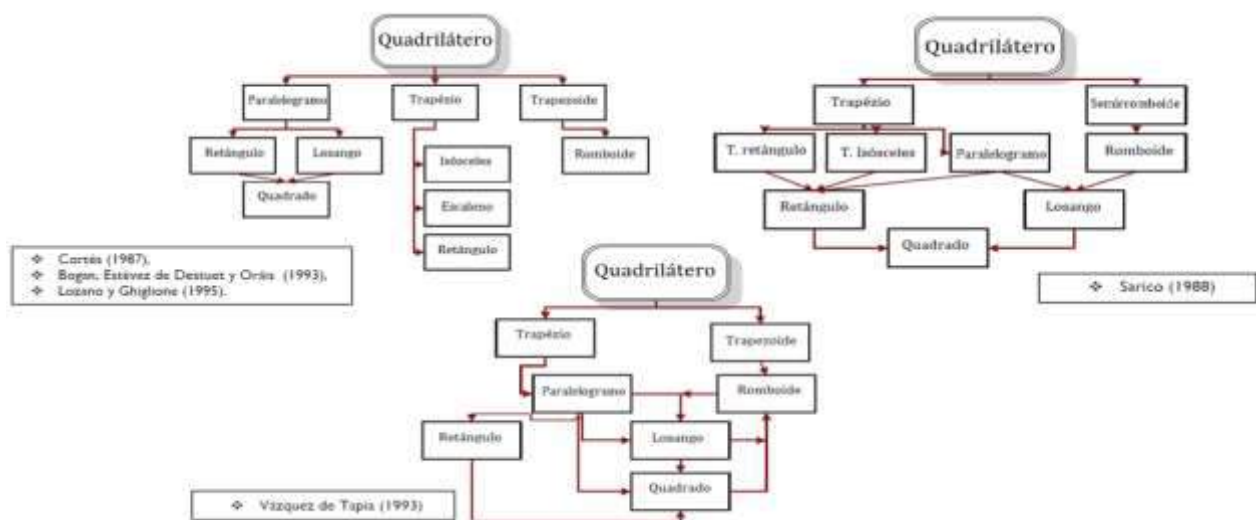


Figura 3. Classificações dos Quadriláteros. Adaptado de Micelli y Crespo (2012)

Na figura 3, visualizam-se algumas das classificações do estudo de Micelli e Crespo (2012). As autoras indicam que é possível ter definições diferentes para o mesmo quadrilátero, o que leva a gerar classificações diferentes, todas igualmente válidas, uma vez que são entendidas como uma convenção. Essa coexistência mostra o consenso que se estabelece no processo de institucionalização dessas definições. Além disso, as pesquisadoras sugerem perguntar-se se os professores estão cientes da existência desses consensos que, no caso dos quadriláteros, resultam na coexistência de diferentes classificações.

Como pode ser observado, as pesquisas de Dalcín (2006) e Micelli e Crespo (2012) tiveram o foco nas definições e classificações dos quadriláteros. Ambas pesquisas usaram os tipos de classificação de De Villiers (1994) (hierárquica e por partição). Evidenciam que há diferentes formas de classificar os quadriláteros e que estas dependem da forma como são definidos. Dessas pesquisas, podemos dizer que as classificações apresentadas têm como critério o paralelismo dos lados dos quadriláteros e se sua definição é inclusiva ou exclusiva.

Outra pesquisa qualitativa de tipo bibliográfica sobre o estudo dos quadriláteros foi feita na pesquisa de mestrado de Becerra (2015). Tem por objetivo descrever e analisar a organização matemática relacionada a quadriláteros, presente na quarta unidade de um livro didático do quinto ano do ensino fundamental, distribuído pelo Ministério da Educação a todas as instituições públicas do Peru.

A pesquisadora usou como quadro teórico a Teoria Antropológica do Didático (TAD) porque lhe deu os elementos necessários para descrever a organização matemática presente no livro didático, mais especificamente, os construtos tipos de tarefas, tarefas, técnicas, tecnologia e teoria. Além disso, a autora utilizou os sete critérios de grau de completude de uma OML (organização matemática local) propostos por Fonseca (2004, *apud* Becerra, 2015, pp. 34-36),

estes indicam as características dos componentes e as relações das Organizações Matemáticas Locais (OML). Os resultados obtidos por Becerra (2015) mostram a presença de 9 tipos de tarefas, 23 tarefas, 6 técnicas, 14 elementos tecnológicos e uma teoria na quarta unidade de um livro didático do quinto ano do ensino fundamental no Peru. Com relação à análise dos indicadores de completude de Fonseca, a pesquisadora observou que os indicadores de OML1 ao OML6 são parcialmente atendidos e o indicador OML7 não é atendido. É por isso que a autora conclui que a organização matemática apresentada no quarto capítulo do livro didático não é completa.

Quarta categoria

Gascón (2003) apresenta um ensaio sobre a classificação dos quadriláteros. O pesquisador indica que esse objeto matemático é trabalhado nas escolas como se fosse acabado e pronto, que já não se pode modificar, nem tecer refletir sobre ele. Ele mostra uma possível razão de ser (o porquê e o para que é ensinado nas escolas) da classificação dos quadriláteros, considerando diferentes critérios como as propriedades de suas diagonais, os tipos de simetria e por seus ângulos.

Gascón (2003) indica que a classificação dos quadriláteros se encontra na temático de polígonos na escala de codeterminação (Disciplina $\rightleftharpoons$ Domínio $\rightleftharpoons$ Setor $\rightleftharpoons$ Tema $\rightleftharpoons$ Assunto de estudo) propostas na Teoria Antropológica do Didático. Mas, o pesquisador indica que se considerasse as simetrias das figuras como o critério de sua classificação, estaria no nível temático da simetria e no setor de movimentos no plano. Desta forma, cada uma das classificações propostas pode ser entendida como um estudo de quadriláteros que permitiriam recuperar a razão de ser do estudo desta questão (da classificação) no nível *secundário*. O autor indica que é uma proposta que, se pudesse ser realizada, teria um impacto muito além do nível temático e provocaria uma profunda reestruturação dos diferentes setores e em algumas áreas do currículo em matemática.

Por outro lado, Huerta (1996), em seu artigo, apresenta uma resenha histórica dos quadriláteros no período do século XIX até finais do século XX. Fez uma revisão das definições e tipos de quadriláteros desde as perspectivas de Euclides, Legendre, Pastor e Andam. Além disso, o autor mostra como são apresentados os quadriláteros nos livros-texto de nível fundamental (nível *primário* na Espanha). O autor ressalta que somente os quadriláteros notáveis (paralelogramo, trapézio e trapezoide) são ensinados, e que sua classificação é feita, usando-se o paralelismo de seus lados. Indica, ainda, que essa organização tem sido permanente no período estudado, embora existem outras maneiras de organizar tal classificação, como por exemplo, a classificação hierárquica considerando a concavidade dos quadriláteros (côncavo e convexo) e não somente o paralelismo de seus lados.

Para Huerta (1996), a tradição tem mandado no ensino da geometria e, portanto, no ensino dos quadriláteros, esse objeto matemático é apresentado como um produto acabado do qual nada se pode dizer porque todo está dito. Mas, considera que essa tendência pode ser modificada se outras formas de organização do conhecimento foram almejadas.

Conclusões

Ante ao exposto, é possível perceber que as quatro categorias elencadas convergem para um ponto comum, que é que os quadriláteros são estudados no ensino como um produto acabado na Educação Básica, sem questionamento de suas diferentes classificações.

A primeira categoria evidencia que os estudantes da educação básica não são capazes de estabelecer propriedades mínimas para caracterizar os quadriláteros, e não relacionam os diferentes tipos de quadriláteros. Além disso, revela que os aspectos visuais são preponderantes em suas respostas.

A segunda categoria, tanto na formação inicial, como na formação continuada, evidencia dificuldades conceituais relativas à caracterização de quadriláteros notáveis, sua classificação e na identificação das relações entre eles. Algumas dessas dificuldades estão relacionadas com o foco dado à apreensão perceptiva como sendo quase o único meio as justificativas propostas na resolução de problemas envolvendo quadriláteros.

Quanto à terceira categoria, o estudo de livros didáticos centrou-se no tipo de classificação dos quadriláteros notáveis (paralelogramo, trapézio e trapezoide) e indica que a classificação depende da maneira como são definidos os quadriláteros (inclusiva ou exclusiva). Além disso, as pesquisas que usaram como quadro teórico a TAD, reportam que as organizações matemáticas propostas nos livros didáticos são incompletas e que as técnicas aplicadas se centram essencialmente nos aspectos visuais e no uso das representações geométricas.

Na quarta categoria, os ensaios mostram que a tradição tem mandado no ensino dos quadriláteros, mas apresentam como essa perspectiva pode ser modificada, considerando outras formas de organização do conhecimento.

Agradecimientos

El presente trabajo fue realizado con apoyo de la Coordinación de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior- Brasil (CAPES)- Código de Financiamento 001.

Referencias

- Becerra, A. (2015). Análisis de una organización matemática asociada al objeto** cuadriláteros que se presenta en un libro de texto del quinto grado de educación primaria. Disertación (Maestría en enseñanza de las matemáticas) – Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima.
- Borja, I. (2015). Reconfiguración del trapecio para determinar la medida del área de dicho objeto matemático con estudiantes del segundo grado de educación secundaria. (Maestría en enseñanza de las matemáticas) – Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, .
- Dalcín, M. (2006). La definición y clasificación de cuadriláteros en los libros de texto de ayer y de hoy. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, p. 472-477.

- Dalcín, M., & Molfino, V. (2012). Clasificación particional de cuadriláteros como fuente de demostraciones y construcciones en la formación inicial de profesores. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*. v. 1, n. 1, p. LXXXI – XCVII.
- Escudero, A., & Carrillo J. (2014). Conocimiento matemático sobre cuadriláteros en estudiantes para maestro. *Revista de Investigación en Educación Matemática* XVIII, pp. 267-276, Salamanca: SEIEM.
- Espinoza, B. (2015). Base media del trapecio y aprehensiones en el registro figural. Una secuencia didáctica con el uso del Geogebra con estudiantes del nivel secundario. (Maestría en enseñanza de las matemáticas) – Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima.
- Ferreira, M. B. C. (2016). *Uma organização didática em quadrilátero que aproxime o aluno de licenciatura das demonstrações geométricas*. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontificia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.
- Fiorentini, D & Lorenzato, S. (2006). *Investigação em Educação Matemática: percursos técnicos e metodológicos*. Campinas: Autores Associados.
- Forsythe, S. (2015). Dragging maintaining symmetry: can it generate the concept of inclusivity as well as a family of shapes? *Research in Mathematics Education*, v.17, n. 3, p. 198-219.
- Gascón, J. (2003). Efectos del autismo temático sobre el estudio de la Geometría en secundaria II. La clasificación de los cuadriláteros convexos. *Revista SUMA*, 45, p. 41 – 52.
- Gómez, C. (2015). *Proceso de visualización de cuadriláteros: un estudio con profesores de nivel secundario*. Disertación (Maestría en enseñanza de las matemáticas) – Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima.
- Huerta, M.P. (1996). Los cuadriláteros a comienzos del siglo XIX, a comienzos del siglo XX y a finales del siglo XX, ¿Qué ha cambiado? *Revista SUMA*, 21, p. 55 – 62.
- Maioli, M. (2002). *Uma oficina para formação de professores com enfoque em quadriláteros*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontificia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.
- Micelli, M., & Crespo, C. (2012). ¿Existe más de una clasificación de cuadriláteros? ¿por qué? *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, p. 845-853.

LA TEORÍA DEL REFLEJO DE V. I. LENIN EN LA TRADICIÓN DIALÉCTICA DE L. S. VYGOTSKY Y SUS VÍNCULOS CON LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA: ERROR Y FANTASÍA EN LA ENSEÑANZA PROBLÉMICA DE LA GEOMETRÍA

Luis Miguel Maraví Zavaleta

a20146949@pucp.pe

I.E. N° 80915 "Miguel Grau Seminario", Perú

Resumen

El presente trabajo tiene el propósito de mostrar la relación entre las ideas del filósofo V. I. Lenin con las del psicólogo L. S. Vygotsky, en el contexto de una experiencia en la enseñanza de la geometría guiada bajo fundamento problémico. Para esto, se indican evidencias del pensamiento vygotskyano que muestran a la teoría leninista del reflejo como nexo, así como la forma en que dicha teoría se presentaría en las categorías de la Enseñanza Problemática. Luego, bajo la metodología Task Design, se plantea la solución de un problema de demostración geométrica mediante el empleo de líneas auxiliares. El principal resultado obtenido indicaría, bajo el enfoque del nexo entre Lenin y Vygotsky, la presencia de un error detectado durante la solución del problema con el que estaría vinculado el empleo de la fantasía.

Palabras clave: *Vygotsky, enseñanza problémica, geometría escolar, líneas auxiliares*

Introducción

En los últimos años, la presencia del psicólogo bielorruso L. S. Vygotsky en investigaciones de Educación Matemática ha aumentado en forma notable, pues dicha disciplina ha recibido importantes aportes provenientes de la escuela psicológica fundada por el mencionado pensador (Lerman, 2000; Lerman, 2008). Por ello, resulta importante estudiar la raigambre filosófica del pensamiento vygotskyano. Al respecto, Walshaw (2016) ubica a Vygotsky en la tradición de pensamiento dialéctico signada por filósofos como Hegel, Marx y Engels. Sin embargo, en consideración al momento histórico en el que el psicólogo bielorruso desarrolló su labor, correspondiente a la Gran Revolución Socialista de Octubre en Rusia (Dafermos, 2015), llama la atención la no inclusión del polifacético filósofo ruso V. I. Lenin dentro del estudio de quienes influyeron en Vygotsky, aun cuando aquel forma parte de la mencionada tradición dialéctica.

Además de en la Educación Matemática, la herencia vygotskyana también se encuentra presente en la enseñanza general contemporánea. Con ese enfoque, Radford, Miranda & Lacroix (2018) muestran su discrepancia con la versión sobresimplificada del constructivismo, en la que se brinda

escasa importancia al rol del maestro. Dicho punto de vista impulsa, en nuestro caso, el estudio de una propuesta proveniente de la educación general que, precisamente, carece de aquel rasgo. Nos referimos a la Enseñanza Problémica (Torres, 2013), cuya base gnoseológica es el principio de la contradicción perteneciente a la filosofía dialéctica materialista (Majmutov, 1983). Tal principio filosófico sugeriría, a su vez, cierta conexión entre el pensamiento leninista y algunos de los conceptos aportados por Vygotsky a la didáctica a través de la psicología, vínculo que ya ha sido sugerido por otros autores para diferentes categorías proporcionadas por el pensador bielorruso (Dafermos, 2018; Shvarts & Bakker, 2019).

Sin embargo, al seguir las ideas sobre el rol del maestro, postuladas por Radford, Miranda & Lacroix (2018), se hace necesario develar en la práctica, el vínculo que existiría entre la Enseñanza Problémica y la Educación Matemática, el cual también indicaría el nexo entre las ideas de V. I. Lenin con esta disciplina. Ello podría ser apreciado mediante el planteo de una actividad generadora de situación problémica y, por tanto, también de las demás categorías de la Enseñanza Problémica (Torres, 1999).

Por lo anteriormente considerado, se plantea la necesidad de determinar las conexiones existentes entre el pensamiento de V. I. Lenin y L. S. Vygotsky, la forma en se desarrollan los mencionados nexos dentro de la Enseñanza Problémica y cómo, desde esta postura, se reflexiona en una situación planteada en el ámbito de la enseñanza de la geometría.

El presente trabajo fue organizado de la siguiente forma: en la primera sección, se indicarán aquellos aspectos de la obra vygotskyana en los cuales se revelaría la influencia leninista, así como la forma en que dicha influencia se manifestaría dentro de la Enseñanza Problémica. En el segundo apartado se describe una experiencia dentro de la enseñanza de la geometría, bajo la guía teórica ya mencionada. En la tercera sección, se discuten uno de los hallazgos obtenidos. Finalmente, se presentan conclusiones y sugerencias para futuras investigaciones

Lenin, Vygotsky y la Enseñanza Problémica: vínculos revelados

Los vínculos existentes entre el pensamiento de Lenin y el de Vygotsky no se limitan al decidido apoyo que el último pensador mencionado brindó a la Revolución de Octubre (Blanck, 1993), en el contexto tumultuoso y de experimentación radical propio de una revolución social (Dafermos, 2015). El nexo entre ambos pensadores se evidencia, en especial, en el empleo, por parte de Vygotsky, de la teoría leninista del reflejo (Blanck, 1993; Riviére, 1996), importante elemento teórico inscrito dentro del desarrollo de la filosofía materialista dialéctica en la URSS (Zverev, 1983; Valera, 2003) y que, de acuerdo con Talízina (1988) y Shuare (1990) tuvo gran impacto en la actividad psicológica y educacional de ese y otros países.

El vínculo de Lenin y Vygotsky mediante la teoría del reflejo es indicado por Zavershneva & Van der Veer (2018), a partir del estudio directo de los manuscritos procedentes del archivo familiar del psicólogo bielorruso. Así pues, los investigadores presentan este fragmento correspondiente a 1930:

Cf. también Lenin en conexión con la crítica aristotélica de la teoría pitagórica de los números (y la teoría platónica de las ideas) como seres aislados de las cosas perceptibles: la generalización es la raíz del idealismo (Cuadernos de Lenin, XII, pp. 370-371):

"(...) La aproximación de la mente (humana) hacia una cosa particular, la toma de una copia (= un concepto) de ella, no es un acto simple e inmediato, un reflejo muerto, sino que es complejo, dividido en dos, como un zigzag, el que incluye en sí la posibilidad del vuelo de la fantasía a partir de la vida; más que eso: la posibilidad de la transformación (además, una inadvertida transformación, de la cual el hombre es inconsciente) del concepto abstracto, idea, en fantasía (...) Aun en la más simple generalización, en la más elemental idea general (...) hay una cierta partícula de fantasía. Viceversa: sería estúpido denegar el rol de la fantasía, aún en la ciencia más estricta". (Zavershneva & Van der Veer, 2018, pp. 133-134) (Traducción nuestra)

De la cita anterior, Vygotsky extrae una importante conclusión:

Por consiguiente: los idealistas vieron en la teoría de conceptos un poco de fantasía, precisamente como Lenin. Pero su sueño echó a volar en una dirección, etc. y Lenin comprendió el peligro y el beneficio de este poco de fantasía. ¿Cuál es? La libertad que está incluida en el concepto. (Zavershneva & Van der Veer, 2018, p. 135) (Traducción nuestra)

En palabras de Lenin, asumidas por Vygotsky, el reflejo de los objetos en la mente es el proceso fundamental de la teoría del conocimiento cuyo tiempo de duración no se indica. Asimismo, dada la posibilidad de inclusión de la fantasía en aquel, lo que posee carácter doble de peligro y beneficio, se desprendería la necesidad de la inclusión de elementos o circunstancias que ayuden a corregirla o moderarla. La importancia de la mencionada cita de Lenin para la obra de Vygotsky fue tal que, según Zavershneva & Van der Veer (2018), aquella fue incluida en obras posteriores de Vygotsky como *Pedagogía del adolescente* y *Pensamiento y lenguaje*, entre otras.

Por otra parte, las ideas leninistas acerca del reflejo como fundamento del proceso del conocimiento también influyeron en diferentes propuestas generales de enseñanza, como es el caso de la Enseñanza Problemática. Esta concepción de la enseñanza surgió entre la quinta y sexta década del siglo XX en la URSS (Majmutov, 1983). Inspirada en la vasta tradición pedagógica desarrollada en la URSS y otros países, la Enseñanza Problemática posee, como categorías fundamentales, a la situación problemática, el problema docente, los impulsos brindados por tareas y preguntas problemáticas, así como lo problemático. Como se verá a continuación, dicha propuesta no carece de vínculos con el pensamiento vygotskyano.

La *situación problemática*, de acuerdo con Martínez & Hernández (2004), es de carácter subjetivo y "refleja la contradicción dialéctica que estimula la actividad cognoscitiva" (p. 113). Esta afirmación sigue una tesis gnoseológica de Lenin acerca de la aproximación infinita del pensamiento humano en su comprensión de la realidad circundante, no sin contradicciones y sin solución de estas (Lenin, 1974). Dicha tesis no es sino la formulación, con otras palabras, de la tesis del reflejo que Vygotsky recogió en sus obras.

Así mismo, la categoría del *problema docente* es, según Majmutov (1983), “un reflejo (...) de la contradicción lógico-psicológica del proceso de asimilación, lo que determina el sentido de la búsqueda mental” (p. 132). En ese sentido, la definición anterior se aprecia directamente conectada con la categoría anterior y con la idea leninista de reflejo, pues el zigzagueante proceso de conocimiento se dirige hacia la solución del problema docente.

Por último, las *tareas y preguntas problémicas*, que brindan impulsos orientados hacia el empleo de procedimientos heurísticos se caracterizan, según Martínez & Hernández (2004), “por la existencia de algo desconocido que no se encuentra fácilmente sino mediante el establecimiento de determinados recursos lógicos que llevan al hallazgo de algo nuevo: “lo buscado”” (p. 123). Este tipo de procedimientos, a decir de Torres (2013), deberían formularse en la forma más general y exigente, a la que se le rebaja tal nivel con la ayuda cada vez mayor del profesor. Tal principio, denominado “de las exigencias decrecientes” por el autor, estaría fundamentado en el concepto vygotskyano de zona de desarrollo próximo. Precisamente, con el grado de complejidad de las tareas y preguntas, así como con las habilidades del estudiante para resolverlas en forma independiente se encuentra la categoría de *lo problémico* (Torres 1999). Es necesario señalar, sin embargo, que los procedimientos heurísticos y los impulsos (que pueden ser de tipo lingüístico, concreto o gesticular) permiten al estudiante, según Torres (1999), “acercarse” considerablemente a la idea de la solución del problema, pero (...) no necesariamente garantizan su hallazgo” (p. 10). En este punto el pensamiento de Vygotsky también se habría encontrado con el de Lenin, dadas las transcripciones de debates donde, tras mencionar pensamientos leninistas, aparecen notas manuscritas sobre la zona de desarrollo próximo (ZDP) (Zavershneva & Van den Veer, 2018). Sin embargo, un estudio más profundo de la cuestión se hace necesario.

De este modo, tal como se ha mencionado, los vínculos de Lenin (en cuanto a la teoría del reflejo se refiere) y Vygotsky con la Enseñanza Problemática se manifestarían, con mucha proximidad, en las categorías de situación problemática y problema docente. Ello, empero, no descarta en forma terminante, la relación con las categorías de tareas y preguntas problémicas y lo problémico.

Una experiencia dentro de la enseñanza de la geometría

Tras haber precisado los rasgos de la Enseñanza Problemática en el contexto de las relaciones entre Vygotsky y Lenin, es necesario mostrar el nexo de tal enfoque general con estudios que focalicen aspectos propios de la matemática, como lo sugieren Silver & Herbst (2007) para otros trabajos. La experiencia que presentó dicho vínculo y que se reporta en el presente trabajo, concentró su atención en el trazado de líneas auxiliares durante la solución de problemas de demostración en geometría por constituir fuente generatriz de situación problemática (Torres, 1999). Así pues, la Enseñanza Problemática guió la parte instruccional del estudio.

Para el desarrollo de la experiencia se asumió, junto con Polya (1969), que, en el contexto de la solución de un problema, “un elemento que introducimos con la esperanza de que impulse la solución es denominado un elemento auxiliar” (p. 82). Así mismo, se consideraron las razones para su introducción, afirmadas por Polya (1969) y estudiadas por Palatnik & Sigler (2018).

Precisamente, algunos de los elementos aportados por la última investigación mencionada permitieron realizar la tipificación de respuestas de los estudiantes, para luego reflexionar sobre ellos desde la conexión entre Lenin y Vygotsky.

El estudio ocurrió a inicios de setiembre de 2019 en una sección de cuarto grado de educación secundaria, perteneciente a una institución educativa pública localizada en la zona andina rural del norte del Perú, donde el autor se desempeña como profesor. La sección estuvo conformada por nueve estudiantes de 15 a 17 años de edad. Su identidad fue preservada mediante la notación A_i (donde i representa el número del alumno). Con los referidos estudiantes se abordaban temas concernientes a geometría, considerados en la planificación curricular.

Con respecto a la metodología, se emplearon aspectos de Task design, dada la relación existente con aspectos instruccionales y de acuerdo a los cuales tal metodología posee determinadas particularidades (Kieran, Doorman & Ohtani, 2015). En ese sentido, se asumió el principio brindado por Lin, Yang, Lee, Tabach & Stylianides (2012) para el diseño de tareas de demostración: los estudiantes crean y comparten sus propias pruebas. Finalmente, cómo método para asegurar la validez de los hallazgos observados se usó la triangulación de analistas (Mok & Clarke, 2015).

En el primer momento, de creación de la demostración, se planteó a los estudiantes la siguiente tarea, adaptada a partir de un teorema presentado por Hang & Wang (2018) (Figura 1).

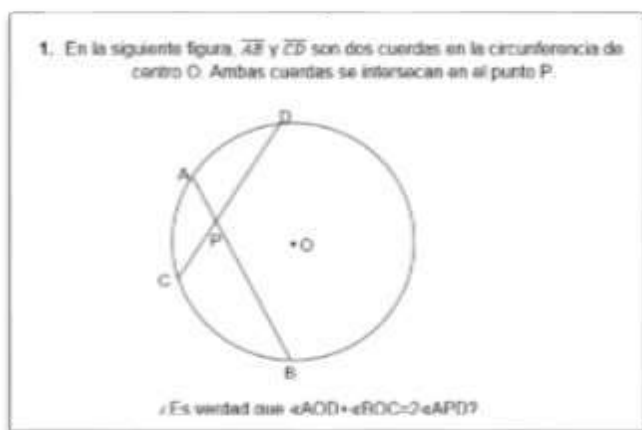


Figura 1. Tarea 1 planteada a los estudiantes

Las razones para la elección de tal teorema fueron, sobre todo, de carácter instruccional. Se acababa de estudiar el tema de circunferencia y las propiedades referidas a los ángulos en ella, por lo que dentro de la secuencia del sistema de clases era necesaria una actividad de repaso del tema abordado.

En el momento de creación de la prueba y luego de dejar solos a los estudiantes frente a la tarea (nivel máximo de impulso didáctico), se brindó como segundo impulso, de carácter, concreto la siguiente figura-tarea (Figura 2):

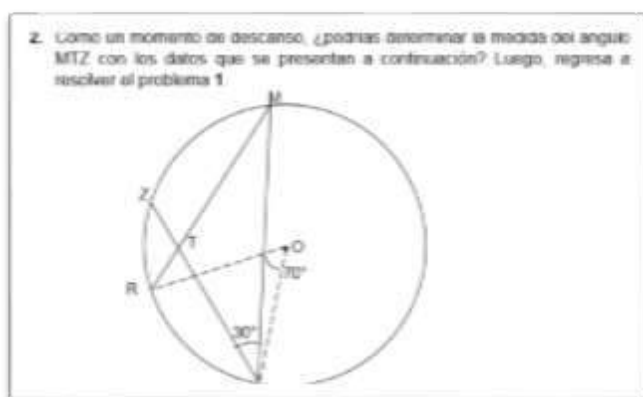


Figura 2. Tarea 2 planteada a los estudiantes

Transcurridos unos minutos, se dio a los estudiantes el tercer impulso concreto (Figura 3):

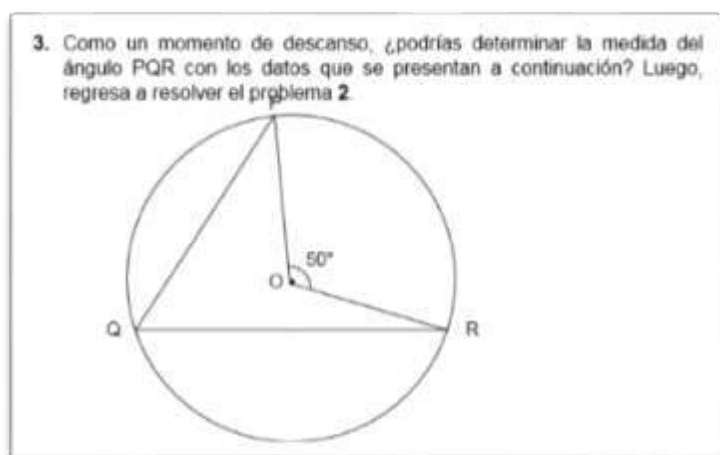


Figura 3. Tarea 3 planteada a los estudiantes

El uso de los impulsos concretos, expresados mediante figuras-tarea se fundamentó en la sugerencia, realizada por Torres (2013), de combinar los impulsos didácticos con impulsos concretos, tales como cuadros, figuras o cuerpos geométricos. Así mismo, se mantuvo el propósito instruccional como fundamento para la adopción de este tipo de impulsos.

En el segundo momento, de puesta en común de la demostración, los trazos y respuestas elaboradas por los estudiantes brindaron insumos para la búsqueda de la solución del problema planteado, bajo la guía del docente. En esta última fase, también se fomentó la realización de trazos auxiliares en hojas de papel.

Discusión de resultados

Este trabajo se planteó determinar los nexos entre Vygotsky y Lenin mediante la Enseñanza Problémica aplicada a un aspecto de la enseñanza de la geometría, como es el trazado de líneas auxiliares para la solución de problemas de demostración geométrica. A continuación, se selecciona, presenta y analiza la producción de la estudiante a la que se denominará A₁, debido a

la presencia de un hecho vinculado con las bases teóricas del presente trabajo.

Durante el primer momento de la experiencia (creación de la demostración), se habría registrado la creación de interés por resolver el problema docente (Majmutov, 1983). Ello se habría manifestado en la extracción y lectura atenta del cuaderno de notas. Posteriormente, se observó (Figura 4) que la estudiante A₁ realizó trazos que habrían concretizado la definición de los ángulos AOD y BOC sobre los que se plantea la figura y que originalmente no habían sido indicados en la tarea 1 (Palatnik & Sigler, 2018). Asimismo, en la tarea 2 (Figura 5), A₁ habría relacionado dos elementos distantes mediante un resultado conocido (el uso –incorrecto– de las propiedades del triángulo equilátero) al trazar el segmento RN y formar el triángulo ORN.

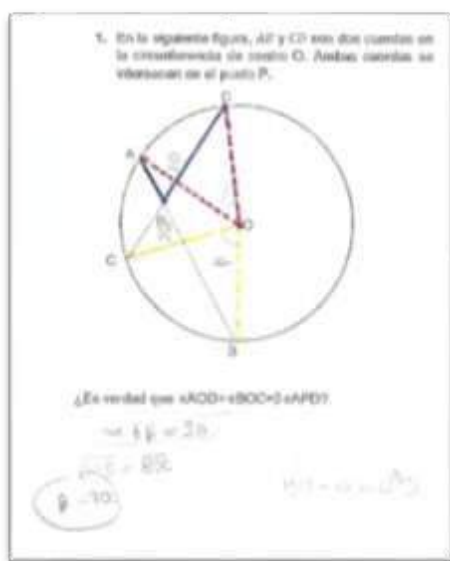


Figura 4. Respuesta de A₁ a tarea 1

Empero, se observa que la estudiante A₁ indicó que el ángulo BOC medía 70° en la solución de la tarea 1 (Figura 4), presumiblemente a partir de lo indicado en la tarea 2 (Figura 5). Este error, así como el empleo del triángulo “equilátero” ORN, brindaría un ejemplo confirmatorio del doble carácter de la fantasía en el proceso del conocimiento, advertido por Vygotsky (en Zavershneva & Van der Veer, 2018) a partir de la cita de Lenin transcrita anteriormente.

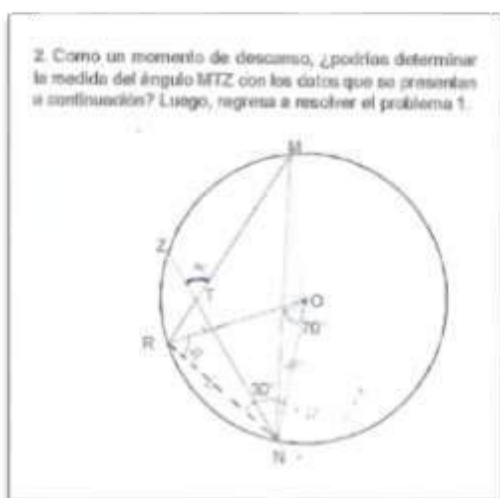


Figura 5. Respuesta de A₁ a tarea 2

Lo ocurrido en la respuesta de A₁ brindaría una nueva forma de observar los errores de los estudiantes, en su relación con los impulsos didácticos planteados por los profesores. Así, dichos errores, en el caso particular de los problemas de demostración geométrica que emplean líneas auxiliares, podrían ser vistos como facetas del proceso del conocimiento, en el que la aproximación al objeto de este puede verse influenciada por aspectos provenientes de la fantasía. Ello, además, permitiría explicar las dificultades reportadas en estudios descritos por Palatnik (2018) en la solución de tal tipo de problemas, donde también mencionan a la fantasía.

Cabe señalar que lo analizado en la producción de A₁ invitaría a reflexionar acerca de la calidad de los impulsos planteados para resolver problemas docentes durante el proceso de enseñanza-aprendizaje guiado por Enseñanza Problemática (Torres, 2013). De hecho, una de las principales limitaciones al asumir esta propuesta fue el alto grado de relación entre dinamicidad y lógica que ella exigía durante las interacciones entre docente y estudiantes. Ello, necesariamente, determinó el empleo de más tiempo del originalmente planificado, lo que cerró la posibilidad de realizar preguntas a los estudiantes que permitiesen revelar las razones de sus respuestas.

Conclusiones y sugerencias

El presente trabajo ha permitido mostrar que una de las conexiones existentes entre los pensamientos de V. I. Lenin y L. S. Vygotsky se encuentra en la teoría del reflejo durante el proceso del conocimiento, que el segundo consideró a partir de las investigaciones filosóficas del primero y, en la cual, se reflexionó acerca del carácter de beneficio y peligro que la fantasía trae durante la elaboración del reflejo. Por otro lado, los contactos entre las ideas de V. I. Lenin y L. S. Vygotsky se habrían evidenciado, con mayor énfasis, en la situación problemática y el problema docente, dentro de las categorías de la propuesta de Enseñanza Problemática. A su vez, el empleo de esta en la solución de un problema de demostración geométrica que plantea el uso de trazos auxiliares, mostraría el rol de la fantasía tras el uso de impulsos didácticos, lo que sugeriría señalar los errores de estudiantes como facetas del proceso del conocimiento afectadas por dicho elemento.

Ulteriores investigaciones deberían profundizar en la relación que existe entre los impulsos didácticos y la fantasía en el proceso del conocimiento, para el desenvolvimiento de clases bajo Enseñanza Problemática. En especial, se sugiere el estudio profundo de dicha conexión, en el contexto de las teorías específicas de la Educación Matemática.

Referencias

- Blanck, G. (1993). Vigotsky: El hombre y su causa. En Moll, L. (Comp.). *Vygotsky y la educación* (pp. 45-74). Buenos Aires, Argentina: Aique.
- Dafermos, M. (2015). Activity theory: theory and practice. En Parker, I. (Ed.), *Handbook of Critical Psychology* (pp. 561-581). Londres, Reino Unido: Routledge.
- Dafermos, M. (2018). Rethinking Cultural-Historical Theory: a Dialectical Perspective to Vygotsky. Singapur, Singapur: Springer.
- Hang, K. & Wang, H. (2018). Solving problems in geometry: insights and strategies for mathematical Olympiad and competitions. New Jersey, NJ: World Scientific.
- Kieran, C., Doorman, M., & Ohtani, M. (2013). Principles and Frameworks for task design within and across communities. En Margolinas, C. (Ed.). *Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22* (pp. 421-422). Recuperado desde <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00834054v3/document>
- Lenin, V. I. (1974). *Cuadernos filosóficos*. Buenos Aires, Argentina: Estudio.
- Lerman, S. (2000). The social turn in mathematics education research. En Boaler, J. (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp.19-44). Westport, Irlanda: Ablex.
- Lerman (2008). Theories as intellectual resources in mathematics education researches. *Acta Scientiae*, 10(1), 17-26.
- Lin, F., Lee, K., Tabach, M., & Stylianides, G. (2012). Principles of Task Design for Conjecturing and Proving. En Hanna, G. & de Villiers, M. (Eds.). *Proof and Proving in Mathematics Education. The 19th ICMI Study* (pp. 305-325). New York, NY: Springer.
- Majmutov, M. (1983). *La enseñanza problemática*. La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.
- Martínez, M. & Hernández, J. (2004). La enseñanza problemática y el desarrollo de la creatividad. En García, L. (Ed.), *La creatividad en la educación* (pp. 93-138). La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.
- Mok, I. & Clarke, D. (2015). The Contemporary Importance of Triangulation in a Post – Positivist World: Examples from the Learner's Perspective Study. En Bikner – Ahsbahs, A., Knipping, C. & Presmeg, N. (Eds.). *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education* (pp. 403 – 425). Amsterdam, Países Bajos: Springer.
- Palatnik, A. & Sigler, A. (2018): Focusing attention on auxiliary lines when introduced into geometric problems. *International Journal of Mathematical Education in Science and*

- Technology*, 2(50), 202-215. DOI: 10.1080/0020739X.2018.1489076
- Polya, G. (1969). *Cómo plantear y resolver problemas*. México, D.F.: Trillas.
- Radford L., Miranda I., & Lacroix G. (2018). On Teaching and Learning Mathematics from a Cultural-Historical Perspective. In: Kajander A., Holm J., Chernoff E. (Eds.) *Teaching and Learning Secondary School Mathematics* (pp. 27-38). Cham, Suiza: Springer.
- Rivière, A. (1996). *La psicología de Vygotsky*. Lima, Perú: Del salmón.
- Shuare, M. (1990). *La psicología soviética tal como yo la veo*. Moscú, URSS: Progreso.
- Shvarts, A. & Bakker, A. (2019). The early history of the scaffolding metaphor: Bernstein, Luria, Vygotsky, and before. *Mind, Culture, and Activity*, 1(26), 4-23. DOI: 10.1080/10749039.2019.1574306
- Silver, E. & Herbst, P. (2007). Theory in Mathematics Scholarship. En Lester, F. (Ed.). *Second Handbook of Research on Mathematics teaching and Learning* (pp. 69-110). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Talízina, N. (1988). *Psicología de la enseñanza*. Moscú, URSS: Progreso.
- Torres, P. (1999). Métodos problémicos en la enseñanza de la Matemática. La Habana, Cuba: Academia.
- Torres, P. (2013). La instrucción heurística en la formación de profesores de matemática. En Flores, C., García, M., Hernández, J., & Sosa, L. (Eds.). *Matemática educativa: la formación de profesores* (pp. 201-216). Chilpancingo, GRO: Díaz de Santos.
- Valera, O. (2003). *Las corrientes de la psicología contemporánea*. La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.
- Walshaw, M. (2016). Lev Vygotsky. En de Freitas, J., Walshaw, M. (Eds.), *Alternative Theoretical Frameworks for Mathematics Education Research: theory meets data* (pp. 11-37). Cham, Suiza: Springer.
- Zavershneva, E. & Van der Veer, R. (2018). *Vygotsky's Notebooks: a selection*. Singapur, Singapur: Springer.
- Zverev, I. (1983). *Métodos de enseñanza en la escuela soviética*. París, Francia: UNESCO.

LA MODELACIÓN Y LA EXPERIMENTACIÓN EN EL ESTUDIO DE UN FENÓMENO FÍSICO. EXPERIENCIAS Y REFLEXIONES EN EDUCACIÓN MEDIA

Alexander Castrillón-Yepes

Sebastián Mejía Arango

Ana Carolina González-Grisales

Paula Andrea Rendón-Mesa

alexander.castrillony@udea.edu.co, sebastian.mejia4@udea.edu.co,

ana.gonzalez2@udea.edu.co, paula.rendon@udea.edu.co

Universidad de Antioquia, Colombia

Resumen

Se presentan experiencias y reflexiones frente a la inmersión de la modelación y la experimentación en la enseñanza de las matemáticas y la física, enmarcadas en un proyecto de investigación que se desarrolló en la Universidad de Antioquia (Medellín, Colombia). El problema se configuró a partir de evidencias que recopilaron los investigadores en una institución educativa pública; y está relacionado con la desarticulación entre modelos matemáticos y fenómenos físicos. El objetivo de este trabajo es analizar las posibles relaciones que algunos estudiantes construyen entre los modelos y un fenómeno físico a través de la modelación y la experimentación. Se adoptó un enfoque cualitativo, donde los investigadores asumieron el rol de observadores participantes, buscando describir e interpretar las acciones de los estudiantes a través de una propuesta de aula. Los resultados muestran que los procesos de modelación y experimentación son favorables para establecer relaciones entre los conocimientos matemáticos y físicos.

Palabras clave: *Modelación, experimentación, interdisciplinariedad.*

Introducción

Se presenta parte de un trabajo de investigación que se realizó en el marco del programa de Licenciatura en Matemáticas y Física (formación de profesores) de la Universidad de Antioquia (Medellín, Colombia). El problema de investigación emergió de la práctica pedagógica que se llevó a cabo en una institución educativa pública con estudiantes de 10^o-11^o (15-18 años). A partir del reconocimiento de la institución se identificaron dificultades de los estudiantes para relacionar representaciones matemáticas con fenómenos físicos.

La delimitación del problema consta de dos niveles, uno institucional y otro documental; ambos se configuraron a través del acercamiento a las clases de matemáticas y física. En el primer nivel,

los investigadores por medio de sus diarios de campo identificaron dificultades de los estudiantes para comprender el uso de modelos matemáticos en la clase de física, en especial, su manipulación e interpretación. Por ejemplo: La Ley de Coulomb fue vista por ellos como una “fórmula” que les permite obtener resultados numéricos. De esta manera, no hay evidencia de un análisis del modelo, es decir, qué representa y cómo se relaciona con la explicación de fenómenos físicos y quién lo usa y para qué lo usa (Villa-Ochoa, 2016). Además, en este nivel los estudiantes se cuestionan por la utilidad de las matemáticas, aun cuando en clase de física se requieren para expresar leyes y explicar y describir fenómenos.

En el nivel documental, se encuentran los planteamientos del Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN), y algunos reportes de literatura en relación con las dificultades observadas y con las estrategias propuestas para superarlas. Esto permitió identificar dos aspectos: el primero, una desarticulación entre los modelos matemáticos y su importancia en la explicación y descripción de los fenómenos; el segundo, la importancia de procesos como la modelación y la experimentación en la enseñanza de las matemáticas y la física y en sus posibilidades para promover el trabajo interdisciplinario (MEN, 2006).

La justificación sobre el uso de la modelación y la experimentación es debido a que la primera permite establecer relaciones entre las matemáticas y otras disciplinas (Blum, 2011), y a su vez es relevante para el estudio de situaciones científicas (MEN, 2006); y la segunda porque es una actividad de importancia en la enseñanza de las ciencias (Romero y Aguilar, 2013), se ha incorporado en la enseñanza de las matemáticas y en ambientes que involucran diferentes tipos de tecnologías (Rodríguez y Quiroz, 2016; Molina-Toro, Villa-Ochoa y Suárez, 2018) y se reconoce su relación con la modelación y los modelos (MEN, 2006; Rodríguez y Quiroz, 2016).

En consideración con la delimitación del problema, el objetivo de esta investigación es analizar las posibles relaciones que algunos estudiantes de Educación Media (15-18 años) construyen entre los modelos y un fenómeno físico a través de la modelación y la experimentación. En ese sentido, en el siguiente apartado se expondrán algunos referentes teóricos relacionados con la modelación y la experimentación; luego, se presentarán algunos aspectos metodológicos que se consideraron; y, finalmente, se describirán los resultados que se obtuvieron al implementar una propuesta de aula.

Modelación y experimentación en la enseñanza de las matemáticas y la física

Diversos investigadores concuerdan al considerar que la modelación y la experimentación son importantes en la formación en matemáticas y ciencias (Blum y Leiß, 2006; Villa-Ochoa, Castrillón-Yepes y Sánchez-Cardona, 2017; Rodríguez y Quiroz, 2016; Caron y Pineau, 2017; Romero y Aguilar, 2013; Molina-Toro et al., 2018). De manera particular, algunos estudios plantean que la modelación puede ser entendida como un proceso que busca la construcción de modelos y en el cual se establecen conexiones entre las matemáticas y otras disciplinas o áreas del conocimiento (Blum y Leiß, 2006).

Las preocupaciones sobre la manera en que se desarrolla la modelación en el contexto escolar

han generado que se caracterice este proceso a través de ciclos; sin embargo, existen diferentes perspectivas y ciclos de modelación en el campo de la Educación Matemática que varían según la mediación de algunos instrumentos o herramientas y en la descripción de los elementos que intervienen cuando se modela un problema o situación (Perrenet y Zwaneveld, 2012). A pesar de esto, es posible identificar algunos aspectos comunes que se movilizan a la hora de modelar. Entre estos se encuentra el estudio de un problema, situación o fenómeno que demarcan el contexto en el cual emerge la situación a modelar; la simplificación, referida a la identificación y exclusión de variables o factores que no intervienen directamente en el fenómeno o, que debido a su poca influencia, se pueden despreciar; la matematización, que consiste en la construcción de modelos y representaciones matemáticas en consideración con el fenómeno o problema; y, finalmente un proceso de validación que busca evaluar el grado de correspondencia entre los modelos planteados y la situación que se estudia. Sin embargo, estos aspectos no agotan la actividad de modelado, puesto que otras acciones se deberán ejecutar en consideración con la situación estudiada, los medios disponibles y los propósitos de formación con los cuales se incorpora este proceso en el aula.

Por su parte, la experimentación es vista como una actividad científica y un objeto de investigación desde varias perspectivas y enfoques en el ámbito educativo. Así, se reconocen discusiones alrededor de la dicotomía entre teoría y experimentación, y planteamientos sobre la caracterización de diferentes tipos de experimentos (como los físicos, mentales, discrepantes, etc.) que implican acciones como la observación controlada e intencionada, la manipulación de variables y la formulación de hipótesis. De manera particular, este trabajo asume una perspectiva donde la experimentación se encuentra en constante interacción con las construcciones teóricas; al asumir esta postura, según Malagón, Sandoval y Ayala (2013) la experimentación se acompaña de la comprensión conceptual y del diseño y organización de experiencias.

Frente a las acciones involucradas en la experimentación se resalta el diseño experimental, la observación controlada, el uso y manipulación de artefactos, la identificación de variables, la medición, la formalización y la validación (Mengascini y Mordegli, 2014; Molina-Toro et al., 2018). De esta manera, es posible observar que la modelación y la experimentación comparten acciones y, en coherencia con esto, es viable plantear la vinculación de estos dos procesos en escenarios educativos. Algunas experiencias plantean incluso la importancia de considerar la experimentación en los procesos de modelación porque ésta permite dotar de significado los conceptos matemáticos y porque favorece la construcción, interpretación y validación de modelos (Rodríguez y Quiroz, 2016).

Caron y Pineau (2017), por ejemplo, plantean que algunos estudiantes tienen una buena percepción de las actividades experimentales cuando se modela y que estas pueden contribuir al aprendizaje de conceptos matemáticos y el desarrollo de habilidades de modelación.

En coherencia con estos planteamientos alrededor de la modelación y la experimentación, al igual que Molina-Toro y colaboradores (2018), en esta investigación se considera la posibilidad de promover la articulación de estos dos procesos en la enseñanza de las matemáticas y la física,

mediante el estudio de un fenómeno físico, la construcción de montajes experimentales, la consideración de las variables de interés en dicho fenómeno (simplificación), el ajuste de los montajes, el registro de datos, la reflexión sobre los procesos de medición, la construcción de modelos y representaciones, y la validación. Esta incorporación promueve escenarios interdisciplinarios en el ámbito de las matemáticas y las ciencias, a la vez que moviliza la comprensión de conceptos y procedimientos propios de estas disciplinas.

Diseño metodológico

Esta investigación surge de las prácticas pedagógicas que realizaron los autores de este trabajo en una institución educativa pública en Colombia, en el marco del programa de Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad de Antioquia (Medellín, Colombia). La investigación adoptó un enfoque cualitativo que involucra acciones como cuestionar, crear hipótesis e interpretar. Así, autores como García, Gil y Rodríguez (1999) y Hernández, Fernández y Baptista (2014) sustentan que la investigación cualitativa se puede ver como un conjunto de prácticas interpretativas de la realidad. Las interpretaciones de la realidad en este trabajo se configuraron a partir de observaciones, anotaciones, grabaciones y documentos derivados del proceso de práctica de los investigadores y de la implementación de una propuesta de aula. En ese sentido, la investigación se desarrolló a partir de tres etapas, las cuales se describen a continuación:

- Etapa 1. Configuración del problema y revisión de literatura: En esta primera etapa se realizó un proceso de contextualización con la institución educativa, un reconocimiento del problema de investigación y una revisión de la literatura alrededor de la modelación y la experimentación.
- Etapa 2. Diseño, construcción y validación de una propuesta de aula: En esta segunda etapa se construyó una propuesta de aula en consideración con los elementos teóricos abordados en la etapa anterior, la cual fue discutida en diferentes espacios como semilleros de investigación y con algunos investigadores. La construcción de la propuesta de aula consta de tres fases, de las cuales se presentarán dos que son de interés para este reporte de investigación. La Tabla 1, describe las intenciones de dichas fases.

Tabla 1

Fases de la propuesta de aula

Fase	Actividad	Intención
Fase 2 "Modelación y experimentación"	Consta de tres momentos: el primero de ellos se centra en el reconocimiento de las variables involucradas en un fenómeno físico. El segundo hace alusión al estudio de un sistema masa-resorte donde los estudiantes se organizaron en equipos de trabajo para observar, tomar datos, analizar y graficar para describir y comprender el fenómeno a través de las variables que en él intervienen. El tercer momento consta de una discusión donde se abordaron reflexiones sobre sus resultados y se presentaban elementos teóricos sobre las funciones periódicas, para finalmente construir, con ayuda de los investigadores, un modelo del sistema.	-Relacionar las funciones matemáticas (relación de dependencia entre variables) y las relaciones causales de los fenómenos. -Relacionar el Movimiento Armónico Simple (MAS) con las funciones periódicas.
Fase 3 "Apropiación"	Esta fase consta de dos momentos: en el primero los estudiantes realizaban una indagación del Movimiento Armónico Simple en un péndulo. Ellos debían analizar las variables implicadas en este fenómeno y, con la ayuda de la modelación y la experimentación, construir un modelo matemático del fenómeno. En el segundo momento presentaron reflexiones en torno a los resultados que obtuvieron.	-Analizar y construir modelos a partir del MAS.

Fuente: Elaboración de los autores

- Etapa 3. Implementación, recolección y análisis de la información: Esta última etapa contempla la intervención en el aula, la recolección de registros sobre las construcciones de los estudiantes (documentos, diarios pedagógicos de los investigadores y grabaciones en audio y video de algunas sesiones) y el análisis de la información, donde los investigadores realizaron un proceso de revisión independiente y luego se reunieron para

triangular la información.

Finalmente, a partir del análisis de la información y la triangulación que hicieron los investigadores se realizó un proceso de categorización sobre las relaciones que los estudiantes establecieron entre los conocimientos en matemáticas y física, estas categorías son: relación de aplicación, relación de complementariedad y relación vacía.

- La relación de aplicación se da cuando los modelos matemáticos actúan de manera técnica sobre los fenómenos o cuando estos se limitan a ser el contexto para la construcción de modelos; es decir, cuando las matemáticas tienen un rol instrumental en la explicación o descripción de fenómenos físicos, o cuando el fenómeno físico se convierte en una "excusa" para modelar. Esta categoría implica que se percibe la matemática como una herramienta para la comprensión de la física o la física como un contexto para aplicar las matemáticas, en consecuencia, en cada caso la modelación o la experimentación se presentan subordinadas la una de la otra.
- La relación de complementariedad se presenta cuando las representaciones matemáticas y el fenómeno físico están en constante comunicación; aquí los procesos de modelación y experimentación se desarrollan y se apoyan simultáneamente sin subordinación.
- La relación vacía se da cuando se realizan relaciones entre modelos matemáticos y los fenómenos físicos, pero carecen de sentido y significado. En este caso, se reconoce que las matemáticas y la física están relacionadas, pero no se logra explicitar dicha relación, su naturaleza o necesidad. También se incluyen los casos en los que se plantea una relación nominal, pero sin sentido a la luz del conocimiento matemático o científico.

Resultados

En este apartado se presentan los principales resultados de la investigación en relación con el uso de la modelación y la experimentación para relacionar los modelos matemáticos con los fenómenos físicos.

Relación de aplicación:

Frente a la relación de aplicación, algunos estudiantes plantearon cómo el uso de expresiones matemáticas permitía describir o considerar elementos del fenómeno físico estudiado, en este caso, en relación con el MAS. Así, por ejemplo, el estudiante E1 (en adelante usaremos los códigos E1, E2, E3, etc. para aludir a cada uno de los participantes) mencionó que en su equipo de trabajo: "Encontramos una función $f(x)$ o función del tiempo, porque de acuerdo al tiempo, encontramos la posición. Entonces tenemos que si varía el tiempo la posición también". Este fragmento da cuenta de que los estudiantes identifican la dependencia e independencia entre variables y la existencia de una función, lo cual hace parte de los procesos de modelación y experimentación

(Gallardo, 2013; Caron y Pineau, 2017); sin embargo, en este caso ellos no presentaron la función a la que aludieron, ni dieron cuenta de argumentos sólidos sobre el tipo de función que se requiere para la descripción de un movimiento periódico.

Otra evidencia se presenta en la descripción de E2 sobre el proceso que realizaron en su equipo de trabajo:

"[...] El punto de equilibrio para nosotros fue de 18. En un determinado tiempo que fueron 12 segundos contamos 10 oscilaciones, después de esto para encontrar el T, que sería el periodo, lo dividimos; $12/10$ nos da 1.2 y ya de ahí pudimos encontrar la frecuencia angular que sería $2\pi rad/1.2$ [...] y nos da un total de 5.23. Ya de ahí podemos encontrar la función [...] la amplitud la usamos teniendo en cuenta que el punto máximo al que llegaba la gráfica era 40 y el punto de equilibrio era 18, así que lo restamos y dio 22 [...] su función sería $f(t) = 22 \sin(5,23)t + 18$ ".

En esta última evidencia se identifica que el grupo de trabajo logra construir un modelo matemático en consideración con el diseño experimental que realizaron. Esto se hizo en coherencia con los conceptos físicos involucrados; sin embargo, en la discusión se evidenció que la explicación del fenómeno pasó a un segundo plano para primar el hallazgo del modelo matemático. Llamó la atención que los estudiantes priorizaron el registro tabular y el gráfico sobre la experiencia, por eso, olvidaron realizar el proceso de validación con la experiencia y se remitieron a los datos que registraron como único mecanismo para la validación.

Relación de complementariedad:

La única evidencia que los investigadores encontraron sobre este tipo de relación se dio en la fase 2 de la propuesta de aula, en la cual orientaron la discusión y la construcción de un modelo matemático a la luz de una experiencia física. En ese sentido, los investigadores debieron problematizar los argumentos de los estudiantes, evocar situaciones sobre sus registros tabulares y gráficos, pero también de la situación real para interpretar cada uno de los valores que registraron. A continuación, se describe una nota del diario de campo de uno de los investigadores:

"En las actividades del sistema masa-resorte, les preguntábamos a los estudiantes sobre sus mediciones y sus representaciones para que aludieran algunos de nuevo a los conceptos y procesos. Así se les cuestionó, por ejemplo, ¿por qué la cinta métrica se ubica de esa manera? ¿Por qué las gráficas se realizaron con trazos rectilíneos o curvilíneos (según el caso)? ¿La gráfica muestra que el sistema es acelerado o constante?... Esto los llevó a remitirse a sus experiencias..." (Diario de campo, sección 28 de agosto del 2019).

Relación vacía:

Como se mencionó en el diseño metodológico en esta categoría se presentan evidencias de

algunas relaciones que los estudiantes establecieron entre modelos matemáticos y el MAS. Por ejemplo, en la Figura 1 se presenta la construcción de un estudiante, donde afirma que la reflexión, la rotación y la traslación de funciones eran las variables del movimiento. Esto da cuenta de las dificultades que presentan los estudiantes sobre lo que es una variable en el sentido matemático y físico.

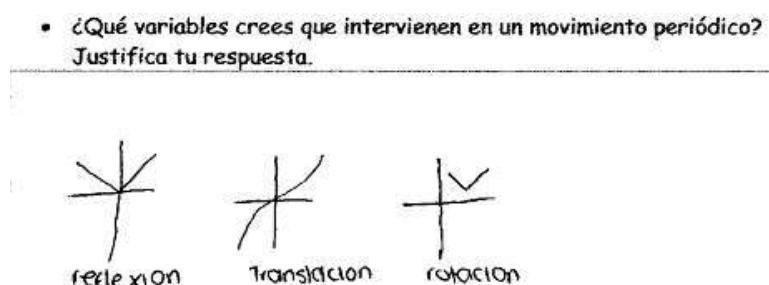


Figura 1. Evidencias de la relación vacía

Otras respuestas de los estudiantes, enmarcadas en esta categoría, permitieron identificar algunas dificultades para la construcción de un modelo. Una interpretación de los investigadores frente a este hecho se relaciona con la falta de claridad conceptual que mostraron los estudiantes frente a nociones como periodo, el cual se confundía con un tiempo arbitrario que medían, y el de frecuencia angular.

Consideraciones finales

Este reporte de investigación muestra que la incorporación de la modelación y la experimentación en las clases de matemáticas y física posibilitan dotar de significado los modelos matemáticos y los fenómenos físicos. En particular, la identificación y el reconocimiento de relaciones entre variables se materializaron en algunas de las producciones de los estudiantes. Sin embargo, este trabajo también da cuenta que la articulación de procesos como la modelación y la experimentación es un proceso complejo tanto para los estudiantes como para los profesores debido a que involucra conocimientos propios de las matemáticas y las ciencias, como la observación controlada, la formulación de hipótesis, la identificación de variables y sus relaciones, el diseño y ajuste de montajes experimentales, y el uso y validación de modelos.

Se sugiere realizar investigaciones y experiencias que exploren cada una de las categorías definidas en este trabajo. En particular, que den cuenta de las posibilidades para promover relaciones de complementariedad entre las matemáticas y la física. Esto posibilitaría promover trabajos interdisciplinarios donde no se presente una subordinación entre los conocimientos matemáticos y los extramatemáticos como un apriorismo en el cual la construcción de un modelo es el fin de la actividad de modelado o en donde la experimentación deje de lado el uso de leyes y expresiones matemáticas. Más bien, se espera que se reflexione y reconozca los aportes que

estos procesos pueden brindar a los escenarios educativos para la comprensión de las matemáticas y la física.

Referencias

- Blum, W. (2011). Can modelling be taught and learnt? Some answers from empirical research. In Kaiser, G., Blum, W., Borromeo Ferri, R., & Stillman, G. (Eds), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling* (pp. 15-30). Springer, Dordrecht.
- Blum, W. & Leiß, D. (2006). How do students and teachers deal with modeling problems? In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum and S.Khan (Eds.) *Mathematical Modeling (ICTMA12): Education, Engineering and Economics* (pp 222 – 231). Chichester: Horwood Publishing.
- Gallardo, P. (2013). La Matemática en el Contexto de las Ciencias y la modelación. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 0 (10), 183-193.
- Caron, F., & Pineau, K. (2017). L'Hospital's Weight Problem: Testing the Boundaries Between Mathematics and Physics and Between Application and Modelling. In Stillman G., Blum W., Kaiser G. (eds), *Mathematical Modelling and Applications. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (pp. 59-69). Springer, Cham.
- García, E., Gil, J., & Rodríguez, G. (1999). *Metodología de la investigación cualitativa*. Málaga, España: Aljibe.
- Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación*. Sexta edición. México: McGraw-Hill.
- Malagón, F., Sandoval, S., & Ayala, M. M. (2013). La actividad experimental: construcción de fenomenologías y procesos de formalización. *Praxis Filosófica*, 36, 119-138.
- Mengascini, A. S., & Mordegli, C. (2014). Caracterización de prácticas experimentales en la escuela a partir del discurso de docentes de primaria y secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, 32.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias*. Bogotá: Magisterio.
- Molina-Toro, J. F., Villa-Ochoa, J. A., & Suárez-Téllez, L. (2018). La modelación en el aula como un ambiente de experimentación-con-graficación-y-tecnología. Un estudio con funciones trigonométricas. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 11(1), 87–115.
- Perrenet, J., & Zwaneveld, B. (2012). The many faces of the mathematical modeling cycle. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(6), 3-21.
- Romero, Á. E. & Rodríguez, O. L. D. (2003). La formalización de los conceptos físicos. El caso de la velocidad instantánea. *Revista Educación y Pedagogía*, 15(35), 55-67.

- Rodríguez, R., & Quiroz, S. (2016). El rol de la experimentación en la modelación *matemática*. *Educación matemática*, 28(3), 91-110.
- Romero, A., & Aguilar, Y. (2013). La experimentación y el desarrollo del pensamiento físico. Un análisis histórico y epistemológico con fines didácticos. Medellín: Universidad de Antioquia.
- Villa-Ochoa, J., Castrillón-Yepes, A., & Sánchez-Cardona, J. (2017). Tipos de tareas de modelación para la clase de matemáticas. *Espaço Plural*, 18(36), 219-251.
- Villa-Ochoa, J. A. (2016). Aspectos de la modelación matemática en el aula de clase. El análisis de modelos como ejemplo. In J. Arrieta & L. Diaz (Eds.), *Investigaciones latinoamericanas de modelación de la matemática educativa* (pp. 109–138). Barcelona: Gedisa.

UN ACERCAMIENTO ENTRE LOS RECORRIDOS DE ESTUDIO E INVESTIGACIÓN Y LAS TAREAS AUTÉNTICAS, PROPUESTA DE UN PROCESO DE MODELIZACIÓN DE LA FUNCIÓN SENO

Percy Luján Rosadio

Cintya Sherley Gonzales Hernández

percy.lujan@pucp.pe, cintya.gonzales@pucp.pe

Instituto de Investigación sobre Enseñanza de la Matemáticas, IREM-PUCP, Perú

Resumen

El presente estudio recoge los planteamientos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a través de los Recorridos de Estudio e Investigación (REI), así como, las Tareas Auténticas formuladas desde la perspectiva del Aprendizaje Auténtico, con la finalidad de buscar elementos afines de tal manera que pueda generarse un acercamiento entre ambos planteamientos, y plantear situaciones o secuencias didácticas de mayor significado dirigidas a la enseñanza escolar. En el desarrollo del estudio se realiza una reflexión teórica acerca de las características en común de ambas posturas y se propone un proceso de modelización en torno una situación real donde se involucra la función seno y coseno, que integra tanto los procedimientos metodológicos de la formulación de los REI, así como, las características particulares de las Tareas Auténticas.

Palabras clave: *Recorridos de estudio e investigación, tareas auténticas, función seno y coseno.*

Introducción

Actualmente se vienen desarrollando y proponiendo mejoras en los procesos de enseñanza y aprendizaje desde distintos marcos de investigación, entre ellos desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) perteneciente al programa epistemológico de investigación en enseñanza de las matemáticas en cuyo marco se plantea el estudio de la matemática en dos dimensiones, una vinculada a la Organización Matemática y otra relacionada a la Organización Didáctica. Desde este último aspecto se propone como dispositivo didáctico de mejor alcance los Recorridos de Estudio e Investigación (REI), capaces de hacer frente al fenómeno denominado pedagogía de la monumentalización del saber y la visita de obras.

Así mismo, desde el marco del Aprendizaje Auténtico, se plantea las actividades denominadas Tareas Auténticas, las cuales vienen siendo empleadas y sugeridas inclusive desde el Ministerio

de Educación, como una oportunidad para poder obtener el logro de desempeños y el desarrollo de competencias matemáticas.

Si bien es cierto, ambas propuestas parten de concepciones donde existen diferencias importantes, el presente estudio realiza una reflexión teórica desde ambos enfoques e identifica elementos en común, para luego proponer situaciones de enseñanza y aprendizaje significativos y con mayores argumentos. En ese sentido se presenta un diseño de REI como parte del trabajo de tesis de maestría realizado por Lujan (2019), el cual por sus características se adecúa además a las cualidades de las Tareas Auténticas.

Aspectos teóricos

Los Recorridos de Estudio e Investigación (REI)

Los REI planteado por Chevallard (2004, 2009) desde la pedagogía del cuestionamiento del mundo, proponen como punto de partida una cuestión generatriz Q de gran potencial, el cual es estudiado por un equipo de alumnos X y dirigidos por un profesor o equipo de profesores Y , en búsqueda de una respuesta R . Se produce entonces un sistema didáctico de la forma $S(X;Y;Q)$ en el que se abordan distintas subcuestiones que provocan subrespuestas, obras y medios, cuya interacción debe producir una respuesta central R a la pregunta generatriz Q . García(2005) reconoce este funcionamiento; donde la actividad matemática está caracterizada por un conjunto de cuestiones problemáticas en torno a cierto ámbito de una realidad matemática o extramatemática, y para cuya respuesta es necesario el despliegue creciente de un conjunto de praxeologías; como características de una actividad de modelización matemática.

En ese sentido un REI es el camino que se da dentro de un proceso de modelización matemática, desde la cuestión generatriz hasta la respuesta central R , el cual brinda sentido y una razón de ser a los aprendizajes obtenidos por los estudiantes, teniendo la capacidad de enfrentar de manera sólida al fenómeno de la monumentalización del saber matemático y la visita de obras.

Para autores como Parra, Otero y Fanaro, (2013) los REI presentan algunas características esenciales:

- Los REI se generan por una pregunta Q , denominada pregunta generatriz, la cual es capaz provocar numerosas subcuestiones, obras, y respuestas, cuya obtención de la respuesta final moviliza un gran número de saberes incluido los procedentes de otras disciplinas, de ahí que los REI puedan servir para diseñar un programa de estudios.
- Los REI evitarían la enseñanza de la matemática como un conjunto disperso de elementos e impedirían la pérdida de sentido y del origen de las preguntas que allí se estudian. Esta característica, permite que la modelización matemática esté presente en los sistemas de enseñanza a través de los REI.

- Los REI desarrollan un proceso de modelización que involucra básicamente cinco momentos: observar las respuestas dadas, analizarlas, evaluarlas, desarrollar una nueva respuesta, y finalmente, defender la nueva respuesta producida.
- Los REI al ser desarrollados expresan gestos didácticos denominados dialécticas, cuya interacción interna aparentemente contradictoria permite la obtención de saberes y el avance del REI.

Las Tareas Auténticas

Por otro lado, autores como Herrington, Reeves, Oliver y Woo (2004), proponen un enfoque centrado en el estudiante a través de las Tareas Auténticas, como una mejor oportunidad de producir aprendizajes. Dichas actividades al poseer autenticidad, complejidad e incertidumbre pueden proporcionar significatividad a saberes al desplegarse en la resolución de problemas reales de forma colaborativa, de donde se desprendan productos y una evaluación integral y formativa de mediano y largo plazo, adecuándose también a planificaciones curriculares dirigidas a una unidad, módulo o curso.

Herrington, Oliver y Reeves (2002) revisan la producción de distintos autores referentes a las Tareas Auténticas e indican las siguientes características particulares:

- Tienen relevancia en el mundo real.
- Se presentan abiertas, en el sentido de que requieren que los estudiantes definan las tareas y subtareas necesarias para completar la actividad.
- Las actividades auténticas expresadas como tareas complejas deben ser investigadas por los estudiantes durante períodos de tiempo significativos (unidades, bimestres, ciclos), no a corto plazo.
- Pueden ser abordadas desde diferentes perspectivas, utilizando una variedad de recursos.
- Brindan la oportunidad de realizar actividades colaborativas en contacto con el mundo real.
- Se pueden integrar y aplicar de manera interdisciplinaria.
- Se adecuan con la evaluación formativa.
- Culminan en la creación de un producto completo.
- Las actividades auténticas permiten soluciones competitivas y diversidad de resultados.

Como podemos observar son muchos las propiedades en común entre los REI y las Tareas Auténticas, sin embargo, una observación importante podría alinearse a lo manifestado por Chevallard (2013) cuando señala que las obras obtenidas por un REI no están previamente establecidas a diferencias de otras propuestas de investigación empleadas en las escuelas, en

donde se busca reunir a estudiantes para estudiar una obra brindada indirectamente por el docente.

Al respecto se puede decir que de acuerdo a las características de las tareas auténticas señaladas por Herrington, Oliver y Reeves (2002), estas poseen rangos de libertad cercanos a los teóricamente planteados en los REI, y distan a su vez de otros planteamientos donde se promueve la investigación o indagación para la obtención de aprendizajes de manera más dirigida. Cabe señalar además que el REI surge como mejora de los procesos dados en la Actividad de Estudio e Investigación (AEI) los cuales presentaban limitaciones respecto a la topogénesis de los estudiantes, es decir, respecto a su accionar autónomo al momento de la construcción y producción de saberes. En ese sentido, los REI procuran una mayor procognición y potestad para los estudiantes, sin embargo, no son pocas las investigaciones que describen que al momento de realizar un REI se presentan aún tanto en los estudiantes como en los docentes rasgos del paradigma de la monumentalización del saber, donde se espera la pauta y validación del docente como autoridad para poder dar cada paso. Es por ello que en las investigaciones realizadas con los REI se ha observado niveles distintos en la libertad o restricción del accionar del docente y del estudiante (topogénesis) siendo algunos trabajos más flexibles que otros en estos aspectos señalados, de ahí que sea necesario realizar más investigaciones que puedan otorgar mayor claridad acerca de las condiciones efectivas para implementar un REI.

Por lo mencionado se puede considerar que tanto lo REI y las Tareas Auténticas poseen rasgos sustantivos en común, en la formulación y desarrollo, respecto al carácter abierto de tratamiento de las tareas, a períodos de tiempo de mediano o largo plazo, a ser abordadas desde distintas perspectivas y obteniendo diversos resultados, a la posibilidad de desarrollarse de manera interdisciplinaria y tomando problemas del mundo real. No obstante, la fortaleza en el planteamiento de los REI lo constituye el estudio de la organización matemática de los objetos involucrados, identificando y articulando praxeologías, las que en conjunto y dentro de un proceso de modelización fortalecen la consecución de saberes con sentido y con una razón de ser, mientras que en las tareas auténticas no se hace explícito esa necesidad.

Procesos metodológicos para el diseño de un proceso de Modelización matemática.

Macías y Romo-Vásquez (2014), Guzmán (2016), Siero y Romo-Vásquez (2017) plantean una metodología para el diseño de actividades didácticas basadas en la modelización matemática en el campo de la ingeniería, las que pueden adaptarse de manera particular para el presente trabajo para el quinto grado del nivel secundario:

- Elección del contexto matemático o extra matemático de la actividad
- Análisis praxeológico
- Análisis de la organización matemática identificada y su relación con la enseñanza
- Formulación del entorno en donde la cuestión generatriz será presentada

Diseño del proceso de modelización matemático

Elección del contexto extramatemático de la actividad

Para el presente estudio se recoge la propuesta de Lujan (2019), quien plantea una problemática que pone atención sobre el movimiento de los edificios como respuesta frente a un sismo, correspondiente dentro del campo de la ingeniería estructural. Al respecto Domínguez (2014) manifiesta que los edificios se mantienen en movimiento constante, por la acción del viento, la vibración del paso de vehículos, etc., sin embargo, es frente a un sismo donde el movimiento del edificio se hace perceptible y sus estructuras se ponen a prueba, siendo, los desplazamientos horizontales los más críticos. En el caso de que los edificios poseen un solo nivel y actúen como una sola unidad, vibran desplazándose a cada lado del eje vertical.



Figura 1. Vibración de un pórtico de un piso o péndulo simple.

Fuente: Domínguez (2014, p.2)

Por otro lado, también existen edificaciones con varios pisos o niveles, en ese caso la primera reacción de la estructura es conjunta y oscila como si fuera una sola unidad de un lado a otro del eje vertical que parte del punto de apoyo, sin embargo, paulatinamente la estructura se va deformando hasta que algunos segmentos se encuentran a un lado del eje vertical mientras otros se encuentran al otro lado, tal como se aprecia en la figura 2.

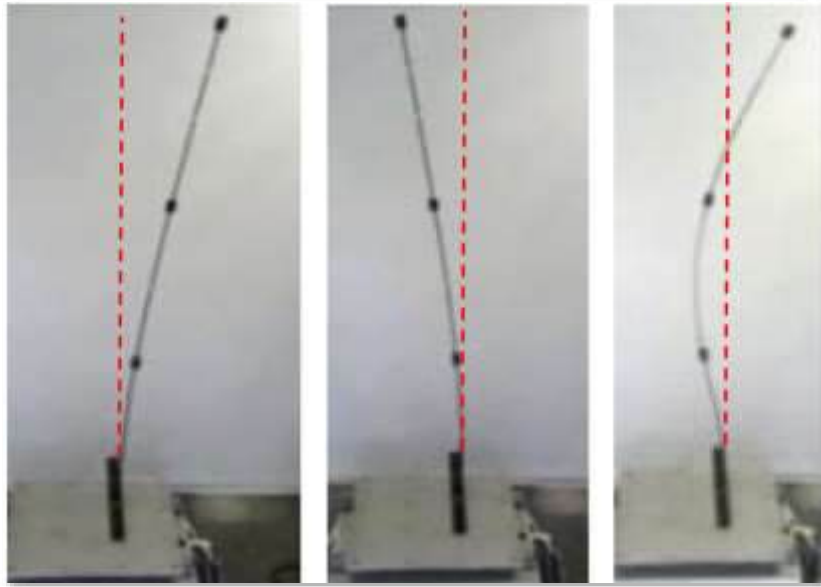


Figura 18. Oscilación de péndulos segmentados

Fuente: Adaptado de Domínguez (2014, p.4)

Análisis praxeológico

Es necesario además determinar las praxeologías en el contexto de la ingeniería estructural, ello implica, a su vez, abordar el movimiento oscilatorio en el campo de la física. En ese sentido, a continuación, se presenta algunos elementos del bloque tecnológico-teórico, descritos a partir de las publicaciones de Medina (2009) y Silva y Farina (2016).

Ambos autores coinciden en que la proyección de la posición de un cuerpo que posee un movimiento circular uniforme sobre el eje de abscisas se obtiene un desplazamiento horizontal equivalente al de un cuerpo en movimiento armónico simple y viene dado por $x = A \cos \theta$.

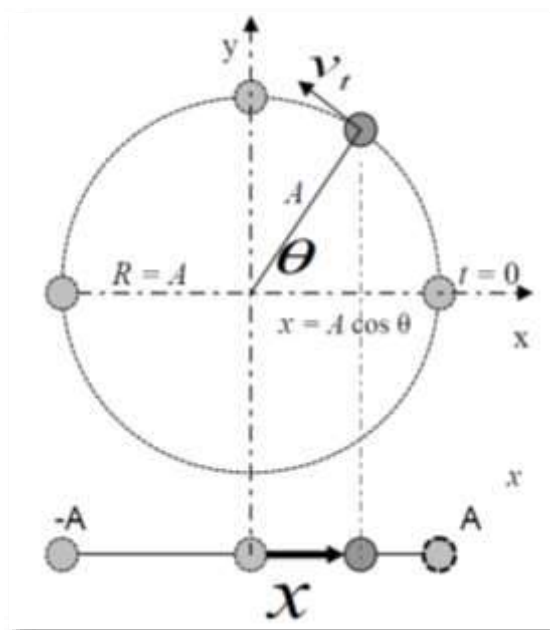


Figura 3. Relación entre el MAS y el MCU.

Fuente: Silva y Farina (2016. p. 5)

Sin embargo, dado que $\theta = \omega t + \theta_0$, es decir la posición angular θ equivale a la velocidad angular ω multiplicada por el tiempo t ; la componente x del vector que describe el movimiento de la partícula está dada por:

$$x = A \cos \theta = A \cos(\omega t + \theta_0)$$

Donde: A: Amplitud o elongación máxima

θ_0 : Fase inicial, su valor determina la posición en x para $t = 0$.

Análisis de la organización matemática identificada y su relación con la enseñanza.

Para poder analizar el proceso de estudio de la función seno y coseno dentro de una organización didáctica OD, es necesario considerar la organización matemática OM en torno a la función seno y coseno. Para ello, y conforme lo expresa Chevallard (1999), se propone un modelo descriptivo que sirva de referencia denominado Organización Matemática, el cual indica de manera hipotética y provisoria el probable recorrido matemático que emprenderán y abordarán los estudiantes durante el proceso de investigación. A continuación, se indica una organización praxeológica matemática de referencia señalando además las instituciones involucradas y las principales cuestiones previstas.

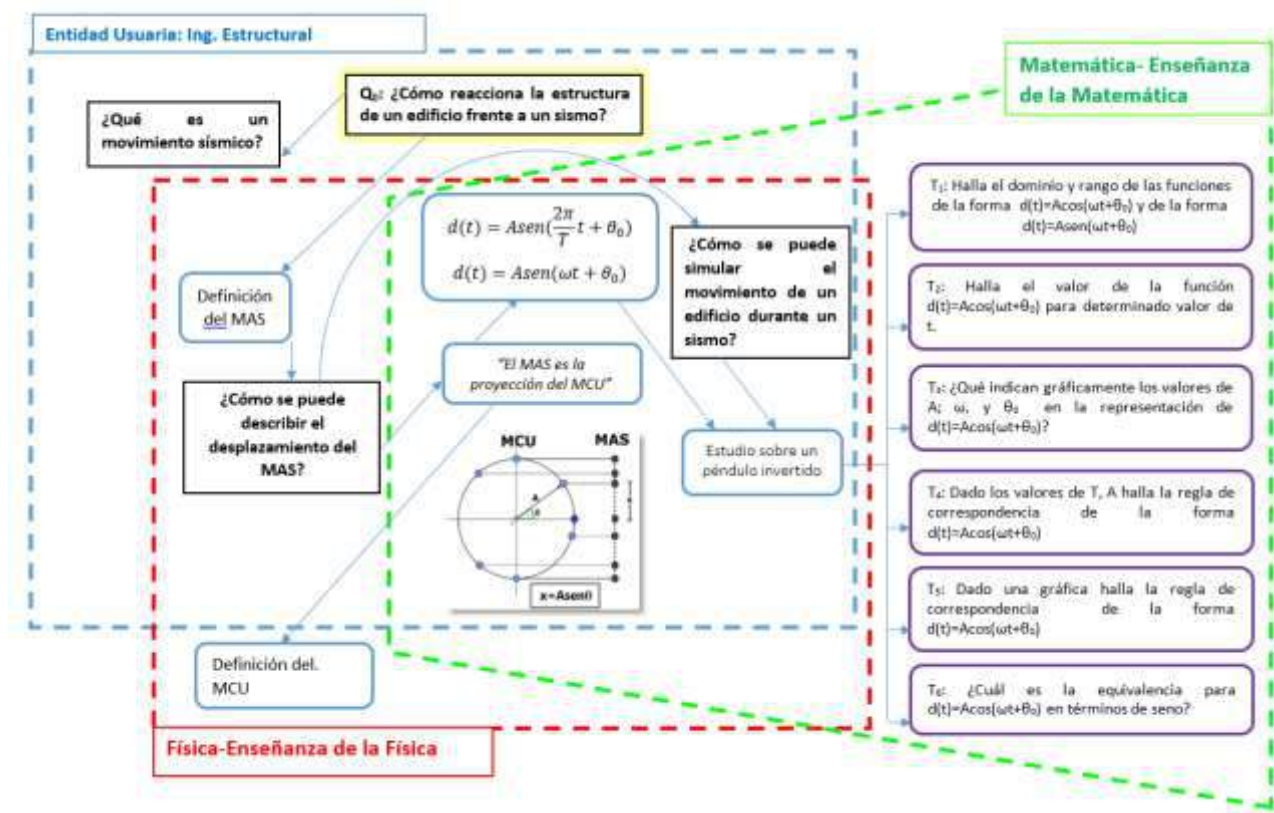


Figura 4. Análisis del modelo matemático identificado y su relación con la enseñanza.

Dentro del análisis previo del desarrollo del REI, se espera que los estudiantes asuman la cuestión generatriz $Q_0 = \text{¿Cómo reacciona la estructura de un edificio frente a un sismo?}$ y se contacten principalmente con el Movimiento Armónico Simple (MAS), el cual para ser descrito se relaciona con el Movimiento Circular Uniforme (MCU). Es en esta relación donde emerge la función seno, a partir de la cual se pueden realizar nuevos recorridos a partir de subcuestiones hasta llegar a una organización matemática local que incluye tipos de tareas articuladas a la función seno y coseno, todo ello se desenvuelve involucrando la presencia de instituciones partiendo desde la institución usuaria la ingeniería estructural donde se ubica la cuestión generatriz, luego a la Física como institución interdisciplinaria del saber pero luego aterrizando finalmente en la Matemática como institución disciplinaria y de enseñanza, en donde se atenderán la organización praxeológica.

Formulación del entorno en donde la cuestión generatriz será presentada

Los análisis realizados en las tres etapas anteriores permiten presentar una cuestión generatriz capaz de generar un cuestionamiento cada vez más profundo, a partir de la cual se obtengan una secuencia de cuestiones y respuestas derivadas. El entorno en la cual la cuestión generatriz será presentada es el siguiente:

“Actualmente podemos ver tanto en las noticias como en los simulacros escolares mayor atención por la prevención frente a los sismos. Nuestro país se encuentra en una zona sísmica y no es extraño experimentar temblores, algunos de gran magnitud que han provocado grandes pérdidas, humanas y materiales, la mayoría de veces causado porque buena parte de las edificaciones son proclives a desplomarse por su antigüedad o la negligencia al momento de haber sido construidas. Sabemos además que nuestra capital, se encuentra en silencio sísmico por muchos años, lo que quiere decir que se espera pronto un sismo de alta magnitud. En ese sentido, se les propone realizar una primera investigación en la que deben responder:

Q₀: ¿Cómo reacciona la estructura de un edificio frente a un sismo?

Deberán además seguir las siguientes consignas:

- Ver más allá de los aspectos superficiales
- Sistematizar la información
- Buscar aportar o resaltar algún conocimiento de utilidad
- Tomar decisiones

Para caracterizar el proceso de desarrollo a priori del REI, se indicarán seis etapas que no coinciden necesariamente con los momentos didácticos, pero sí expresan partes del proceso de investigación desarrollado por los estudiantes dadas las circunstancias particulares que posee, es decir al plantear una problemática extra matemática y al tener un carácter interdisciplinario con la Física, las praxeologías matemáticas no son abordadas en los primeros momentos sino posteriormente. Estas etapas son las siguientes:

1. Exploración de la problemática.

En donde es presentada la situación y se generan las primeras subcuestiones.

2. La relación entre el MAS y el MCU como una razón de ser para la función seno.

3. Construcción de una regla de correspondencia para el movimiento armónico simple.

4. Simulación y validación de la regla de correspondencia, a través de un trabajo con péndulos invertidos y captura de fotogramas y otros recursos que afloren y que permitan a los estudiantes realizar mediciones, tabulaciones, establecer reglas de correspondencia, así como validarlas.

5. Estudio de la regla de correspondencia tomando en cuenta a sus parámetros.

6. Transferencia a otras situaciones.

Se estima entonces que los estudiantes puedan seguir estas etapas en su investigación, de tal manera que se puedan analizar sus acciones a futuro, dentro de un marco de acción, en los que

seguramente emanarán gestos didácticos particulares los cuales pueden ser motivo de un trabajo de investigación adicional.

Consideraciones finales

Teniendo en cuenta las características formuladas en los aspectos teóricos se puede afirmar que existen elementos afines entre los REI y las Tareas Auténticas, respecto al planteamiento y a las consignas de desarrollo, por medio de un proceso de investigación o indagación de un problema en el mundo real, sin embargo, los REI exigen además un estudio de la organización matemática involucrada, lo que no es declarado en el caso de las tareas auténticas.

Se ha planteado un escenario didáctico referido a un REI y que se adecúa a las cualidades de las Tareas Auténticas, ello permitirá que pueda ser observado desde ambos enfoques dando apertura a un análisis más amplio.

Referencias

- Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.
- Chevallard, Y. (2004). *Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire*. Recuperado de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=45
- Chevallard, Y. (2009). La notion de PER: problèmes et avancées. IUFM Toulouse, Francia. Recuperado de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=161
- Chevallard, Y. (2013). Enseñar matemáticas en la sociedad de mañana: alegato a favor de un contraparadigma emergente. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2(2), 161-182.
- Dominguez, M. (2014). Períodos de vibración de las edificaciones. *Revista Arquitectura e Ingeniería*, 8(2), 1-8.
- García, F. (2005). *La modelización como herramienta de articulación matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales*. (Tesis de doctorado). Universidad de Jaén, Jaén, España.
- Guzmán, P. (2016). *Propuesta didáctica de modelación matemática que involucra ecuaciones diferenciales para una formación de futuros ingenieros*. (Tesis de doctorado). Instituto Politécnico Nacional, México, D. F., México. Recuperado de <https://tesis.ipn.mx/handle/123456789/26322>.
- Herrington, J., Oliver, R., & Reeves, T.C. (2002). *The suspension of disbelief in authentic online learning environments*, Paper presented at the Australasian Society for Computers in Learning in Tertiary Education Conference, Auckland, New Zealand.

- Herrington, J., Reeves, T. C., Oliver, R., & Woo, Y. (2004). Designing authentic activities in web-based courses. *Journal of Computing in Higher Education*, 16(1), 3-29.
- Luján, P. (2019). *Modelización de la función seno: un recorrido de estudio e investigación sobre la respuesta estructural de un edificio frente a un sismo*. (Tesis de maestría en proceso de sustentación), Pontificia Universidad Católica del Perú. Perú.
- Macías, M. y Romo, A. (2014). Metodología para el diseño de actividades didácticas basadas en la modelación matemática. . En Lestón, Patricia (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, (pp. 461,469). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Medina, H. (2009). *Física 2*. Recuperado de <http://biblioteca.pucp.edu.pe/fisica-1-y-fisica-2-de-hugo-medina-en-version-digital/>.
- Parra, V. E., Otero, M. R., & Fanaro, M. D. L. Á. (2013). Los Recorridos de Estudio e Investigación en la Escuela Secundaria: resultados de una implementación.
- Siero, L. y Romo-Vázquez, A. (2017). Didactic sequences teaching mathematics for engineers with focus on differential equations. In M. S. Ramírez & M. A. Domínguez (Eds.). *Driving STEM learning with educational technologies*, 129–151.
- Silva, C., & Farina, J. (2016). *7501-16 FÍSICA Oscilaciones Mecánicas*. Recuperado de <https://rephip.unr.edu.ar/bitstream/handle/2133/5674/7501-16%20FISICA%20Oscilaciones%20Mec%C3%A1nicas%20.pdf?sequence=2>.

PRÁCTICAS DE ENSEÑANZA DEL PROCESO DE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA EN SECUNDARIA EN BOGOTÁ, COLOMBIA

Blanca Cecilia Fulano Vargas

blanca.fulano@gmail.com

Universidad de Baja California, México

Resumen

Este artículo presenta los avances de la investigación titulada "Prácticas de enseñanza del proceso de modelización matemática en educación básica de Bogotá, Colombia". El objetivo es describir los elementos implícitos y explícitos que subyacen a las prácticas de los profesores de matemáticas al desarrollar proceso de modelización. El diseño metodológico del estudio es de tipo no experimental, bajo un enfoque cualitativo. La población de estudio corresponde a 18 profesores de los diferentes colegios distritales de Fontibón de la ciudad de Bogotá, Colombia. Cabe destacar que, a partir del marco teórico se proponen dos categorías de investigación "el saber teórico" y "el saber práctico". Por otra parte, se consolida un instrumento que permiten evidenciar los elementos que subyacen en las prácticas de los profesores y en el transcurso del segundo semestre de 2019 se aplicará el instrumento a los docentes de matemáticas que orientan grado noveno.

Palabras clave: Prácticas, modelización, currículo, didáctica.

Introducción

La matemática es una herramienta poderosa ya que permite comprender y predecir de alguna manera diferentes fenómenos, la modelación le permite al hombre describir una situación en términos de sus variables. Por lo tanto, el desarrollar el proceso de modelización en las aulas de clase es fundamental en el quehacer docente. Smester (2017) reconoce que *el proceso educativo exige mayor entrega de los profesores para que los estudiantes comprendan el alcance de la modelación en el mundo contemporáneo, escenario en el que cada vez se utilizan más las tecnologías de la información y las comunicaciones*. Es así como los elementos pedagógicos, didácticos propuestos desarrollados en el aula por el profesor, constituyen el pilar fundamental para dotar a los alumnos con herramientas que les permitan simular modelos y analizarlos a la luz de los datos iniciales, permitiéndoles entender los fenómenos y a su vez realizar predicciones.

Efectivamente, la modelación tiene vital importancia ya que además de ayudar a comprender el mundo de individuo, permite que este sea más eficiente en la toma de decisiones, por ende, dotar

a los estudiantes de herramientas necesarias para propender por el desarrollo del proceso de modelación se hace necesario en las aulas escolares. Por lo tanto, se ve la necesidad de realizar una investigación que permita evidenciar en los profesores de colegios distritales de la localidad novena de Fontibón de la ciudad de Bogotá información sobre sus prácticas especialmente en el trabajo con la modelación matemática lo cual permitirá consolidar una teoría para ser validada como propuesta curricular que permita aportar a las políticas educativas de calidad de las instituciones distritales del proceso de modelación.

Objetivos de la investigación

General

Describir los elementos implícitos y explícitos que subyacen a las prácticas de los profesores de matemáticas al desarrollar proceso de modelización

Específicos

- ❖ Identificar los aspectos conceptuales sobre el proceso de modelización que tienen los profesores de matemáticas de básica secundaria de colegios distritales de la localidad Fontibón en Bogotá.
- ❖ Analizar los componentes didácticos que permean las prácticas de los profesores al desarrollar el proceso de modelización en noveno de educación básica secundaria de colegios distritales de la localidad Fontibón en Bogotá.
- ❖ Distinguir los elementos curriculares que orientan las prácticas de los docentes al desarrollar el proceso de modelización matemática de educación básica secundaria.

Marco Teórico

Al construir el marco teórico se tienen en cuenta tienen aspectos didácticos desde la matemática aspectos epistémicos sobre el proceso de modelización y aspectos de la configuración normativa de la enseñanza de la matemática en Colombia

En primera instancia el enfatizar en algunos elementos importantes en lo referente a la Didáctica de las matemáticas se tiene que, por una parte, desde la perspectiva antropológica de la didáctica, se reconoce la praxeología como una configuración entre la praxis y el logos. Según Chevallard (1999) *la praxis se refiere a la práctica, el conocimiento de alguna manera, mientras que el logos se refiere a la teoría, el discurso que describe, legitima, explica, la praxis que se propone*. Por otra parte, se reconoce el análisis epistemológico de la ingeniería didáctica basada en lo semiótico (Godino, Rivas, Arteaga y otros 2014). De acuerdo con Godino, Batanero y Font (2011) *el modelo ontologosemiótico aporta herramientas teóricas para analizar conjuntamente el pensamiento matemático*. Así mismo, se tienen en cuenta facetas del conocimiento matemático que pueden ayudar a confrontar y articular la investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje y progresar hacia un modelo unificado de la cognición e instrucción matemática.

El modelo ontológico-semiótico de la cognición proporciona criterios para identificar los estados posibles de elementos epistémicos y cognitivos, y la adopción de la negociación de significados en la configuración didáctica que el docente propone y que se involucra un sistema de prácticas. Es así como se reconoce que el docente tiene la capacidad de organizar la instrucción, en este sentido, se puede hablar de la idoneidad de instrucción que se define como la articulación coherente y sistémica de las seis componentes epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva y ecológica. A su vez el conjunto de estos seis componentes de acuerdo con Godino y otros (2005) *forman la dimensión normativa la cual permite: valorar la pertinencia de las intervenciones de profesores y alumnos teniendo en cuenta el conjunto de normas, y su tipología, que condicionan la enseñanza y los aprendizajes.*

Por otra, parte, de acuerdo a los enfoques didácticos se puede decir, que la triada epistemológico, semiótico y fenomenológico determinan una forma de actuación del profesor de matemática frente al conocimiento que enseña o en este caso frente a la actividad matemática que pretende desarrollar en el aula escolar, los conceptos, las formas de representar un objeto y las situaciones son aspectos inherentes en el proceso de enseñanza. Para el caso de la enseñanza del proceso de modelación, Ärlebäck, Doerr y O'Neil (2013) afirman que *la modelización puede ser usada como vehículo que permite el desarrollo de conceptos matemáticos, con lo que es preciso enseñar y aprender a modelizar.* En este sentido, para el docente debe ser muy importante responder cuestiones sobre ¿cómo desarrollar el proceso de modelización en sus estudiantes?; ¿qué fenómenos son importantes tener en cuenta a la hora de proponer tareas o actividades sobre modelización?; ¿Qué estrategias utiliza para alcanzar los objetivos previstos? entre otras.

En segunda instancia, se prioriza la construcción teórica sobre el proceso de modelización matemática que corresponde a revelar las preguntas ¿Qué es un modelo matemático? ¿Qué es modelización matemática? ¿Qué aspectos se deben tener en cuenta para desarrollar el proceso de modelización matemática? (Ärlebäck, Doerr y O'Neil 2013; Tan y Ang 2015; Stillman, Blum y Kaiser, 2018). En primera instancia la definición de modelización matemática (MM) depende de los objetivos a los que apunten. Según, Schmidt (2010) *MM refiere el uso de las matemáticas para resolver problemas reales y abiertos, la definición exacta varía en función de los objetivos, qué modelo se está utilizando y la naturaleza del contexto asignado a la tarea de modelización.*

En tercera instancia, se reconoce desde la normatividad en Colombia algunas orientaciones sobre la enseñanza de la matemática frente a la modelización, es así como por primera vez en los lineamientos MEN (1998) se incluye el proceso de modelación en el currículo de matemáticas definiéndolo como *un proceso que permite a los alumnos observar, reflexionar, discurrir, explicar y predecir. Todos los alumnos necesitan experimentar procesos de matematización que conduzcan al descubrimiento, creación y utilización de modelos en todos los niveles.* Ocho años después en el documento de los Estándares de Matemáticas MEN (2006) se define el modelo *como un sistema que implica una representación figurativa mental, gráfica, tridimensional que reproduce la realidad en forma esquemática en determinada forma lo que permite hacerla más*

comprensible, Además en este documento se proponen unos estándares de acuerdo al ciclo y por campos de pensamiento.

Hasta aquí se delinear algunos elementos teóricos que se consideran importantes de un marco teórico, extenso y complejo que configuran un cuerpo teórico desde lo epistémico, didáctico, ontológico y curricular frente al tema en cuestión.

Metodología

Tipo de estudio

La investigación será abordada bajo el enfoque cualitativo. En este sentido, Marshall y Rossman (1999) *mencionan que la investigación cualitativa es pragmática, interpretativa y asentada en la experiencia de las personas*, en este sentido, la presente investigación supone la inmersión en la vida cotidiana de los docentes al realizar sus prácticas; la valoración y el intento por reconocer en el quehacer cotidiano los elementos que subyacen al desarrollar el proceso de modelización con los estudiantes.

En otros términos, dado que la investigación cualitativa se fundamenta en una perspectiva interpretativa la investigación estará centrada en el entendimiento del significado de las acciones de los profesores de lo que sucede al interior del aula de matemáticas reconociendo en las prácticas cotidianas aspectos importantes sobre ¿qué enseñar?, ¿cuándo enseñar? Y ¿cómo enseñar?, cómo estructurar las actividades que habrán de enseñarse y habrán de aprenderse y qué, cómo y cuándo evaluar.

Diseño

El diseño que se utilizará en el estudio es diseño fenomenológico. Heidegger (2006) precisa que la fenomenología *se enfatiza en la ciencia de los fenómenos; ésta consiste en permitir ver lo que se muestra, tal como se muestra a sí mismo y en cuanto se muestra por sí mismo; es decir, un fenómeno objetivo verdadero y científico*. El profesional docente expresa sus prácticas una didáctica, el currículo que propone en su quehacer cotidiano a través de las decisiones que toman frente a las propuestas metodológicas. La fenomenología se dirige al estudio de la experiencia vivida del docente en el aula de clase como protagonista de la enseñanza del proceso de modelización y busca describir los significados de las prácticas de los individuos a través del análisis de sus descripciones.

Por otra parte, se elige especificar la investigación como un estudio de caso. De acuerdo con Martínez (2009) *las investigaciones realizadas a través del método de estudio de caso pueden ser: descriptivas, si lo que se pretende es identificar y describir los distintos factores que ejercen influencia en el fenómeno estudiado*. Además, se tiene que una de las características más importante de un estudio de caso es que se trata del estudio en profundidad de una situación, evento o caso concreto, de tal forma que se toma en cuenta principalmente sus características internas pero también el contexto en el que se produce. Por lo tanto, a partir de las diferentes

posturas teóricas reconocidas se proponen diferentes categorías que permiten reconocer en la investigación las prácticas de los profesores en la enseñanza del proceso de modelización.

Población objeto de estudio

En la presente investigación es importante estudiar los casos que ayuden a entender el fenómeno de las prácticas profesores, por lo tanto, la población objeto de estudio son los docentes quienes se caracteriza por ser de expertos esto significa que las unidades a seleccionar en este caso los profesores son expertos en el tema al orientar el área de matemáticas específicamente en grado noveno, último año de la educación básica. En la tabla 1, se presentan los datos referidos a los docentes pertenecientes a instituciones públicas de la localidad de Fontibón.

Tabla 1.

Población objeto de estudio

Nombre de la Institución	Cantidad de profesores de matemáticas
Colegio Antonio Vanuden (IED)	2
Colegio Atahualpa (IED)	2
Colegio Carlo Federici (IED)	2
Colegio Costa Rica (IED)	2
Colegio Instituto Técnico Internacional (IED)	2
Colegio integrado de Fontibón Ibep (IED)	2
Colegio Luis Ángel Arango (IED)	2
Colegio Rodrigo Arenas Betancourt (IED)	2
Colegio Villemar el Carmen (IED)	2
Colegio Pablo Neruda	2
Total Instituciones 11	Total docentes: 18

Fuente: Elaboración propia

Categorías de investigación

Se construyen dos categorías emergentes a partir de la teoría. El primero es el “saber teórico”, que implica reconocer las concepciones que los docentes tienen sobre el modelado matemático, el proceso matemático, los ciclos de modelado y las representaciones, la segunda categoría es el “saber práctico”, que incluye gestión, didáctica, evaluación y reflexión. Además, para cada categoría, se proponen indicadores que permiten caracterizar los elementos implícitos y explícitos

presentados en las prácticas de los profesores de matemáticas, para desarrollar el proceso de modelado. Finalmente, se propone un instrumento para reconocer los elementos pedagógicos y didácticos validados por expertos internacionales en educación matemática

Categorías de análisis

De acuerdo con Rivas (2015) una categoría de análisis *es una estrategia metodológica para describir un fenómeno que estamos estudiando mediante categorías de estudio que se sugiere nunca sean mayores de cinco*. Las categorías de la presente investigación surgen a partir de la revisión de la teoría, se identificaron dos categorías y las correspondientes subcategorías las cuales permiten clarificar los conceptos que se estudiarán y se definen en términos claros y sencillos para una mejor comprensión y finalmente esta categorías se sustentan en trabajos de investigadores previstos que se han dedicado a estudiar variados aspectos de la didáctica de las matemáticas implícitas en las prácticas educativas.

A continuación, se presenta en la tabla 2, el resumen de las dos categorías que a su vez se dividen en subcategorías, las cuales son definidas en términos operacionales y se definen unos indicadores.

Tabla 2.

Definición operacional de las categorías

Categorías	Sub Categorías	Definición operacional	Indicadores
Categoría de análisis uno: SABER TEÓRICO	Concepciones	Referentes teóricos para organizar la construcción didáctica referida a el proceso de modelización en matemáticas	• Reconocimiento de sistemas de diferentes sistemas de representación • Diferenciación entre modelo matemático y modelización matemática • Reconocimiento de ciclos de la modelización • Establecimiento de contextos • Comprensión de las realidades
	DIDÁCTICA Y CURRÍCULO	Organización de los contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales, Además de la gestión del tiempo, los recursos e interacciones en el aula	• Organización de los objetivos • Pertinencia de materiales y recursos • Organización de agrupamientos • Determinación de interacción • Establecimiento de tiempos

	Actitudes y acciones desarrolladas por el profesor en su aula de clase para desarrollar el proceso de modelización en los estudiantes	• Presentación de las instrucciones • Diseño de actividades • Reformulación de actividades
REFLEXIÓN	Proceso desarrollado por el profesor frente a su quehacer en el aula respecto al proceso de modelización	• Identificación de la pertinencia social • Reconocimiento epistemológico • Actualización • Pertinencia cognitiva
EVALUACIÓN	Proceso construido y desarrollado por el profesor para obtener información pertinente frente a la enseñanza del proceso de modelización que puede implicar una reestructuración y modificación de su práctica	• Formulación de criterios • Uso de la información • Determinación de instrumentos • Formas de sistematización • Fomento de la realimentación • Evaluación formativa

Fuente: Elaboración propia

Instrumentos de recolección de datos y medición

Teniendo en cuenta que el estudio es de diseño fenomenológico y al respecto se tiene diversos instrumentos para la recolección de datos uno de los instrumentos es un cuestionario el cual debe ser parcialmente estructurado, abierto y flexible, de tal manera que se adapte a la singularidad de cada sujeto en particular. Para Pérez (1991) el cuestionario *consiste en un conjunto de preguntas, normalmente de varios tipos, preparado sistemática y cuidadosamente, sobre los hechos y aspectos que interesan en una investigación o evaluación, y que puede ser aplicado en formas variadas, por ejemplo, su envío por correo.*

Por otra parte, Morales (2001) reconoce *que el cuestionario es una lista de preguntas que se proponen con cualquier fin.* Para cumplir con los objetivos de la investigación se diseña un cuestionario-tipo test, el cual cumple con dos particulares. La primera, todas las preguntas son indicadores del mismo rasgo y la segunda, las respuestas de cada profesor se suman en un total que indica la medida de la característica por la cual se indaga.

En el cuestionario tipo test se utiliza una escala Likert. De acuerdo con Zdravomislov (s/f) *la tarea principal de la confección de escalas consiste en convertir los distintos datos desde el punto de vista cualitativo en índices cuantitativos confrontables*. Por medio de la escala Likert se mide en los profesores la predisposición para responder coherentemente de una forma favorable o desfavorable ante un objeto en este caso ante cada indicador propuesto para cada variable como se detallará a continuación.

El instrumento inicial consta de un total de 143 afirmaciones divididas en tres partes:

En la primera parte se indagan datos generales de los profesores como:

Institución; Título de formación; Último nivel de formación y Años de experiencia

La segunda parte indaga sobre la variable constructo teórico de los profesores. El propósito es obtener información relevante de los profesores sobre su saber teórico considerando los siguientes elementos.

- I. Modelo matemático
- II. Modelación matemática
- III. Proceso de modelización
- IV. Representaciones
- V. Contextos
- VI. Realidades

La tercera parte del cuestionario tiene como finalidad reconocer elementos que subyacen en el saber hacer del profesor en el aula de matemáticas al considerar:

- I. Objetivos
- II. Contenidos
- III. Materiales
- IV. Interacciones
- V. Planificación en el campo afectivo
- VI. Instrucción
- VII. Diseño de actividades
- VIII. Reflexión
- IX. Reformulación de actividades
- X. Evaluación

En las opciones de respuesta se utiliza la escala Likert para medir la frecuencia del uso de cada indicador como se muestra a continuación:

0= Nunca

1=Pocas veces

2= De vez en cuando

3=Casi siempre

4= Siempre

Una vez diseñado el instrumento, se realiza una prueba piloto, se aplica el instrumento seis docentes que orientan matemática en grado noveno, se recolecta la información y se calcula, mediante el software estadístico SPSS de IBM, el coeficiente de Alfa de Cronbach, para ver qué tan fiable es el instrumento, como se observa, en la figura 1, el Alfa de Chombach para el instrumento diseñado es mayor a 0,70 esto quiere decir, el instrumento tiene una alta consistencia interna ya que el estadístico fue de 0,912

Resumen de procesamiento de casos			
		N	%
Casos	Válido	6	100.0
	Excluido ^a	0	.0
	Total	6	100.0

a. La eliminación por lista se basa en todas las variables del procedimiento.

Estadísticas de fiabilidad	
Alfa de Cronbach	N de elementos
.912	143

Figura 1. Análisis de fiabilidad

Posteriormente, se procede a validar el instrumento por dos expertos internacionales, la Doctora Martha Isabel Fandiño y el Doctor Tulio Mendoza Armas, quienes avalan el instrumento y recomiendan realizar ajustes. Se tiene en cuenta las recomendaciones de los expertos, se realizan los ajustes y se consolida una versión definitiva del instrumento. De acuerdo con el cronograma corresponde aplicar el instrumento a los docentes de matemáticas de secundaria en el segundo trimestre de 2019 y realizar el respectivo análisis de la información y en consecuencia presentar los resultados en el CIEM 2020.

Referencias

- Ärleback, J. Doerr, H. y O'Neil, A. (2013). Students' Emerging Models of Average Rates of Change in Context. Turquía: Middle East Technical University.
- Chevallard, Y. (1999) L' analyse des pratiques enseignant en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-226.
- Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, and others (2014). Didactic engineering based on the Onto-Semiotic approach to mathematical knowledge and instruction. *Recherches en Didactiques*

des Mathematiques 34 (2/3), 167-200.

- Godino, J. Batanero, C y Font, V. (2011) Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. España: Universidad de Granada y Universidad de Barcelona.
- Godino, J. y otros (2005). Suitability criteria of a mathematical instruction process. A teaching experience of the function notion. España: MJRME.
- Heidegger, M. (2006) Prolegómenos para una historia del concepto de Tiempo. Madrid: Alianza Editorial. Traducción de Jaime Aspiunza.
- Marshall, C., & Rossman, G. B. (1999). Designing qualitative research. Thousand Oaks, CA, US: Sage Publications, Inc.
- Martínez, P (2009). El método de estudio de caso estrategia metodológica de la investigación científica. Bogotá: Pensamiento y gestión.
- MEN (1998). Lineamientos curriculares en matemáticas. Bogotá: Autor.
- MEN (2006). Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas. Bogotá: Autor.
- Morales, P. (2011). Guía para construir cuestionario y escalas Madrid: Universidad de Comillas. Consultado en: <https://es.scribd.com/document/357739840/GUIA-PARA-CONSTRUIR-CUESTIONARIO-Y-ESCALAS-2011-pdf> (2018, 2 de septiembre)
- Pérez, R. (1991): Pedagogía Experimental. La Medida en Educación. Curso de Adaptación. Uned.
- Rivas, L. (2015). Capítulo 6 La definición de variables o categorías de análisis
Consultado: en:
www.researchgate.net/publication/286288002_Capitulo_6_La_definicion_de_variables_o_categorias_de_analisis. (2019, 11 de enero).
- Schmidt, B. (2010). Modeling in the classroom motives and obstacles from the teacher's perspective. Norte América: CERME.
- Smester, P. (2017) La formación de la competencia modelación matemática, una experiencia desde el cálculo diferencial en estudiantes universitarios. Cuba: Órbita.
- Stillman, G.L., Blum, W., and Kaiser, G. (2018). Mathematical Modelling and Applications: Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education. Switzerland: Springer.
- Tan, L.S & Ang, K.C. J (2015). A school-based professional development programme for teachers of mathematical modelling in Singapore. Netherlands: Springer.
- Zdravomislov, A. (s/f). Diseño de escalas de medición de actitudes en la investigación social. *Compilación CEO Metodología y procesamiento de las investigaciones sociológicas.*

DESCRIPTORES DE NIVEL DE RAZONAMIENTO DE VAN HIELE, PARA LA COMPRENSIÓN DE LA PARÁBOLA COMO LUGAR GEOMÉTRICO

William Eduardo Calderón Gualdrón*

René Alejandro Londoño Cano**

williameduardoc@hotmail.com, renelondo@gmail.com

Universidad Metropolitana de Educación Ciencia y Tecnología UMECIT, Panamá*

Universidad de Antioquia, Colombia**

Resumen

En este reporte de investigación se presentan los resultados preliminares de una investigación doctoral que estudia como comprenden los estudiantes de últimos cursos de educación media y primeros semestres de universidad el concepto de parábola como lugar geométrico a la luz del modelo de van Hiele. En una primera etapa se elaboran unos descriptores hipotéticos los cuales se van refinando a medida que se aplica un diseño de entrevista socrática mediada por el software GeoGebra. Estudios previos han utilizado el modelo de van Hiele y la entrevista socrática como una estrategia efectiva para analizar y promover la comprensión de un estudiante acerca de un determinado concepto, si a estos dos elementos le sumamos el software de geometría dinámica GeoGebra, tendremos una triada la cual será una estrategia con la cual se analizará y promoverá el objeto de estudio (la comprensión) y el objeto matemático de estudio (La parábola como lugar geométrico).

Palabras clave: *Parábola, descriptores, van Hiele*

Introducción

En el diseño curricular de los cursos de matemáticas de la educación secundaria, se introduce la geometría analítica con conceptos algebraicos que permiten resolver problemas de distancia entre puntos y puntos medios; de esta manera se presenta la relación entre el álgebra y la geometría por primera vez. Seguidamente, se introduce la recta y, luego, las secciones cónicas. Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) del sistema educativo colombiano hacen referencia a las secciones cónicas en cuatro de los estándares asociados al pensamiento espacial y sistemas geométricos de décimo grado (estudiantes entre 15 y 17 años), a saber:

- Identifico en forma visual, gráfica y algebraica algunas propiedades de las curvas que se observan en los bordes obtenidos por cortes longitudinales, diagonales y transversales en un cilindro y en un cono.
- Identifico características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana y otros (polares, cilíndricos y esféricos) y en particular de las curvas y figuras cónicas.
- Uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias.
- Reconozco y describo curvas y o lugares geométricos.

Basados en nuestra experiencia docente y de acuerdo a la literatura abordada, los estudiantes de primer año de universidad presentan dificultades en la comprensión de las secciones cónicas, situación que ha sido documentada por investigadores como Just y Carpenter (1985), Gómez y Carulla (2000), Santa y Jaramillo (2007), Santa (2011), López-Mesa, J., Aldana-Bermúdez E., Alonso-Arboleda A. (2013), Ruiz (2013), Lara (2016), quienes aseguran que los estudiantes que aprenden de memoria las ecuaciones de las cónicas, no comprenden las propiedades ni hacen procesos de análisis; lo anterior conlleva a dificultades en relación a la representación algebraica y geométrica, impidiendo su comprensión como lugar geométrico.

Lo anterior señala la necesidad de contribuir con elementos que le permitan a los profesores mejorar el proceso de enseñanza de las cónicas, en específico, de la parábola como lugar geométrico. En esta investigación, en particular, interesa aportar a la solución de la problemática de las dificultades en la comprensión de la parábola como lugar geométrico en estudiantes de educación media y primeros semestres de universidad.

El modelo de van Hiele y la entrevista socrática han sido validados en investigaciones como Llorens (1994), Campillo (1998), Jaramillo (2000), Esteban (2000), De la Torre (2000), Navarro (2002), Londoño (2011) y Prat (2015) como una estrategia efectiva para analizar y promover la comprensión de un estudiante acerca de un determinado concepto, no sólo con las preguntas que se formulan, sino también, con sus propias respuestas.

Si al modelo de van Hiele y a la entrevista de carácter socrático le sumamos los aportes que realiza la tecnología en la enseñanza de las matemáticas, en este caso el software de geometría dinámica GeoGebra, tendremos una triada la cual será una estrategia con la cual esperamos analizar y promover el objeto matemático de estudio, que en nuestro caso es la parábola como lugar geométrico, además de crear un sendero para nuevas investigaciones con esta estrategia.

Este estudio pretende que la entrevista socrática dinámica, vista como la entrevista realizada mediante un software de geometría dinámica, pueda convertirse en una estrategia para los profesores de matemáticas, ya que, mediante las actividades propuestas en ella, se orienta sobre cómo debe comunicarse el profesor con los estudiantes a través de un software de geometría dinámica, para presentarles nuevos conceptos, de manera que se fomente la comprensión de las matemáticas, su aprendizaje y el desarrollo de la capacidad de razonamiento de los mismos.

Además, se pretende transformar la manera en que el entrevistado interactúa con el entrevistador cuando se realiza un dialogo de entrevista socrática, al proporcionarle al primero nuevas herramientas en las que puede dotar de movimiento las situaciones que se le presentan, dándole a la entrevista una cualidad en la que mediante la experimentación y manipulación de distintos elementos geométricos en GeoGebra, el estudiante logre deducir resultados y propiedades hasta llegar a la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico.

Problema de investigación y aspectos teóricos y metodológicos

La parábola como lugar geométrico

Charles H. Lehmann (1990) define una parábola como el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que su distancia de una recta fija, situada en el plano, es siempre igual a su distancia de un punto fijo del plano que no pertenece a la recta. El punto fijo F se llama foco y la recta fija L se llama directriz de la parábola.

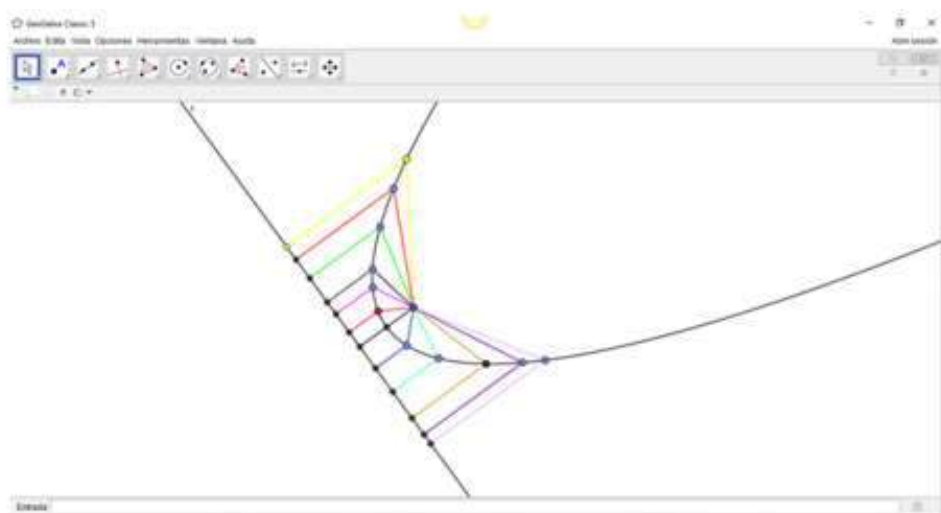


Figura 1 la parábola como lugar geométrico

El modelo de van Hiele

Muchos autores han buscado una definición precisa del término "comprensión", Brownell y Sims (1946) afirman: "Es muy difícil de encontrar o formular una definición técnicamente exacta de "comprender" o "comprensión" (p. 163). En este sentido Pierre van Hiele (1957) se refiere a la comprensión así:

Se dice que un niño tiene comprensión en un determinado campo de la geometría cuando, a partir de los datos y relaciones geométricas que se le suministran, es capaz de llegar a una conclusión en una situación con la que nunca se había enfrentado antes. El niño suele ir averiguando su adquisición de comprensión de la siguiente manera: "Ah, ya lo veo, o sea que si..." y a continuación formula un nuevo teorema. Lo característico de la comprensión es pues que se van tanteando nuevas situaciones (p. 4)

Desde la difusión inicial de los trabajos de van Hiele, a mediados de los 70's, han sido numerosos los investigadores que han trabajado con el modelo de van Hiele, aspecto que es afirmado por Jurado y Londoño (2005), quienes, además, señalan que el común denominador es la insistencia en aplicarlo a cuestiones geométricas de niveles educativos elementales o medios, hecho que no opaca el esfuerzo de investigadores como Dreyfus y Thompson (1985), De la Torre (2000), Londoño (2011), Fiallo (2011 y 2018), por extenderlo a la Aritmética, el Análisis Matemático, la Trigonometría y el Cálculo Diferencial.

Jaime y Gutiérrez (1990) señalan que el modelo de Van Hiele es

Una excelente guía para los profesores pues (...) enseña a descubrir cómo debe comunicarse el profesor con los alumnos, para presentarles nuevos conceptos de manera que se fomente la comprensión de las matemáticas, su aprendizaje y el desarrollo de la capacidad de razonamiento de los estudiantes (pp. 302-303).

Pierre van Hiele y Dina van Hiele Geldof, como profesores de matemáticas, idearon una forma que pudiera mejorar el nivel de razonamiento de los estudiantes en geometría pues, a partir de sus observaciones y reflexiones en el aula, notaron que, a diferencia de Piaget, los estudiantes no tienen el mismo nivel de pensamiento en cualquier edad que se mire esto; para ellos "cada nivel supone una forma de comprensión, un modo de pensamiento particular, de manera que un estudiante solo puede comprender y razonar sobre los conceptos matemáticos adecuados a su nivel de razonamiento" (Jurado y Londoño, 2005, p. 7).

Jaime y Gutiérrez (1990) señalan que el modelo de van Hiele está formado por dos partes:

a) la primera llamada "niveles de razonamiento" que identifica una secuencia continua de tipos de razonamientos mediante los cuales progresa, sin saltarse alguno, la capacidad de razonamiento matemático de los individuos, desde que empiezan su aprendizaje hasta que alcanzan su máximo grado de desarrollo. Para reconocer el nivel de razonamiento del estudiante a partir de su actividad matemática, los van Hiele diseñaron unos descriptores, los cuales tienen unas propiedades específicas (secuencialidad fija, adyacencia, distinción, separación, cada nivel tiene su lenguaje y consecución).

b) La segunda parte llamada "fases de aprendizaje", orientada a los profesores, les brinda directrices para ayudarlos a encaminar a sus estudiantes hacia un nivel superior de razonamiento

Un tercer elemento es considerado por Jurado y Londoño (2005) y Londoño (2011): la percepción-Insight (algunos autores la traducen como "comprensión"), aunque Jaime y Gutiérrez (1990) señalan que este es el fin del modelo.

La entrevista socrática

El diálogo como elemento importante en la educación matemática es entendido desde los Diálogos de Platón en el capítulo titulado "Menon" (el diálogo que sostiene Sócrates con el esclavo de Menón acerca de encontrar el cuadrado de área doble, de otro cuadrado dado), cuyos coloquios se caracterizan por su alto grado de indagación y análisis, lo cual supone un

compromiso con el intelecto. De la Torre (2003) describe el método socrático como camino hacia el esclarecimiento de los conceptos, tal como se perfila en el Menón, señala además que:

El camino hacia el conocimiento es un proceso gradual, en el cual la opinión y la creencia constituyen etapas intermedias. El aprendiz se esfuerza y participa activamente en el proceso, que termina cuando aquel inventa o descubre la respuesta adecuada a una pregunta bien formulada (p. 102).

Sucerquia, Londoño y Jaramillo (2015) señalan que en una clase de matemáticas el diálogo debe permitir la expresión de ideas, conocimientos, razonamiento crítico y reflexivo, procesos argumentativos, etc.; es decir, el diálogo matemático debe presentar algunas características particulares que deben estar en correspondencia con las propias del diálogo socrático.

La entrevista socrática [...] ha sido el medio más adecuado para realizar el seguimiento de la construcción y evolución de un concepto matemático en la mente del alumno, como también se ha considerado una herramienta fundamental en estos estudios, debido a que ha permitido determinar los niveles de razonamiento a la luz del modelo de van Hiele [...] (Jaramillo y Campillo, 2001, p. 82).

Londoño (2011) emplea la entrevista socrática con una doble intención: a) que el profesor reflexione sobre el concepto y las dificultades en la enseñanza del mismo, esto con el propósito de que forje la necesidad de diseñar una red de relaciones para propiciar el acercamiento del estudiante al concepto; b) que le permita al entrevistado (el estudiante) progresar en la comprensión del Teorema Fundamental del Cálculo. La entrevista socrática diseñada en el estudio de Londoño le permite la detección de los niveles de comprensión de tres estudiantes en el marco de la teoría de Piere y Kieren a partir de descriptores diseñados para cada nivel, los cuales se obtuvieron durante la aplicación de las entrevistas socráticas.

La red de relaciones interviene durante toda la entrevista y el estudiante entrevistado razona sobre ella y la amplía, pero el refinamiento y evolución de su comprensión depende en gran medida del manejo adecuado por parte del entrevistador durante su aplicación, es decir, la entrevista debe estar diseñada de tal forma que no se produzca una enseñanza directa, sino más bien, una enseñanza gradual que permita que los estudiantes pasen de las situaciones concretas a las abstractas y viceversa, para así conseguir el nivel de comprensión deseado.

El autor enfatiza en las conclusiones de su estudio la importancia de que en la entrevista socrática se generen preguntas que entorpezcan al aprendiz ante un posible error o confusión, pero que a la vez desencadene que lo saquen de la confusión y así avanzar en su proceso de comprensión.

De manera que, dado que el modelo de van Hiele prueba la existencia de niveles de razonamiento, en este estudio usamos el método socrático para examinar el razonamiento de los estudiantes cuando se enfrentan a la comprensión de la parábola como lugar geométrico.

Asimismo, para efectos de esta investigación, se tomaron en cuenta los aspectos que van Hiele considera son importantes tener presentes en una clase donde se trabaje con el método socrático,

según De la Torre (2003, p. 103), a saber:

- El maestro tiene que asegurarse del interés de los alumnos en el problema y debe captar su atención desde el comienzo.
- El método socrático sólo es efectivo en la medida en que se pueda garantizar que cada uno de los alumnos alcanza la solución mediante su trabajo personal. El profesor no podrá llenarse de impaciencia ni darles la solución prematuramente.
- El trabajo de los alumnos debe ser individual y las conversaciones colectivas en el aula deberán ser guiadas por el maestro, de modo que se les permita avanzar también a los alumnos que se muevan a paso lento.
- El maestro debe calibrar acertadamente la dificultad del problema, de modo que todos los estudiantes conserven el interés hasta el fin, sin que ninguno de ellos olvide el corazón del asunto.

Van Hiele (1986) insiste en estas premisas pues "es posible emplear el método socrático, con muy buenos resultados, pero también es muy fácil fracasar en el intento" (Londoño, 2010, p. 27).

El software de geometría dinámica (SGD)

Peña (2010) resalta que los softwares de geometría dinámica (SGD) contribuyen con nuevas posibilidades en la enseñanza de la geometría ya que se supera el carácter estático de las figuras en el papel; los SGD dotan de movimiento a las figuras, cualidad que permite analizarlas desde diferentes perspectivas y comprender los conceptos y propiedades asociadas a ellas, esto empleando las opciones de arrastre de los programas. La autora señala que "La utilización de los programas de Geometría Dinámica en clase nos ayudará a acercar los contenidos matemáticos a los estudiantes y mejorar su comprensión" (p. 166).

Es así como Fiallo (2000) plantea en su tesis doctoral el diseño de una unidad de enseñanza de trigonometría fusionando el modelo de Van Hiele y Cabri Geometre como herramienta didáctica. El autor concluye que el software de geometría dinámica (SGD) motiva a los estudiantes a saber por qué son verdaderos los conceptos y propiedades estudiados ya que, además, les proporciona conocimientos necesarios para que formulen razonamientos y demostraciones sobre ellos.

En relación a las cónicas y los SGD, Gaita y Ortega (2014), además de trabajar con construcciones de regla y compás relacionadas con la noción de lugar geométrico con estudiantes de arquitectura, incluye en su estudio algunas actividades con el uso de GeoGebra. Las autoras señalan que la propuesta está organizada "En base a condiciones geométricas que establezcan relaciones de la distancia entre tres puntos, de modo que la modificación de determinados parámetros en el enunciado generaba un cambio en la estrategia de solución" (p. 1136). La introducción del lugar geométrico a través de situaciones en el marco geométrico favoreció que los estudiantes adquirieran una concepción dinámica y global de este concepto.

Los investigadores López-Mesa, Aldana-Bermúdez y Alonso-Arboleda (2013) también emplearon GeoGebra en un estudio con 25 estudiantes (cuyas edades oscilan entre 17 y 30 años) de

Ingeniería de Sistemas de primer semestre para conocer cómo ellos adquieren la comprensión del concepto de parábola, mediante geometría dinámica y la Ingeniería Didáctica de Chevallard como soporte teórico. Entre las conclusiones reportadas, destaca que las TIC logran una mayor comprensión del objeto matemático, en los siguientes términos:

[...] El medio informático como herramienta facilitó en los estudiantes la comprensión de los elementos que caracterizan la ecuación canónica de la parábola con centro en el origen y fuera de este; estableció relaciones entre los elementos matemáticos y los modos de representación gráfico, algebraico y analítico, y lograron una construcción progresiva, ascendente, consciente y real del objeto matemático de estudio.

En lo actitudinal, los autores reportan que los estudiantes están más receptivos y animados al desarrollo de las actividades; durante la actividad matemática, ellos formulan como hipótesis y conjeturas, utilizan un lenguaje matemático adecuado, entre otras.

Hallazgos

A partir de los razonamientos de los estudiantes, sobre la parábola como lugar geométrico se pudo detectar características que permiten ubicar a cualquier estudiante en uno de los niveles de razonamiento; a estas características se les llama descriptores, y van a indicar las actividades sobre el objeto matemático de estudio mencionando anteriormente que pueden realizar los estudiantes cuando se encuentran en un determinado nivel.

En un primer momento, van Hiele enumeró cinco niveles diferentes (Nivel 0 básico o predescriptivo y niveles I, II, III y IV). Jaime y Gutiérrez (1990) distinguen cuatro niveles: nivel 1 (de reconocimiento), nivel 2 (de análisis), nivel 3 (de clasificación) y nivel 4 (de deducción formal). Nosotros vamos a utilizar la nomenclatura descrita por van Hiele, la cual fue pieza clave en las investigaciones de autores como: Londoño (2011), Santa (2011), Prat (2015), quienes presentan los siguientes niveles: Nivel 0, predescriptivo; nivel I, de reconocimiento visual; nivel II, de análisis; nivel III, de clasificación y relación; nivel IV, de deducción formal.

Estos autores hacen referencia a que el último nivel el de deducción formal presenta dificultades para su discernimiento y sólo tienen un interés teórico.

Descriptores de nivel de razonamiento (DNR)

NIVEL 0 (básico o predescriptivo)

En este nivel se identifica el conjunto de saberes previos que necesita el estudiante para llegar a la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico. Los descriptores para este nivel son estrictamente conceptuales, por lo tanto, no es utilizado el software GeoGebra.

El estudiante ubicado en este nivel:

- **DNR.** Reconoce objetos geométricos que no son definibles como punto, segmento, recta y plano.

Nivel I: Reconocimiento visual

En este nivel el estudiante construye y visualiza, en un ambiente de GeoGebra, puntos, rectas, rectas paralelas, rectas perpendiculares, entre otras.

- **DNR. Reconoce** algunos objetos geométricos básicos, que se muestran en un ambiente de GeoGebra tales como: punto, punto de intersección, segmento, medida de un segmento, medida de un ángulo, rectas, rectas perpendiculares y paralelas, entre otras.

Nivel II: De análisis

En este nivel, el estudiante determina algunos puntos que satisfacen la condición de estar a la misma distancia de un punto fijo llamado F y de una recta llamada D.

- **DNR.** Reconoce que el lugar geométrico construido mediante GeoGebra es la parábola sin mencionar las propiedades que la caracterizan.

Nivel III: De clasificación

En este nivel, el estudiante determina la condición que debe cumplir un conjunto de puntos para pertenecer a la parábola, además, es capaz de llegar a una definición de la misma como lugar geométrico.

- **DNR.** Manifiesta la necesidad de definir de manera formal la parábola como lugar geométrico: la parábola es el conjunto de puntos que equidistan de un punto fijo llamado foco y de una recta L llamada directriz.

Referencias

- De la Torre, A. (2000). El método socrático y el modelo de Van Hiele. *Lecturas Matemáticas*, 24, pp. 99-121.
- Dreyfus, T., y Thompson, P. W. (1985). Microworlds and van Hiele levels. In L. Streefland (Ed.), *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 5-11). Utrecht, The Netherlands: University of Utrecht, Research Group on Mathematics Education and Educational Computer Center.
- Fiallo, J. (2011). *Estudio del proceso de Demostración en el aprendizaje de las Razones Trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica*. Tesis doctoral. España: Universitat de València.
- Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). *Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: el modelo de Van Hiele*. En: Llinares, S. y Sánchez, V. (eds.). *Teoría y práctica en educación matemática* (pp. 295-384). Sevilla: Alfar.

- Jaramillo, C. y Campillo, P. (2001). Propuesta Teórica de Entrevista Socrática a la Luz del Modelo de van Hiele. *Divulgaciones Matemáticas*, 9, pp. 65–84. Recuperado de <https://www.emis.de/journals/DM/v91/art5.pdf>
- Jurado, F. y Londoño, R. (2005). *Diseño de una entrevista socrática para la construcción del concepto de suma de una serie vía áreas de figuras planas*. Tesis de maestría no publicada. Colombia: Universidad de Antioquia.
- Just, M. y Carpenter, P. (1985). Cognitive coordinate systems: Accounts of mental rotation and individual differences in spatial ability. *Psychological Review*, 137-172.
- Lara, I. (2016). *La parábola como lugar geométrico: una formación continua de profesores de matemáticas basada en la Teoría de Registros de Representación Semiótica*. Tesis de maestría no publicada. Perú: Pontifica Universidad Católica del Perú.
- Londoño, R. (2011). *La relación inversa entre cuadraturas y tangentes en el marco de la teoría de Pirie y Kieren*. Tesis doctoral no publicada. Colombia: Universidad de Antioquia.
- López-Mesa, J., Aldana-Bermúdez E., Alonso-Arboleda A. (2013). Análisis de la comprensión del concepto de parábola en un contexto universitario. *Respuestas*, 18(2): 74-79.
- MEN, (2006). *Estándares Básicos en Competencias en Matemáticas*. [Versión en línea]. Recuperado de http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-16042_archivo_pdf2.pdf
- Santa, Z. y Jaramillo, C. (2007). *Construcción de las secciones cónicas mediante el doblado de papel en el marco del modelo educativo de Van Hiele*. En: X Encuentro Colombiano de Matemáticas Educativa. Universidad de Antioquia.
- Sucerquia, Londoño y Jaramillo (2015) *La entrevista de carácter socrático como una estrategia para producir conocimiento matemático en educación a distancia online*.
- Peña, A. (2010). *Enseñanza de la geometría con tic en Educación secundaria obligatoria*. Tesis doctoral no publicada. España: Universidad Nacional de Educación a Distancia.
- Platón, (1996). Menón. En Platón, Diálogos. México. Porrúa.
- Ruiz, J. (2013). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de la parábola como lugar geométrico en el grado décimo de la Institución Educativa Luis López de Mesa del Municipio De Medellín*. Tesis de posgrado no publicada. Colombia: Universidad Nacional de Colombia.
- UNESCO. (1998). *Informe Mundial sobre la Educación*. Editorial Santillana/Ediciones UNESCO. Madrid. España.
- Van-Hiele, P. (1986). *Struture and insight: A Theory of Mathematics Education*. Academic Press.

TAREAS DE APRENDIZAJE Y HABILIDADES DE VISUALIZACIÓN A PARTIR DEL CÁLCULO DE VOLÚMENES

Catalina Molano Carranza*

Hildebrando Díaz Soler**

ebenezercata@hotmail.com, hildebrandodiaz@hotmail.com

Institución Educativa Rural Departamental Cacicazgo Colombia*

Institución Educativa Gustavo Romero Hernández, Colombia**

Resumen

En este trabajo se presentan los resultados obtenidos de una actividad relacionada con la aproximación al concepto de volumen desarrollada por 8 grupos de estudiantes de grado noveno en dos sesiones de trabajo del área de matemáticas en la Institución Educativa Rural Departamental Cacicazgo de Suesca Cundinamarca. El objetivo primordial de esta propuesta se centró en describir algunas habilidades de visualización y el tipo de tareas de aprendizaje del volumen puestas en juego por los estudiantes. Los principales referentes teóricos que se tienen en cuenta en esta investigación están relacionados con la enseñanza del volumen y la visualización que permiten evidenciar el papel que juega el estudiante en la construcción de su propio conocimiento, el rol del docente en crear ambientes de interacción en el aula que propicien y ayuden a la reflexión, discusión y concertación de significados con el fin de potenciar en los estudiantes su aprendizaje.

Palabras clave: enseñanza, aprendizaje, volumen, habilidades de visualización.

Introducción

La enseñanza de la geometría en la educación básica, permite diseñar situaciones concretas tomadas del contexto educativo mediante la exploración y la manipulación de objetos. Además, propicia la elaboración de diseños y maquetas, posiciones y transformaciones de figuras en diferentes perspectivas, que contribuyen a la construcción del espacio en su entorno físico, cultural, social e histórico, y a su vez, orientan a los estudiantes a reconocer y hacer uso de propiedades y conceptos geométricos.

El MEN (1998) menciona que la enseñanza de la geometría en la educación básica, sirve como una herramienta para interpretar, entender y apreciar diversas formas de figuras bidimensionales y tridimensionales presentes en el entorno. Dicho de otra manera, la enseñanza y aprendizaje de la geometría (EAG) propicia el desarrollo de habilidades espaciales como el razonamiento, la

comunicación, la percepción, la resolución y la orientación e intuición visual; también EAG, permite mejorar la capacidad para interpretar y manipular mentalmente la información visual que reciben los estudiantes de diferentes objetos físicos en relación a su contexto, entre otras.

También aduce, que el pensamiento espacial es "... el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones o representaciones materiales" (p. 56).

Esta investigación pretende dar mayor importancia al proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría, especialmente la relacionada con el componente espacial métrico. En este proceso se parte del diseño e implementación de actividades, que involucren la manipulación de sólidos, representaciones mentales de objetos bidimensionales y tridimensionales desde distintas perspectivas. También se propone el trabajo con la visualización, tareas relacionadas con la enseñanza y aprendizaje del concepto de volumen y el uso de algunos materiales educativos, que permitan potenciar habilidades de visualización del pensamiento espacial, y a su vez, aproximar a los estudiantes de grado noveno a la noción del volumen en sus diferentes apreciaciones de enseñanza.

Por tal razón, se hace necesario aplicar y desarrollar actividades que propicien el desarrollo del pensamiento matemático, partiendo de diversas experiencias que se relacionen con el contexto del estudiante y permitan mejorar los resultados de las pruebas externas Saber 9° en matemáticas, en la que se tienen en cuenta las competencias de comunicación, representación y modelación; razonamiento y argumentación; planteamiento y resolución de problemas, enunciando los conocimientos, capacidades y habilidades de los estudiantes, y a su vez, buscan evidenciar las significaciones que el estudiante ha logrado construir y que pone a prueba cuando se enfrenta con diferentes situaciones problema.

Referentes teóricos sobre la visualización matemática

A medida que el ser humano interacciona con su entorno hace uso de sus sentidos, en este caso, el sentido que cobra más relevancia para la construcción y formación de imágenes mentales es el de la vista, cada una de estas imágenes se van estructurando y organizando en la mente del ser humano con su devenir diario, y a su vez, la memoria va realizando asociaciones con imágenes mentales almacenadas con anterioridad.

Torres (2009) menciona que "(...) cualquier esfuerzo que implique comprender, analizar y explicar fenómenos de la vida cotidiana ha estado siempre presente la visualización, asociada fundamentalmente con los procesos de abstracción del ser humano" (p. 162). Por consiguiente, el ser humano establece una relación estrecha entre lo que percibe de su contexto (imágenes externas) y la mente (construcción interna) haciendo uso de sus sentidos; este proceso que realiza es conocido como visualización.

También aduce que:

“la visualización se considera una tarea del proceso comunicativo, por medio del cual se transforman los datos abstractos y los fenómenos complejos de la realidad en mensajes visibles, y que lleva a un proceso de descubrimiento del conocimiento” (p. 164).

De modo accesorio Zazkis, Dubinsky & Dautermann (1996) citado en Suárez y León (2016) presentan la visualización como “el acto que puede consistir en la construcción mental de objetos o procesos que un sujeto asocia con objetos o medio externos como el papel, la pizarra o la pantalla del ordenador o situaciones percibidas” (p.112).

Además, Buttenfield y Mackaness (1991) citado en Torres (2009), consideraron a “la visualización como el proceso de representar la información como una vista general de un todo, con el propósito de reconocer, comunicar e interpretar patrones y estructuras” (p.163)

Lo descrito con antelación ha generado que el hombre busque establecer conexiones entre el mundo real y las diferentes ramas de la matemática, permitiéndole desarrollar diferentes tipos de habilidades como: visuales, de dibujo y construcción, de comunicación, de orientación, de razonamiento y de modelización; a partir del reconocimiento de diferentes posiciones espaciales de su contexto.

Habilidades de visualización

Las habilidades de visualización son utilizadas por los seres humanos en diferentes contextos de su diario vivir. Estas son herramientas que hacen parte de la formación del pensamiento espacial del individuo. Gonzato & et al. (2013) declaran que “(...) el desarrollo de habilidades de orientación espacial y visualización de cuerpos geométricos se considera un objetivo valioso y necesario para cualquier ciudadano” (p.1).

Al mismo tiempo Gonzato & et al. (2013) mencionan que:

(...) la interpretación y la comunicación de la información de manera figural (con descripciones gráficas y modelos de hechos y relaciones espaciales) o verbal (vocabulario específico utilizado en geometría, expresiones y términos deícticos) son importantes habilidades relacionadas con la visualización y la orientación espacial.

La visualización permite al ser humano comunicar la información (a otros, o a si mismo) que observa de su contexto y a su vez interpretarla mediante el uso de representaciones materiales (fotos, esquemas, dibujos, planos, maquetas, entre otros) y mentales (objetos imaginados, pensados, entre otros) aportando a la construcción de su conocimiento y el de otros.

Se considera los aportes realizados por Torres (2009) haciendo referencia a que:

(...) la visualización apoya el sistema cognitivo del usuario, puede potenciar procesos humanos automáticos para el reconocimiento de patrones, apoya los procesos de soporte del aprendizaje y, a partir de representaciones externas, revela estructuras inherentes al conocimiento (de un individuo y de grandes cantidades de información), en función de ayudar a otras personas a adquirir un nuevo conocimiento (p. 163).

Tareas para el desarrollo de habilidades de visualización

Basándome en el trabajo expuesto por Gonzato, Fernández y Godino (2013, pp. 1-19) se resumen a continuación el tipo de tarea, descripción de las actividades, acciones y respuestas que los estudiantes ponen en juego cuando se enfrentan a diferentes tareas de aprendizaje con el fin de abordar la enseñanza de la visualización y el desarrollo de habilidades en el contexto de la geometría espacial.

Tabla 1

Tipo de tarea para el desarrollo de habilidades espaciales

TIPO DE TAREA: INTERPRETACIÓN DE PERSPECTIVAS DE OBJETOS TRIDIMENSIONALES

Descripción de la actividad	Requieren reconocer y cambiar puntos de vista (cambio de perspectivas), interpretar perspectivas de objetos, rotar mentalmente objetos, interpretar diferentes representaciones planas de objetos tridimensional (perspectivas, vistas,...), convertir una representación plana en otra, construir objetos a partir de una o más representaciones planas. Estas tareas construyen técnicas para representar un objeto o un espacio, y al mismo tiempo se aprende a leer diferentes tipos de representaciones planas y los códigos respectivos.
Acciones	De manera general: Reconocer, describir, fabricar o transformar objetos. Componer y descomponer en partes: dadas dos o más piezas componerlas para formar un sólido, o viceversa, dado el sólido descomponerlo en dos o más partes. Contar elementos: dado un sólido contar los elementos que lo componen (unidades de volumen, caras, aristas, vértices, etc.).
Respuestas	Construcción: si se requiere la construcción del objeto tridimensional. Dibujo: si se requiere una representación plana del objeto tridimensional. Identificación: si se requiere identificar la respuesta correcta entre más opciones. Verbal: si se requiere una respuesta verbal /numérica (que no exija ninguno de los anteriores tipos de repuestas).

Elaboración propia, teniendo en cuenta los aportes de (Gonzato & et al., 2013)

Diferentes puntos de vista sobre la enseñanza del concepto de volumen

El volumen puede concebirse de distintas maneras, algunas enfocadas a la representación del volumen como el espacio que ocupa un cuerpo en relación con otros objetos; otras con la comparación de unidades que forman un cuerpo y el volumen visto desde el espacio desplazado al sumergir un objeto en un líquido.

Anwandter-Cuellar (2012) menciona que la actividad geométrica a menudo se reduce al reconocimiento de objetos geométricos, su clasificación y la aplicación de fórmulas para realizar cálculos, sin tener en cuenta el objeto matemático volumen como un objeto independiente en sus dimensiones geométricas y físicas (p. 55).

A continuación, se mencionan diversos tipos de tareas para el volumen a partir de diferentes perspectivas teniendo en cuenta las contribuciones de Anwandter-Cuellar (2012, pp. 58-60), Estas serán utilizadas para el análisis de resultados en esta investigación.

Desde el punto de vista numérico – geométrico

Continuando con la clasificación de Moreira-Baltar (1994-1995) con respecto al área, él también vio el área como una grandeza

Tamaño del volumen

El volumen es una magnitud, es decir, es una característica común a los sólidos que se pueden medir. En este sentido, se asume un conjunto de sólidos y se establece una relación de equivalencia para definir el tamaño del volumen. La acción requerida en este aspecto se puede realizar teniendo en cuenta la estructura de orden, suma, resta y división sin recurrir a medidas.

Otras indicaciones para la enseñanza del objeto matemático volumen

En esta sección se menciona otro tipo de tareas para la enseñanza del volumen partiendo de lo expuesto por Olmo, Moreno & Gil (1993, pp. 115-139), clasificaciones que se tendrán en cuenta para el análisis de resultados. Se resumen a continuación en la siguiente tabla.

Tabla 2

Tareas de aprendizaje en la adquisición del concepto matemático volumen.

INDICACIONES PARA LA ENSEÑANZA DEL VOLUMEN

TAREAS DE APRENDIZAJE	Descripción	Tipo de actividades
	<u>Comparación</u>	Fijar la atención en dos o más cosas para reconocer sus diferencias y semejanzas y para descubrir sus relaciones.
	<u>Medida</u>	Se orienta a un número que muestra el tamaño o cantidad de algo.
	<u>Aritmetización</u>	Trata sobre la obtención del volumen de unos cuerpos en función de otros llamados unidades. Es el modo de calcular las áreas y volúmenes de forma práctica mediante el uso de fórmulas

Tabla elaborada con información tomada de Olmo, Moreno & Gil (1993, pp. 115-139)

Metodología de la Investigación

El desarrollo de esta investigación se centró bajo la perspectiva del enfoque fenomenológico interpretativo, el cual es un enfoque de la investigación cualitativa que permite explorar, describir, analizar y comprender las experiencias obtenidas por los estudiantes de manera individual y grupal en la actividad desarrollada.

A continuación, se destaca lo que proponen Hernández & Mendoza (2018) quienes manifiestan que los "(...) diseños fenomenológicos interpretativos tienen como propósito principal explorar, describir y comprender las experiencias de las personas respecto a un fenómeno y descubrir los elementos en común de tales vivencias" (p.548).

Vale la pena decir, que este enfoque propone analizar y comprender las descripciones que los estudiantes hacen de manera individual y colectiva desde su experiencia en el aula, partiendo de

una serie de actividades en las que se obtienen resultados, acciones y respuestas de transformación de un tema o área de conocimiento, con la finalidad de mejorar la enseñanza y generar en los estudiantes interacciones con el aprendizaje, entre sus pares y el docente.

El desarrollo de la actividad

Esta actividad se desarrolló en el aula de clase de matemáticas de la IERD Cacicazgo, se contó con la participación de 24 estudiantes que trabajaron en grupos de 3 integrantes en una sesión de clase de matemáticas de dos horas para el **R1**. Los grupos están abreviados por la letra G y su respectivo número al que corresponde. (G1, G2, G3, G4, G5, G6, G7 y G8)

Actividad 1. Aproximación al concepto de volumen

Reto 1. Comparando Construcciones parte I

1. Construyan torres diferentes utilizando todas las galletas rectangulares o circulares asignadas. ¿De todas las torres construidas, cuál ocupa mayor y menor espacio? ¿Por qué?
2. Ahora, elijan una de sus torres y con las demás torres reacomoden las galletas, de forma que sean semejantes a la torre que eligieron. ¿Qué pueden decir acerca del espacio ocupado?
3. Tome 2 barajas de cartas de póker y póngalas una sobre la otra en su pupitre, ubique las barajas en las diferentes posiciones como se muestra en las figuras, respondan las preguntas y justifiquen sus respuestas.



- a) El volumen de la Fig. 1., y la Fig. 4. ¿es igual o diferente? ¿Por qué?
 - b) ¿Cómo es el espacio ocupado por las barajas de póker en cada uno de los casos?
4. El sólido A se ha formado a partir de galletas iguales. Su volumen es $148,003 \text{ cm}^3$, su área lateral es $107,16 \text{ cm}^2$ y su área total es $170,14 \text{ cm}^2$. ¿Qué se puede decir del volumen, del área lateral y del área total de los sólidos B y C contruidos a partir de A?
 5. He comprado cuatro tacos de galletas Saltín, un taco contiene 17 galletas que colocadas una encima de la otra forman una altura de $8,5 \text{ cm}$. Una galleta mide $9,5 \text{ cm}$ de largo y 6 cm de ancho.



- a) ¿Necesito saber cuánto espacio ocuparan los 4 tacos de galletas en el mueble de mi cocina? ¿Expliqué como hago para calcular este espacio?
- b) ¿Cómo debería acomodar las galletas de tal manera que el espacio ocupado sea menor?



6. Coloca 12 galletas circulares una encima de la otra como harían para calcular el espacio ocupado por estas galletas. Justifique su respuesta.

A continuación, se muestra una descripción general sobre el tipo de tareas de aprendizaje volumen, habilidades de visualización, acciones y respuestas puestas en juego por los estudiantes en esta actividad.

Tareas de aprendizaje y habilidades de visualización A1-R1

Este reto se enmarca en las tareas de aprendizaje desde el punto de vista de comparación, medida y geométrica- numérica; de *comparación* (volúmenes) porque busca reconocer diferencias y semejanzas para deducir relaciones entre sí. De *medida* enfocada a la relación con el número, tamaño o cantidad de algo y desde la perspectiva *geométrica-numérica*, en este sentido se tiene en cuenta al volumen como un tamaño, Anwandter-Cuellar (2013) cita a Moreira-Baltar (1994-1995) resaltando que el área se puede comparar desde el punto del tamaño y esto aplica para el volumen por ser una magnitud que permite encontrar relaciones de equivalencia entre sólidos definiendo estructuras de orden, suma, resta y división sin recurrir a medidas.

El propósito de estas tareas consistió en acercar a los estudiantes hacia la construcción del objeto matemático volumen mediante diferentes actividades prácticas. También que ellos adquirieran la noción de volumen a través de la composición y descomposición de cuerpos con la manipulación de objetos concretos de diferentes formas, tamaños y texturas.

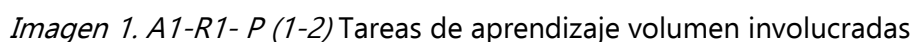
Tareas de aprendizaje de volumen R1

Para **P1 y P2.**, desde la perspectiva *geométrica-numérica*, cinco grupos hacen una relación de equivalencia de orden utilizando la acción del conteo de galletas, sin importar la posición en que se ubiquen las galletas si en cada torre elaborada hay igual cantidad de galletas el volumen es el mismo luego el espacio ocupado también. Tres grupos consideran que el volumen es diferente cuando se colocan todas las galletas cubriendo un plano aquí el espacio ocupado es mayor que cuando está en forma de torre.

En **P3a y P3b**, la relación de equivalencia la realizan por el número de barajas utilizadas, cuatro grupos dudaron en decir que el volumen era igual por la posición de las cartas en la fig. 4., cabe resaltar que la tarea desde el punto de vista es de tipo geométrico ya que se debe identificar si existe variación del volumen cuando se realiza una transformación geométrica. La concepción del tamaño del volumen en este caso está relacionada con la siguiente propiedad relacionada con la medición: "El volumen es invariable por isometría, en otras palabras, si aplicamos una isometría a un sólido, su volumen se conserva". Aquí interviene la docente haciendo preguntas a los grupos utilizando ejemplos de su contexto y al final ellos deducen que pasa lo mismo con las galletas sin importar la forma en que estén posicionados se mantiene el mismo volumen.

P4 y P5, Aquí cinco grupos de estudiantes siguen utilizando relaciones de equivalencia teniendo en cuenta el patrón de medida elegido y hacen uso de la aritmetización, a pesar de que se habían

En la tarea de *comparación* todos los grupos la asumen a través del conteo de las galletas y de las barajas de póker. Por otro lado, el G6 y el G1 también hacen uso de la tarea de *aritimización* haciendo uso de la fórmula, teniendo en cuenta las dimensiones de las galletas, taco de galletas, y de las barajas de póker y realizando el producto entre sus dimensiones cuando eran rectangulares.



5. ¿Cómo es el espacio ocupado por las barajas de póker en cada uno de los casos?
El espacio ocupado por las barajas es igual, ya que todas tienen el mismo volumen, el espacio varía el mismo sin importar la posición en las que están.
6. El sólido A se ha formado a partir de galletas iguales. Su volumen es $148,003 \text{ cm}^3$, su área lateral es $107,16 \text{ cm}^2$ y su área total es $170,14 \text{ cm}^2$. ¿Qué se puede decir del volumen, del área lateral y del área total de los sólidos B y C contruidos a partir de A?

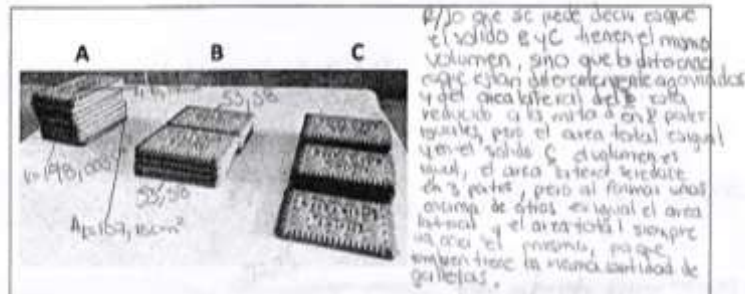


Imagen 3. A1-R1- P (4) Tareas de aprendizaje volumen involucradas

7. He comprado cuatro tacos de galletas Saltin, un taco contiene 17 galletas que colocadas una encima de la otra forman una altura de 8,5 cm. Una galleta mide 9,5 cm de largo y 6 cm de ancho.

a) ¿Necesito saber cuánto espacio ocuparan los 4 tacos de galletas en el mueble de mi cocina? ¿Explique como calcula este espacio?

b) ¿Cómo debería acomodar las galletas de tal manera que el espacio ocupado sea menor?

Respuesta: El espacio que ocupan las galletas será de $1,438 \text{ cm}^3$ en la cocina.

Para calcular este espacio, primero hago la medición de los lados de una galleta, luego las multiplico la base = el largo y el ancho, dando lo multiplico por la altura y el resultado dando lo multiplico por las 17 galletas del taco y luego multiplico el resultado dando por los 4 tacos y sumo todo el resultado $1,438 \text{ cm}^3$ es el espacio que ocupan las galletas en la cocina.

Debería acomodar los cuatro tacos de galletas una detrás del otro tal de tal manera que quedan en una fila.

Calculo:
 $A \cdot b = 57 \text{ cm}$
 $h = 9,5 \text{ cm}$
 $V = 28,5 \text{ cm}^3$
 $V_0 = 484,5 \text{ cm}^3$

Calculo:
 $1,438$
 $- 1,292$
 $0,146$

Imagen 4. A1-R1- P (5) Tareas de aprendizaje volumen involucradas

P6, Esta pregunta demostró dificultades y errores de tipo cognitivo seis grupos coinciden de una u otra forma que para determinar el espacio ocupado por las galletas de forma circular es necesario calcular el ancho largo de una galleta y luego se multiplica por la cantidad de galletas que conforman la torre. Es decir, asocian fórmulas del cálculo de áreas de algunas figuras planas para determinar el volumen.

Habilidades de visualización puestas en juego por los estudiantes de grado noveno A1.

En esta sección se muestran las habilidades de visualización, acciones y respuestas que los estudiantes utilizan en los diferentes retos.

Cabe resaltar que la A1 se enmarcan en el tipo de tarea para el desarrollo de habilidades espaciales propuesto por Gonzato & et al. (2013) clasificada en la interpretación de perspectivas de objetos tridimensionales. Es decir que este tipo de tarea permite al estudiante convertir un sólido en otro por medio de la composición y descomposición de sus partes, construir sólidos partiendo de unidades de patrón elegidas (conteo de elementos).

Habilidades de Comunicación. Esta habilidad requiere identificar relaciones entre distintas unidades de medida, unidades de la misma magnitud y determinar su pertenencia.

Las acciones que los estudiantes usaron para resolver la A1 en esta habilidad fueron a manera general:

- La mayoría de los grupos identificaron el cálculo de volúmenes utilizando la unidad de medida apropiada (uso de galletas, tacos y cubos) relacionándola en las situaciones planteadas en los retos
- Reconocieron que pueden utilizar diferentes unidades de medidas es decir tomando un patrón de medida como referencia y a partir de allí obtener el volumen de un sólido
- Por otro lado cuatro grupos solo reconocen esa magnitud como única unidad de medida y un grupo no reconoce la unidad de medida para la experiencia realizada, expresa solo cantidades numéricas.
- Algunos grupos presentaron dificultades en decir que los volúmenes no son los mismos, a sí se utilicen la misma cantidad de galletas, ellos perciben que si se cubre por pavimentación (usando galletas) una región esta ocupa mayor volumen y espacio que si se hacen torres de galletas
- El tipo de respuesta utilizado por los grupos de trabajo son de tipo verbal/ numérica y de construcción.

Habilidades de Razonamiento. Esta habilidad está relacionada con generalizar procedimientos de cálculo para encontrar el volumen de algunos sólidos esta habilidad se evidencia en las:

Acciones que los estudiantes usaron para resolver la A1 fue:

- G1, G6, G5, G3 y G7 justificaron la validez de sus procedimientos realizando representaciones, dibujos y construcciones con los sólidos, también de forma verbal, la obtención del volumen sus sólidos, aunque en algunos ítems tenían dudas en el transcurso de la sesión se fueron aclarando por el docente o por compañeros de otros grupos, en el momento de realizar la justificación de las respuestas de cada grupo (estilo tertulia) muchos de ellos lograron aclarar sus inquietudes.

Habilidades de Resolución. Esta habilidad concierne a establecer y utilizar diferentes procedimientos de cálculo para hallar medidas de volumen. Además, involucra tareas de medición utilizando de manera pertinente unidades de medidas.

Las acciones puestas en juego por los estudiantes para resolver la A1 fueron:

- Algunos grupos hacen uso de propiedades geométricas de manera implícita en el desarrollo de sus retos
- Reconocen que no existe un único patrón en unidades de medición, en esta caso para el volumen
- Usaron de manera pertinente los materiales utilizados en estos retos para determinar el volumen de los sólidos creados por ellos.
- Usaron varias estrategias para determinar el volumen de los sólidos, por medio de contar elementos, a través de las fórmulas es decir utilizan la aritmetización para obtener sus respuestas, componen y descomponen en partes los sólidos, entre otras.

Consideraciones finales

Se observa que a lo largo de la actividad se presentaron las habilidades de visualización la conversión entre registros semióticos de representación, así como el tratamiento al interior de algunos de ellos, pero todo el tiempo se evidenció la relación entre los registros, es decir, los estudiantes reconocieron que todos hacían referencia a la misma situación, proceso que resulta fundamental para comprender un objeto matemático, en consecuencia para enseñarlo y aprenderlo, ya que si no se relacionan todas sus representaciones se puede llegar a considerar que cada una se refiere a un objeto matemático distinto (Duval, 2006)

Referencias

- Anwandter-Cuellar, N. (2013). Conceptions d'élèves de collège sur la notion de volume. *Petit x*(93), 53-75.
- Beltrán, L. & Suárez, W. (2014). Proceso de visualización en geometría, perspectiva de género. Comunicación presentada en Encuentro Distrital de Educación Matemática. EDEME1 (pp. 198-217). Bogotá, Colombia: Prácticas y propuestas innovadoras en el aula de matemáticas: realidades y desafíos. MEMORIAS.
- Fernández, T. (2013, Septiembre 5,6 y 7). La investigación en visualización y razonamiento espacial. Pasado, presente y futuro. Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), 19-42.
- Fernández, T. (2014). Atendiendo habilidades de visualización en la enseñanza de la geometría. Memorias IX Festival Internacional de Matemática, 21-33.
- Gonzato, Margherita., Godino, Juan D., Contreras, Ángel y Fernández, Teresa. (2013, Septiembre 5, 6 y 7). Conocimiento especializado de futuros maestros de primaria sobre la visualización de objetos tridimensionales. Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. (SEIEM) , 311- 318.

- Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2010). Metodología de la investigación. México: McGRAW-HILL.
- MEN. (1998, Junio 7). Serie lineamientos curriculares Matemáticas. Lineamientos curriculares- Ministerio de Educación de Colombia. Santa Fe de Bogotá, D.C., Bogotá, Colombia: Magisterio. Retrieved Junio 27, 2018, from https://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-89869_archivo_pdf9.pdf
- MEN, Matriz de Referencia Matemáticas. Siempre día E. (2016). Retrieved from <http://aprende.colombiaaprende.edu.co/es/node/88958>: http://aprende.colombiaaprende.edu.co/ckfinder/userfiles/files/articles-352712_matriz_m.pdf
- Olmo, M.A. del , Moreno, M.F. & Gil, F. (1993). Superficie y volumen. ¿Algo mas qué el trabajo con fórmulas? Madrid: Síntesis, S.A.
- Suarez Moya, W. A., León Corredor, O. L. (2016, Julio- diciembre). El aprendizaje de la visualización espacial en niños y en niñas. Revista Horizontes Pedagógicos, 18(2), 110-119.
- Torres Ponjuán, D. (2009,, Diciembre). Aproximaciones a la visualización como disciplina científica. ACIMED, 20(6), 161-174. Retrieved 02 28, 2019, from http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1024-94352009001200005&lng=es&tlng=es.

USOS DE LA PENDIENTE EN PRÁCTICAS DE AGRICULTURA

David Esteban Espinoza*

Gabriela Buendía Abalos**

david.esteban@urp.edu.pe, buendiag@hotmail.com

Universidad Ricardo Palma, Perú*

Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa, México**

Resumen

El objetivo es analizar el uso de la pendiente a través de prácticas a nivel técnico en un contexto de agricultura andina. Se soporta en los constructos teóricos de la Teoría Socioepistemológica, la construcción del conocimiento matemático a través de prácticas, el uso del conocimiento. Es una investigación cualitativa; se realiza análisis documental de folletos de recuperación de andenes y edificación de construcción de canales de riego rural. En el contexto señalado se identifica el uso medir la pendiente (mp).

Palabras clave: Usos, pendiente, prácticas, contexto.

Introducción

En la construcción de terrazas y canales de comunidades andinas se desarrollan prácticas en el que se emplea la pendiente, las que permiten incrementar el área cultivable a través de la edificación de andenes. Los andenes son conocidos como "pata" en quechua y se edificaron mediante conocimientos y técnicas agrícolas ancestrales. Para edificar la terraza e irrigar los cultivos mediante canales se emplea la pendiente, estas prácticas son dejadas de lado para significar el conocimiento matemático.

Problema de investigación

En el discurso Matemático Escolar (dME), se da mayor importancia al manejo de sus elementos semióticos. Al respecto, en diversas investigaciones se refieren que los estudiantes presentan inconsistencias con los objetivos pretendidos desde lo escolar (Cruz, 2011; Dolores, 2004; Dolores, Alarcón y Albarran, 2002). Se privilegia aquél que se genera al seno de la institución escolar. Sobre esta forma de entender el dME, la Teoría Socioepistemológica crítica centrar el saber en el objeto matemático (Cantoral, 2013).

Algunos trabajos previos

Covián (2005) se plantea entender el papel que juega el conocimiento matemático de la cultura maya en la práctica de construir una vivienda tradicional. De la entrevista al Sr. Gilberto, un agricultor que no posee escolaridad surge la evidencia el conocimiento en uso sobre la pendiente; no en el sentido de los objetos matemáticos de lo escolar. Lo cual le permite elegir entre diversas inclinaciones del techo, para prevenir que el agua no penetre en la vivienda, por ello describe elementos como "inclinaciones y alturas".

Yojcom (2013) aborda el problema de reflexionar y entender la naturaleza epistemológica de los conocimientos matemáticos que posee la cultura maya. Recoge información de campesinos dedicados a la siembra de maíz y de mujeres tejedoras. La razón de considerar este trabajo como antecedente es por la evidencia que se muestra al comunicar la forma del conocimiento de este grupo humano, a través de la palabra, el signo, un relato o mito y no únicamente a través de los objetos y procedimientos de lo escolar.

El objetivo es analizar el uso de la pendiente a través de prácticas a nivel técnico de agricultura. Con ello también se pretende evidenciar, usuarios, y contexto que signifiquen el conocimiento

Aspectos teóricos

La Socioepistemología como perspectiva teórica permite estudiar la construcción del conocimiento situado (Cantoral, 2003), permite enfatizar en el aspecto social del conocimiento (Arrieta, 2003).

La Socioepistemología prioriza estudiar al ser humano usando y haciendo matemáticas y no solo analiza su producción matemática final (Buendía y Cordero 2005). Buendía (2012) refiere que a partir de reconocer que son las prácticas sociales las que norman la construcción del conocimiento matemático, se hace necesario reconocer también su manifestación a través de los usos en distintos escenarios, esto es; al centrar el interés por dilucidar los mecanismos de construcción del conocimiento, estos se mostrarán evidentes a través del uso del conocimiento. Es decir, será mediante los usos del conocimiento que se podrá determinar las *acciones*, las *actividades* y las *prácticas* sus características y componentes. Será en el seno de una epistemología de prácticas que se pondrá de manifiesto necesariamente el uso del conocimiento (Buendía, 2012). Más que interesarnos por lo que sabe el ser humano conoce, centrado exclusivamente en la adquisición de conceptos y procesos matemáticos, se debe poner en relieve cómo se usa el saber. Cordero (2016) enfatiza que el uso del saber tiene mucha más relación con una matemática escolar funcional y articulada. Fregueiro (2014) sostiene que el uso del conocimiento investiga el papel que determinados saberes matemáticos tienen en la construcción de conocimiento matemático.

Existe también el fenómeno que imposibilita al profesor y estudiante a cuestionar de modo crítico la matemática escolar limitándose a reproducirla fielmente, Cordero (2016) lo designa como el fenómeno de *adherencia* la cual resulta nociva e impide reconocer otras epistemologías.

Un elemento importante en la construcción del conocimiento social es reconocer lo que Buendía (2004) sostiene, que el conocimiento se construye y reconstruye en el contexto mismo de la actividad que realizan los grupos humanos organizados, al hacer, reproducir y comunicar el conocimiento. Sin embargo, cabe precisar que existen elementos que intervienen en el mecanismo de construcción social del conocimiento y constitución del saber, Cantoral (2013) lo resume del siguiente modo:

...se pasa de la *acción*, directa del sujeto (individual colectivo o histórico) ante el medio en tres acepciones (material o *entorno*, organizacional o *contexto*, social o *normativo*), esto se organiza como una actividad humana, para perfilar una práctica (iteración deliberada del sujeto y regulada por el contexto) ... (p. 155)

Aspectos metodológicos

La investigación es cualitativa, al enfocarse en entender las prácticas desde los participantes en su trabajo o actividad laboral, considerando vinculado a ese contexto (Hernández, Fernández y Baptista, 2010).

Es posible reconocer el *uso*, al identificar a su vez la participación de un usuario y el contexto donde se produce el *uso* (Cantoral, 2013).

Se procedió a realizar *análisis documental*, Ary, Cheser y Razavieh (1992) refieren que de este tipo de análisis se consigue información al examinar archivos o documentos. Se efectuó el análisis de las siguientes fuentes documentales:

- a) Cartilla: Construcción y manejo del nivel en "A" agronivel (Proyecto JALDA, 2003)
- b) Folleto: Construcción y uso del nivel "A"
- c) Folleto: Construcción de zanjas (Ministerio de agricultura y riego, Programa de desarrollo productivo agrario rural)
- d) Folleto: Medición de pendientes y trazado de curvas a nivel.

La obtención de datos se realizó a través de fichas y cuaderno de campo, mientras que se consideró a los *usos de la pendiente*, como unidad de análisis, en escenarios técnico de agricultura.

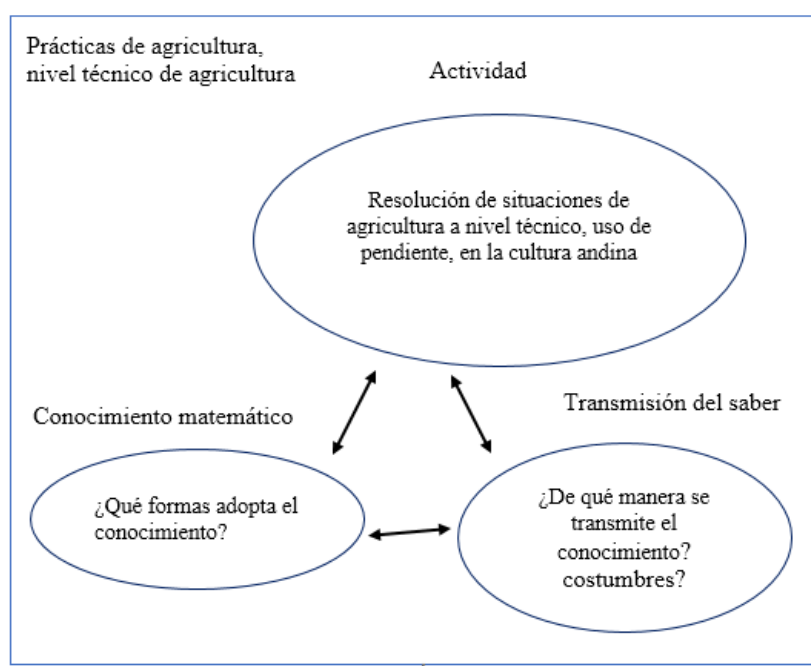


Figura 1. Criterios para examinar la unidad de análisis en la agricultura, nivel técnico.

Elaboración propia

Se operativiza el análisis a través de la malla (tabla 1)

Tabla 1

Malla de análisis

Qh _i	U _i	Q _i	Pq _i	I _i	H _i
¿Qué se hace?	Unidad que se pone en juego/ Cálculos que se ponen en juego.	¿Qué se dice de...? ¿Qué se encontró...?	¿Para qué te sirve? ¿Para qué lo quieres?	¿Inclinación?	Herramientas
Qh ₁	U ₁	Q ₁	Pq ₁	I ₁	H ₁

Elaboración propia

Para el análisis de prácticas se siguen las pautas del esquema metodológico (figura 2)

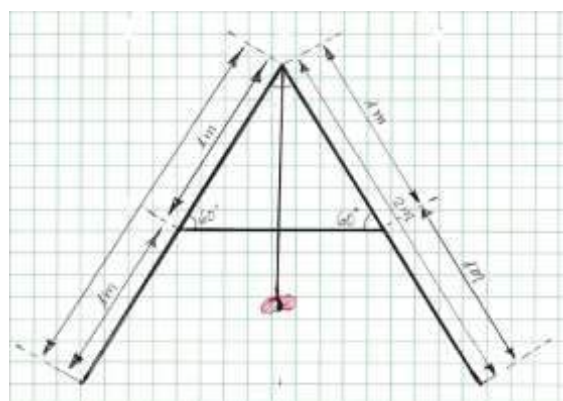


Figura 2. Esquema Metodológico de Montiel y Buendía (2012)

Resultados

Los resultados se organizan a través de la siguiente malla

Nivel en A

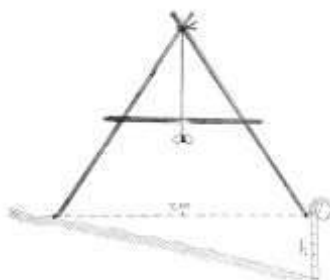


Herramienta

"Nivel en A"; dimensiones establecidas para su construcción.

Determinando la pendiente de la ladera

- a) Se ubica el nivel en A horizontalmente, apoyando uno de sus extremos sobre el suelo y siguiendo la pendiente que se desea determinar, a través de una cinta métrica, se mide la altura h que existe entre el otro extremo del nivel A y el suelo. Esta medida se relaciona con una distancia de 100 m.



Por ejemplo, si se determina una altura $h = 20$ cm significa que en 2 m de largo hay una diferencia de 0,2 m (20 cm), por lo tanto, en 100 m, se tendrá:

$$(0,2/2) \times 100 = 10\% \text{ de pendiente.}$$

Determinando la pendiente del canal de riego

- b) Se coloca un "taquito" de 2 cm de altura a una de las patas para obtener una **caída** de 1%.

De 4 cm para que la **caída** de 2%.



Unidades
que se
ponen en
juego /
Cálculos
que se
ponen en
juego.

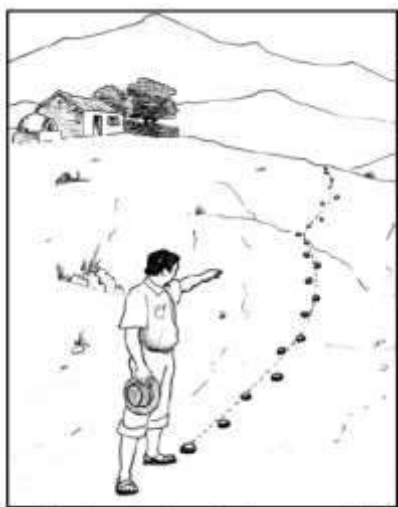
Qué se hace Se mide la pendiente

¿Qué se dice de? Es un indicador que permite decidir la conservación de suelos o construir canales para controlar el agua.

¿Para qué te sirve?	Para construir la terraza del andén.	Para trazar líneas con caída (pendiente mayor a 0%) en los terrenos faldíos (qhatas).
	Para trazar líneas sin caída (pendiente 0%) en los terrenos faldíos (qhatas), y así poder hacer conservación de suelos y aguas, a través del drenaje del agua.	Construir zanjas de coronación o desviación, canales de riego.
	Para edificar barreras muertas de piedra y tierra.	La finalidad es la evacuación de los excesos de agua.
	Terrazas de banco	



Trazando una zanja de coronación con 1% de caída.



Inclinación
de qué...

Suelo

Consideraciones finales

Se identificó el uso de la pendiente, *medir la pendiente* (m_p), su función está relacionado con establecer un indicador que permite decidir la conservación del suelo o el de construir canales de riego. Tomando función en el sentido de Castro – Kicuchi (2005) y funcionamiento en el sentido de Cordero (2016)

Considerando que el conocimiento tiene significados propios, contextos, e historia, considerando que la *resignificación* abre la posibilidad de enriquecer el significado de los conocimientos (Garcia-Zatti, 2007), incluso ligado a una continua significación que opera sobre el conocimiento matemático. El *uso del conocimiento* tiene mucha más relación con una matemática escolar funcional y articulada (Cordero, 2016).

Como resultado de este análisis, se busca formular una explicación acerca de la problemática relacionado al estudio de la pendiente; como base para el rediseño del discurso Matemático Escolar.

Referencias

- Ary, D., Cheser, L, & Razavieh, A. (1992). Introducción a la investigación pedagógica. (2da Ed.). México D.F.: McGraw-Hill.
- Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula* (tesis de doctorado). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional, México.

- Buendía, G. (2012). El uso de las gráficas cartesianas- un estudio con profesores. *Educación Matemática*, 24(2), 9-35.
- Buendía, G., & Cordero, F. (2005). Prediction and the periodic aspect as generators of knowledge in a social practice framework. A socioepistemological study. *Educational Studies in Mathematics*, 58(3), 299-333.
- Buendía, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en marco de prácticas sociales* (Tesis de Doctorado). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados. Instituto Politécnico Nacional.
- Castro-Kikuchi, L. (2005). *Diccionario de las Ciencias de la Educación*. Lima: Ceguro.
- Cruz, J. (2011). *Estudio del discurso escolar de la pendiente* (tesis de maestría). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional, México.
- Cordero, F. (2016). Modelación, funcionalidad y multidisciplinaridad: el eslabón de la matemática y el cotidiano. En J. Arrieta y L. Díaz (Eds.), *Investigaciones latinoamericanas de modelación de la matemática educativa* (59-88). Barcelona, España: Gedisa.
- Dolores, C. (2004). Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas: concepciones de los estudiantes de Bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 7(3), 195-218.
- Dolores, C., Alarcón, G., & D. F. Albarrán (2002). Concepciones alternativas sobre las gráficas cartesianas del movimiento: el caso de la velocidad y la trayectoria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 5(3), 225-250.
- Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa: Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona: Gedisa.
- Covián, O. (2005). *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional: el caso de la cultura maya* (tesis de maestría). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional, México.
- Fregueiro, M.A. (2014). *Usos y resignificación del número real en la obra matemática de René Descartes* (tesis de maestría). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada – Unidad Legaria. Instituto Politécnico Nacional.
- Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación*. (5ta ed.). México. D.F.: Mc Graw Hill.
- Ministerio de Agricultura y Riego. (s.f.). *Construcción de zanjas*. Lima: Ministerio de Agricultura y Riego - Programa de Desarrollo Productivo Agrario Rural. Obtenido de: http://agroaldia.minagri.gob.pe/biblioteca/download/pdf/manuales-boletines/suelos/2014/construccion_zanjas_puno.pdf

- Montiel, G., & Buendía, G. (2012). Un esquema metodológico para la investigación socioepistemológica: Ejemplos e ilustraciones. En A. Rosas & A. Romo (eds.), *Metodología en matemática Educativa. Visiones y reflexiones* (pp. 61-88). México: Lectorum.
- Proyecto JALDA. (2003). *Construcción y manejo del nivel en "A" agronivel*. La Sucre: Proyecto JALDA.
- Yojcom, D. (2013). *La epistemología de la Matemática Maya: una construcción de conocimientos y saberes a través de prácticas* (Tesis de Doctorado). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados. Instituto Politécnico Nacional.

¿CUÁLES COMPETENCIAS DIGITALES FAVORECE DESARROLLAR EL CONCURSO FOTOGEBRA?

Karina Amalia Rizzo*

Viviana Angélica Costa**

karinarizzo71@gmail.com, vacosta@ing.unlp.edu.ar

ISFDyT 24, Bernal, Quilmes, Argentina*

INSP Socorro, Quilmes, Argentina*

Instituto Sagrada Familia, Quilmes, Argentina*

IMApEC, Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, UNLP, Argentina * y **

Resumen

En este reporte de investigación se relatan las bases de un concurso llamado FotoGebra que combina matemática, con fotografía y GeoGebra. Esta actividad extracurricular, iniciada en Argentina y destinada a estudiantes de escuelas secundarias y de Profesorados, invita a los participantes a crear un problema a partir de una fotografía por ellos seleccionada, que insertan en GeoGebra y utilizando el software lo resuelven. Luego se hace referencia a las competencias digitales, sugeridas en el marco del plan Aprender Conectados, una política integral de innovación educativa Argentina, cuya misión principal es integrar la comunidad educativa en la cultura digital. En este marco se reflexiona sobre cuáles competencias digitales permite desarrollar en los participantes el concurso FotoGebra. Finalmente se concluye que este estilo de propuestas permite a los estudiantes desarrollar varias de las competencias digitales además de propiciar modos no tradicionales de hacer matemática.

Palabras clave: Matemática, GeoGebra, competencias digitales, concurso.

Introducción

Estamos transitando tiempos de profundos cambios en la sociedad, las Tecnologías de la Información y de la Comunicación (TIC) se instalan en nuestro accionar diario y cambian el modo de comunicarnos, de transmitir la información y las formas de enseñar y de aprender. La sociedad digital exige nuevas competencias y conocimientos para los diferentes empleos que van surgiendo. Según la agenda del 2030 para el desarrollo sostenible aprobada por la ONU (2015) la expansión de las TIC y la interconexión mundial acelera el progreso humano y propicia el cumplimiento de cada uno de los 17 Objetivos de Desarrollo Sostenible de las Naciones Unidas

(ODS). Para cumplir con estos es indispensable que la sociedad digital incluya a todos los habitantes sin distinciones. En este mismo sentido la Unión Internacional de Telecomunicaciones (UIT) y la Organización Internacional del Trabajo (OIT) están dirigiendo la campaña "Aptitudes digitales para el empleo digno", cuyo objetivo es dotar a cinco millones de jóvenes, hombres y mujeres, de competencias digitales para el empleo antes de 2030, constituyéndose ésta en la primera iniciativa global en todo el sistema de las Naciones Unidas destinada a fomentar el empleo juvenil en todo el mundo. También la UNESCO (2018) menciona la importancia de las competencias digitales para el empleo y la inclusión social, que facilitan el uso de los dispositivos digitales, las aplicaciones de la comunicación y las redes para acceder a la información y llevar a cabo una mejor gestión de éstas.

En Argentina, el Ministerio de Educación de la Nación (2017), en concordancia con la ODS, elabora un documento en el que indica la necesidad de promover la alfabetización digital centrada en el aprendizaje de competencias y saberes necesarios para una inserción plena en la cultura contemporánea y en la sociedad del futuro. Además, propone la necesidad de integrar las TIC en las prácticas de enseñanza y de aprendizaje que garanticen una educación de calidad, equitativa e inclusiva, desde una mirada que no esté solo centrada en las tecnologías, sino en todo el espectro de la dinámica social y en la innovación pedagógica.

En este contexto, se analizan las competencias digitales (Ministerio de Educación, 2017) que propicia desarrollar un concurso, denominado FotoGebra, que combina la fotografía, la tecnología y el hacer matemática valiéndose del dinamismo del software GeoGebra.

El objetivo del trabajo es difundir este concurso además de mostrar cómo es posible generar propuestas innovadoras que colaboren en el desarrollo de competencias digitales en escenarios fuera del aula y en los que el estudiante aprende a aprender en forma autónoma.

Competencias digitales

Se entiende por competencias a la integración de conocimientos, habilidades y actitudes de forma que capaciten a las personas para actuar de manera efectiva y eficiente: "saber", "saber hacer" y "saber ser". El "saber" es el que interactúa con las competencias vinculadas con el conocimiento, el "saber hacer" es la competencia vinculada con la aplicación de dicho conocimiento y el "saber ser" es la competencia social representada a través de actitudes y conductas. Desde hace unas décadas se espera en las instituciones educativas que sus egresados adquieran no sólo conocimientos, si no también esas competencias (Le Deist y Winterton, 2005).

En particular, las competencias digitales son aquellas que tienen por misión principal integrar la comunidad en la cultura digital. En un contexto educativo el objetivo es "proveer una educación integral, permanente y de calidad que permita a los estudiantes resolver problemas, crear oportunidades y cambiar el mundo" (Ministerio de Educación, 2017).

Las competencias digitales permiten crear e intercambiar contenidos digitales, comunicar y colaborar, así como dar solución a los problemas con miras al alcanzar un desarrollo eficaz y

creativo en la vida, el trabajo y las actividades sociales en general.

A continuación, se detallan las seis competencias digitales que propone fomentar el Plan Aprender Conectados (Argentina) para facilitar la inclusión de los estudiantes en la cultura digital (Tabla 1).

Tabla 1

Competencias digitales

Competencias digitales	
Creatividad e innovación	-Identificar e integrar prácticas culturales emergentes que enriquecen los modos habituales de producción para generar nuevas ideas, procesos o proyectos. -Producir creativamente en tantos sujetos singulares y en forma grupal. -Apropiar las TIC como medios para construir espacios de imaginación y fantasía.
Comunicación y colaboración	-Entender y conocer el ciberespacio como ámbito de socialización, y de construcción y circulación de saberes; conocer sobre su funcionamiento y posibilidades, logrando interactuar con responsabilidad, creatividad y respeto a la diversidad. -Crear y comunicar solos o en colaboración con otros, a través de múltiples lenguajes de representación, incluyendo imágenes, textos, sonidos y simulaciones. -Expresar con confianza y claridad en los diversos formatos y estilos de comunicación digital, teniendo en cuenta el tipo de mensaje por construir y sus destinatarios. -Valorar, compartir, participar y producir en la construcción de saberes en forma colectiva, integrando espacios físicos y virtuales en las prácticas de enseñanza y aprendizaje.
Pensamiento crítico	-Identificar y definir interrogantes significativos para investigar, en relación con su contexto sociocultural. -Planificar y organizar actividades y proyectos como parte de estrategias para solucionar problemas. -Seleccionar, analizar e interpretar datos de diversos modos y con distintas perspectivas para identificar e implementar posibles

	acciones.
Uso autónomo de las TIC	-Entender cómo funcionan las TIC, incluyendo diversos sistemas, aplicaciones, redes y medios digitales. -Conocer la relación entre las TIC y las necesidades sociales, pudiendo identificar su aplicación a la vida cotidiana tanto dentro como fuera de la escuela. -Seleccionar y usan herramientas adecuadas, según las tareas y los formatos en que se desee trabajar. -Investigar y resolver problemas con las diversas aplicaciones que utilizan. -Transferir el conocimiento previo para aprender a usar nuevos recursos. -Comprender aspectos relacionados con la interacción entre el hombre y los entornos digitales, incluyendo distintas experiencias en mundos virtuales.
Participación responsable y solidaria	-Promover y practicar el uso responsable y solidario de la información y de las TIC, incentivando la convivencia y el respeto en el ciberespacio. -Integrar lo local y lo global, valorando la diversidad, como ámbito de socialización y aprendizaje. -Participar a través de sus propios relatos y de la interacción con otros, en la creación de una visión crítica y constructiva del mundo, promoviendo el compromiso cívico. -Conocer y reflexionar sobre los modos en que pueden proteger sus datos personales y la información sobre sus prácticas o recorridos en internet. -Desarrollar una actitud ética en relación con aspectos legales de la información.
Información y representación	-Explorar el ciberespacio y otros entornos digitales, promoviendo la improvisación y el descubrimiento. -Ubicar, organizar, analizar, evaluar, sintetizar, usar y reelaborar de modo crítico la información de diversas fuentes y medios, entendiendo las características y la retórica de lo digital. -Valorar las fuentes a través de un análisis complejo sobre el

	enunciador, el discurso presentado y su contexto. -Desempeñar con confianza en la multitarea, entendida como la capacidad de focalizar en lo que se necesita en momentos adecuados, realizando en paralelo diversas tareas, para abordar los múltiples requerimientos e información que se presenta. -Desarrollar la capacidad para interactuar de manera significativa con recursos digitales que expanden las facultades mentales.

Fuente: propia. Adaptado de Ministerio de Educación, 2017.

A continuación, se describe el concurso denominado FotoGebra para luego identificar cuáles competencias digitales estaría propiciando en sus participantes.

Concurso FotoGebra

Este concurso se inicia en el año 2016, con una periodicidad anual, en el interior de dos instituciones educativas de la Provincia de Buenos Aires (Argentina), con la intencionalidad de promover el interés hacia el estudio de la matemática, partiendo del lema: "Atrapa con tu foto un concepto matemático, si puedes...".

La actividad a realizar por los participantes (en grupos de dos o individual) del concurso consiste en que tomen una fotografía, la inserten en la Vista Gráfica del software GeoGebra, diseñen una situación problemática que la involucre y utilizando este software puedan dar respuesta al problema.

Es decir, que la propuesta es hacer matemática, con tecnología, combinando fotografía y GeoGebra, un software de geometría dinámica, libre y multiplataforma, que ha sido concebido en especial para favorecer la educación matemática y tal como menciona Carrillo (2012) su utilización en el aula de matemática es imprescindible, pues permite realizar construcciones que en lápiz y papel no podrían estar realizándose.

Los objetivos con los que se crea el concurso son:

- Despertar el interés de los alumnos hacia la matemática
- Potenciar el aprendizaje de la matemática a través del uso de GeoGebra.
- Relacionar los contenidos del área con la realidad circundante.
- Reflexionar críticamente sobre situaciones planteadas en la vida cotidiana, representada en este caso en la fotografía.
- Promover el desarrollo de competencias matemáticas de resolución de problemas.
- Estimular la creatividad y la capacidad para expresarse.
- Fomentar el trabajo en equipo.

El concurso tiene varias etapas, que se describen a continuación. En primera instancia se difunde

en las redes sociales, en talleres, y en los espacios educativos. Sus bases son: la inscripción al concurso es gratuita y tiene sólo fines educativos, pueden participar todos los alumnos del Nivel Secundario (ES) y estudiantes de Profesorados, de la República Argentina, aunque en la última edición se abrió a escuelas de España. En función del año que curse, se establecieron las categorías:

- Categoría 1: Alumnos 1º, 2º y 3º ES.
- Categoría 2: Alumnos 4º, 5º y 6º de ESS.
- Categoría 3: Alumnos de 1º y 2º año de Profesorados.
- Categoría 4: Alumnos de 3º y 4º año de Profesorados.

En la I Edición del Concurso (2016) participaron todos los estudiantes de educación secundaria de dos instituciones educativas de gestión privada del distrito de Quilmes. En la II Edición (2017) participaron estudiantes del Ciclo Básico y Ciclo Superior Orientado de los Servicios Escolares de Nivel Secundario de las Región educativa 1 y 4 de la Provincia de Buenos Aires. En la III Edición (2018) participaron estudiantes del Ciclo Básico y del Ciclo Superior Orientado de los Servicios Escolares de Nivel Secundario y de los Institutos de Formación Docente de todo el país (Argentina).

Los participantes se inscriben completando un formulario en Google e indicando el enlace del recurso en GeoGebra que crearon para este fin. Los recursos subidos deben adecuarse a las normas de presentación siguientes: los trabajos deben ser realizados por grupos de 2 estudiantes, un mismo estudiante no podrá pertenecer a más de un grupo, los dos estudiantes de una pareja deben pertenecer a la misma categoría y cada grupo podrá presentar como máximo 3 trabajos. Además, para la evaluación de las producciones entregadas en GeoGebra por los participantes, se convoca a varios especialistas en la temática, entre ellos se ha contado con la evaluación del profesor Agustín Carrillo (Embajador a nivel mundial del software GeoGebra) quienes evalúan las siguientes características con niveles entre 0 a 3, donde 0 es más bajo y 3 más alto. Se evalúa el diseño, la presentación de la obra, de la fotografía se considera su estética o equilibrio compositivo, originalidad o dinamismo, encuadre fotográfico. De la situación problemática, se evalúa la creatividad, el conocimiento /contenido matemático aplicado para su resolución y el manejo de GeoGebra.

De este modo, se obtiene para cada trabajo presentado subido a los Recursos de GeoGebra, un puntaje que da un ganador por cada categoría. También se creó una página pública de Facebook <https://www.facebook.com/FotoGebra/> donde se publican todas las producciones de los participantes, para que el público en general pueda votar con un "me gusta", y el más votado recibe una mención especial.

Es de destacar que previo al evento de premiación, se realiza una "muestra" con todas las fotografías presentadas, y todo aquél que visite dicho evento, puede votar la obra que considere. La producción más votada por el público que visita la muestra también recibe una mención

especial. Alguno de los ganadores se muestra a modo de ejemplo en la Figura 1.

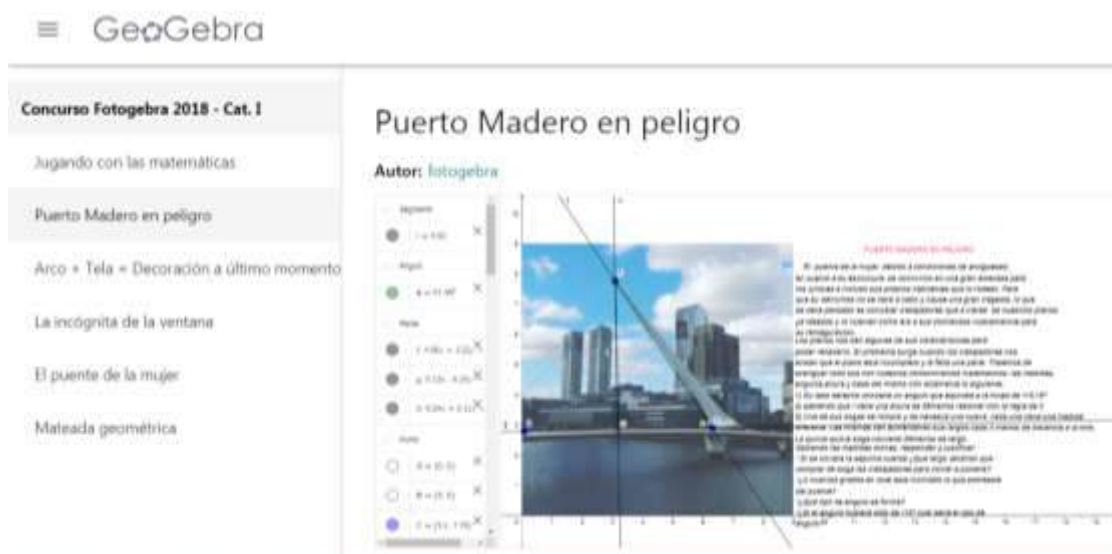


Figura 1: Trabajo presentado en la Categoría I de la Edición 2018.

Una vez finalizadas todas las instancias del concurso y de la evaluación, se da lugar en forma presencial y habiendo convocado a todos los participantes y evaluadores, a la premiación, que consta de una certificación y de un presente significativo. Así, se da por finalizado el concurso.

Análisis de las competencias digitales implicadas en el concurso

Para cada una de las competencias digitales mencionadas, se hace un paralelo sobre cuales aspectos del concurso antes detallados las propician marcando esto con una tilde en la Tabla 2. Luego esto se explica a continuación.

Tabla 2

Competencias implicadas por el concurso FotoGebra

Competencia digital	Etapas del concurso asociados a la competencia				
	Fotografiar	Proponer situación problema	Usar GeoGebra	Resolver	Comunicar respuesta
Creatividad e innovación	✓	✓			
Comunicación y colaboración	✓	✓			✓

Pensamiento critico	✓	✓		✓	
Uso autónomo de las TIC	✓		✓	✓	✓
Participación responsable y solidaria	✓		✓		✓
Información y representación	✓	✓			✓

Fuente: propia.

- La competencia “creatividad e innovación”, se vincula con “fotografiar” pues los participantes deben observar a su alrededor e identificar las prácticas culturales de su entorno, tomar libremente una fotografía de forma creativa además de usar la imaginación y fantasía. Esta competencia también se vincula con “proponer la situación problema” pues el participante debe crear una serie de preguntas e interrogantes que vinculen la foto con la situación que plantee.
- La competencia de “comunicación y colaboración” es propiciada por el concurso al “fotografiar” porque el participante comunica a través de imágenes el problema propuesto, con la etapa de “plantear la situación problema” y la de “comunicar respuesta” al comunicar solos o en colaboración con otros, a través de múltiples lenguajes de representación, que en este caso incluye imágenes, textos y posiblemente simulaciones.
- La competencia “pensamiento crítico” se propicia en la etapa de “fotografiar”, “plantear la situación problema” y en “resolver”, ya que los participantes deben tomar decisiones en esas etapas de modo crítico, investigar, resolver problemas usando aplicaciones y recursos digitales apropiados, además de identificar, seleccionar, analizar e interpretar los datos obtenidos de la fotografía y al resolver.
- La competencia “uso autónomo de las TIC” la propician las etapas de “fotografiar”, “usar GeoGebra”, “resolver” y la de “comunicar respuesta”, ya que los participantes deben para ello comprender el funcionamiento de las TIC para fotografiar, insertar la imagen en GeoGebra, investigar y resolver el problema utilizando las herramientas adecuadas de GeoGebra, y luego transferir el conocimiento construido creando un Recurso en GeoGebra.
- La competencia “participación responsable y solidaria” la propician las etapas de “fotografiar”, “usar GeoGebra” y la de “comunicar respuesta”, ya que los participantes integran la realidad en una imagen en forma responsable, utilizan GeoGebra (software libre) obteniendo una visión respecto a ello y con aspectos legales de la información, subiendo su Recurso al sitio, quedando disponible para ser usado por otros. Además, participan a través de sus propios relatos y de la interacción con otros, en la comunicación

de la respuesta.

- La competencia “información y representación” se propicia en las etapas de “fotografiar”, “proponer la situación problema” y al “comunicar la respuesta”, ya que los participantes deben buscar qué fotografiar, organizar y producir la información para plantear el problema, construir conocimiento, explorando para ello en el ciberespacio y otros entornos digitales, organizar y analizar de modo crítico información obtenida de diversas fuentes y medios, entendiendo las características y la retórica de lo digital. Además, al comunicar la respuesta como un recurso de GeoGebra que es de acceso libre y gratuito, el participante se acerca al entendimiento de la estructura, de los modos de producción y de circulación de los recursos en los entornos digitales. Esto último también compete al conocimiento de la distribución y al uso de contenidos, implicando comprender la realidad como representación, a partir de lo cual los mensajes y todas las construcciones del ciberespacio y otros entornos digitales no se pueden someter a un análisis simplista que sólo distinga entre verdaderos o falsos.

Conclusiones

En este trabajo se describe un concurso denominado FotoGebra que tiene por objetivo motivar a los participantes, jóvenes de entre 12 a 18 años y alumnos de Profesorado, a hacer matemática con TIC, combinando fotografía y GeoGebra. Se analizaron cuáles competencias digitales, propuestas por el Ministerio de Educación de la Nación Argentina en el marco que propicia el cumplimiento de los Objetivos de Desarrollo Sostenible de las Naciones Unidas, encontrándose que cada una de las etapas de FotoGebra propicia algunas de las competencias digitales, observándose además que quedan todas cubiertas. De este modo se considera que esta actividad en formato de concurso es una buena estrategia innovadora para dotar a los jóvenes de las habilidades relacionadas con las tecnologías digitales, que se han convertido en unas de las más valoradas para el desarrollo, la integración social y la construcción del conocimiento.

Como tareas a futuro se espera difundir FotoGebra a otros escenarios educativos tanto de Argentina, como de otros países, para acercar a más jóvenes a la posibilidad de participar. Además, se planea investigar sobre cuáles competencias matemáticas propicia el concurso y cómo el software GeoGebra ayuda para adquirirlas.

Referencias

- Almenara, J. C., & Cejudo, M. L. (2008). La alfabetización digital de los alumnos. Competencias digitales para el siglo XXI. *Revista portuguesa de pedagogía*, 7-28.
- Álvarez Manilla, J. M., Valdés Krieg, E. & Curiel de Valdés, A. B. (2006). Inteligencia emocional y desempeño escolar. *Revista Panamericana de Pedagogía*, 9, 9-33.
- American Psychological Association. (2009). *Publication manual of the American Psychological Association*. (6th ed.) Washington, DC: American Psychological Association. Viadero, D.

(2007, 19 de diciembre).

FotoGebra <https://www.geogebra.org/u/fotogebra>

Le Deist, F. D., & Winterton, J. (2005). What is competence?. *Human resource development international*, 8(1), 27-46.

Murzynski, J., & Degelman, D. (1996). Body language of women and judgments of vulnerability to sexual assault. *Journal of Applied Social Psychology*, 26, 1617-1626. doi:10.1111/j.1559-1816.1996.tb00088.x

Ministerio de Educación de la Nación Competencias de Educación Digital. - 1a ed . - Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación, 2017. 32 p. ; 30 x 21 cm. ISBN 978-950-00-1202-7 1. Inclusión Digital. https://www.argentina.gob.ar/sites/default/files/competencias_de_educacion_digital_1.pdf

Ripani, M. F. (2011). Lineamientos Pedagógicos: Plan Integral de Educación Digital. (1.a ed.). Dirección de Incorporación de Tecnologías InTec. Ministerio de Educación, Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Recuperado de <https://docs.google.com/a/bue.edu.ar/file/d/0B-ZXVZOB0us3X2tKelhzalEOQIk/edit>

UIT Unión Internacional de Telecomunicaciones Recuperado el 8 de octubre de 2019 de: <https://www.itu.int/es/mediacentre/backgrounders/Pages/icts-to-achieve-the-united-nations-sustainable-development-goals.aspx>

ONU. (2015). Transformar nuestro mundo: La Agenda 2030 para el Desarrollo Sostenible, Resolución aprobada por la Asamblea General de las Naciones Unidas el 25 de septiembre de 2015.

UNESCO (2018). Las competencias digitales son esenciales para el empleo y la inclusión social. Recuperado el 8 de octubre de 2019 de: <https://es.unesco.org/news/competencias-digitales-son-esenciales-empleo-y-inclusion-social>

LA AUTORREGULACIÓN COMO POSIBILIDAD PARA APRENDER LÓGICA PROPOSICIONAL A TRAVÉS DEL AJEDREZ

Yorman Arley Isaza Agudelo

Neysy Catalina Londoño Misas

Luz Stella Mejía Aristizábal

jorman.isaza@udea.edu.co, neysy.londono@udea.edu.co, luz.mejia@udea.edu.co

Universidad de Antioquia, Colombia

Resumen

El presente informe de investigación da cuenta de la autorregulación como posibilidad para el aprendizaje de la lógica proposicional mediante el uso del ajedrez. Se toma como punto de partida la función que cumple el maestro, para que, desde la evaluación, los estudiantes aprendan a autorregularse. La pregunta que se pretende responder es: ¿cómo los estudiantes de básica secundaria aprenden a autorregularse? y ¿cómo desde la autorregulación y el uso del ajedrez aprenden lógica proposicional? La investigación se inscribe en un enfoque cualitativo y utiliza como método el estudio de caso. Las técnicas e instrumentos que se utilizaron para recoger la información fueron: la observación participante, el cuestionario y las actividades de formación. El análisis de contenido fue la técnica utilizada para el análisis de los datos. Para responder al objetivo se diseñó y aplicó una secuencia de enseñanza que además tenía como intención la identificación de las dificultades no sólo en el juego, sino también en la comprensión de la lógica proposicional. Los hallazgos dan cuenta de las dificultades y fortalezas de los estudiantes durante el proceso, así como de los aprendizajes adquiridos no sólo en el juego del ajedrez, sino también en los conceptos relacionados con la lógica proposicional.

Palabras clave:

Autorregulación, estrategias no convencionales, ajedrez, lógica proposicional.

Introducción

La educación básica primaria y secundaria en Colombia, tiene como objetivo la formación en competencias en el área de matemáticas, una de esas capacidades tiene relación con el desarrollo del pensamiento lógico matemático, por medio del cual el estudiante estará en capacidad de realizar inferencias de enunciados de cualquier índole o de la vida misma. No obstante, la realidad de la enseñanza de las matemáticas en la escuela es otra, pues desde la experiencia en las prácticas pedagógicas se evidencia que los estudiantes presentan dificultades en la comprensión de los

enunciados y por ende la capacidad de entender lógicamente dichos enunciados y de relacionarlos con su vida cotidiana.

Es importante resaltar que en los Estándares Básicos de Competencia y en los Lineamientos Curriculares de matemáticas, se hace alusión al desarrollo del pensamiento lógico y a la lógica matemática como tópicos fundamentales en la formación de los estudiantes, sin embargo, no es usual que se utilicen estrategias de enseñanza que potencialicen el desarrollo de la inteligencia lógico-matemática, es decir, no desarrollan la capacidad de comprender conceptos y relaciones basadas en un pensamiento lógico. Al respecto, en la investigación de Sala, Gorini y pravettoni (2015): *Mathematical problem-solving abilities and chess: an experimental study on young pupils*, los autores demostraron con un grupo de niños, que el juego del ajedrez, mejoraba considerablemente sus capacidades matemáticas, específicamente la resolución de problemas.

Los niños o jóvenes que juegan ajedrez tienden a desarrollar aptitudes y habilidades matemáticas; adicionalmente, el juego como actividad y herramienta enriquece el proceso de enseñanza y aprendizaje, ya que de esta forma estimula a los estudiantes a participar de dicho proceso y posibilita el mejoramiento del rendimiento escolar, ejercita el cerebro para que este desarrolle habilidades, destrezas y sea más activo a la hora de enfrentarse a cualquier situación matemática o de la vida cotidiana.

Por otra parte, la formación por competencias hace referencia a que el pensamiento crítico es una de las capacidades que el estudiante debe desarrollar, pues comprender el contexto, demanda su actuación con decisiones argumentadas y para ello es necesario que aprenda a analizar las diversas situaciones que la vida le presenta para buscar acciones de mejora frente a las dificultades.

No obstante, a pesar de que, desde el Ministerio de Educación, la escuela y la sociedad demanden la necesidad de una formación integral, en la práctica se evidencian otras realidades, específicamente, algunas estudiantes del grado undécimo de la Institución Educativa muestran apatía por las matemáticas. Al dialogar con ellas manifiestan que no ven utilidad alguna, ni necesidad de aprender lógica matemática pues no logran ver los aportes en la cotidianidad.

Por lo anterior, consideramos importante que los estudiantes fortalezcan su capacidad de resolver y desarrollar problemas por medio del razonamiento lógico-matemático, debido a que, al ser una construcción deductiva, no sólo, permite que se utilice en esta área específica, sino que puede ser implementado en su día a día para que su proceso educativo sea formativo.

Aspectos teóricos y metodológicos

La autorregulación de la enseñanza y el aprendizaje

De acuerdo con los planteamientos de Schunk y Ertmer (2000), la autorregulación es un proceso que tiene como intención formativa, el establecimiento de metas para la enseñanza y el aprendizaje, el desarrollo de la atención y la concentración en la instrucción, el establecimiento

de ambientes adecuados y productivos, el uso de recursos y tiempo de manera efectiva, la búsqueda de ayuda en el momento que se considere necesario y la satisfacción frente a los propios esfuerzos.

Por su parte Álvarez (2009), considera que la autorregulación comprende tres niveles: proactivo, interactivo y retroactivo. En el primer nivel, el docente en la interacción con el estudiante, ajusta la ayuda en la misma interacción que se produce como fruto de la actividad conjunta alrededor de un contenido en el aula (regulación interactiva); en el segundo nivel, el docente puede decidir ajustar algunos de los elementos del proceso de enseñanza y aprendizaje una vez finaliza la sesión en el aula y después revisar la planificación que había previsto, o la inclusión de alguna actividad posterior; en el tercer nivel, el docente puede decidir volver sobre algunos contenidos trabajados a lo largo del proceso de enseñanza y aprendizaje. Esta regulación, con un carácter más retroactivo, supone el diseño de actividades de retroalimentación después de la evaluación.

Enfoque y Tipo de Estudio

La investigación se inscribe en un enfoque cualitativo, porque de acuerdo con Sampieri, Fernández y Baptista, (2014): “estudia la realidad en su contexto natural, tal y como sucede, intentando sacar sentido de, o interpretar los fenómenos de acuerdo con los significados que tienen para las personas implicadas” (p. 34).

Se utilizó como método el *estudio de caso*, pues posibilita la interpretación de una situación educativa de la vida real en un contexto determinado. Según Stake (1998), el estudio de caso es “el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes” (p. 11).

Los participantes son un grupo de estudiantes del grado undécimo de una institución educativa pública de la Ciudad de Medellín, de ese grupo se seleccionaron cinco casos, porque decidieron participar libremente del estudio, además porque contaban con dificultades en matemáticas y específicamente en lógica proposicional.

Las técnicas e instrumentos que se utilizaron para recolectar la información fueron: el cuestionario de indagación inicial, observación participante y 4 actividades que se realizaron dentro del aula de clase relacionadas a la enseñanza de lógica proposicional a través del ajedrez (actividades de formación). El *análisis de contenido* fue la técnica que se utilizó para analizar la información, el procedimiento implicó la codificación, categorización y triangulación de la información.

Para responder al compromiso ético, la institución educativa y los estudiantes firmaron un consentimiento informado, en el que los investigadores informaron los objetivos de la investigación y se comprometieron a guardar la confidencialidad y utilizar los datos solo con fines académicos.

Resultados obtenidos

¿Cómo aprenden los estudiantes a autorregularse y qué saben de lógica proposicional y técnicas ajedrecistas?

El nivel proactivo se inicia indagando por lo que saben las estudiantes con respecto a la lógica proposicional y las técnicas ajedrecistas, se aplicó un cuestionario diagnóstico con la intención de indagar por esos conocimientos. El instrumento estuvo compuesto de preguntas y actividades direccionadas a la toma de conciencia sobre qué saben, sus fortalezas o dificultades.

Para dar cuenta de las fortalezas o dificultades que tienen las estudiantes sobre lógica proposicional se analizaron los resultados desde las subcategorías: simbolización de enunciados (proposiciones), conectores lógicos, valores de verdad de los conectores, deducciones a partir de los conectores y las proposiciones. En el mismo sentido, para la categoría técnica ajedrecista, las subcategorías de análisis fueron: ubicación posicional de las casillas, movimientos de las piezas y táctica ajedrecista.

Fortalezas y dificultades de las estudiantes en lógica proposicional

Específicamente en lo relacionado con la simbolización, se encontró que cuatro estudiantes respondieron de forma correcta los enunciados propuestos, un ejemplo de ello, es la respuesta dada por la estudiante E1, cuando se le pregunta por cómo simbolizar la expresión "No me gusta trasnochar ni madrugar" a lo que responde: " $\neg P \wedge \neg Q$ ", adicionalmente, por medio de la pregunta: "escriba los conectores lógicos que conozca con sus respectivas características" donde las cinco estudiantes lograron identificar tres conectores lógicos, que son; la conjunción, la disyunción y el condicional simbolizados respectivamente con " $\wedge, \vee, \rightarrow$ ", además, del complemento lógico la negación "no" simbolizada por " $\neg$ ".

Análisis del proceso de autorregulación de las estudiantes

A partir de este momento se inicia con el nivel interactivo donde las actividades que se proponen están relacionadas con las sugerencias dadas por las estudiantes para mejorar la comprensión de la lógica proposicional y la técnica ajedrecista, además, la idea era permitir que ellas eligieran que querían aprender y de este modo propiciar el desarrollo de la autonomía en su proceso de aprendizaje y de esta manera, se esperaba que aprendieran a autorregularse. Por ejemplo: la participante E2, expresó que: "¿Cómo podía saber dónde se debía mover siempre el caballo?" y de la misma manera, la participante E3 manifestó: "los movimientos de las piezas y sus nombres me confunden, y quisiera mejorar", otra pregunta de las participantes fue "¿cómo la táctica ajedrecista nos servirá para mejorar en matemáticas?" Estas dificultades y preguntas que de las estudiantes, se convirtieron en la posibilidad para que el maestro repensara las próximas

actividades de enseñanza.

Consideraciones finales

¿Qué tanto aprendieron de lógica proposicional las estudiantes y qué tanto aprendieron a autorregularse?

Como actividad final se aplicó un cuestionario para indagar sobre los conocimientos que adquirieron las participantes, específicamente la fase retroactiva, que de acuerdo con Álvarez (2009) es la fase en la que: "El docente puede decidir volver sobre algunos contenidos trabajados a lo largo del proceso de enseñanza y aprendizaje una vez acabada la actividad de evaluación. Esta regulación, con un carácter más retroactivo, supone el diseño de actividades de refuerzo después de la evaluación" (p.11).

Ahora bien, después de las actividades de refuerzo se encontró que las participantes presentaron mayor claridad en los conceptos, por ejemplo, la estudiante E2 a la pregunta: ¿qué entiende por lógica proposicional? responde que: *"es proporcionarle un valor lógico de verdad a cada proposición que se asigna y busca el valor de verdad"*.

Por su parte la participante E3 expresó que: *"La lógica proposicional es un lenguaje que lo puedo representar mediante símbolos, es una herramienta que me sirve para razonar y pensar, hasta para resolver problemas"* cuyo razonamiento va en el mismo sentido del autor, ya que la lógica puede pensarse como una forma de verificar el razonamiento según las relaciones existentes entre las premisas o razonamientos.

En este mismo cuestionario, se les pregunta por: de acuerdo a la siguiente configuración de piezas, juegan las blancas y ganan en tres jugadas. Responda lo siguiente:

1. Escriba las jugadas con las cuales ganaría las piezas blancas.
2. Enuncie las proposiciones que consideró en el literal a.
3. ¿Los conectores lógicos que utilizó para determinar las jugadas correctas y unir las proposiciones que valor de verdad tienen? Realizar tablas de verdad para los conectores en caso de haberlos utilizado.



Imagen 1. Configuración de las piezas.

A lo que la participante E2 respondió:

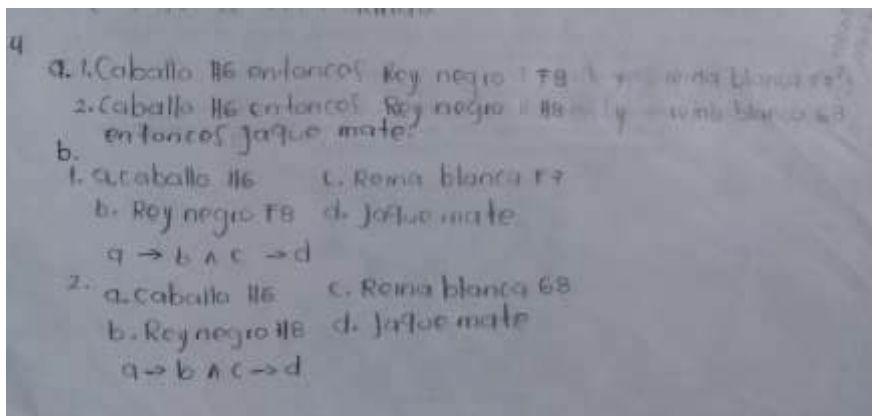


Imagen 2. Respuesta participante E2

Que de acuerdo con Gutiérrez (2000):

En la lógica proposicional, la interpretación de una fórmula viene dada por la interpretación semántica de las conectivas que contiene. Es decir, en la medida en que nuestras conectivas son funciones veritativas, una interpretación para el cálculo proposicional consiste en atribuir un valor de verdad a cada una de las variables proposicionales que componen una fórmula y evaluar según la interpretación semántica de las conectivas y el valor final de la fórmula (p.5).

En este sentido la respuesta que da la participante E2 es cierta y además resuelve la situación planteada que era dar *jaque mate*, además hace uso de los conocimientos que se trabajaron en clase, tanto del ajedrez como de la lógica proposicional.

Igualmente, le preguntamos a las participantes ¿cómo relacionarías el juego del ajedrez con las decisiones que una persona puede tomar en su día a día? para tener una claridad de cómo ellas podrían utilizar todo lo visto en clase en su vida cotidiana. Para esto la participante E5 nos dijo que: "Una persona antes de tomar una decisión debe tener en cuenta las consecuencias que esta lleva consigo, lo mismo pasa en el ajedrez, antes de mover una ficha se debe ver que eso no afecte

a otras fichas o incluso a sí misma, la decisión se debe tomar estratégicamente y al jugar ajedrez también” de modo que se evidencia la interiorización de los conceptos desde la utilidad y aplicabilidad, y además en la formación de sujetos conscientes de sus actos.

Para finalizar, no se vio la necesidad de realizar retroalimentación en los temas que ya se habían visto, ya que las respuestas que dieron las participantes para el último cuestionario que se realizó estaban en concordancia el marco teórico tal cual como se explicó en líneas anteriores, además se evidenció la eficacia de utilizar la autorregulación como estrategia para el aprendizaje en este caso de la lógica proposicional a través del ajedrez.

Uno de los aportes de este estudio, tiene relación con que los maestros comprendan la evaluación más allá de una nota cuantitativa que define qué tanto sabe un estudiante, es decir, que la asuman como una posibilidad para el aprendizaje y la autorregulación, desde la que se busca que los estudiantes sean conscientes de sus aprendizajes, de sus técnicas de estudio, de sus dificultades y cómo pueden superarlas.

Vale decir que aún se puede mejorar las actividades, se pueden ampliar los temas o vincular otros, que también puedan enseñarse desde ajedrez como, por ejemplo: lógica cuantificacional, teoría de conjuntos y matemáticas discretas tales como teoría de grafos.

Le recomendamos a los profesores del área de matemáticas buscar la posibilidad de alejarnos de las clases magistrales, que en ocasiones se convierte en tedio para los estudiantes y promover actividades diferentes que si bien están bajo la lupa de la evaluación se encuentra transversalizada por métodos no convencionales, brindándole a los estudiantes encontrarse con un espacio dedicado al juego relacionado con el aprendizaje.

Referencias

Álvarez Valdivia, I. M. (2009). *Evaluar para contribuir a la autorregulación del aprendizaje*.

Díez, J. A. (2002). *Iniciación a la Lógica*: Ariel.

Gutiérrez, G. A. (2000). *Introducción a la lógica*: Pearson Educación.

Sala, G., Gorini, A., & Pravettoni, G. (2015). Mathematical problem-solving abilities and chess: an experimental study on young pupils. *Sage Open*, 5(3), 2158244015596050.

Sampieri, R. H., Fernández, C., & Baptista, L. (2014). Definiciones de los enfoques cuantitativo, cualitativo, sus similitudes y diferencias. RH Sampieri, *Metodología de la Investigación*.

Schunk, D. H., & Ertmer, P. A. (2000). Self-regulation and academic learning: Self-efficacy enhancing interventions. In *Handbook of self-regulation* (pp. 631-649). Academic Press.

TEXTOS LITERARIOS PARA EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA

Ingrid Maritza Aquino Palacios

Marta Celinda Ríos Zea

inmarit@gmail.com, marizea@gmail.com

Universidad Nacional del Centro del Perú

Resumen

El trabajo de investigación nace con el objetivo de determinar la influencia de la producción de textos literarios (cuentos) en el aprendizaje de la matemática, en estudiantes de educación secundaria de la provincia de Huancayo y Jauja, por lo que se parte del siguiente problema, ¿Cómo influye los textos literarios en el aprendizaje de la matemática en estudiantes de secundaria de Institución Educativa de las provincias de Huancayo y Jauja? El tipo de investigación fue el tecnológico, y el diseño, pre experimental de un solo grupo sólo después. El método utilizado fue el científico y el bibliográfico documental, inductivo-deductivo entre otros. La conclusión principal arribada fue: se acepta la hipótesis nula y se rechaza la hipótesis alterna, significa que los textos literarios (cuentos) no influyen significativamente en el aprendizaje de la matemática, esto se demuestra en los resultados, deficientes obtenidos en la producción de textos literarios (cuentos) y también en la resolución de problemas matemáticos.

Palabras clave: Textos literarios, aprendizaje de matemática.

Introducción

Nos encontramos en una época moderna con la predominancia de la tecnología como el internet, las redes sociales y otros, si bien es cierto la tecnología trae avances significativos y el desarrollo de habilidades, a la vez limita el desarrollo de otras habilidades como la creatividad, el raciocinio y otros, debido a que en el proceso del aprendizaje que es la labor que preocupa a los docentes los estudiantes de esta nueva era generalmente dejan de lado ciertas potencialidades, puesto que las redes sociales, el YouTube y otros se convierten en elementos poderosísimos que contribuyen a la pasividad, el amedrentamiento, el facilismo, la memoria y etc.

Tenemos en nuestro contexto real estudiantes de secundaria que presentan problemas de lectura, redacción y la resolución de problemas matemáticos, en ese contexto a través del presente trabajo se pretende relacionar el aprendizaje de la ciencia de la matemática con el arte de la literatura, y la intención es proponer textos literarios para el aprendizaje de la matemática, por lo que se parte del siguiente problema:

¿Cómo influye los textos literarios en el aprendizaje de la matemática en estudiantes de educación secundaria de las provincias de Huancayo y Jauja?

La hipótesis principal planteada fue que la aplicación de los textos literarios influye positivamente el aprendizaje de la matemática de los alumnos de educación secundaria de las provincias de Huancayo y Jauja. La población estará conformada por estudiantes de Educación secundaria de las Instituciones Educativas de las provincias de Huancayo y Jauja y la muestra por estudiantes de tres instituciones educativas

El tipo de investigación es tecnológica, con un diseño experimental de un solo grupo.

Aspectos teóricos y metodológicos.

En el trabajo se utilizaron las siguientes definiciones:

Literatura. Es una expresión artística que se basa en el uso del lenguaje; de hecho, podríamos decir que es casi cualquier documento escrito (Real Academia Española, 2014).

Texto literario. Es el proceso cognoscitivo, por medio del cual se reconstruye, en la mente del lector, la información transmitida por el autor del texto, a través de un canal escrito, audiovisual o electrónico. Es captar el significado del texto, en el que juega un papel determinante la macroestructura textual.

Cuento. Es una narración que puede estar basada en hechos reales o ficticios y que contiene todo tipo de personajes. Existen diversos géneros de cuentos como los de hadas, los épicos, los históricos, los cuentos de fantasía, de fantasmas, entre otros. Su finalidad es transmitir oralmente una tradición, como se ve en narraciones folclóricas o simplemente narrar una historia cualquiera. Su finalidad, no debe incluir obligatoriamente alguna lección moral

Fábula. Son breves narraciones, cuyos personajes están constituidos por animales o plantas con características humanas. Su finalidad de estas historias es dejar algún tipo de lección o aprendizaje moral al lector para invitarlo a reflexionar acerca de un tema particular.

Aprendizaje. Es el proceso de adquisición de conocimientos, habilidades, valores y actitudes, posibilitado mediante el estudio, la enseñanza o la experiencia. Dicho proceso puede ser entendido a partir de diversas posturas, ello implica que existen diferentes teorías vinculadas al hecho de aprender. La psicología conductista, por ejemplo, describe el aprendizaje de acuerdo a los cambios que pueden observarse en la conducta de un sujeto. El proceso fundamental en el aprendizaje es la **imitación** (la repetición de un proceso observado, que implica tiempo, espacio, habilidades y otros recursos). De esta forma, los niños aprenden las tareas básicas necesarias para subsistir y desarrollarse en una comunidad.

El aprendizaje humano se define como el cambio relativamente invariable de la conducta de una persona a partir del resultado de la experiencia. Este cambio es conseguido tras el establecimiento de una asociación entre un estímulo y su correspondiente respuesta. La capacidad no es exclusiva de la especie humana, aunque en el ser humano el aprendizaje se constituyó como un factor que

supera a la habilidad común de las ramas de la evolución más similares. Gracias al desarrollo del aprendizaje, los humanos han logrado alcanzar una cierta independencia en relación a su entorno ecológico y hasta pueden cambiar éste de acuerdo a sus necesidades.

Metacognición. Es un instrumento de evaluación, permite que el estudiante realizar una reflexión para identificar sus limitaciones y los logros obtenidos durante el aprendizaje, con el objetivo de manifestar su compromiso de continuar con el apoyo para el logro del aprendizaje.

Aprendizaje de la Matemática. Según Fandiño, M. (2010), el aprendizaje de la matemática comprende, a su vez, cinco tipos de aprendizajes diferentes y que se encuentran combinados de diversas maneras, y son: el aprendizaje conceptual, el aprendizaje algorítmico. El aprendizaje de estrategias, el aprendizaje comunicativo y el aprendizaje y gestión de las representaciones semióticas.

Se utilizaron los siguientes materiales educativos: hojas bond, papelógrafos, masking, cartulina, plumones y mota.

La investigación fue de tipo tecnológica. Como método general se utilizó el método científico y como métodos específicos el bibliográfico-documental, para comprender y determinar el marco teórico, el inductivo-deductivo, porque el proceso metodológico utilizado nace de la ejemplificación para luego comprender el problema y resolver.

El diseño de la investigación es el pre experimental de un Grupo sólo después.

La población estuvo conformada por todos los estudiantes de Educación secundaria de la Institución Educativa La Victoria, Institución Educativa María Inmaculada e Institución Educativa José María Arguedas de Tunanmarca Jauja, durante el periodo académico 2018 y 2019. La muestra estuvo conformada por 22 estudiantes del segundo grado de Educación secundaria de la I.E La Victoria de El Tambo Huancayo, I.E. María Inmaculada de Huancayo, 30 estudiantes del cuarto grado de Educación Secundaria y 26 estudiantes de educación secundaria de la I.E José María Arguedas de Tunanmarca Jauja.

Para el procesamiento de la información se utilizó el programa estadístico SPSS versión 22 para evaluar los resultados finales.

Resultados obtenidos

Se desarrollaron las siguientes actividades, a fin de conocer mejor la realidad de los estudiantes muestra con relación a las dos variables: textos literarios y aprendizaje de la matemática, estos resultados nos permitieron preparar nuestras sesiones de aprendizaje, estrategias de enseñanza aprendizaje, materiales educativos e instrumentos de evaluación para la aplicación que fue durante el mes de agosto de 2018, hasta julio de 2019. La investigación se ejecutó en el distrito de El Tambo de Huancayo con los estudiantes del segundo grado de secundaria de La I.E. La Victoria, los materiales que se utilizaron fueron: pizarra, plumones, plumones, mota, papelógrafo, masking, hojas bond, etc.

Para la ejecución del trabajo de investigación primero se procedió a solicitar el permiso al director y docente de dicha Institución Pedagógica, luego se ejecutó el trabajo en dos horas pedagógicas (90 minutos) en el Segundo grado sección "B" turno de mañana.

En la primera situación de aprendizaje se desarrolló el diseño de sesión de aprendizaje N° 001 con el título de ***Identifiquemos problemas***. Se desarrolló la primera situación de aprendizaje siguiendo las siguientes actividades:

- Diálogo y narraciones de anécdotas de la vida real relacionados al tema con los estudiantes.
- Formulación de interrogantes

- Identificación del problema en la narración de las anécdotas.
- Determinación del problema
- Propuestas de alternativas de solución
- Planteamiento de un texto narrativo en un papelote
- Lectura del texto por parte de los estudiantes
- Formulación de interrogantes para la evaluación de la comprensión lectora.
- Explicación del texto narrativo: definición, estructura
- Identificación del problema
- Propuestas de alternativas de solución
- Ejecución de las propuestas de solución siguiendo las etapas de: Comprensión, concebir un plan, ejecución del plan y examinar la solución obtenida.
- Aplicación práctica
- Lectura de sus trabajos
- Ejecución de la propuesta de solución estudiada.
- Aplicación de ficha de metacognición

Esta actividad se ejecutó en un primer momento en 22 estudiantes del segundo grado de Educación secundaria de la Institución Educativa La Victoria de El Tambo Huancayo, luego en estudiantes del cuarto grado de Educación Secundaria de las I.E. María Inmaculada y posteriormente en la I.E. José María Arguedas de Tunanmarca Jauja. A continuación, se presentan los resultados obtenidos en comprensión lectora:

Tabla 1

Resumen de la comprensión lectora

INDICADORES	Muy bueno		Bueno		Proceso		Inicio		Total
	N°	%		%		%		%	
I.E. La Victoria	2	9	15	68	2	9	3	14	22
I.E. María Inmaculada	4	13	20	7	4	13	2	7	30
I.E. José María Arguedas	1	4	12	46	7	27	6	23	26

Fuente: archivo de las investigadoras.

Para la evaluación de comprensión lectora se utilizó como instrumento la lista de cotejo, de acuerdo a estos resultados se puede determinar que en la Institución Educativa La Victoria el 77% de los estudiantes están bien en comprensión lectora, mientras que el 23% de los estudiantes deben mejorar ciertas dificultades detectadas. En la I.E María Inmaculada el 20% de los estudiantes se encuentran bien en lectura, pero el 20% de las estudiantes presentan dificultad en la lectura. Por otro lado, en la I.E José María Arguedas de Tunanmarca el 50% de los estudiantes se encuentran en un nivel bueno, mientras que el 50% de otros estudiantes están en un nivel deficiente.

En relación a la variable producción de textos literarios (cuentos), para ver los resultados se utilizó la rúbrica, como instrumento, cuyos resultados se presentan a continuación:

Tabla 2

Resumen de producción de textos.

Instituciones			
Indicadores	La Victoria	María Inmaculada	José M. Arguedas
Título	54	78	38
Personajes	41	53	44
Extensión	36	50	39
Elementos	40	58	50
Problema	43	43	43
Acción	26	47	30
Solución	46	63	48
Organización	43	59	53
Ortografía	37	63	48

Creatividad	39	57	43
	405	571	436

Los resultados obtenidos divididos entre la cantidad de estudiante se obtienen como resultado de $405/22 = 19.03$, en la institución educativa la Victoria este resultado se ubica en el nivel de deficiente.

En la institución educativa María Inmaculada de $571/30 = 18.40$, este resultado se ubica en el nivel de deficiente. Por último en la institución de Tunanmarca se obtiene como resultado de $571/30 = 16,76$, este resultado se ubica en el nivel de deficiente.

En relación a la variable aprendizaje de la matemática, medidos como base en la resolución de problemas los resultados se detallan a continuación.

Tabla 3

Resumen de resolución de problemas

Indicadores	La Victoria	María Inmaculada	José María Arguedas
Comprensión	47	58	43
Plantear estrategia	43	43	35
Ejecución de estrategia	46	47	43
Análisis	32	35	29
Total	168	183	150

Fuente: *Archivo de las investigadoras*

En la institución educativa La Victoria el resultado es de $168/22 = 7,63$ este resultado se ubica en el nivel de suficiente, en María Inmaculada 6,1 este resultado se ubica en el nivel de deficiente; y en José María Arguedas 5,7 este resultado se ubica en el nivel deficiente.

Presentación, análisis e interpretación de resultados

En cuanto se refiere a la comprensión lectora, se trabajó con la lectura del cuento creado a través de la lectura oral y la evaluación de la lectura también fue en forma oral con la participación voluntaria y activa de los estudiantes, como era un cuento de 16 líneas, con un lenguaje sencillo y coloquial y directo la comprensión fue sencilla para el nivel en que se encuentran, por esa razón los resultados en su mayoría fueron satisfactorios es decir, bueno.

Los resultados obtenidos nos demuestran que hay deficiencias en producción de textos literarios en esta oportunidad se trabajó con la producción de cuentos, que corresponden a la variable textos literarios, la deficiencia más resaltante se encuentra en utilizar el problema dado, seguido por la creatividad, la acción, la extensión y la ortografía. Para el estudiante es complejo crear un cuento relacionado con el problema dado, luego se omite mucho la presencia de los diálogos y una pobreza lexical abundante, en relación a la extensión son muy breves y precisos e inclusive se les facilitó el trabajo, pero esto refuerza la preocupación de la pobreza caudal. Otro aspecto que es necesario resaltar que la mayoría de los cuentos creados no tienen término esto se debe a que no pudieron resolver los problemas matemáticos, y esto impidió para culminar con toda la estructura del cuento. Hay un porcentaje de estudiantes que inclusive también no consideraron el título a su cuento. Con estos resultados es necesario trabajar el campo de la producción de textos ya que deficiente significa partir de cero con el aprendizaje de los estudiantes.

Los resultados en cuanto a la resolución de problemas nos muestran que en un solo centro educativo se encuentran en un nivel suficiente, y los otros dos en nivel deficiente, ello impide obtener el resultado del problema y además si obtuvieron un resultado no logran verificar o comprobar que es el correcto y al mismo tiempo detectar los errores que pudieron cometer. Algunos estudiantes a pesar de haber resuelto el problema no son capaces de comunicar el resultado en el contexto presentado ya sea en forma verbal o escrita.

Un aspecto positivo que se logró en el desarrollo de las actividades son los resultados obtenidos al aplicar la ficha de metacognición, en relación a la interrogante: *¿Qué aprendí el día de hoy?* La mayoría respondieron que aprendieron a resolver problemas sin necesidad de hacerlo difícil y de diferentes maneras. *¿Dónde encuentro mi mayor dificultad?* La mayoría respondió que, en la comprensión de la lectura y otros en los problemas matemáticos, como también en la producción de textos. *¿Qué debo hacer para mejorar esta dificultad?* La mayoría responde que debe esforzarse más, y estar atenta a la docente y a practicar más.

Consideraciones finales

La influencia de los textos literarios (cuentos) no mejoró significativamente el aprendizaje de la matemática (resolución de problemas matemáticos), de los estudiantes de Educación secundaria de la provincia de Huancayo y Jauja.

Los resultados obtenidos en relación a la variable producción de textos literarios es deficiente en los estudiantes de Educación secundaria de las I.E. La Victoria, María Inmaculada y José María Arguedas.

Los resultados obtenidos, muestran que la variable aprendizaje de la matemática (resolución de problemas matemáticos) es deficiente en los estudiantes de Educación secundaria de las I.E. María Inmaculada y José María Arguedas.

Con los resultados obtenidos, se llega a la conclusión que los estudiantes del nivel secundario se encuentran en la etapa de proceso de desarrollo de las áreas de comunicación y matemática.

Referencias

Alonso J. Mateos (1985). *Comprensión lectora*. Barcelona: Editorial Grao.

Buron, J. (1993). *Enseñar a aprender: introducción a la metacognición*. Bilbao: Ediciones Mensajeros.

De Sá Tavares, D. (2018). *Cuál es la diferencia entre fábula y cuento*. Recuperado en <https://educacion.uncomo.com>

Fandiño, Martha (2010). *Múltiples aspectos del aprendizaje de la matemática*. Didácticas Magisterio

ANÁLISIS PRAXEOLÓGICO DE LA INTEGRAL DEFINIDA EN LIBROS DE TEXTO DE INGENIERÍA

Walter Orlando Gonzales Caicedo

Rosa Cecilia Gaita Iparraguirre

goncaiwo13@gmail.com, cgaita@pucp.edu.pe

Instituto de Investigación sobre Enseñanza de la Matemáticas, IREM-PUCP, Perú

Resumen

El presente trabajo forma parte de una investigación más amplia en donde se analiza el papel que cumple la Integral Definida en la formación de estudiantes de ingeniería química de una universidad nacional peruana. En particular, se identifican las praxeologías en las que interviene la Integral Definida y que se desarrollan en la disciplina matemática y en la disciplina intermedia con la profesión. Para ello, se analizan libros de texto de matemáticas y de cursos de la especialidad, teniendo en cuenta elementos teóricos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico que permiten describir una organización matemática, en la que se identifican tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías que sustentan los procedimientos llevados a cabo. Donde el uso de la Integral Definida tiene representaciones diferentes (variables) y sus significados son desde el margen de la disciplina intermedia con la profesión.

Palabras clave: Integral Definida, Teoría Antropológica de lo Didáctico, praxeología, disciplinas intermedias.

Introducción

De acuerdo con Castela (2016), cuando miembros de comunidad se trasladan a otra comunidad, estos llevan sus formas de actuar e interactuar, sus herramientas, normas y lenguaje interactuando de un sistema a otro. Así como los estudiantes transitan de una institución a otra, los saberes también circulan de una institución a otra. Es por ello que nos interesamos en identificar cuál es la razón de ser de la integral definida en la formación universitaria de estudiantes de ingeniería química, partiendo del supuesto que la respuesta dependerá de la institución en la que esta se ubique.

Para responderla en primer lugar, consideraremos la institución de la enseñanza de la matemática, materializada a través de los diferentes cursos de matemáticas que forman parte del plan de estudio de los estudiantes de ingeniería química. Se identifican los libros de matemáticas empleados en dichos cursos; se describe la forma en la que aparece la Integral definida,

explicitando los problemas, definiciones, teoremas y técnicas empleadas, así como la forma en la que se introduce un nuevo método de solución de un problema.

En una segunda etapa de la investigación, que no será descrita en esta presentación, se hará un estudio similar, pero considerando como institución a las disciplinas intermediarias con la profesión, tales como el libro de texto Físicoquímica y el libro de texto Principios elementales de los procesos químicos, en estos libros identificaremos los temas en donde se hace uso del concepto de la Integral Definida, las notaciones, interpretaciones, aplicaciones en los diferentes contextos de la ingeniería química.

Sería pertinente considerar praxeologías que involucren a la Integral Definida, en instituciones de enseñanza de las matemáticas, pero también en instituciones usuarias de este concepto, en particular, en la enseñanza de otras disciplinas intermedia con la profesión. Consideramos que un trabajo de investigación que identifique las praxeologías de la Integral Definida, en donde se consideren sus diversos usos para abordar problemas relacionados a la práctica profesional de un ingeniero, será de interés para la comunidad de investigadores de la disciplina científica didáctica de la matemática y podrá ser empleado para evaluar la comprensión matemática en escenarios similares donde se enseñe la Integral Definida.

Aspectos teóricos considerados en la investigación

En la Teoría Antropológica de lo Didáctico, Chevallard (1999) desarrolla un modelo para describir cualquier actividad humana a través de la noción de praxeología, según la cual en una organización matemática el saber se organiza en dos niveles: el nivel de la *praxis* o del *saber-hacer*, constituido por los tipos de tareas y las técnicas que se usan para resolverlas, y el nivel del *logo* o del *saber*, constituido por las tecnologías que son los discursos que describen, explican y argumentan las técnicas que se emplean.

Según lo anterior, en toda praxeología u organización matemática se identifican dos bloques o niveles: El nivel de la praxis o saber-hacer y el nivel del logo o del saber, estos dos niveles conforman un conjunto de tipos de tareas, técnicas, tecnología y teoría, que se representa por $[T, \tau, \theta, \Theta]$, es decir una praxeología.

Castela y Romo (2011), proponen un modelo praxeológico extendido donde consideran la unidad básica de análisis $[T, \tau, \theta, \Theta]$, así como tecnologías teóricas θ^{th} y tecnologías prácticas θ^p . De donde las tecnologías prácticas θ^p son obtenidas en las instituciones usuarias (I_u) y las instituciones productoras de saberes (P(S)) son las que justifican a las tecnologías teóricas θ^{th} .

Por otro lado, las autoras identifican seis funciones de la tecnología correspondiente al bloque práctico $[T, \tau]$, que se relacionan a describir, facilitar, motivar, evaluar, validar y explicar la técnica. En las instituciones usuarias se tiene que la θ^p no necesariamente requiere de demostración, los expertos desarrollan otros conocimientos de forma práctica basados en los usos continuos que realizan, es decir de la experiencia; donde los saberes son reconocidos y validados en la institución usuaria. De modo que, $[T, \tau, \theta^p, \Theta]$ es una generalización del $[T, \tau, \theta^{th}, \Theta]$ de la institución

productora de las matemáticas.

Una organización matemática, es decir una praxeología, es fundamental en los procesos de enseñanza y aprendizaje (Chaachoua, Bessot, Romo y Castela, 2019). Asimismo, para la organización y estructuración de la praxeología de una disciplina se debe a la confiabilidad y al alcance de las técnicas.

Los autores señalan también que al proponer una praxeología se debe tener en consideración la noción de generador de un tipo de tareas (GT) y de variables (V_i) ya que permite relacionar entre lo específico y lo genérico dentro de la organización de los tipos de tareas, además que generan un conjunto estructurado de subtipos de tareas.

Elementos metodológicos

Nuestra investigación es del tipo cualitativa, y se consideraron las siguientes etapas:

Etapas 1: Análisis de libros de textos sobre Matemática, en esta etapa se consideró las siguientes fases, Fase 1: Estudio epistemológico de la Integral Definida. Fase 2: Descripción de los libros de textos de Cálculo. Fase 3: Modelo praxeológico de referencia.

Etapas 2: Análisis de libros de textos sobre Ingeniería Química, en esta etapa se consideró las siguientes fases, Fase 1: Descripción de los libros de textos de la especialidad Fase 2: Modelo praxeológico de referencia en la disciplina intermediaria.

Con la finalidad de identificar el modelo epistemológico dominante sobre la Integral Definida en la institución de enseñanza de las matemáticas, se consideró necesario incluir una primera etapa en la que se revisaron estudios epistemológicos en torno a la Integral Definida.

En la segunda etapa se analizaron documentos curriculares de la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo tales como el plan de estudios de la carrera de Ingeniería Química, los programas de los cursos, identificando aquellos en donde la Integral Definida cumplió alguna función. Para verificar los hallazgos, se realizaron entrevistas a especialistas de la carrera de modo que indicaron que la asignatura de Físicoquímica I y la asignatura Principios de Ingeniería Química; se hace uso de la Integral Definida. Esto permitió identificar los textos matemáticos que eran empleados en la formación matemática de los estudiantes. Luego se procedió a realizar la descripción de los libros de textos seleccionados, para evidenciar los usos del objeto matemático Integral Definida en las diversas aplicaciones. En una última etapa, se propuso una organización matemática para la Integral Definida, siguiendo el modelo praxeológico y empleando la noción de variable en el sentido de Chaachoua, Bessot, Romo y Castela (2019). Esto permitió presentar de manera organizada tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías en relación de la Integral Definida.

Resultados obtenidos

En relación al estudio epistemológico realizado se encontró que, inicialmente la razón de ser de la Integral Definida estuvo asociada al problema del cálculo del área de una región plana (Bobadilla, 2012; Crisóstomo, 2012; Turégano, 1994; Cabañas, 2011). Los métodos propuestos en

las diferentes épocas para lograr dicho objetivo fueron el método de exhaustión de Arquímedes, el método de los indivisibles de Cavalieri, el método basado en la propiedad de las progresiones geométricas de Fermat, el método basado en la aritmetización en términos de razones geométricas de Wallis, el método de las transformaciones de Leibniz y el método basado en las cantidades que varían respecto de otras en relación a la variable universal el tiempo de Newton; esto visto desde un enfoque geométrico. Pero, luego se estudia la integral desde el punto de vista analítico, ya que usa un lenguaje algebraico-aritmético y de esta manera se independiza del geométrico y así la definición de la Integral Definida se da en términos de límites de una suma. Así tenemos como los trabajos de Cauchy, quien realizó un estudio basándose en límites, funciones continuas y convergencia, presenta una demostración del teorema fundamental del Cálculo. En el trabajo de Dirichlet, trabajó con funciones discontinuas y que no eran integrables desde la teoría desarrollada por Cauchy. Por otro lado, los trabajos de Riemann, que desarrolló una teoría ampliando los trabajos de Cauchy y de Dirichlet, en la que presenta la Integral Definida en términos de suma de límites, en la que consideró funciones acotadas y discontinuas, pero que son integrables. Darboux, quien presenta la Integral Definida en términos de límites máximos y mínimos, en la que consideró también aquellas funciones que forman un conjunto de medida y, por último, los trabajos realizados por Lebesgue, que presentó una definición, en forma analítica, de la Integral Definida, considerando condiciones establecidas y planteó una definición de la Integral Definida, partiendo de lo geométrico, a partir de la teoría de medida de los conjuntos.

En la segunda etapa se obtuvo que, de acuerdo a la programación curricular académica de la carrera de Ingeniería Química de la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo, se seleccionó los libros de textos que son usados como fuente bibliográfica en las asignaturas de Matemática Superior I. Al entrevistar a los docentes especialistas se encontró que el uso del concepto de la Integral Definida, tiene sus propias notaciones, interpretaciones y sus aplicaciones en los diferentes contextos de la Ingeniería Química. Asimismo, indicaron que la asignatura de Matemática Superior I es pre requisito para la asignatura de Física I, y Física I es pre requisito para la asignatura de Física II y está a la vez es pre requisito para la asignatura de Fisicoquímica I, y se optó por seleccionar los siguientes textos de matemática para ser analizados: Purcell, Varberg & Rigdon (2007); Edward & Penney (2008) y Larson & Edward (2010).

A continuación, se procedió a realizar la descripción de los libros de textos seleccionados, poniéndose en evidencia los usos del objeto matemático Integral Definida.

Para determinar de qué manera estaban organizados los libros de textos de matemática, se consideró el orden de los temas, se identificaron definiciones, teoremas, técnicas, así como aplicaciones de la Integral Definida; también se tuvo en cuenta si la introducción de un nuevo método o teoría era necesario. A modo de ejemplo, se presenta la descripción realizada para una sección de uno de los libros.

AUTORES	TÍTULO	EDITORIAL	CIUDAD	AÑO
Edwards, H. & Penney, D.	Cálculo con transcendentales tempranas	Pearson Prentice Hall	México	2008

5.4 Sumas de Riemann y la integral

- Sumas de Riemann.
- Definición: Sumas de Riemann.



Figura 19 Sumas de Riemann en términos de áreas de rectángulos (Edward & Penney, 2008, p. 341)

DEFINICIÓN Suma de Riemann

Sea f una función definida en el intervalo $[a, b]$. Si P es una partición de $[a, b]$ y S es una selección de P , entonces la **suma de Riemann** para f determinada por P y S es

$$R = \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i. \quad (3)$$

También se dice que la suma de Riemann está **asociada con** la partición P .

Figura 20 Definición de Sumas de Riemann (Edward & Penney, 2008, p. 342)

Donde se tiene que una partición P del intervalo $[a, b]$ es una colección de subintervalos de la forma $[x_0, x_1], \dots, [x_{n-1}, x_n]$, tal que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Además, S es una selección de puntos para la partición P , donde:

$$S = \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\}$$

con x_i^* que pertenece al i -ésimo subintervalo $[x_{i-1}^*, x_i^*]$.

- La integral como un límite.

- Definición: Integral Definida.

DEFINICIÓN Integral definida
 La integral definida de la función f de a a b es el número

$$I = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i, \quad (8)$$

siempre y cuando este límite exista, en cuyo caso decimos que f es **integrable** en $[a, b]$. La ecuación (8) significa que, para cada número $\epsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que

$$\left| I - \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i \right| < \epsilon$$

para toda suma de Riemann asociada con la partición P de $[a, b]$ para la cual $|P| < \delta$.

Figura 21 La Integral Definida (Edward & Penney, 2008, p. 345)

Se tiene que la Integral Definida se puede expresar como un límite, es decir:

$$I = \int_a^b f(x) dx = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i.$$

Figura 22 La Integral Definida como un límite (Edward & Penney, 2008, p. 345)

Teorema 1: existencia de la integral.

- Teorema 2: La integral como un límite de una sucesión.

- Cálculos de la suma de Riemann.

- Teorema de evaluación.

5.5 Evaluación de integrales

TEOREMA 1 Evaluación de integrales
 Si G es una antiderivada de la función continua f en el intervalo $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a). \quad (7)$$

Figura 23 Teorema de evaluación de integrales (Edward & Penney, 2008, p. 354)

Teorema 1: Evaluación de integrales.

Donde, se tiene que:

$$\int_a^b f(x) dx = [G(x)]_a^b = G(b) - G(a)$$

- Propiedades básicas de las integrales.

Tabla 2 Relación entre las sumas de Riemann y la Integral Definida.

En la tabla 1, para definir las sumas de Riemann, consideran la figura 1, y obtiene su representación figura 2, luego mediante los ejemplos explican y comparan las sumas considerando la partición regular del intervalo cerrado cuando eligen el punto izquierdo, el punto medio y el punto derecho, y realizan la suma de todas las áreas de los rectángulos para encontrar una aproximación del área de la región limitada por la gráfica de la función dada.

La definición de la Integral Definida se relaciona con la de límite de la suma de Riemann (Figura 3 y 4); luego, se proponen ejemplos donde se explica y se hace uso de definiciones, propiedades y teoremas para calcular integrales definidas a partir del límite de las sumas de Riemann, considerando una partición regular del intervalo en n subintervalos y cualquier punto del i -ésimo subintervalo.

La segunda parte del teorema fundamental del Cálculo se refiere al teorema de evaluación de integrales (Figura 5), que relaciona la integral con la antiderivada de una función integrable; luego, mediante ejemplos se explican las propiedades de la Integral Definida.

A modo de síntesis, al estudiar la forma en la que los textos matemáticos han sido organizados para estudiar la integral definida se reconocen algunos elementos identificados en el análisis epistemológico. Por ejemplo, se identifica que la integral se emplea en el cálculo de varias magnitudes geométricas tales como el área de regiones planas, volúmenes de un sólido de revolución, área de una superficie de revolución, longitud de arco, pero también en contextos físicos en donde se requiere determinar el trabajo, así como el centroide de una región plana. Finalmente, se encontró que la Integral Definida también se emplea en problemas de contexto intramatemático, como se evidenció también en el estudio epistemológico, siendo utilizada para el cálculo de integrales impropias.

Análisis praxeológico de los textos matemáticos

En los tres libros de Cálculo, analizados previamente, se han identificado elementos matemáticos comunes que organizaremos siguiendo el modelo praxeológico que contempla tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías en relación de la Integral Definida. En base a estas consideraciones se describe un modelo praxeológico, cuya pregunta generatriz es: ¿Cómo determinar el área de una región plana?

Se tiene el siguiente tipo de tarea T_1

- Tipo de tarea

T_1 : Aproximar el área de una región plana.

GT_1 : [Aproximar el área de una región limitada por la gráfica de la función; V_1, V_2], donde V_1 es la clase de función (funciones algebraicas, funciones trascendentes), V_2 es el intervalo cerrado.

- Subtipos de tareas

$t_{1,1}$: Aproximar el área A que está delimitada por la gráfica de la función algebraica en el intervalo cerrado, cuando el área aproximada es menor que el área A .

$t_{1,2}$: Aproximar el área A que está delimitada por la gráfica de la función trascendental en el intervalo cerrado, cuando el área aproximada es menor que el área A .

$t_{1,3}$: Aproximar el área A que está delimitada por la gráfica de la función algebraica en el intervalo cerrado, cuando el área aproximada es mayor que el área A .

$t_{1,4}$: Aproximar el área A que está delimitada por la gráfica de la función trascendental en el intervalo cerrado, cuando el área aproximada es mayor que el área A .

- Técnica

La técnica para los subtipos de tareas $t_{1,1}$ y $t_{1,2}$ es:

$\tau_{1,1,1} = \tau_{1,2,1}$: Obtener la partición regular $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ del intervalo $[a, b]$ en n subintervalos, inscribir los rectángulos en los subintervalos y determinar sus alturas tomando los extremos izquierdos, aplicar la suma de las áreas de los rectángulos inscritos, es decir: $R_n = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\Delta x$.

$\tau_{1,1,2}$: Considerar una partición del intervalo $[a, b]$ donde $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, para $i = 1, 2, 3, \dots, n$, identificar la función $y = f(x)$ para calcular los valores y_i , luego para obtener la aproximación indicada reemplazamos los datos en la expresión:

$$T_n = \frac{\Delta x}{2} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-2} + 2y_{n-1} + y_n)$$

$\tau_{1,1,3}$: Considerar una partición del intervalo $[a, b]$ donde $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, para $i = 1, 2, 3, \dots, n$, identificar la función $y = f(x)$ para calcular los valores y_i , luego para obtener la aproximación indicada reemplazamos los datos en la expresión:

$$S_n = \frac{\Delta x}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

La técnica para los subtipos de tareas $t_{1,3}$ y $t_{1,4}$ es:

$\tau_{1,3} = \tau_{1,4}$: Obtener la partición regular $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ del intervalo $[a, b]$ en n subintervalos, circunscribir los rectángulos en los subintervalos y determinar sus alturas tomando los extremos derechos, aplicar la suma de las áreas de los rectángulos circunscritos, es decir: $\bar{R}_n = \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$.

- Tecnología

La tecnología para las técnicas $\tau_{1,1,1}$ y $\tau_{1,3}$ es:

θ_1 : Definición 1: Dada una función f continua, no negativa y acotada en el $[a, b]$, una partición P de dicho intervalo es un conjunto de números $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ tal que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ se define $f(m_i)$ como el valor mínimo y $f(M_i)$ como el valor máximo de $f(x)$ en el i -ésimo

subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Se tiene que un rectángulo inscrito que se encuentra dentro de la i -ésima subregión tiene altura $f(m_i)$ y un rectángulo circunscrito que se extiende fuera de la i -ésima subregión tiene altura $f(M_i)$. Para cada la i -ésima subregión tiene altura i , el área del rectángulo inscrito es menor que o igual que el área del rectángulo circunscrito. La suma de las áreas de los rectángulos inscritos recibe el nombre de *suma inferior* y está dada por $\underline{R}_n = \sum_{i=1}^n f(m_i)\Delta x$.

Y la suma de las áreas de los rectángulos circunscritos recibe el nombre de *suma superior* y está dada por $\overline{R}_n = \sum_{i=1}^n f(M_i)\Delta x$.

La tecnología para las técnicas $\tau_{1,2}$ es:

$\theta_{1,1,2}$: Definición (Aproximación trapezoidal)

La aproximación trapezoidal de $\int_a^b f(x) dx$ con $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ es $T_n = \frac{\Delta x}{2} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-2} + 2y_{n-1} + y_n)$

La tecnología para las técnicas $\tau_{1,3}$ es:

$\theta_{1,1,3}$: Definición (Aproximación de Simpson)

La aproximación de Simpson de $\int_a^b f(x) dx$ con $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, asociada con una partición de $[a, b]$ en un número n par de subintervalos de igual longitud es la suma S_n definida por:

$$S_n = \frac{\Delta x}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

- Teoría

θ_1 : El análisis real.

Por ejemplo, para el caso del tipo de tarea T_1 , podemos considerar del subtipo de tarea $t_{1,1}$ las tareas siguiente:

$t_{1,1}$: Aproximar el área A que está delimitada por la gráfica de la función $f(x) = 4 + 3x - x^2$ en el intervalo $[-1, 4]$, cuando el área aproximada es menor que el área A .

$t_{1,2}$: Aproximar el área A que está delimitada por la gráfica de la función $f(x) = e^{2x} + 1$ en el intervalo $[0, 1]$, cuando el área aproximada es menor que el área A .

Como resultado del análisis realizado, se propone una organización matemática para la Integral Definida (Figura 6); asociada a la institución de enseñanza de las matemáticas.

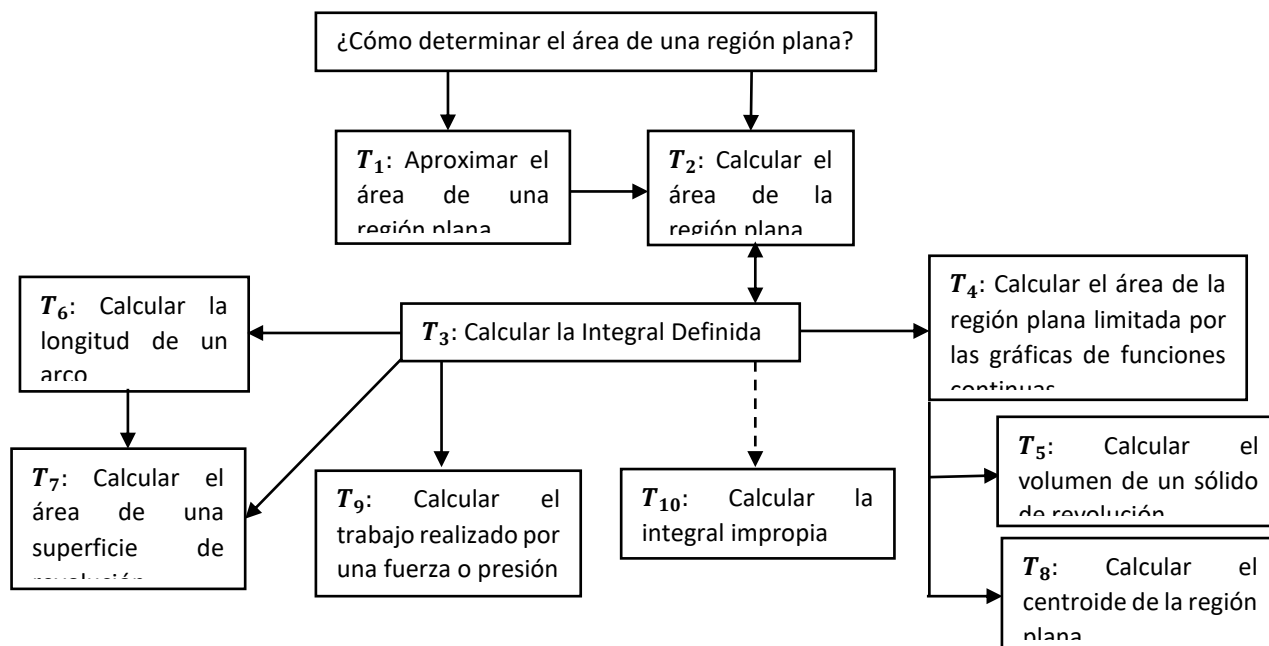


Figura 24 Modelo praxeológico referencial

El tipo de tarea T_1 , relacionada a realizar una aproximar el área de una región plana, es considerada como básica pues, a partir de ella, se obtiene un generador de tareas GT_1 donde las variables didácticas que se consideraran generan tipos de tareas más específicas que el tipo de tarea T_1 .

Así mismo, se ve la necesidad de desarrollar técnicas, las cuales se apoyan en las tecnologías, que serán fundamentales para el tipo de tarea T_2 relacionada con calcular el área de la región plana, donde se obtiene un generador de tareas GT_2 donde a partir de las técnicas obtenidas para el tipo de tarea T_1 , se especifica una de las forma de obtener el área para una determinada región plana que cumple ciertas condiciones.

Por otro lado, se tiene que la técnica para el tipo de tarea T_2 es una de las más importantes que conlleva a obtener una técnica (herramienta matemática) muy poderosa para el tipo de tarea T_3 que se refiere a calcular la Integral Definida, convirtiéndose en el eje fundamental, en el cual, giran los otros tipos de tareas.

El tipo de tarea T_4 que se refiere a calcular el área de la región plana limitada por las gráficas de funciones continuas, requiere de la tecnología $\theta_{3,2}$ del tipo de tarea T_3 , como parte para las técnicas para los tipos de tareas, que se obtienen del generador GT_4 . Los tipos de tareas obtenidos por el generador GT_4 , tienen relación con el tipo de tarea T_5 que está relacionada a calcular el volumen de un sólido de revolución, donde sus técnicas son complementadas con otras, para resolver los tipos de tareas obtenidas por el generador GT_5 .

El tipo de tarea T_6 está relacionada con calcular la longitud de un arco, requiere como parte de su técnica de la tecnología $\theta_{3,2}$, para dar solución a los tipos de tareas que se obtiene del generador GT_6 , asimismo, están relacionadas con el tipo de tareas generadas por GT_7 del tipo de tarea T_7 que está relacionada con calcular el área de una superficie de revolución.

Respecto al tipo de tarea T_8 que se refiere a calcular el centroide de la región plana, está relacionada con el tipo de tarea T_4 . El tipo de tarea T_9 relacionada con calcular el trabajo realizado por una fuerza o presión, es considerada como una de las aplicaciones de la Física, y además está directamente relacionada con la tecnología $\theta_{3,4}$ del tipo de tarea T_3 , asimismo, es parte de su técnica, así como su teoría θ_9 está relacionada con la Física específicamente de la mecánica. Se tiene el tipo de tarea T_{10} relacionado con calcular la integral impropia, es considerada como una generalización de la tarea T_3 , donde la tecnología $\theta_{3,4}$ es parte para las técnicas de los tipos de tareas generadas por GT_{10} .

Consideraciones finales

Por su parte desde la TAD se analiza la organización matemática y la actividad matemática institucionalizada, partiendo de un modelo epistemológico de las matemáticas; específicamente de un modelo epistemológico de referencia. Asimismo, se tiene que un modelo epistemológico de referencia describe la organización de una praxeología matemática institucionalizada. Se tiene que el generador de tipos de tareas (GT_i) permite considerar las variables didácticas (V_i) las cuales son importantes para establecer una clasificación específica de dichos tipos de tareas. El concepto de la Integral Definida es usado en diferentes situaciones que están ligados al estudio epistemológico. Asimismo, las tareas que se han identificado en los libros de textos son similares a las que aparecen en el estudio epistemológico, pero las definiciones, propiedades, técnicas y notaciones empleadas actualmente son distintas; sin embargo, su significado es el mismo.

Referencias

- Bobadilla, M. (2012). *Desarrollo Conceptual de la Integral y la Medida: un tránsito entre lo geométrico y lo analítico*. (Tesis inédita doctoral). Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía, Colombia.
- Cabañas, M. (2011). *El papel de la noción de conservación del área en la resignificación de la integral definida. Un estudio socioepistemológico*. (Tesis inédita doctoral). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Departamento de Matemática Educativa, México DF.
- Crisóstomo, E. (2012). *Idoneidad de Procesos de Estudio del Cálculo Integral en la Formación de Profesores de Matemáticas: una aproximación desde la investigación en didáctica del cálculo y el conocimiento profesional*. (Tesis inédita doctoral). Universidad de Granada. Departamento de Didáctica de la Matemática, España.

- Castela, C., Romo, A. (2011). Des mathématiques à l'automatique: étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 31(1), 79-130.
- Castela, C. (2016). Cuando las praxeologías viajan de una institución a otra: una aproximación epistemológica del "boundary crossing". *Educación Matemática*, 28(2), 9-29.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.
- Chaachoua, H., Bessot, A., Romo, A. & Castela, C. (2019). Developments and functionalities in the praxeological model. En Bosch M.; Chevallard Y.; Garcia J.; Monaghan J. *Working with the anthropological theory of the didactic: A comprehensive casebook*, In press.
- Turegano, P. (1994). Del área a la integral. Un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de las Ciencias*, 16(2), 233-249.

ANÁLISIS ECONÓMICO INSTITUCIONAL SOBRE LA ENSEÑANZA DE VECTORES

Maritza Luna Valenzuela*

Saddo Ag Almouloud**

Francisco Javier Ugarte Guerra *

luna.m@pucp.edu.pe, saddoag@gmail.com, fugarte@pucp.edu.pe

Instituto de Investigación sobre Enseñanza de la Matemáticas, IREM-PUCP, Perú*

Pontificia Universidad Católica de São Paulo, Brasil**

Resumen

En este reporte presentamos un análisis económico-institucional del objeto matemático vector, en el primer semestre de nivel universitario peruano. Este trabajo es parte del desarrollo de una tesis doctoral en Educación Matemática acerca de los procesos de enseñanza y aprendizaje de vectores en el espacio en el área de ciencias e ingeniería. Como marco teórico y metodológico utilizamos los conceptos y herramientas de la teoría antropológica de lo didáctico que nos permitieron analizar las condiciones y restricciones institucionales: los programas y sílabos donde está presente este objeto matemático, la organización matemática y didáctica presente en los textos utilizados en la institución. El análisis de los tipos de tareas, las técnicas (procesos) y tecnologías (propiedades) empleadas para dar solución a las tareas que involucran vectores. nos permitió determinar el tipo de organización matemática presente.

Palabras clave: Vectores, Teoría Antropológica de lo Didáctico, análisis económico

Introducción

Los vectores forman parte del lenguaje de la geometría actual, donde las nociones de producto escalar, producto vectorial, vector tangente, gradiente de campos escalares o flujo de fuerzas son básicos para expresar propiedades geométricas en matemáticas (teoremas), es decir resultados científicos. El estudio de lo que hoy conocemos como vectores surgió en el siglo XIX donde las operaciones: producto escalar en dimensión dos o más se plantearon sin mayor dificultad, sin embargo, la generalización del producto vectorial a dimensiones mayores que tres generaron dificultades (Arenzana, 1997).

En la enseñanza actual de vectores y demostraciones, tanto en geometría como en álgebra lineal, se han reportado dificultades, como lo muestran Sierspiska, Dreyfus, y Hillel (1999), Dorier (2000), Dorier y Siepiska (2002), Cardoso (2017), Luna, Almouloud y Ugarte (en prensa) entre otros. Esta problemática sigue vigente, tal como muestran investigaciones aún más recientes como las

desarrolladas en Brasil por Celestino (2000) que identifica que en algunas universidades públicas brasileras tales como UNICAMP y UNESP, los cursos de Álgebra Lineal, Calculo I, II, III y Geometría Analítica son los cursos que más reprueban en especialidades de ciencias exactas con un 25% a 50%, lo cual muestra la dificultad referente al proceso de aprendizaje de concepto de vectores. Al iniciar el nivel universitario en la enseñanza y aprendizaje de vectores, el Perú tampoco es ajeno a esta realidad (Valencia, 2015) y por ello nos motivó analizar la dimensión económica e institucional en la que se halla inmerso este objeto.

El análisis de libros y manuales se realizará con herramientas de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) de modo que mostraremos algunas técnicas utilizadas, la tecnología empleada, así como su teoría. Esto nos permitirá no solo identificar los tipos de procesos y las herramientas matemáticas que se utilizan para dar solución a una determinada tarea, sino que permitirá mostrar si existe o no articulación entre las técnicas y las justificaciones empleadas, es decir, identificaremos el tipo de organización matemática presente.

La enseñanza del cálculo vectorial en el primer ciclo de Estudios Generales Ciencias de la Educación Superior de Perú

El área de Ciencias e Ingeniería comprende las especialidades o carreras de: Matemáticas, Química, Ingeniería Mecánica, Física, Ingeniería Biomédica, Ingeniería Mecatrónica, Ingeniería Civil, Ingeniería Electrónica, Ingeniería Geológica, Ingeniería Industrial, Ingeniería Informática, Ingeniería de Minas, Ingeniería de las Telecomunicaciones y Estadística. Como ejemplo presentamos la especialidad de Matemática. El alumno culmina su proceso de formación en 10 semestres.

La especialidad plantea el siguiente perfil Profesional:

- Interés por cuantificar los hechos que generan interés
- Inclínación a la utilización de pautas, esquematizaciones y gráficos para el análisis de una situación
- Curiosidad por la abstracción de relaciones lógicas existentes en los fenómenos de la realidad
- Interés por conocer más y buscar siempre explicaciones a los fenómenos
- Atracción por los juegos de ingenio (PUCP, 2019).

Se puede apreciar que en el perfil del Profesional en el ítem 3 e 4 explicita el interés por conocer más y buscar siempre explicaciones por los fenómenos de la realidad, en nuestro caso las aplicaciones de vectores en la realidad.

La formación universitaria tiene 10 semestres de estudio de los cuales se deben realizar entre 2 a 4 semestres de lo que se denomina Estudios Generales, como indica la Ley Universitaria (2014).

La Ley Universitaria N°30220 (artículo 41) dispone la obligatoriedad de estudios generales (EE.GG.) de pregrado, con una duración no menor de 35 créditos, dirigidos a la formación integral de los estudiantes. Esta disposición reemplaza el ciclo de cultura general, de duración y orientación a criterio de cada universidad, previsto en la ley previa (Ley 23733, art. 17).

La Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP) implementó los Estudios Generales Ciencias (EEGGCC) hace más de 40 años de antigüedad y aunque a lo largo de ese tiempo los cursos de matemáticas han experimentado cambios, es la universidad que cumple las exigencias de la Ley Universitaria por más tiempo, lo que explica nuestra elección, pues nos permite analizar las funciones (nicho) que cumple nuestro objeto matemático en un ambiente (hábitat) estable.

El estudio de los vectores se realiza desde los cursos del primer ciclo. En el curso de Álgebra Matricial y Geometría Analítica (AMGA), por ejemplo, se presentan los siguientes temas:

(...) se abarca los siguientes tres temas: geometría analítica, con las definiciones y propiedades importantes de la recta, circunferencia, (...), y la rotación de ejes; álgebra matricial, que comprende las definiciones y operaciones de vectores y matrices aplicados en la resolución de sistemas lineales homogéneos y no homogéneos, y que, además, incluye el cálculo de vectores y valores propios de una matriz; números complejos y sus operaciones básicas. En este curso, se propone la aplicación de todos estos temas en la resolución de problemas intramatemáticos y extramatemáticos. (Sumilla de Álgebra Matricial y Geometría Analítica, 2018).

Los cuales son impartidos durante 17 semanas académicas, 4 horas teóricas y 2 horas de practica semanales (o calificadas o dirigidas). Además, a modo de ejemplo, que parte del desarrollo de tema de vectores en concreto tiene una programación, prevista desde inicio de ciclo, con diversas reuniones de coordinación donde se logra una planificación y la siguiente distribución por semana por ejemplo para el capítulo de vectores, como que se muestra en la figura 1.

SEMANA 6	
Clase 1: Vectores en dos y tres dimensiones. Representación como par o terna y como segmento dirigido libre. Operaciones de adición, sustracción, multiplicación por un escalar. Interpretación geométrica. Vectores paralelos. Módulo de un vector. Vectores unitarios.	Clase 2: Producto interno. Propiedades. Ángulo entre vectores. Vectores ortogonales en el plano y en el espacio. Caracterización de vectores perpendiculares en el plano. Justificación de algunas propiedades geométricas usando vectores.
SEMANA 7	
Clase 1: Proyección ortogonal y componente	Clase 2: Producto vectorial. Propiedades.
SEMANA 8	
Clase 1: Rectas en el espacio. Distintas ecuaciones. Posición relativa entre rectas.	Clase 2: Más problemas.

Figura 1. Programación del Capítulo de Vectores de 2017-2018

El plan de estudio para cada carrera que tiene es de diez semestres (5 años) y está estructurado como cuatro semestres (2 años) en EEGGCC e seis semestres (3 años) siguientes en Facultad. En EEGGCC tiene el plano de estudio descrito a continuación en el siguiente esquema de la figura 2, donde también se muestra las implicaciones de los contenidos del curso de AMGA en los demás cursos.



807

Fundamentación Teórica

La TAD "sitúa la actividad matemática, y consecuentemente la actividad del estudio de la matemática, en el conjunto amplio de las actividades humanas y de las instituciones sociales" (Chevallard, 1999, p.1). Además, Chevallard (1999) postula, que las actividades humanas, realizadas regularmente, pueden ser descritas por medio del modelo único, llamado de praxeología. Esta es compuesta de los siguientes elementos: tipo de tareas (T), técnica (τ), tecnología (θ) y teoría (Θ). Así, según Chevallard (1999), toda actividad humana consiste en cumplir una tarea t (expresa por medio de un verbo de acción asociado a un objeto), de cierto tipo T , que es ejecutada por medio de una técnica τ . La justificación de que esa técnica es válida es presentada (explícitamente o no) por medio de la tecnología θ que, a su vez, se justifica por una teoría Θ . El cuarteto $[T, \tau, \theta, \Theta]$ es llamado praxeología u organización praxeológica.

Chevallard (1999) indica que este cuarteto se divide en dos bloques: uno práctico-técnico $[T, \tau]$ y el otro tecnológico-teórico $[\theta, \Theta]$. El primero está conformado por los tipos de tareas (T) y las técnicas (τ) asociadas a esas tareas y relacionado al "saber hacer". El segundo bloque es comprendido por las tecnologías (θ) y las teorías (Θ) en ellas articuladas y relacionada con el "saber". El bloque práctico-técnico presenta las técnicas asociadas para la determinación de la solución de la tarea.

Cabe resaltar, que cada praxeología vive en una institución y entendemos el termino institución como una organización que define praxeologías.

Las praxeologías integradas a un saber matemático son la organización matemática (OM) y la organización didáctica (OD). La OM estudia la situación identificada en las tareas, técnicas, tecnología y teoría. La OD observa la manera como estas situaciones fueron constituidas, por intermedio de momentos de estudio. La noción de "momento" fue concebida por Chevallard (1999) para delinear una OD y está estructurada en seis etapas.

Las praxeologías, de acuerdo con el grado articulación de sus componentes, se clasifican de la siguiente manera: Organización Matemática Puntual (OMP), considerada apenas un tipo de tarea; Organización Matemática Local (OML), que deriva de la integración de varias praxeologías puntuales que atienden a una misma tecnología; Organización Matemática Regional (OMR), obtenida de la articulación de praxeologías locales referentes a la misma teoría matemática; y Organización Matemática Global (OMG), que surge de la unión de diferentes praxeologías regionales, a partir de la integración de diversas teorías.

Gascón (2011) indica que la dimensión económica-institucional de un problema didáctico incluye cuestiones que giran en torno a la pregunta ¿cómo son las cosas (las OM y las OD) en las contingencias institucionales? Para así abarcar el sistema de reglas y principios que regulan la organización y el funcionamiento de las OM y las OD involucradas en el problema didáctico en una determinada institución.

Metodología

Para analizar qué tareas, técnicas y tecnologías en el contexto de la geometría vectorial se procederá considerando las herramientas presentadas de la TAD y utilizando las preguntas orientadoras sugeridas por Almouloud (2015). Dicho análisis, nos permitirá identificar una organización matemática, reconocer su tipo y analizarla con miras a plantear, un modelo epistemológico de referencia alternativo y una organización didáctica para la enseñanza de las demostraciones en geometría en el espacio.

Procesos

Se revisaron los sílabos desde 2001 hasta 2018 observando el mayor número de frecuencias de haber sido utilizado y de ese modo pudimos seleccionar los textos didácticos para luego ser analizados. Se exhibirán algunos de los ejemplos más representativos que aparecen en los textos de curso, donde se identifican y explican cada una de las técnicas usadas para resolver la tarea (ejercicio), mientras la tecnología era implementada. Se finalizará con el análisis identificando el tipo de OM.

Análisis de sílabos y libros didácticos

En esta investigación nuestro foco fue identificar a través de las OM y OD la relevancia de las pruebas y demostraciones utilizando vectores. Para la elección de los textos a analizar se considera los sílabos de 2001 a 2018 de los cursos: el primero de Matemática Básica (MB) que se dictó en el periodo de 2001 a 20016, luego, se considera el curso de AMGA que se viene dictando desde 2017, la información se muestra en la figura 3.

Además, este análisis de silabo ayudó a identificar los textos didácticos que denominamos libros didácticos (LD) que se utilizan a la fecha, se muestra en la tabla1. Se encontró cuatro LD que sirven de consulta tanto para docentes como para alumnos. Cabe mencionar, que existe la libertad de catedra y los docentes pueden disponer de diferentes textos y la biblioteca permite el acceso virtual dentro de la misma universidad. Los temas y contenidos son todos enseñados con un programa elaborado por el coordinador de curso y aceptado en una reunión de profesores que dictan el curso.

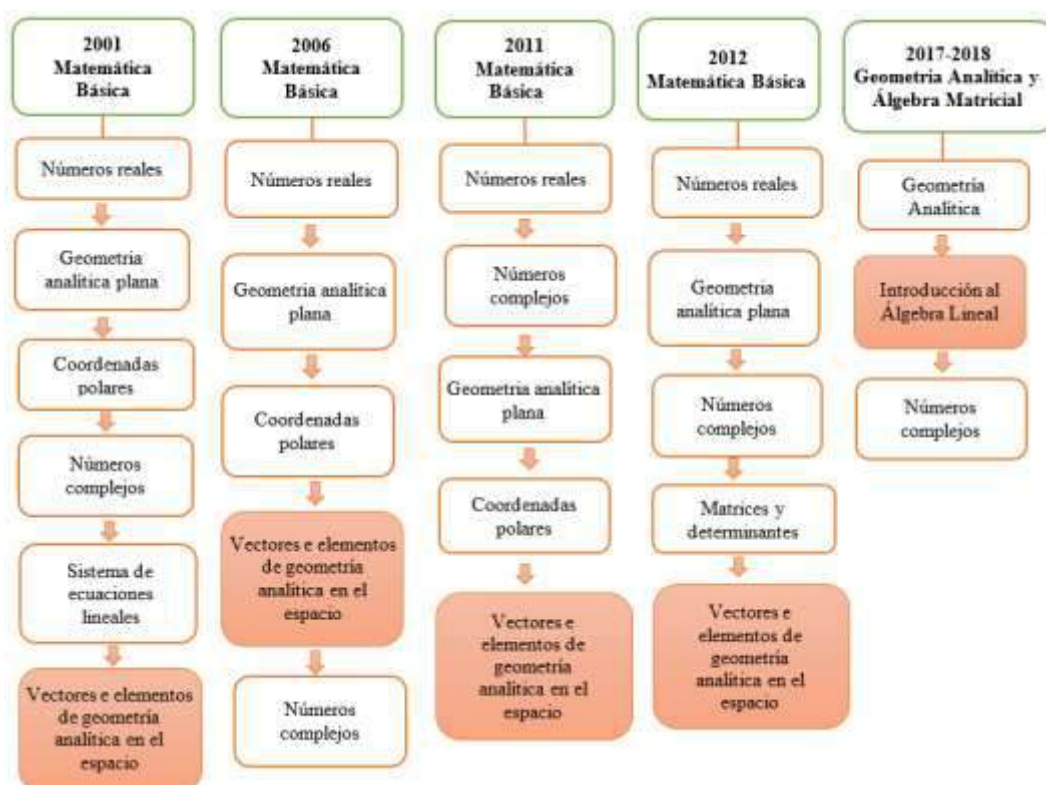


Figura 3. Estudio de vectores e sus propiedades no primer ciclo universitario

Tabla 1. Textos guía y libros donde está presente el estudio de vectores

Años	Libros y textos	Texto guía	LD	Autor
2001-2010	Texto	Matemática Básica, 2001	LD1	Gonzaga, M., Montealegre, J., Rodriguez, C. Sanchez, R.
	Libro complementario	Algebra lineal com aplicaciones. 4ta edición	LD2	Stanley, I., Grossman, S.
2011	Texto	Matemáticas Básicas. Texto del curso. Lima PUCP. 2010	LD3	Chau, J.; Gaita, C.; Medina, N.; Sánchez, R.; Villogas, E.
	Libro complementario	Algebra lineal com aplicaciones. 5ta Edición 1996.	LD2	Stanley, I., Grossman, S.

		Matemática Básica, 2011	LD1	Gonzaga, M., Montealegre, J., Rodriguez, C. Sanchez, R.
2012- 2016	Texto	Matemáticas Básicas. Texto del curso. Lima PUCP. 2010	LD3	Chau, J.; Gaita, C.; Medina, N.; Sánchez, R.; Villogas, E.
	Libro complementario	Algebra lineal com aplicaciones. 5ta Edición 1996.	LD2	Stanley, I., Grossman, S.
2017- 2018	Libros complementarios	Álgebra lineal. México, D.F.: McGraw-Hill. 2014	LD2	Stanley, I., Grossman, S.
		Fundamentos de álgebra lineal, 2015 (7a. ed.)	LD4	Larson, R.

Fuente. Datos de investigación.

Para este reporte presentaremos algunos modelos de praxeologías que se desarrollan en cada uno de los textos guías para lo cual tenemos las siguientes cuestiones y el análisis

(Q1): ¿De qué manera los autores inician la introducción del contenido de vectores?

En LD1 se define directamente vectores en $\mathbb{R}^n$. En tanto LD2 introduce a vectores con la narración histórica donde indica que comenzó el estudio de vectores esencialmente con el trabajo del gran matemático irlandés Sir William Hamilton y crea los cuaterniones. Además, indica que el uso actual de vectores es en la física clásica y moderna, así como en la biología y sociales. Define como vector fila y columna para iniciar el estudio de matrices. El siguiente capítulo define vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Mientras que en LD3 el tema de vectores es abordado en el capítulo 5, de nombre, Vectores en el plano y en el espacio, donde los autores recuerdan al alumno de los contenidos que ya estudiados en Geometría Analítica, por lo tanto introduce Vectores recordando la definición y representación de puntos en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, además de recordar distancia entre dos puntos en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, para luego proceder a introducir la idea de vectores. Es decir, indican que diversas magnitudes como la velocidad, la aceleración, la fuerza, el campo eléctrico, entre otras, deben ser descritas vectorialmente. Esto quiere decir que para conocerlas se debe tener información de su magnitud, dirección y sentido. Un vector es un objeto matemático que permite reconocer estas tres características.

(Q2): ¿Cómo es presentado el concepto matemático de vectores?

En LD1 vectores se defino como:

El conjunto de las n-uplas de números reales, $n \geq 1$, se representa por $\mathbb{R}^n$, es decir

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n): x_i \in \mathbb{R} \text{ para } i = 1, \dots, n\}$$

Los elementos de $\mathbb{R}^n$ serán llamados vectores y al vector $(a_1, \dots, a_n)$ lo representamos por A. El número a_i se llama i-ésima componente del vector A.

En LD2 se define vector como:

Definición geométrica de un vector. El conjunto de todos los segmentos de recta dirigidos equivalentes a un segmento de recta dirigido dado se llama vector. Cualquier segmento de recta en ese conjunto se denomina una representación del vector.

Definición algebraica de un vector. Un vector v en el plano xy es un par ordenado de números reales (a, b) . Los números a y b se denominan elementos o componentes del vector v . El vector cero es el vector $(0, 0)$.

En LD3 define vectores en $\mathbb{R}^2$ de modo siguiente:

Se define un vector $\vec{v}$ en el plano como un par $(a; b)$ de modo que:

- i) su magnitud es $\sqrt{a^2 + b^2}$,
- ii) su dirección está dada por la dirección de una recta cuya pendiente es $\frac{b}{a}$
- iii) su sentido es el del segmento dirigido con punto inicial $(0; 0)$ y punto final $(a; b)$.
- iv) De modo similar define para $\mathbb{R}^3$.

En LD4 define vector como sigue:

Un vector en el plano se representa geométricamente por un segmento de recta dirigido cuyo punto inicial es el origen y cuyo punto terminal es el punto $(x_1, x_2), (\dots)$

Luego define para $\mathbb{R}^n$.

(Q3): ¿Tipos de tareas que presentan pruebas y demostraciones con vectores?

En LD1, LD2, LD3 y LD4 se identificaron los tipos de tareas, técnicas y tecnologías. También se muestran algunos ejemplos donde una técnica para la tecnología de vectores es abordada. Algunos ejemplos del análisis de praxeologías.

T_{ParIV}	De LD2	Demostrar que si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son vectores paralelos a $\vec{c}$ entonces el vector $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$ es paralelo a $\vec{c}$ para todo α y β escalares.
τ_{ParIV}		Solución Como $\vec{a} \parallel \vec{c} \Rightarrow$ Existe un número $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{a} = \alpha \vec{c}$, Como $\vec{b} \parallel \vec{c} \Rightarrow$ Existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{b} = \beta \vec{c}$, Y veremos que la suma de dos vectores paralelos al vector $\vec{c}$ también es paralelo al vector $\vec{c}$. En efecto, $\vec{a} + \vec{b} = \alpha \vec{c} + \beta \vec{c} = (\alpha + \beta) \vec{c} = \lambda \vec{c}, \text{ con } \lambda = \alpha + \beta$
θ_{ParIV}	Paralelismo de vectores y operaciones con vectores	
T_{ParIV}	Vectores	
T_{MPEV}	De LD1	Ejemplo 4. Si $A, B \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, demostrar la identidad $\ \alpha A + \beta B\ ^2 = \alpha^2 \ A\ ^2 + 2\alpha\beta A \cdot B + \beta^2 \ B\ ^2.$
τ_{MPEV}		Solución. Sabemos que $\ \alpha A + \beta B\ ^2 = (\alpha A + \beta B) \cdot (\alpha A + \beta B)$ y por las propiedades del producto escalar $\begin{aligned} (\alpha A + \beta B) \cdot (\alpha A + \beta B) &= (\alpha A + \beta B) \cdot \alpha A + (\alpha A + \beta B) \cdot \beta B \\ &= \alpha A \cdot (\alpha A + \beta B) + \beta B \cdot (\alpha A + \beta B) \\ &= \alpha A \cdot \alpha A + \alpha A \cdot \beta B + \beta B \cdot \alpha A + \beta B \cdot \beta B \\ &= \alpha^2 \ A\ ^2 + 2\alpha\beta A \cdot B + \beta^2 \ B\ ^2, \end{aligned}$ lo que prueba la identidad.
θ_{MPEV}	Propiedades de modulo y producto escalar	
T_{MPEV}	Vectores	
T_{ProdV}	De LD1	Ejemplo 26. Los vectores A, B y C de $\mathbb{R}^3$ satisfacen la condición $A + B + C = \vec{0}$. Demostrar que: $A \times B = B \times C = C \times A$
τ_{ProdV}		De la condición $B + C = -A$. Se sigue que $A \times B = -(B + C) \times B = -B \times B - C \times B = \vec{0} + B \times C = B \times C$ Análogamente se prueba que $B \times C = C \times A$ ■
θ_{ProdV}	Propiedades de producto vectorial	
T_{ProdV}	Vectores	

$T_{PryCompV}$ De LD2

Ejemplo 31

Considerar las rectas que no se cortan (rectas alabeadas):

$$L_1 : P = P_0 + t \vec{a}, t \in \mathbb{R}$$

$$L_2 : P = Q_0 + r \vec{b}, r \in \mathbb{R}$$

a) Demostrar que la distancia d entre L_1 y L_2 se puede calcular con la fórmula

$$d = \frac{|\overrightarrow{P_0Q_0} \cdot \vec{c}|}{\|\vec{c}\|}$$

donde $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

$T_{PryCompV}$

Solución

a) Se verifica que $\text{Pr}_{\vec{c}} \overrightarrow{P_0Q_0} = \frac{\overrightarrow{P_0Q_0} \cdot \vec{c}}{\|\vec{c}\|^2} \vec{c}$.

La longitud de este vector,

$$\left\| \text{Pr}_{\vec{c}} \overrightarrow{P_0Q_0} \right\| = \left| \text{Comp}_{\vec{c}} \overrightarrow{P_0Q_0} \right|$$

es la distancia d ,

$$\left| \text{Comp}_{\vec{c}} \overrightarrow{P_0Q_0} \right| = \frac{|\overrightarrow{P_0Q_0} \cdot \vec{c}|}{\|\vec{c}\|} = d.$$

$\theta_{PryCompV}$ Definición de proyección y componente

$T_{PryCompV}$ Vectores

En los cuatro textos de observaron que están presentes las demostraciones en principio para justificar la veracidad de las proposiciones y luego ya como ejemplos donde se hacen uso de las diferentes definiciones y propiedades (tecnologías) de vectores, como se muestran en los ejemplos mostrados. En las tareas (ejercicios) se utiliza el término demuestra o prueba se refiere a lo mismo, es decir, se pide demostrar.

Se detectó que para cada tarea solo se presenta una técnica y respaldado por la tecnología.

Dentro de las tareas o ejercicios propuestos, también hay algunos casos donde se pide demostrar, pero son en cantidad menor a los ejercicios de cálculo. En LD3 presenta soluciones que pueden guiar al alumno en el uso de al menos una técnica de demostración.

Cada una de las técnicas presentadas en los LD se tratan de OMP.

Consideraciones finales

El análisis económico-institucional realizado, es decir, el análisis de currículo (sílabos) nos permitirá identificar el modelo de referencia dominante y los análisis de libros, mediante las cuestiones Q1, Q2 y Q3, nos permite identificar la praxeología dominante (Gascón, 2011) en la enseñanza de vectores para alumnos del primer ciclo universitario y el tipo de OM.

Agradecimiento

Al Programa de Estudiantes-Convenio de Pós-graduação-EC-PG, de la CAPES/CNPq – Brasil.

Referencias

Almouloud, S. A. (2015). Teoria Antropológica do Didático: metodologia de análise de materiais didáticos. UNIÃO, *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, p. 09-34.

- Arenzana, V. (1997). El lenguaje vectorial en geometría. Los pioneros William Rowan Hamilton y Hermann Günther Grassmann. *Revista Suma* 25, 61-70.
- Cardoso, F. (2017). *Praxeologias e modelos praxeológicos institucionais: o caso da álgebra linear*. Tesis (Doctorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação em ciências e Matemáticas, Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Pará, Brasil.
- Celestino, M., R. (2000). *Ensino-Aprendizagem da Álgebra Linear: As Pesquisas Brasileiras na Década de 90*. 114f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) -Pontificia Universidade de São Paulo.
- Chau, J.; Gaita, C.; Medina, N.; Sánchez, R.; Villogas, E. (2010) *Matemáticas Básicas. Texto del curso*. Lima PUCP.
- Chevallard, Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes em théorie anthropologique du didactique. *Recherches em didactique des mathématique*, 19(2), 221-266.
- Dorier, J. L. (2000). On the Teaching of Linear, *Mathematics Education Library*. Francia.
- Gascón, J. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 14(2), 203-231.
- Gonzaga, M., Montealegre, J., Rodriguez, C. Sanchez, R. (2001) *Matemática Básica*. Lima PUCP.
- Larson, R. (2015). *Fundamentos de álgebra lineal*, (7a. ed.)
- Ley Universitaria (2014) disponible en: http://www.minedu.gob.pe/reforma-universitaria/pdf/ley_universitaria.pdf
- Luna, M. Almouloud, S., A. Ugarte, F.(en prensa) Estado da arte para a construção do modelo epistemológico de referência sobre vetores. *Anais do XIII Encontro Nacional de Educação Matemática*. Brasil
- Sierspinski, A, Dreyfus, T, Hillel, J. (1999). Evaluation of a teaching design in linear Álgebra: the case of linear transformations, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19, (1), 41-76.
- Stanley, I., Grossman, S. (2004). *Álgebra lineal*. México, D.F.: McGraw-Hill
- Sumilla de Algebra Matricial y Geometría Analítica (2018). Recuperado de: <http://facultad.pucp.edu.pe/generales-ciencias/informacion-para-el-estudiante/sumillas/>
- PUCP, Misión y Visión de Facultad de ciencias e ingeniería (2019) Recuperado de: <http://facultad.pucp.edu.pe/ingenieria/facultad/mision-y-vision/>
- Valencia, E. (2015). Errores y dificultades de los estudiantes de ingeniería en el procedimiento para describir el espacio generado por un conjunto de vectores de R^n . tesis (Maestria) Pontificia Universidad Católica del Perú.

SOCIALIZACIÓN DE EXPERIENCIAS DIDÁCTICAS

EXPERIENCIA DE INVESTIGACIÓN FORMATIVA EN LA ASIGNATURA DE MATEMÁTICA FINANCIERA

David Esteban Espinoza

david.esteban@urp.edu

Universidad Ricardo Palma

Resumen

El objetivo de la experiencia es utilizar el conocimiento disponible en libros, artículos monografías, ensayos como herramienta para adentrar a los estudiantes en la producción de informes en formato de artículos dentro del curso de matemática financiera. Para lograrlo se implementó una secuencia de momentos dentro del desarrollo del curso. Al finalizar el ciclo regular se logró los estudiantes publiquen su informe para la revista de estudiantes.

Palabras clave: *Matemática financiera, investigación formativa.*

Introducción

La producción de conocimientos se encuentra disponible en tesis, artículos, monografías, ensayos, libros entre otros; tradicionalmente en el curso de matemática financiera se utilizaba esta información en las sesiones de clase. Actualmente existen bases de datos y repositorios de acceso abierto las que constituyen un gran insumo para la investigación.

Tanto el acceso como la producción de conocimiento, puede realizarse desde el pre grado, momento en que el estudiante puede habituarse a ser productivo académicamente, debemos tener en cuenta, que nadie nace con los conocimientos que posee, sino que el ser humano es producto de su aprendizaje.

La Escuela Negocios Globales de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresarial de la Universidad Ricardo Palma, promueve el programa de investigación formativa, se procura que los principales protagonistas son los estudiantes.

Implementación de la propuesta

Con la finalidad de implementar la propuesta se establecieron los siguientes momentos: capacitación, disponibilidad de materiales, seguimiento, presentación del informe final, exposiciones y publicación de los informes en formato de artículo

Momento de aprendizaje

Esta se realizó divulgando los objetivos que se perseguía, dando a conocer la importancia de promover la investigación desde el pre grado. Con esta finalidad se llevaron a cabo dos conferencias y tres talleres a lo largo de 16 semanas durante el semestre académico, en estas actividades los estudiantes asistieron de manera voluntaria.



Figura 1. Uno de los talleres de investigación formativa.

Materiales disponibles

A través de la página web de la Escuela, se puso a disposición de los estudiantes, los documentos, Referencias y citas en estilo APA, así como las instrucciones para escribir el informe final (más adelante se denominaron instrucciones para los autores)

Seguimiento

Los estudiantes presentaron sus proyectos, cuadernos de campo y los avances del desarrollo de sus trabajos, luego de la revisión de los mismos, se realizaron observaciones y sugerencias. Los estudiantes levantaron observaciones, se volvían a revisar y así sucesivamente hasta considerar que el trabajo cumplía con los criterios de calidad.

Presentación del informe final.

Al finalizar las 16 semanas, los estudiantes presentaron el informe final en formato de artículo. Se consideró que el informe sea estandarizado (UNESCO, 1983), además de la estructura IMRyD (Balarezo, 2003)

I = INTRODUCCIÓN

M = MATERIALES Y MÉTODOS

R = RESULTADOS

y = y

D = DISCUSIÓN

Publicación

En esta fase de inició el proceso edición y diagramación.

Resultados

Los informes finales se publicaron en una publicación electrónica en plataforma OJS y de acceso abierto.



Figura 2. Portada de la Revista de Estudiantes

ARTÍCULO ORIGINAL

PAGOS PERIÓDICOS Y TASAS PARA CRÉDITOS VEHICULARES
PERIODIC PAYMENTS AND RATES FOR VEHICULAR CREDITS AND THEIR RATES



Francesca Estefanía Rodríguez Beltrán; Giancarlo Loiz Galvani; María Milagros Rojas Baldeón; Verónica Brigitte Miller Venancio.
Estudiantes de la Universidad Ricardo Palma - Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales Escuela Profesional de Administración de Negocios Globales



Recepción: 2017-05-21 / Aceptación: 2017-11-20

RESUMEN

El objetivo es analizar los conceptos financieros que trabajamos para el cálculo de los pagos periódicos, así como, calcular los intereses y las tasas del crédito vehicular. Para realizar este estudio, se extrajo información de portales de inteligencia comercial, documentos bancarios, tesis y se visitó diferentes bancos ubicados en Lima metropolitana, de este modo, tuvimos conocimiento de primera mano sobre las diferentes opciones, modalidades, facilidades que nos presentan cada banco; con toda la información obtenida, presentamos aquí un cálculo de los pagos periódicos y tasas para los créditos vehiculares.

Palabras clave: Cálculo, crédito vehicular, documentos bancarios, intereses, pagos periódicos.

Figura 3. Título, autores y resumen de uno de los informes

Luego de cancelar la cuota inicial, durante los siguientes 60 meses, se pagará el monto financiado más los intereses.

Cálculo de la tasa de interés.

La Tasa del Crédito es la Tasa Efectiva Anual (TEA) que la persona acepta del banco, utilizando la TME (Tasa Mensual Equivalente) aplicamos la siguiente fórmula:

$$TME = \left\{ (1 + TEA)^{\left(\frac{1}{12}\right)} - 1 \right\}$$

$$TME = \left\{ (1 + 0,12)^{\left(\frac{1}{12}\right)} - 1 \right\}$$

$$TME = 0,009488792$$

Una vez que se tiene la tasa al plazo, para calcular el interés mensual, multiplicaremos la TME por el importe desembolsado.

$$i_{mesx} = (\text{Importe Desembolsado} \times TME)$$

$$i_{mes1} = \$/53\,828,00 \times 0,009488792$$

$$i_{mes1} = \$/510,7626958$$

Cálculo del seguro de desgravamen.

Para el cálculo del seguro de desgravamen, primero tenemos que obtener la Tasa de Seguro de Desgravamen Anual (TDA) por lo que multiplicaremos la Tasa seguro desgravamen individual * 12 (porque es anual)

$$TDA = (td \times 12)$$

$$TDA = 0,0005 \times 12$$

$$TDA = 0,006$$

Para luego ajustar la TDA al plazo correspondiente y convertirla en una Tasa de Seguro de Desgravamen Ajustada al Plazo (d) utilizaremos la siguiente fórmula:

$$d = \frac{(TVA) (\text{número de días al mes})}{365 \text{ días}}$$

$$d = \frac{(0,006)(30)}{365}$$

$$d = 0,00049315$$

Una vez obtenida la tasa de seguro de desgravamen ajustada al plazo, calcularemos el seguro de desgravamen (Sd) que se mostrará en el cronograma de pagos, por lo cual realizamos el siguiente cálculo:

$$Sd = (\text{Importe desembolsado} \times d)$$

$$Sd = 53\,828,00 \times 0,00049315$$

$$Sd = \$/26,5452782$$

Cálculo del seguro vehicular.

La Tasa del Seguro Vehicular es la Tasa de Seguro Vehicular Anual (TVA).

Para ajustar la TVA al plazo correspondiente y convertirla en una Tasa de Seguro Vehicular Ajustada al Plazo (n), aplicaremos la siguiente fórmula:

$$d = \frac{(TVA) (\text{número de días al mes})}{365 \text{ días}}$$

$$d = \frac{(0,0472)(30)}{365}$$

$$d = 0,003879452$$

Figura 4. Captura de imagen de una de las páginas del informe en extenso.

Consideraciones finales

Uno de los temas fue: Pagos periódicos y tasas para créditos vehiculares.

En el mismo se trata conceptos financieros como los pagos periódicos, cálculo de intereses, tasas

ERRORES DE ESTUDIANTES EN LA MODELIZACIÓN DE UNA SITUACIÓN COTIDIANA QUE INVOLUCRA A LA FUNCIÓN LINEAL Y CUADRÁTICA

Magaly Ethel Campos Motta

Elvis Bustamante Ramos

mecamposm@pucp.pe, ebustamanter@pucp.pe

Instituto de Investigación sobre Enseñanza de la Matemáticas, IREM-PUCP, Perú

Resumen

Nuestra finalidad es comunicar los errores presentados en estudiantes de un primer curso de Matemática de carreras de humanidades de una universidad privada de Lima en torno a la modelización de una situación relacionada a las funciones lineales y cuadráticas; y evidenciar estos errores como oportunidades para que los estudiantes superen lo que les impide desarrollar el tema en cuestión de manera adecuada. En ese sentido, existen dificultades o errores reportados por investigaciones anteriores; los cuales pueden ser evidenciados en la pregunta de una evaluación que se llevó a cabo en el primer semestre del 2019.

Palabras clave:

Obstáculos, dificultades, función lineal, función cuadrática.

Introducción

Una de las preocupaciones de la comunidad científica en relación a la enseñanza de la matemática, es el fracaso que los estudiantes experimentan en el aprendizaje de los cursos de matemática. Estas dificultades se manifiestan debido a una serie de errores que los estudiantes realizan. En ese sentido, una de las causas, que originan estos errores, según lo señala Pochulu (2005) es debido a los conocimientos previos que se transfieren a los nuevos contenidos. Además, "el error no es solamente el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, de la casualidad, sino que es un resultado de un conocimiento anterior, que ha tenido su interés, su éxito, pero que ahora se revela falso o simplemente inadecuado" (Brousseau 1994, p5).

En este trabajo, vamos a poner en manifiesto los errores cometidos por estudiantes del Programa

de Estudios Generales Letras de una universidad privada situada en Lima. Para ello, creemos necesario asumir una postura en relación a la definición de error, en la cual nos vamos a apoyar,

para reportar lo acontecido. En ese sentido, "Hablamos de error cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar." (Godino, Batanero y Font, 2003, p. 69). Asimismo, estos errores se presentan en los primeros cursos de matemática en el nivel superior, tal y como lo señala Pochulu (2005). Por otro lado, en nuestro caso, dichos errores se presentan al momento de articular la representación gráfica y algebraica de las funciones lineales y cuadrática, tal y como lo señalan Díaz, Haye, Montenegro y Córdoba (2013).

Implementación

Vamos a considerar la resolución de 50 estudiantes del Programa de Estudios Generales Letras de una universidad privada durante el 2019-I en el curso de Matemática Básica, para reconocer los errores que cometen al momento de resolver un problema que consiste en modelizar una situación cotidiana relacionada a la función lineal y cuadrática. Para ello, consideraremos los trabajos de investigación de Pochulu (2005) y Díaz, Haye, Montenegro y Córdoba (2013).

Los errores en el aprendizaje de la matemática en estudiantes que ingresan a la universidad, que Pochulu (2005) señala, se deben, por ejemplo, a concepciones inadecuadas sobre aspectos fundamentales de la matemática, procedimientos imperfectos y el uso de procedimientos imperfectos. Algunos de esos errores son los siguientes:

- Brindan respuestas que prescinden de las unidades de medida en problemas que involucran magnitudes.
- Utilizan todos los datos que aparecen en un problema sin tener en cuenta si el cálculo realizado responde a la pregunta solicitada.

Asimismo, Díaz, Haye, Montenegro y Córdoba (2013) realizaron encuestas y pruebas diagnósticas, e indicaron un evidente déficit que los estudiantes presentan en sus conocimientos previos y una posible ausencia de articulación entre distintos registros de representación de los conceptos; en particular, al momento de articular el registro gráfico y algebraico.

A continuación, presentamos la pregunta, que evaluó a cincuenta estudiantes de un primer curso de matemáticas de carreras de humanidades:

Pregunta

Un equipo de vóley juega en un coliseo que tiene una capacidad de 6 000 espectadores. Cuando el precio del boleto es de S/ 20 la asistencia es de 3 000 espectadores. Un estudio de mercado pone de manifiesto que por cada sol que baje el precio del boleto, la cantidad de espectadores aumenta en 500. Suponga que el comportamiento descrito líneas arriba se repite por cada sol que baje el precio.

- Determine la regla de correspondencia que modela la cantidad de boletos vendidos en función del precio de cada boleto e indique su dominio.
- Determine la regla de correspondencia que modele el ingreso en términos del precio de cada boleto e indique su dominio.
- Bosqueje la gráfica de la función obtenida en b).
- Determine el precio que genera el máximo ingreso por la venta de boletos y el máximo ingreso.

Figura 25. Pregunta sobre funciones

Se escogió este problema porque pensamos que los estudiantes requieren de conocimientos básicos de matemática y de conocimientos de función lineal y cuadrática, que se trabajan en el curso de matemáticas en el primer ciclo. A continuación, de los cincuenta estudiantes que rindieron la evaluación, mostraremos la respuesta de seis estudiantes como un punto de referencia respecto al aula a los que llamaremos de estudiante 1, estudiante 2, etc. para resguardar su identidad.

El estudiante 1, planteó en (a) la forma de una función lineal y usa los datos para hallar m ; sin embargo, en (b) no usa la forma de una función cuadrática. Por ese motivo, en el ítem (c) presenta la gráfica de una función lineal con los puntos hallados en la función que obtuvo.

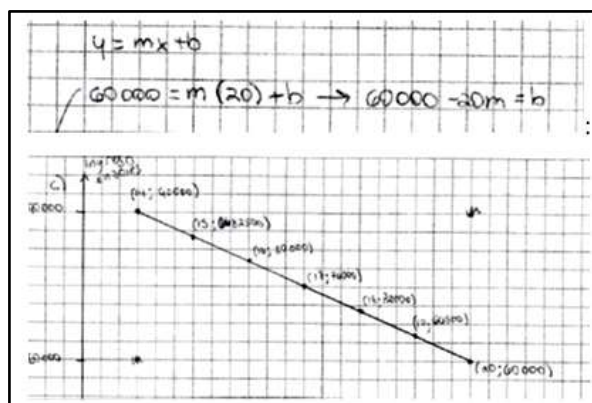


Figura 2. Respuestas del estudiante 1

El estudiante 2, no desarrolló en la hoja los incisos (a) y (b) pero si realizó la gráfica correspondiente a la función solicitada en el inciso (b). Lamentablemente, esta gráfica corresponde a una función lineal:

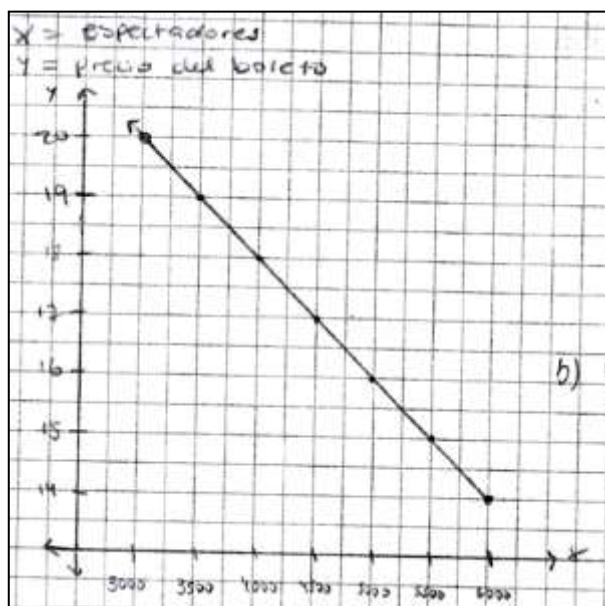


Figura 3. Respuesta del estudiante 2

Por su parte, el estudiante 3, desarrolla en forma correcta (a), (b) y (d), pero no grafica en forma correcta la función cuadrática.

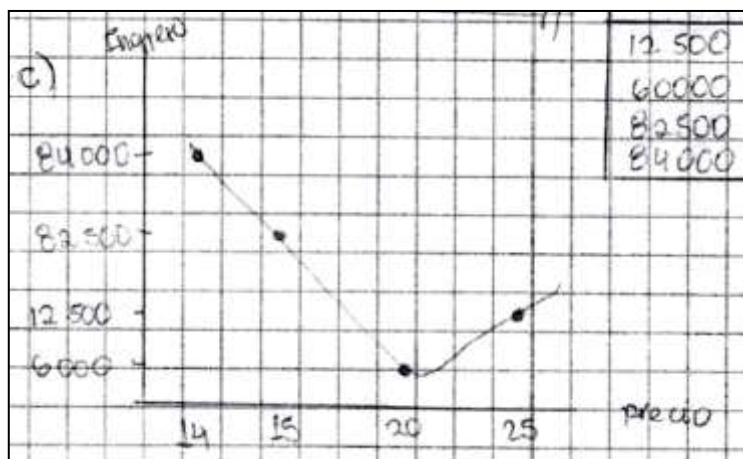


Figura 4. Respuesta del estudiante 3

Otro estudiante, al que llamamos, estudiante 4 utilizó los datos, pero en el instante en que se le pidió dar la función lineal solo da parte de ella. Por esa razón, no llega a la respuesta esperada en el inciso (a), y debido a ello, no puede obtener la función cuadrática correcta en el inciso (b). Asimismo, en el inciso (c) grafica la función cuadrática como una función lineal.

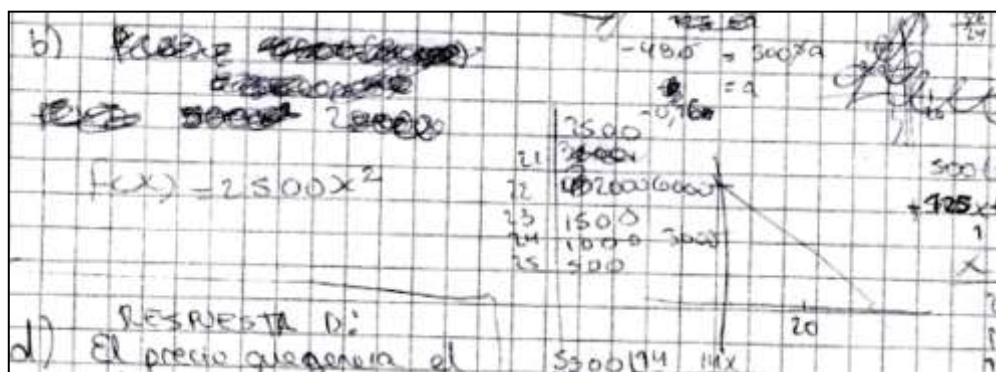


Figura 5. Respuesta del estudiante 4

El estudiante 5, realizó en forma correcta y ordenada los incisos (a), (b) y (c) pero en (d) no coloca las unidades según el contexto del problema

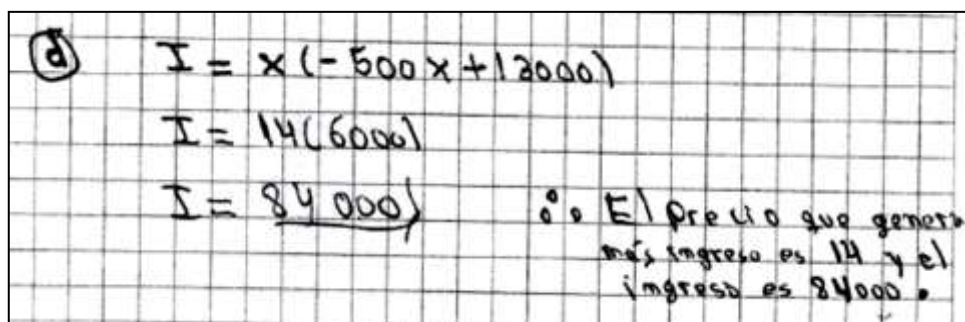


Figura 6. Respuesta del estudiante 5

Por último, el estudiante 6, a pesar de que los valores numéricos son correctos, no considera las unidades, como el estudiante 5.

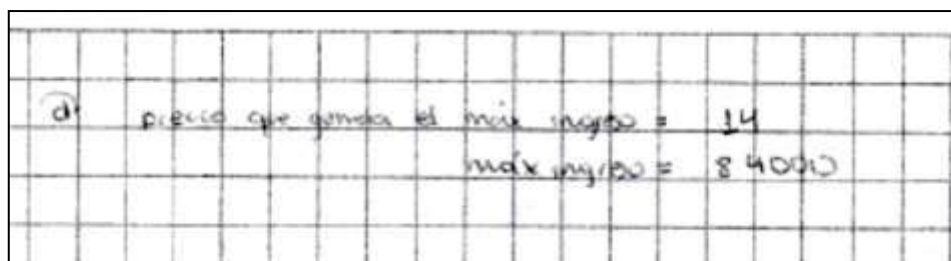


Figura 7. Respuesta del estudiante 6

En ese sentido, podemos evidenciar que el alumno no es consciente del contexto en el cual se lleva a cabo esta situación.

Algunos resultados

Del grupo de 50 estudiantes, podemos indicar que hay estudiantes en los cuales no se evidenció errores, pero existieron estudiantes en los cuales sí. También, vimos el caso de algunos estudiantes que ni siquiera intentaron resolver el inciso (c) y en contra parte, los estudiantes destacados del grupo, no tuvieron ninguna dificultad para resolver el problema.

A continuación, presentamos los siguientes resultados, teniendo en cuenta lo que hemos encontrado en la actividad desarrollada por los estudiantes:

- Algunos estudiantes han cometido errores en el desarrollo de la pregunta relacionada a la modelización de la situación dada, probablemente debido a que carecen de conocimientos previos, como la destreza en cálculos aritméticos o algebraicos al momento de modelizar.
- Algunos errores frecuentes que hemos podido encontrar, es la falta de consciencia de los estudiantes al momento de trabajar con modelizaciones de situaciones en un contexto dado.
- Los datos nos indican que, en lo que se refiere a las funciones lineales y cuadráticas, una considerable proporción de los estudiantes no logró establecer una articulación libre de errores en sus representaciones, lo cual proporciona indicadores acerca de la ausencia de una aprehensión conceptual de los objetos en estudio.
- Los problemas que se evidencian con una mayor frecuencia, es cuando el registro de partida es el gráfico y no el algebraico, pues los estudiantes han tenido menos errores en el inciso (b) en relación al inciso (c). Siguiendo la misma línea, es notoria la diferencia que existe en la función cuadrática en su representación algebraica, pues el número de respuestas incorrectas del inciso (b) (registro verbal al registro algebraico) en comparación con el número de respuestas incorrectas del inciso (c) (registro algebraico al registro figural), es menor. Es decir, cuando se trata de realizar la conversión de un registro algebraico a un registro figural, en términos de Duval (1998).
- Los datos obtenidos nos permiten formular la interrogante acerca del grado de incidencia de los errores que provienen de conocimientos previos y por el cambio de registro en los estudiantes de primer año del nivel universitario.

Referencias

- Pochulu, M. (2005). Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matemática en estudiantes que ingresan a la universidad. *Revista Iberoamericana de Educación*.
- Brousseau, G. (1994). Los obstáculos epistemológicos y los problemas en matemáticas.
- Díaz, M. Haye, E. Montenegro, F. y Córdoba, L. (2013). Dificultades de los estudiantes para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas. *I CEMACYC, República Dominicana*.
- Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Hitt, F. (Ed), *Investigaciones en Matemática Educativa II*. Grupo Editorial Iberoamérica, México. 173-201.

SEQUÊNCIAS DE ENSINO PARA PROMOVER O LETRAMENTO ESTATÍSTICO

Irene Mauricio Cazorla*

Miriam Cardoso Utsumi**

icazorla@uol.com.br, mcutsumi@unicamp.br

Universidade Estadual de Santa Cruz, Brasil*

Universidade Estadual de Campinas, Brasil**

Resumen

Neste trabalho socializamos a experiência de construção e validação de sequências para ensinar Estatística e Probabilidade na Educação Básica (primária e secundária), construídas seguindo as orientações curriculares oficiais, abordando temas transversais e interdisciplinares, buscando o papel ativo dos estudantes. As sequências trabalham os conceitos estatísticos e de probabilidade, seguem as fases do ciclo investigativo e seu ensino visa promover o letramento estatístico. As sequências são protótipos com características peculiares que podem ser adaptadas a outros temas e outros contextos.

Palabras clave: *Sequência de ensino, Ensino de Estatística, Letramento Estatístico, Educação Básica.*

Antecedentes

Desde 1997, o Brasil introduziu os conteúdos de Estatística e Probabilidade com a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN. Sua inserção foi realizada com grande status, pois passou a compor um dos quatro blocos da disciplina de Matemática, no Ensino Fundamental, denominado “Tratamento da Informação” (Brasil, 1997; 1998), e no Ensino Médio como um dos três eixos, denominado “Análise de Dados” (Brasil, 2002). Essa tendência foi ratificada na Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Brasil, 2018), que incluiu seus conteúdos em uma das cinco unidades denominada “Probabilidade e Estatística”.

Segundo a BNCC, várias habilidades devem ser desenvolvidas durante o ensino da Matemática, dentre as quais destacamos três, nas quais acreditamos que a Estatística pode contribuir significativamente devido à sua própria natureza, são elas:

Habilidade 4: Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.

Habilidade 7: Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza.

Habilidade 8: Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles (Brasil, 2018, p. 265).

Para Wild, Utts e Horton (2018), a Estatística é uma meta-disciplina que “pensa em como transformar dados em informações do mundo real” (p. 7). Desse modo avança como arcabouço metodológico, que permite abstrair padrões e princípios a partir de contextos particulares, para serem incorporados a uma estrutura teórica que permite que sejam usadas em muitos outros problemas, em muitos outros lugares. Para esses autores, o rápido desenvolvimento da Estatística e das opções para seu ensino desafiam os educadores estatísticos para determinar objetivos de aprendizagem e métodos instrucionais que consigam alcançar esses objetivos, o que tem sido denominado de Educação Estatística.

Para Zieffler, Garfield e Fry (2018), a Educação Estatística é um campo interdisciplinar que foca o ensino e a aprendizagem de Estatística. Para Garfield e Ben-Zvi (2008), a Educação Estatística se ancora na Educação Matemática, que fornece arcabouços teóricos metodológicos da pesquisa relativa à aprendizagem e desenvolvimento da cognição, mas que evoluiu como um campo independente de investigação.

A preocupação com o ensino e a aprendizagem de Estatística se intensificou quando os países inseriram seus conteúdos em seus currículos da Educação Básica, passando de uma visão centrada em treinamentos, focada em procedimentos e ferramentas matemáticas, para a educação de estudantes de todos os níveis de ensino.

No Brasil, desde o início dessas mudanças curriculares no final da década de 1990, como professoras em cursos de formação inicial e continuada de professores, desenvolvemos pesquisa no ensino de Estatística na Educação Básica e nos cursos de licenciatura em Matemática, bem como orientamos dissertações no Mestrado em Educação Matemática em nossas universidades. Neste trabalho socializamos nossas sequências de ensino, seus princípios e as recomendações para um bom aproveitamento em sala de aula.

Os princípios que norteiam a construção das sequências de ensino

A Estatística é uma ferramenta poderosa que pode contribuir significativamente na formação de cidadãos críticos, tanto no contexto de leitura, quanto no contexto de investigação, isto é, quando

os estudantes produzem dados. Para isso, nos ancoramos no letramento estatístico proposto por Gal (2002) e no ciclo investigativo proposto por Wild e Pfannkuch (1999).

O letramento estatístico

Segundo Gal (2002), o letramento estatístico nos remete à capacidade de ler, interpretar, compreender e avaliar criticamente informações, sejam elas escritas ou orais, possibilitando ao cidadão adquirir conhecimentos, que possam ser aplicados nos meios sociais, políticos, culturais e econômicos:

[...] refere-se, em termos gerais, a dois componentes inter-relacionados, primeiramente (a) a capacidade das pessoas de interpretar e avaliar criticamente as informações estatísticas, os argumentos ou fenômenos estocásticos, que elas podem encontrar em diversos contextos e, quando relevante (b) sua capacidade de discutir ou comunicar suas reações a tais informações estatísticas, tais como a sua compreensão do significado da informação, as suas opiniões sobre as implicações das informações, ou as suas preocupações quanto à aceitabilidade de determinadas conclusões. (Gal, 2002, p. 2-3).

Segundo Gal (2002), o letramento estatístico envolve dois componentes: o cognitivo e o afetivo. O componente cognitivo é formado por cinco elementos que são responsáveis pela competência das pessoas para compreender, interpretar e avaliar criticamente as informações estatísticas, são eles: o próprio letramento; o conhecimento estatístico; o conhecimento matemático; o conhecimento do contexto e a competência para elaborar questões. O componente afetivo, por sua vez, é formado por dois elementos, o primeiro relacionado às atitudes e às crenças das pessoas, que moldam suas visões de mundo; e o segundo está relacionado à postura crítica, que nada mais é que a aptidão para uma conduta questionadora diante das informações estatísticas (Figura 1).

Desses componentes destacamos o conhecimento do contexto, que é o diferencial quando trabalhamos conceitos estatísticos, que está fortemente ligado à leitura do mundo e a capacidade de elaborar questões críticas, isto é, a capacidade do leitor questionar os dados, as medidas estatísticas, a escolha das medidas e procedimentos estatísticos, a forma de apresentação etc., a fim de verificar a veracidade das informações e desenvolver a capacidade de argumentação, baseada nos dados e nas informações. Além disso, as crenças e atitudes moldam a visão de mundo das pessoas e o mais importante a postura crítica que é a capacidade de refletir sobre o contexto dos dados e está ligada à capacidade de formular perguntas críticas.

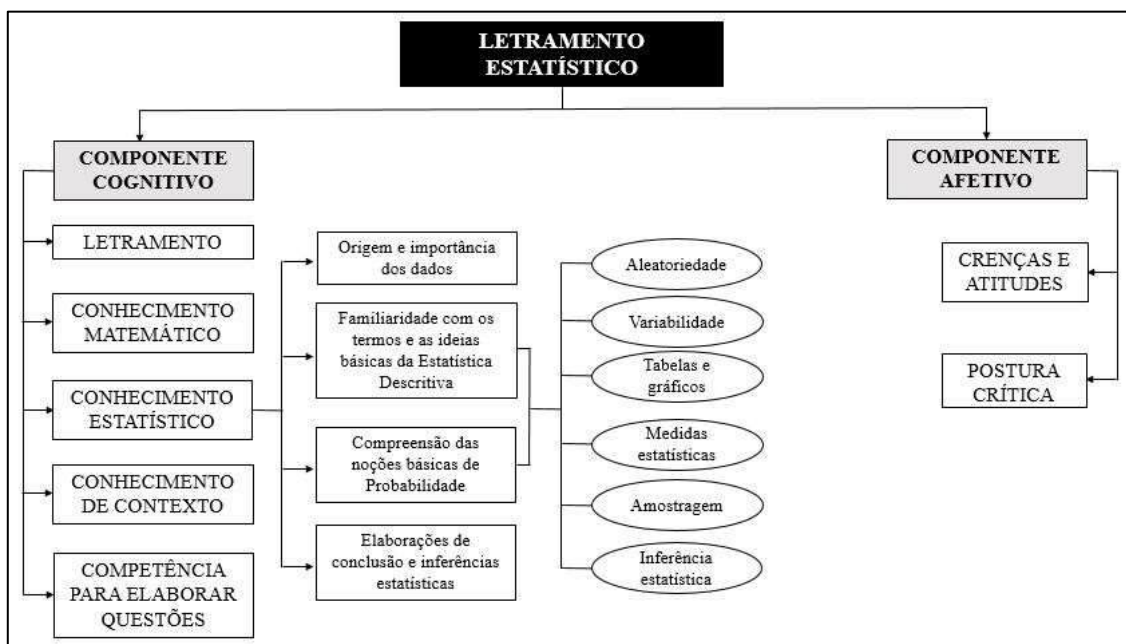


Figura 1. Modelo de letramento estatístico baseado em Gal (2002)

Fonte: Cazorla e Santana (2010, p. 12).

O ciclo investigativo

O ciclo investigativo PPDAC (Figura 2), proposto por Wild e Pfannkuch (1999), é composto por cinco fases: Problema, Planejamento, Dados, Análise e Conclusão. Optamos por utilizar o PPDAC, pois acreditamos que é possível criar condições de aprendizagem envolvendo ativamente os estudantes no processo investigativo, bem como possibilitar a compreensão do fenômeno como um todo, tendo como suporte a Estatística. O *Problema* (P) refere-se ao conhecimento do contexto dos dados, à definição do problema ou fenômeno a ser investigado; o *Planejamento* (P) abrange a definição das ações para a investigação; os *Dados* (D) compreendem o processo de coleta de dados; a *Análise* (A) faz referência a análise dos dados e a *Conclusão* (C) encerra a investigação com um posicionamento crítico, reflexivo, com a comunicação dos dados, podendo gerar novas ideias e novos questionamentos. De acordo com Wild e Pfannkuch (1999):

Um ciclo de investigação PPDAC é definido para alcançar cada objetivo de aprendizagem. O conhecimento adquirido e as necessidades identificadas nestes ciclos podem iniciar novos ciclos de investigação. As conclusões das investigações se alimentam de uma base de conhecimento de contexto expandida que pode então informar qualquer ação. (Wild; Pfannkuch, 1999, p. 225).

Conforme a Figura 2, o ciclo investigativo PPDAC é contínuo, pois para a concretização da investigação estatística com seu emprego, faz-se necessário percorrer as cinco fases, respeitando sua ordem, ou seja, o fechamento do ciclo. Com o fechamento do ciclo e, respondida a questão de investigação, podem surgir novos questionamentos de modo que possam ser solucionados

utilizando o mesmo modelo, em um movimento espiral crescente, com o propósito de alcançar os objetivos no processo de aprendizagem.

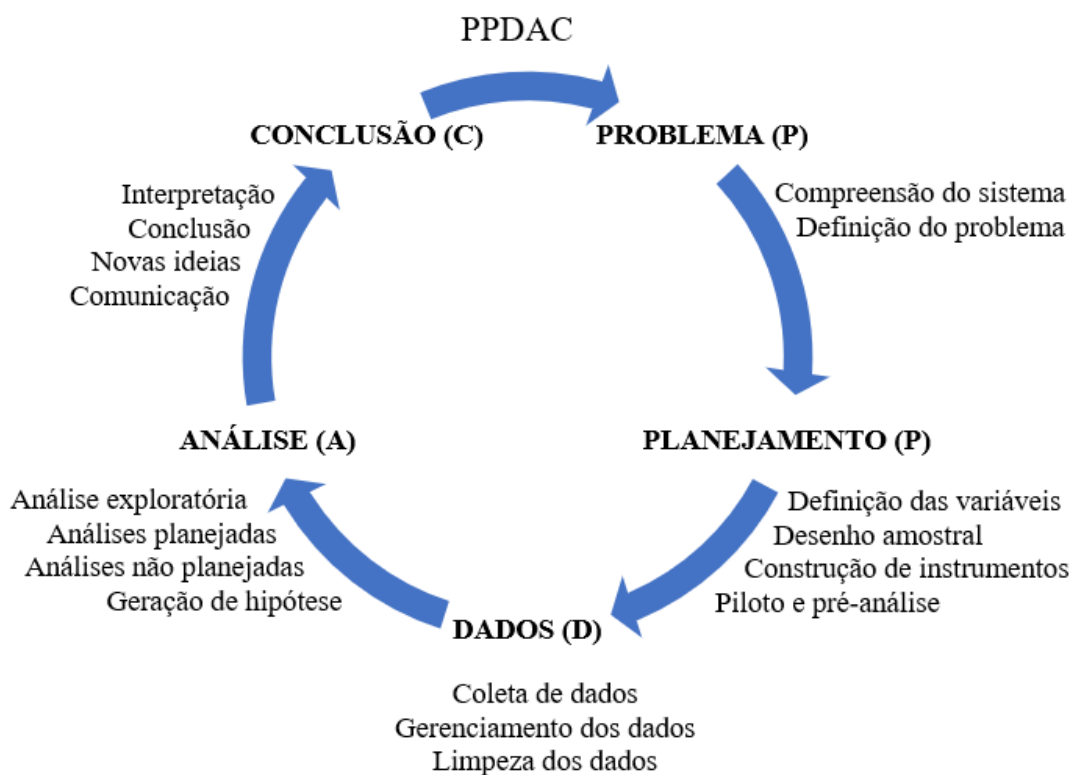


Figura 2. O ciclo investigativo.

Fonte: Wild, Utts e Horton (2018, p.7).

As sequências de ensino

Definimos uma sequência de ensino (SE) como um conjunto de atividades envolvendo conteúdos do currículo escolar, planejados de forma a propiciar a interação dos conhecimentos prévios dos estudantes, com os conhecimentos de Estatística e Probabilidade visando sua institucionalização, isto é, a sua formalização científica.

Inicialmente publicamos quatro SE no livro "Tratamento da Informação para o Ensino Fundamental e Médio" (Cazorla e Santana, 2006): "Trabalhando com os dados dos alunos da classe", "Planeta água", "Trabalhando com a conta de energia elétrica" e "Os passeios aleatórios da Mônica-PAM", que posteriormente foi renomeada de "Os passeios aleatórios da Carlinha". No livro "Do tratamento da informação ao letramento estatístico" (Cazorla e Santana, 2010), revisitamos três sequências "Perfil da turma" que aperfeiçoou a SE "Trabalhando com os dados dos alunos da classe", "Planeta água" e "Planeta Luz" que aperfeiçoou a SE "Trabalhando com a conta de energia elétrica", e acrescentamos o "Homem Vitruviano" e a "Germinação das sementes", além de sugerirmos outras pesquisas.

No livro “Estatística para os anos iniciais do Ensino Fundamental (Cazorla, Magina, Gitirana e Guimarães, 2017) apresentamos duas sequências voltadas para professores formados nos cursos de Pedagogia: “A pesquisa sobre o medo das crianças” e “Pesquisa sobre a altura das crianças”.

A seguir apresentamos nove sequências de ensino, sendo sete de Estatística e duas de Probabilidades. Destacamos que todas foram validadas em escolas públicas brasileiras.

Sequências de ensino de Estatística

As nove SE de Estatística podem ser classificadas como pesquisas de opinião, pesquisa documental e pesquisa observacional, cujas características se encontram no Apêndice 1. Os conteúdos abordados são: *Gráficos* (setores, barras, linhas, histograma, diagrama de pontos – dotplot e o diagrama da caixa – boxplot); as *Medidas de Tendência Central (MTC)*, Média, Mediana e Moda; *Medidas de Dispersão (MD)*, envolvendo a Amplitude, o desvio médio, a variância, o desvio padrão e o coeficiente de variação; as *Medidas de Posição (MP)*, em especial, os Quartis; as *Tabelas* e mais especificamente a *Tabela de Distribuição de Frequência (TDF)*, a frequência absoluta e relativa (em probabilidade e porcentagem). No campo de Probabilidades, além dos conceitos básicos, a probabilidade intuitiva, a frequentista e a clássica, bem como o diagrama da árvore, que descrevemos a seguir.

Pesquisas de opinião. Este tipo de pesquisa envolve majoritariamente variáveis conceituais, em geral, ligadas ao comportamento humano, tais como suas opiniões, percepção, gosto, atitudes, conhecimento, dentre outros. Por essa razão precisamos construir instrumentos que possam “medir” esses construtos e entrevistamos os participantes. Neste protótipo temos:

- *Perfil da turma:* tem como objetivo responder à pergunta “quem são nossos alunos”? Nesta SE trabalhamos cinco variáveis empíricas: gênero (qualitativa nominal), idade (contínua discretizada), número de disciplinas reprovadas (discreta genuína), nota em Português e nota em Matemática (quantitativas contínuas), e duas variáveis conceituais: gosto pela Matemática (qualitativa ordinal), disciplina favorita (qualitativa nominal) (<http://ambiente.educacao.ba.gov.br/conteudos-digitais/conteudo/exibir/id/1623>).
- *Pesquisa eleitoral:* tem como objetivo responder à pergunta “Como os eleitores avaliam seus governantes e em que candidato votariam no dia das eleições”? Nesta SE trabalhamos com quatro variáveis empíricas (gênero, idade, instrução e religião) que caracterizam o perfil do eleitor e com variáveis conceituais para avaliarmos os governantes (Presidente, Governador e Prefeito, Municípios), com uma escala quantitativa de zero a dez. Para “medir” o nível de satisfação dos eleitores apresentamos uma escala do tipo Likert de cinco pontos, com quatro itens (Samá, Cazorla e Amorim, 2019). Esta SE explora os aspectos éticos da divulgação de informações estatísticas na disputa pelo poder.
- *Hábitos alimentares saudáveis:* tem como objetivo responder à pergunta “Quão saudável é sua alimentação? Escolhemos o tema pelo avanço da obesidade, diabetes e hipertensão arterial entre crianças e adolescentes. Construímos uma Escala de Hábitos Alimentares

Complementares (EHAC), do tipo Likert, com seis itens, três positivos (consumo de sucos, frutas naturais e bolos integrais) e três negativos (consumo de refrigerante, doces e salgadinhos industrializados). Os dados permitiram o tratamento em contexto, focando as implicações didáticas do ensino das variáveis conceituais, permite discutir os aspectos intrínsecos à mensuração de fenômenos não observáveis e a tomada de consciência dos estudantes sobre seus hábitos alimentares (Cazorla, Silva-Junior e Santana (2018).

Pesquisa documental. Este tipo de pesquisa envolve o tratamento quantitativo de dados secundários, contidos em documentos, como os dados da conta de água, energia elétrica e cartão de vacinação da criança, isto é, trabalhamos variáveis empíricas. Neste protótipo temos:

- *Planeta água:* tem como objetivo responder à pergunta “quão conscientes e quanta água consumimos?”. Esta sequência tem duas fases, a primeira em que investigamos o nível de consciência com uma escala Likert e a segunda em que trabalhamos o consumo de água das famílias dos estudantes. Como a conta de água tem os dados dos últimos 12 meses (série temporal), solicitamos aos estudantes calculem o consumo médio familiar e per capita e comparamos com os números recomendados pela Organização das Nações Unidas - ONU. Analisamos o perfil sazonal e instigamos os estudantes a explicarem a variabilidade e providências a família pode tomar para não desperdiçar a água. (<http://ambiente.educacao.ba.gov.br/conteudos-digitais/conteudo/exibir/id/1619>).
- *Planeta luz:* tem como objetivo responder à pergunta “quão conscientes e quanta energia elétrica consumimos?”. Esta sequência analisa o consumo de energia dos aparelhos domésticos e como esse consumo apresenta alta variabilidade, focamos o estudo das MD, dando atenção ao cálculo da variância, o desvio padrão e as MP (Silva e Kataoka, 2010).
- *Cartão de vacinação:* tem como objetivo responder à pergunta “quão conscientes estão os estudantes quanto à vacinação?”. Esta SE utiliza os dados de seis vacinas do cartão dos estudantes. Trabalhamos a cobertura vacinal e o número médio de vacinas tomadas. Os estudantes dão significado aos conceitos trabalhado, ampliando o conhecimento estatístico, do contexto e do seu papel como tomadores de decisão, compreendendo a importância da Estatística na leitura de mundo (Lôbo e Cazorla, 2019).

Pesquisa observacional. Este tipo de pesquisa envolve a coleta de dados empíricos, utilizando instrumentos de medida convencionais, como fita métrica, balança etc. Neste protótipo temos:

- *Homem vitruviano:* tem como objetivo analisar as relações entre as medidas do corpo humano, postuladas por Leonardo Da Vinci, possibilitando o tratamento das variáveis quantitativas e suas possíveis relações, mais especificamente com o conceito de função linear. Atualmente, temos trabalhado também com a questão da obesidade e o índice de massa corporal - IMC. Disponível em <http://ambiente.educacao.ba.gov.br/conteudos-digitais/conteudo/exibir/id/1620>.

Sequências de ensino de Probabilidade

Nas duas SE de Probabilidades, envolvemos a experimentação.

- *Geminação das sementes*: apresenta uma situação de experimentação, discutindo o seguinte problema: "Será que todas as sementes, em condições ambientais, que caem no solo, germinam?", "Como podemos investigar esse fenômeno?". Para responder essas questões realizamos um experimento, no qual plantamos algumas sementes e observamos quantas delas germinam. Trabalhamos os conceitos de "fenômeno" e "experimento", "determinístico" e "aleatório", calculamos a taxa de germinação etc. (<http://ambiente.educacao.ba.gov.br/conteudos-digitais/conteudo/exibir/id/2190>).
- *Os passeios aleatórios da Mônica (Carlinha)*: apresenta as diferenças entre experimento determinístico e aleatório, conceitos básicos tais como eventos, espaço amostral, probabilidade de eventos simples, por meio da frequência relativa, a probabilidade clássica a partir da árvore de possibilidades e analisa padrões observados e esperados. (<http://ambiente.educacao.ba.gov.br/conteudos-digitais/conteudo/exibir/id/1622>).

Considerações Finais

Todas as SE foram construídas percorrendo as cinco fases do ciclo investigativo e atendendo os componentes do letramento estatístico. Os conteúdos estatísticos abordados atendem as demandas dos PCN e da BNCC do Brasil. Além disso, acreditamos que para o estudante se assenhorar do comportamento dos dados ele deve trabalhar no ambiente papel e lápis e, se possível no ambiente computacional, mas nunca desprezar o manuseio dos dados pois essa é uma etapa importante para "sentir os dados". No Apêndice1 apresentamos as características das SE. A maioria está disponível para que qualquer professor possa fazer download de forma gratuita, nos endereços que se encontram nas referências.

Referências

- Brasil. (1997). Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília: MEC/SEF.
- Brasil. (1998). Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília: MEC/SEF.
- Brasil (2002). *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Matemática. Brasília: Ministério da Educação/ Secretaria de Educação Fundamental.
- Brasil (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: Ministério da Educação. [Online: [http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC EI EF 110518 versao final site.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf)].
- Cazorla, I. M.; Santana, E. R. (Org.) (2006). *Tratamento da Informação para o Ensino Fundamental e Médio*. Itabuna: Via Litterarum.
- Cazorla, I. M.; Santana, E. R. (Org.) (2010). *Do Tratamento da Informação ao Letramento Estatístico*. Itabuna: Via Litterarum.

- Cazorla, I.; Magina, S.; Gitirana, V. e Guimarães, G. (Org.) (2017). *Estatística para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental*. Sociedade Brasileira de Educação Matemática, Biblioteca do Educador - Coleção SBEM; 9. Disponível em: http://www.sbem.com.br/files/ebook_sbem.pdf.
- Cazorla, I. M, Silva-Junior, A. V. & Santana, E. (2018). Reflexões sobre o ensino de variáveis conceituais na educação básica. *REnCiMa*, 9(2), 354-373.
- Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2008). *Developing students' statistical reasoning: Connecting research and teaching practice*. New York: Springer.
- Gal, I. (2002). Adults' Statistical Literacy: Meanings, Components, Responsibilities. *International Statistical Review*, 70(1), 1-25.
- Lôbo, W. S. & Cazorla, I. M. (2019). Ensino de Estatística e o cuidado com a saúde do adolescente. *Educação Matemática em Revista*, 20(1), 120-129.
- Wild, C. & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67, 223-65.
- Wild, C. J., Utts, J. M. & Horton, N. J. (2018). What is Statistics. In D. Ben-Zvi et al. (eds.), *International Handbook of Research in Statistics Education*, Springer International Handbooks of Education, Chapter 1, 5-36.
- Zieffler, A., Garfield, J. & Fry, E. (2018). What Is Statistics Education? In D. Ben-Zvi et al. (eds.), *International Handbook of Research in Statistics Education*, Springer International Handbooks of Education, Chapter 1, 37-70

Apêndice 1 – Sequências de ensino de Estatística e Probabilidade disponíveis

Área	Estatística						Probabilidade	
	Pesquisa de opinião			Pesquisa documental*			Pesquisa observacional	Experimentação, simulação
Nome da sequência	Perfil da Turma	Pesquisa eleitoral	Hábitos alimentares	Planeta Água	Cartão de vacinação	Planeta Luz	Homem Vitruviano	Os passeios aleatórios da Mônica - PAM
Natureza da pesquisa	Observação, pesquisa de opinião	Observação, pesquisa de opinião	Observação, pesquisa de opinião	Observação, pesquisa documental e pesquisa de opinião	Observação, pesquisa documental	Observação, pesquisa documental	Observação, pesquisa empírica	Experimentação, simulação
Fonte de coleta de dados	Pessoas	Pessoas	Pessoas	Famílias Pessoas	Pessoas	Famílias	Pessoas	Moeda
Tipo de pesquisa	Por censo ou amostragem não aleatória	Por censo ou amostragem não aleatória	Por censo ou amostragem não aleatória	Por censo ou amostragem não aleatória	Por censo ou amostragem não aleatória	Por censo ou amostragem não aleatória	Por censo ou amostragem não aleatória	Amostragem aleatória
Natureza das variáveis	Conceituais e empíricas	Conceituais e empíricas	Conceituais e empíricas	Empíricas e conceituais	Empíricas	Empíricas	Empíricas	Empíricas
Fonte de dados	Primária	Primária	Primária	Secundária	Secundária	Secundária	Primária	Primária
Instrumento	Ficha de coleta de dados	Ficha de coleta de dados e	Ficha de coleta de dados e	Documento: conta de água e	Documento: Cartão de vacina	Documento: conta de energia	Ficha de coleta de dados	Ficha de coleta de dados

		Escala Likert	Escala Likert	Escala Likert							
Objetivo	Analisar variáveis qualitativas e quantitativas no contexto univariado e bivariado	Analisar variáveis qualitativas e quantitativas no contexto univariado e bivariado	Analisar variáveis qualitativas e quantitativas no contexto univariado e bivariado	Tratar séries temporais	Analisar variáveis qualitativas e quantitativas no contexto univariado e bivariado.	Tratar séries temporais	Analisar as relações que se estabelecem entre as medidas antropométricas e a modelagem com a função afim	Contrastar variáveis conceituais e empíricas. Contextualizar a estimativa de parâmetros desconhecidos	Apresentar os rudimentos da teoria da probabilidade		
Conteúdo	Gráficos, TDF simples e de dupla entrada e as MTC	TDF simples e de dupla entrada, gráfico de barras lado a lado, empilhados, opostos	TDF simples e de dupla entrada, gráfico de barras lado a lado, empilhados, opostos	Gráfico de linhas e barras, diagrama de pontos, da caixa (boxplot), MTC, MD, MP e valores discrepantes (outliers)	TDF simples e de dupla entrada, gráfico de barras lado a lado, empilhados, opostos e as MTC	Gráfico de linhas e barras, diagrama de pontos, da caixa (boxplot), MTC, MD, MP e valores discrepantes (outliers)	Diagrama de pontos e da caixa (boxplot, diagrama de dispersão. Correlação e regressão	Fenômenos e experimentos aleatórios. Variáveis empíricas e conceituais. Taxa de germinação e erros	Fenômenos e experimentos aleatórios. Cálculo de probabilidade dos frequentistas, clássica, axiomática.		

* Análise de dados quantitativos que constam em documentos.

Fonte: As autoras.

ANÁLISIS DE ACTIVIDADES PARA LA ENSEÑANZA DE LA GESTIÓN DE DATOS

Percy Callinapa Supo*

Eliana Inca Choquepata**

Elsa Macedo Anaya***

pcallinap@hotmail.com, eli_dulce_160210@hotmail.com, adcelsa@hotmail.com

I.E. 40630 Virgen del Carmen, Perú*

I.E Charlotte, Perú**

I.E.40029 Ludwing Van Bethoven, Perú***

Resumen

El presente análisis corresponde a la revisión de actividades relacionadas con la competencia Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre, comprendidas en el Cuaderno de trabajo para primer grado de Educación Primaria – Matemática 1 (MINEDU 2019). Este material es distribuido a los estudiantes del III ciclo de educación primaria, es decir, a los niños y niñas que están en el primer y segundo grado (6 y 7 años). Se analizan cada una de las actividades relacionadas con la gestión de datos que se proponen en el cuaderno, buscando si estas utilizan la herramienta didáctica ciclo PPDAC propia de la gestión de datos.

Palabras clave: Estadística, PPDAC, situación problema.

Introducción

Este análisis es desarrollado por un grupo de profesores de primaria que laboran en la UGEL Arequipa Sur y UGEL La Joya, y que forman parte de un grupo de profesores en capacitación por parte del Grupo de Enseñanza de la Estadística y la Probabilidad del IREM-PUCP. Y forma parte de un proyecto que tiene la intención de empoderar a los profesores de las de las diferentes redes que se han formado en el ámbito de la UGEL Arequipa Sur, mediante una serie de talleres para dar a conocer la herramienta didáctica PPDAC (Problema, Plan, Datos, Análisis, Conclusión) para enseñar estadística a los estudiantes de cada grado de primaria, Osorio y Advíncula (2018).

La competencia de Resuelve problema de gestión de datos cuenta con una didáctica exclusiva de la competencia MINEDU (2015), como lo tienen cada una de las competencias del área de matemática o las competencias de ciencia y tecnología. Así como en la competencia de resolución de problemas de cantidad, para ser resuelto con éxito, el estudiante debe comprender el problema en su conjunto, para ello aplica diversos métodos como el de Polya o el método Singapur; de la misma manera, en la resolución de problemas de gestión de datos se propone aplicar como propuesta didáctica el ciclo PPDAC, dimensión 1 de la propuesta de Wild y Pfannkuch (1999), que

puede ser usado por los profesores para el desarrollo del pensamiento estadístico en los estudiantes.

Si se realiza un análisis del estándar propuesto para el III ciclo para la competencia, figura 1, se nos muestra lo que el estudiante debe aprender a lo largo de los dos primeros grados de primaria.

“Resuelve problemas relacionados con datos cualitativos en situaciones de su interés, recolecta datos a través de preguntas sencillas, los registra en listas o tablas de conteo simple (frecuencias) y los organiza en pictogramas horizontales y grafico de barras simples. Lee información contenida en estas tablas o gráficos identificando el dato o datos que tuvieron mayor o menor frecuencia y explica sus decisiones basándose en la información producida. Expresa la ocurrencia de sucesos cotidianos usando las nociones de posible o imposible y justifica su respuesta”.

Figura 1. Estándar del III ciclo para la competencia Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre. MINEDU (2016).

Analizando el estándar se puede observar que este contiene todas las etapas del ciclo PPDAC:

* **PROBLEMA:** “Resuelve problemas relacionados con datos cualitativos en situaciones de su interés”. Esta parte del estándar se refiere a las situaciones problemáticas, pero es necesario resaltar que estas situaciones deben contar con un contexto, un propósito y un problema que se pueda resolver con datos recopilados.

* **PLAN:** “Recolecta datos a través de preguntas sencillas”.

Es esta parte se entiende que se debe plantear: quienes serán nuestra población considerada para la recolección de datos y trabajar en la construcción de preguntas sencillas o encuestas para el recojo de datos.

* **DATOS:** “Los registra en listas o tablas de conteo simple”

Aquí se debe orientar nuestro trabajo a la manera de cómo vamos a recopilar los datos y como lo registraremos; en una lista o tablas de conteo (mediante palotes).

* **ANÁLISIS:** “Los organiza en pictogramas horizontales y grafico de barras simples”.

Trabajar el análisis nos lleva a organizar los datos según el grado en que se encuentra el estudiante, que puede ser desde una tabla de frecuencia simple hasta el uso de diferentes tipos de gráficos.

* **CONCLUSIÓN:** “Lee información contenida en estas tablas o gráficos identificando el dato o datos que tuvieron mayor o menor frecuencia y explica sus decisiones basándose en la información producida.”

En esta última parte el estudiante debe ser capaz de leer y comparar la información y comunicar sus resultados de una situación real.

A partir de este análisis debería pensarse que las actividades propuestas que aparecen en los Cuadernos de trabajo editados por el MINEDU deberían transitar por todas las etapas del PPDAC.

Análisis de las actividades de gestión de datos

Este análisis comprenderá tres actividades propuestas en el Cuaderno de Trabajo Matemática 1 MINEDU (2019) referidas a gestión de datos.

1.- Actividad: Organizamos la información en tablas. cuaderno de trabajo del 1º grado página 59

Se analiza si la situación problemática planteada, figura 1, y se transita por cada una de las etapas del ciclo PPDAC:

Etapla Problema: Esta situación problemática contiene los siguientes elementos:

- a) Contexto: Si leemos en forma literal, el contexto pareciera ser el aula de la profesora Lili. Pero el contexto es en realidad el aula del alumno que está leyendo la situación problemática. Entonces el contexto es el aula del alumno que está leyendo.
- b) Propósito: Elaborar polos para el campeonato.
- c) Problema: Determinar el color preferido del aula.

Se determina que la situación planteada tiene todos los elementos: contexto, problema y un propósito. También se observa que se busca establecer los posibles datos a recoger, cuando se les solicita a los alumnos la propuesta de cuatro colores.

Etapla plan: Hay una situación que direcciona a la planificación cuando la viñeta se pregunta ¿Qué pregunta les haremos a los compañeros? Indirectamente se direcciona a que los que contestan van a ser los alumnos del aula, la pregunta que elaboraran será consensuada en el aula y escrita en los espacios en blanco de su cuaderno conjuntamente con las respuestas.

Las preguntas que planteen los estudiantes pueden ser: ¿Qué color te gustaría que sea el polo de tu aula? ¿Qué color escogerías para el polo de tu aula? ¿Cuál de los cuatro colores propuestas escogerías para el color de tu aula?

Organizamos la información en tablas

UNIDAD
3

1. La profesora Lili quiere saber cuál es el color favorito en su aula para elaborar los polos del campeonato. En tu aula, ¿cuál es el color preferido?

a. Respondan las preguntas de la profesora.

¿Qué colores les gusta? Pensemos en 4.

¿Qué pregunta les haremos a sus compañeros?

b. Pregunten a todos sus compañeros y **escriban** en el recuadro el color que elige cada uno.

c. Organicen los datos que han anotado en la tabla. **Recuerden** escribir un título para la tabla.

Título: _____

Color	Conteo	Total

d. Pintan en la tabla el color que tiene el mayor número.

- El color preferido en el aula es _____ porque _____

Figura 1. Actividad en el cuaderno de trabajo Matemática (MINEDU, 2019, p.59)

Etapas Datos: En el punto b. se aprecia que serán los estudiantes los que escriban la respuesta sobre el color que den sus compañeros, aunque este puede ser sustituido al momento de trabajar por una ficha para cada estudiante, es decir, una encuesta para cada estudiante del aula.

También se le puede entregar a cada estudiante encuestado una tarjetita donde puedan escribir o pintar su color favorito por tratarse de alumnos de primer grado (6 y 7 años) y esta puede ser una de las primeras actividades del estudiante. Dentro de esta etapa se tendría el llenado del conteo de la tabla que reemplazaría a una lista de datos.

Etapas Análisis: Una vez obtenido los datos a través de las respuestas recogidas y colocado el conteo de la tabla, los estudiantes organizados en grupos pueden completar la frecuencia (columna Total).

Asimismo, tendrán que colocar el título de la tabla. Ejemplo: color preferido de los alumnos de primer grado.

En esta etapa se observa que incluso los estudiantes van a tener que colocar el título a la tabla, que es de alta demanda cognitiva para un estudiante de primer grado.

Etapa Conclusión: Los niños de primer grado serán capaces de resolver el problema, pero con la mediación del docente que a través de preguntas los ayudarán a transitar por las diferentes etapas del ciclo PPDAC. Finalmente, conocen el color preferido en el aula para confeccionar sus polos.

En esta etapa se debería trabajar más actividades que solo pintar el color que tiene la mayor cantidad de alumnos, se podría también solicitar cual fue el color de menor preferencia.

2.- Actividad: Situación de contexto. cuaderno de trabajo del 1º grado página 60

Esta es una actividad de afianzamiento y contiene los siguientes elementos:

- a. Contexto: el contexto es el aula de la profesora Lily.
- b. Propósito: En este caso no se ve cual es el propósito para trabajar la situación propuesta. No se conoce el para que se desea conocer la mascota que se tiene en casa.
- c. Problema: Determinar la mascota que la mayoría tiene en casa.

Se realizó el análisis de si la situación planteada, figura 2, transita por cada una de las etapas del ciclo PPDAC.

Etapa Problema: En esta situación problemática solo se cuenta con dos elementos: el problema y el contexto. Los datos relacionados con la solución del problema ya aparecen como respuesta en las tarjetitas, pero no existe una pregunta que vincule esos datos con el problema.

Etapa plan: En esta etapa no hay una pregunta que se relacione con la población que debe dar los datos, y la pregunta a responder para obtener los datos aparece como parte del enunciado de la situación problemática. Lo que se busca entonces es que los estudiantes identifiquen la pregunta, pero no que sea construida por ellos.

Las preguntas que pudieron plantear los estudiantes pueden ser: ¿Qué macota tienes en tu casa? ¿Qué animal tienes de mascota en tu casa?

1.º grado

2. La profesora Lili les preguntó a los niños y a las niñas qué mascota tienen en casa. ¿Todos participaron indicando su mascota! ¿Cuál es la mascota que la mayoría tiene en casa?



a. Respondan de manera oral.

- ¿Sobre qué preguntó la profesora Lili a los niños?
- ¿Qué animales mencionaron los niños?
- ¿Dónde se puede organizar lo que dijeron los niños?

b. Organicen los datos en la tabla. Coloquen una **I** por cada animalito mencionado por los niños.

Mascotas de los niños de 1.º grado		
Mascota	Conteo	Total
	I	
		
		

c. Cuenten las **I** y escriban el total.

d. Rodeen con una  el animalito que tiene el mayor número.

La mascota que tiene la mayoría es _____.

sesenta 60

Figura 2. Cuaderno de trabajo de 1º grado MINEDU (2019) Pág. 60

Etapas Datos: En este caso no hay recopilación de datos, dado que los datos ya están representados en las imágenes que aparecen en la viñeta de cada niño y niña.

Etapas Análisis: Los datos serán trasladados a una tabla de conteo simple utilizando palotes y luego se hará el conteo respectivo, no hay otra opción de trabajo. Lo que se podría trabajar adicionalmente el tránsito de tabla a un gráfico y los estudiantes lo pueden adicionar a su cuaderno de trabajo.

Etapas Conclusión: La conclusión que hace en base a la mayor cantidad de estudiantes o frecuencia y responder que mascota tiene la mayoría.

El docente podría trabajar un análisis más detallado de la tabla respondiendo a interrogantes como: ¿Por qué creen que la mayoría de los alumnos tienen perritos? ¿Por qué se prefiere menos a los gatos?

3.- actividad: Organizamos información en gráficos; página 61:

Se pudo observar que la situación problemática propuesta, figura 3, no tiene un propósito ni un contexto. En esta situación se observa que Miguel anota en una tabla los alimentos que lleva en la lonchera, pero no se sabe a ciencia cierta si es de un día o de una semana. Toda situación de gestión de datos debe tener siempre todos los elementos que se han detallado, para que el estudiante pueda llegar a una conclusión.

Analizaremos si la situación propuesta transita por cada una de las etapas del ciclo PPDAC. Se ha encontrado que:

Etapa Problema: El problema no es claro y no tiene el propósito que debe llevarnos a resolver una situación de gestión de datos, buscando dar una respuesta al problema. Y, además, no permite fácilmente que el estudiante pueda identificar un posible propósito para el problema.

Etapa Plan: En esta actividad no se aprecia las acciones que implica desarrollar el plan pues no dan opción de que el estudiante analice ¿Qué anotara en un día? ¿Cada día? ¿En una semana? Además, los datos presentados en la tabla resultan poco creíbles pues solo hay tres alternativas.

Etapa Datos: Los datos ya están vaciados en la tabla de conteo y el estudiante ya no tiene que realizar el proceso de contarlos. Solo se le pide que coloque los valores de la columna Total.

Etapa Análisis: En cuanto a las preguntas que aparecen en la sección b, estas no son claras por varias razones. Primera pregunta ¿Qué alimentos llevó Miguel?, el estudiante puede indicar dudas como ¿A dónde? ¿Cuándo? En cuanto a la segunda pregunta esta es aún más confusa ¿Qué alimento llevó todos los días? Cómo se puede conocer que alimentos llevo todos los días Miguel, si en el problema no me indican cuando llevo cada alimento.



1. Miguel anotó en una tabla los alimentos que llevó en su lonchera. ¿Qué alimento es el que más veces llevó en su lonchera?



- a. **Completen** la tabla que inició Miguel.

Alimentos de la lonchera de Miguel

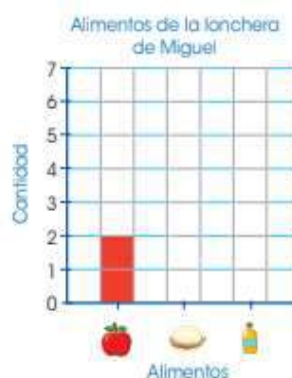
Alimento	Conteo	Total

- b. **Respondan** oralmente.

- ¿Qué alimentos llevó Miguel?
- ¿Qué alimento llevó todos los días?

- c. **Organicen** la información en un gráfico.

- d. **Pinten** en el gráfico un ☐ por cada uno de los alimentos que llevó en su lonchera.



- e. **Respondan** oralmente, ¿qué representa la barra más larga?

Figura. 3 Cuaderno de trabajo de 1º grado MINEDU (2019). Pág. 61

Los estudiantes si van a trabajar un gráfico de barras, coloreando de acuerdo a la cantidad de datos que aparece en la tabla de conteo. Pero hay que tener presente que no es necesario hacer el gráfico de barras para contestar la última pregunta.

Etapas Conclusión: Miguel concluirá que el producto en botella es el alimento que más lleva, pero sin conocer que es este producto y tampoco si es se da en un día, una semana o un mes. Para que esta actividad pueda transitar por todos los pasos del ciclo PPDAC de una manera más fluida, el docente de aula tendría que contextualizar el problema, completando la información faltante.

Conclusiones

Luego de analizar las tres actividades seleccionadas del cuaderno de trabajo de matemáticas de 1º grado del MINEDU se llegó a las siguientes conclusiones

- Luego de analizar el estándar del III ciclo, se encontró que este ya está direccionando a la aplicación del ciclo PPDAC, es decir, ya se ven los elementos relacionados con cada una de las

etapas del ciclo. Así mismo, en los cuadernos de trabajo de matemática de primer grado de primaria, los primeros problemas si se direccionan a la aplicación de las etapas del ciclo PPDAC como se ha visto en los primeros dos ejemplos. Que el estudiante transite por todas las etapas del ciclo implica que estará desarrollando diversas habilidades como comprender el problema, trazar un plan para resolver el problema, técnicas para recolectar, organizar, presentar y analizar los datos. Pero no siempre todos ellos con una sola situación problemática.

- Así como cuando resolvemos un problema de cantidad tenemos que transitamos desde comprender el problema hasta dar la respuesta, recorriendo diversos pasos. En gestión de datos, también tiene que trabajarse de la misma manera usando las etapas del ciclo PPDAC. Pero cuando revisamos los cuadernos de trabajo del grado que es objeto de este análisis, encontramos que las actividades de la mayoría de los problemas consideran solo una o dos etapas del ciclo, es decir, no todas las actividades que propone el cuaderno parten de la situación problema contextualizada. Algunas solo se limitan a comparar y organizar datos en tablas o gráficos o solo leer gráficos, lo que limita al estudiante. El estudiante desde el inicio de su etapa escolar debería tener la capacidad y la habilidad de transitar por todas las etapas del ciclo PPDAC.
- También se indicó que una situación problemática de gestión de datos debe tener tres partes importantes, que le permitan al estudiante desarrollar las diferentes capacidades y habilidades propuestas por la competencia. Estas tres partes a las que nos referimos son: el contexto, el propósito y el problema. La mayoría de los problemas propuestos en el cuaderno de trabajo no tienen el propósito o son actividades simples que no permiten desarrollar en el estudiante la competencia de resolución de problemas de gestión de datos. En todo caso el docente debe ser capaz de contextualizar cada uno de los problemas y convertirlo en un problema de gestión de datos que tenga todos los elementos necesarios, para que los estudiantes transiten por todas las etapas del ciclo.
- Cuando los estudiantes transiten por todas las etapas del ciclo PPDAC serán capaces de movilizar conocimientos y habilidades como: recopilar, describir, organizar e interpretar datos. Así mismo, la incorporación del ciclo PPDAC a la enseñanza de gestión de datos, responde a las necesidades de los estudiantes para que cuenten con nuevas herramientas didácticas. Afín de desarrollar su capacidad investigativa realizando preguntas pertinentes, recoger información adecuada y, tomar decisiones adecuadas y oportunas en base a criterios bien analizados y sustentados.

Referencias

MINEDU (2019). Matemática 1 Cuadernos de trabajo.

MINEDU (2015). Rutas de Aprendizaje.

Osorio, A., y Advincula, E. (2018). El uso del ciclo PPDAC para la creación de problemas en la gestión de datos. En IX Congreso Internacional Sobre Enseñanza de las Matemáticas. (pp. 133-140) Universidad Nacional de Huancavelica / Pontificia Universidad Católica del Perú. Recuperado de: <http://repositorio.unh.edu.pe/handle/UNH/1192>

Wild, C. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical Thinking in Empirical Enquiry. International Statistical Review (1999), 67, 3, 223-265.

LA SITUACIÓN SIGNIFICATIVA EN LA COMPETENCIA RESUELVE PROBLEMAS DE GESTIÓN DE DATOS E INCERTIDUMBRE

Giovanna Vicky Gonzales Oporto*

Sebastiana Nancy Sacasqui Aguilar**

giovicky1@hotmail.com , nanaguila25@hotmail.com

I.E. 41006 "Jorge Polar", Perú*

I.E. 40029 "Ludwig Van Beethoven, Perú**

Resumen

Se presenta una sesión de aprendizaje, para el 2do grado de educación primaria, que tiene como finalidad promover el empleo del ciclo PPDAC como estrategia didáctica en la enseñanza-aprendizaje de la competencia Resuelve Problemas de Gestión de Datos e Incertidumbre. Esta sesión parte de una situación del contexto escolar (situación significativa que responde a los intereses de los estudiantes y ofrece oportunidades de aprender de ella); y es desarrollada empleando el ciclo PPDAC (problema, plan, datos, análisis y conclusiones) propuesto por Wild y Pfannkuch (1999). El resultado permitió a los estudiantes la toma de decisiones sobre la sesión de aprendizaje en estudio y propició una nueva situación significativa, retadora; que se plasmó en una unidad didáctica (se tomó en cuenta las necesidades de aprendizaje de los estudiantes).

Palabras clave: Gestión de datos, ciclo PPDAC, estadística, situación significativa.

Introducción

En la actualidad, los niños y niñas necesitan enfrentarse a los diferentes retos que demanda la sociedad, un contexto cambiante e impredecible donde la información, el manejo del azar y la incertidumbre juegan un papel relevante. En este contexto la educación y las actividades de aprendizaje deben de orientarse al desarrollo de las competencias matemáticas que implican la resolución de problemas a partir de actividades desafiantes, retadoras que permitan a los futuros ciudadanos interpretar la realidad y tomar decisiones con pertinencia y eficacia.

"La estadística es un buen vehículo para alcanzar las capacidades de comunicación, tratamiento de información, resolución de problemas, uso de ordenadores y trabajo cooperativo y en grupo a la que se da gran importancia en los nuevos currículos." (Begg, 1997).

En el Perú en el año 2015 se facilitó a los profesores las rutas del aprendizaje ¿Qué y cómo aprenden nuestros estudiantes? (en todas las áreas). Para la competencia en cuestión se dio orientaciones para el desarrollo de las mismas facilitando cuatro pasos a seguir: formular preguntas, recopilar datos, analizar datos e interpretar resultados; según GAISE (Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education) (MINEDU 2015). Orientaciones que son muy similares a las

propuestas en la sesión a desarrollar empleando el ciclo PPDAC (problema, plan, datos, análisis y conclusiones).

La situación a desarrollar en este artículo parte de una situación problema del contexto del estudiante, situación significativa que responde a los intereses de los estudiantes y que ofrece oportunidades de aprender de ella. Cuando esto ocurre los estudiantes pueden establecer relación entre sus saberes previos y la nueva situación. Por este motivo se dice que cuando una situación le resulta significativa al estudiante puede constituir un desafío para él. Estas situaciones cumplen el rol de retar las competencias del estudiante para que progresen a un nivel de desarrollo al que tenían.

Este artículo forma parte del trabajo de investigación que realiza el grupo de investigación en Enseñanza de la Estadística y la Probabilidad del Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas, IREM – PUCP de la Pontificia Universidad Católica del Perú. Este grupo viene aplicando clases modelo, para los diferentes grados de educación primaria, desde el año 2016. Esta actividad corresponde a una clase modelo del 2do grado de educación primaria preparada por profesoras del III ciclo con apoyo del grupo de investigación que sea aplicó en aula y será presentada a un grupo de profesores que conforman las redes de profesores de primaria del ámbito de la Ugel Arequipa Sur.

Objetivos de la sesión de clase:

- Promover el empleo del ciclo PPDAC (problema, plan, datos, análisis y conclusiones) a través de la situación problema ideal para la enseñanza de la competencia de Gestión de datos e incertidumbre.
- Involucrar a los docentes en el diseño e implementación de unidades de aprendizaje a partir de situaciones significativas, de la competencia de Gestión de Datos e incertidumbre.

Este artículo está dividido en tres partes: en la primera se desarrolla el marco teórico, la segunda parte es la presentación del desarrollo de la sesión de aprendizaje y en la tercera parte se presentan las conclusiones.

Marco teórico

Sólo habrá aprendizaje significativo cuando lo que se trata de aprender se logra relacionar de forma sustantiva, y no arbitraria con lo que ya conoce quien aprende, es decir, con aspectos relevantes y preexistentes de su estructura cognitiva (D. Ausubel 1918)

Wild y Pfannkuch (1999) proponen que el objetivo fundamental de la investigación estadística es el aprendizaje dentro de una situación real. Entonces, el analizar los aspectos de un determinado problema es más que solo recolectar datos sobre este para convertirlos en información, pues también implica conocer adecuadamente la realidad que los rodea. Por tanto, el aprendizaje que propone una situación problema en gestión de datos comprende: la recopilación de datos válidos y el poder sintetizar la información recogida; mediante el reconocimiento de las ideas ya existentes sobre el problema y las nuevas ideas que se puedan encontrar durante la investigación del problema.

En Osorio y Advincula (2018), se puede ver la relación de cada etapa del ciclo PPDAC, con los contenidos de los desempeños del nivel primario en la competencia Resuelve problemas en gestión de datos e incertidumbre, tal como se muestra en el siguiente esquema (Ver figura 1).

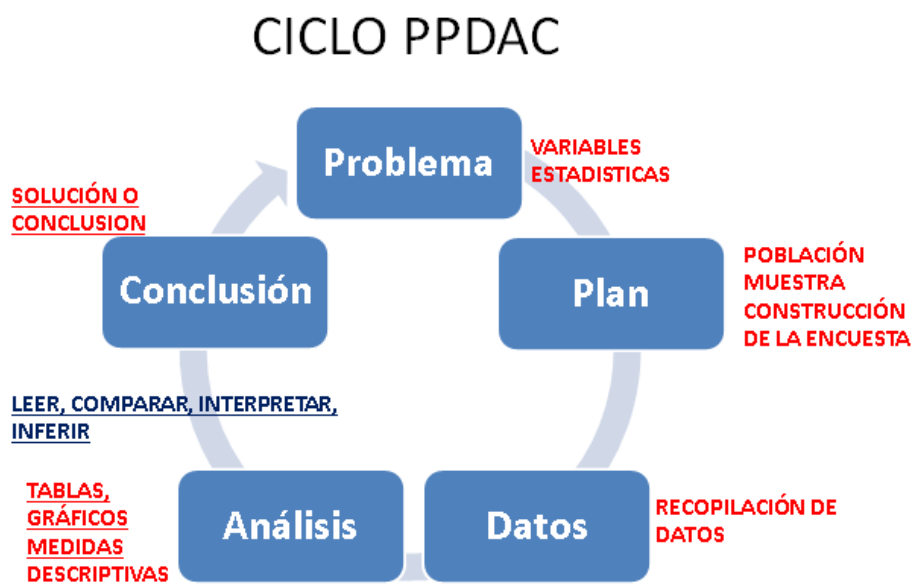


Figura1. Relación entre el ciclo PPDAC y los conceptos o procedimientos Estadísticos.

Y se puede obtener en ese mismo artículo la descripción de cada etapa del ciclo PPDAC.

Problema, análisis inicial de la situación problema propuesta con el fin de identificar el problema y las variables estadísticas involucradas en ella.

Plan, se plantea en que individuos se centrará el trabajo, es decir, de quienes obtendremos los datos mediante las variables estadísticas identificadas. En esta etapa también se trabaja la construcción de las preguntas y del instrumento que nos permitirá realizar la recopilación de los datos.

Datos, es donde se aplican los procesos de recopilación de datos y se trabaja la limpieza de los mismos.

Análisis, el fin es el manejo de los datos obtenidos y la búsqueda de información. En esta etapa se utilizan los objetos estadísticos como las tablas de frecuencia, los gráficos de barras simples y agrupadas, las medidas de tendencia central, etc.

En la última etapa, **Conclusión**, se presenta la solución del problema o las conclusiones a las que se ha llegado.

Luego, la situación significativa ideal para trabajar la competencia Resuelve problema de gestión de datos e Incertidumbre a nivel escolar, exige que el profesor proponga una situación problema que le permita al estudiante pasar por todas las etapas del ciclo PPDAC.

Sesión de aprendizaje en gestión de datos

Esta sesión se genera ante una problemática creada en el contexto de los estudiantes. El contexto escolar es una actividad significativa para los estudiantes. Se le propone una situación relacionada a la elección de una danza para ser presentada en el aniversario de la institución educativa. La situación significativa propuesta al ser de gestión de datos, requiere que se transite por la mayor parte de etapas de ciclo PPDAC.

La situación problema que se trabajó es:

Por aniversario de la I.E los alumnos del segundo grado deberán presentar una danza. La profesora del aula propone, con ayuda de un profesor de danza, tres danzas representativas de la región. Los estudiantes deberán elegir la danza que presentarán en el aniversario. La experiencia se realizó en dos sesiones. Pero previamente se invitó a un profesor de danza para que presente tres danzas regionales (las describió y les presentó en un video).

La primera sesión comienza con la motivación de los estudiantes, a quienes se les muestra un video con las fotos de la danza que presentaron el año pasado para el día de la madre. Se preguntó ¿cuál era el nombre de la danza?, ¿qué representaba?, ¿por qué intervienen animalitos?, etc. Se recoge los saberes previos sobre las actividades que se presentan por el aniversario de la I.E. (verbena y día central). Al ser una actividad escolar en la que participan con entusiasmo y ser parte del contexto escolar, se despierta el interés en los estudiantes.

Después de esta introducción se presentó el propósito de la sesión, elegir la danza (de las tres presentadas previamente) la cual se presentará en el aniversario de la I.E. del presente año.

Considerando las etapas del ciclo PPDAC, iniciamos con:

Etapa problema: Se presentó a los estudiantes la situación problema, que se leyó conjuntamente con ellos. Para asegurar su comprensión, se plantearon dos interrogantes, siendo la primera ¿cuál es el problema?, esperando que los alumnos lo identifiquen. Ellos efectivamente lo lograron e indicaron que el problema era: elegir la danza de las tres propuestas. La segunda interrogante ¿de qué manera podemos averiguar cuál será la danza elegida?, con la finalidad de que los alumnos piensen en una encuesta, lo cual también se logró mediante una lluvia de ideas.

Etapa plan: que significa establecer en quienes centraremos el problema, es decir determinar la población en estudio. En esta etapa es primordial que el docente realice las preguntas adecuadas en función del tiempo.

Se preguntó a los estudiantes sobre quiénes elegirán la danza. La respuesta esperada por los alumnos fue: los alumnos del segundo grado. La siguiente pregunta fue ¿qué debemos preguntar a su compañero (a) para que nos diga la danza que prefiere?, se esperaba que los estudiantes digan: ¿qué danza prefieres bailar de las tres propuestas?

En esta etapa también corresponde preguntar ¿Cómo obtendremos la preferencia de cada niño o niña? (Instrumento)

Se preguntó a los estudiantes si era útil una encuesta para averiguar ese dato y se les presentó el modelo de una encuesta tomada de las Sesiones de aprendizaje, Unidad Didáctica 2 (MINEDU, 2015)

Encuesta
Por favor responde a la siguiente pregunta
¿Cuál es tu juego favorito a la hora del recreo?
Muchas gracias

Figura 2

Se invitó a los niños a que en grupo planteen cuál sería la pregunta pertinente para la encuesta. ¿Qué vamos a preguntar?, ¿qué queremos saber?, ¿cuántas preguntas tendrá nuestra encuesta?

Se monitoreó en todo momento el trabajo de los estudiantes y se les orientó para saber si la pregunta que plantearon los llevará a la respuesta esperada.

Se tomó un tiempo prudente para socializar las preguntas elaboradas por los grupos de los estudiantes. Las preguntas fueron diversas, y teniendo en cuenta la edad de los niños, sólo dos grupos de seis, que propusieron la pregunta esperada: ¿cuál es tu danza preferida?.

Etapas de datos: donde se trabaja con la recopilación de los mismos, cada niño copió en un papel la pregunta aceptada por el resto del salón, luego procedieron a encuestar a su compañero (a) de otro grupo (se les mencionó que debían utilizar algunas actitudes de cortesía al momento de realizar la encuesta).

Concluida la aplicación de la encuesta se les formula preguntas relacionadas a la danza que prefiere el compañero encuestado, para que algunos de los alumnos participen dando la respuesta obtenida.

Para finalizar la primera sesión, se procedió a la formalización de los aprendizajes junto con los estudiantes. Se mencionó que una forma de recoger información es a través de las encuestas.

La segunda sesión se inicia con la etapa de análisis, que consiste en seleccionar un gráfico o métodos estadístico apropiado, y utilizarlos para analizar los datos

Se preguntó: ¿qué hacemos ahora con las encuestas?, ¿cómo trabajaremos los datos para que nos den información? Como este grupo ya tenía familiaridad con el uso de tablas de datos, la mayoría de los niños incidió en emplear una tabla de datos; aunque algunos niños, sólo indicaron contémoslos.

Para organizar los datos con ayuda de la maestra se construyó primero un pictograma, pues reemplazaron los resultados de las encuestas por círculos de colores que iban colocando según la danza resultante. Al momento de colocar los círculos, dos niños se dieron cuenta que su encuesta tenía dos respuestas por lo tanto no se consignó en el pictograma. (Se les aclaró que en ese caso la encuesta era consignada nula). Luego en grupo construyeron sus tablas con los datos del pictograma. A los grupos que no consignaron correctamente los encabezados de las tablas se les procedió a realizar una retroalimentación. Figura 3

Con las tablas de datos correctamente consignadas se pidió la participación espontánea de un voluntario de grupo para que lea los resultados obtenidos.

Etapa conclusión: consiste en comprender los resultados del análisis y relacionarlos con el problema planteado. En nuestro caso la conclusión al problema planteado fue que los estudiantes prefirieron la danza número 1 "Chaco de Vicuña".

Además, a través de la tabla de datos se planteó preguntas a los estudiantes para que desarrollen capacidades de leer, comparar, inferir e interpretar los datos en las mismas tablas.

Conclusiones

Primera conclusión: Toda sesión de aprendizaje de la competencia debe partir de un problema del contexto de los estudiantes. Los docentes debemos proponer a los estudiantes situaciones significativas en las que se vean inmersos y participen de ella. Involucrarlos en este tipo de situaciones busca que los niños se sientan motivados, comprometidos con la situación, ellos mismos tienen la capacidad de elegir lo que prefieren y pueden ser partícipes en cada una de las etapas en que se desarrolla el ciclo PPDAC.

Segunda conclusión: Al elaborar la encuesta se tiene que tener en cuenta que la pregunta debe ser clara, que responda a la información que se quiere conseguir. Los niños pudieron elaborar su pregunta tomando como referente el modelo que se les presentó; pues no les resultó fácil a todos los grupos formular la pregunta esperada.

Tercera conclusión: del cuadro de pictogramas (donde pegaron los círculos y se anticiparon a los resultados), se puede pasar a la construcción de una tabla de datos, consignando los títulos necesarios como cantidad y total.

Cuarta conclusión: si una tabla de datos está correctamente elaborada, no hay dificultad para proceder con el análisis respectivo. Se presta para hacer preguntas literales, inferenciales y de comparación.

Quinta conclusión: Esta actividad se genera ante una problemática creada en el contexto de los niños que permitió identificar el problema, diseñar un plan, obtener datos, realizar el análisis y llegar a la conclusión. Se pudo transitar por las cinco etapas del ciclo PPDAC.

Partir de este tipo de situaciones donde el niño pueda elegir la preferencia por una actividad o cosa hace que sea relevante para él. Los docentes podemos aprovechar este tipo de situaciones para planificar nuestras unidades, puesto que al estar motivados e inmersos en la actividad será enriquecedora y del interés del niño.

En la actividad propuesta al ser muy significativa para los niños se aprovechó para planificar una unidad didáctica, dónde se organizó secuencialmente y cronológicamente las actividades y sesiones de aprendizaje para el desarrollo de las competencias y capacidades. (MINEDU, 2015) Se integró las diferentes áreas donde se favoreció la realización de una investigación sobre la vicuña, su hábitat, alimentación, su vida silvestre. Observaron a través de un video en qué consiste el chaco, elaboraron diversos tipos de textos como adivinanzas, dípticos, invitaciones para el día de la presentación; problemas sobre el costo del alquiler de la vestimenta para la danza, etc. Se vieron tan involucrados los niños y sus padres que al momento de la danza todos estaban identificados con la misma. Además, cabe resaltar que el entusiasmo de los papás generó que del pueblo de Chivay

consiguieran fibra de alpaca, puesto que la de vicuña no es fácil de conseguir por su alto valor, para la realización de trabajos en el área de arte.

Los niños, niñas y padres de familia disfrutaron de la danza porque sabían qué significado tenía la danza, el por qué la bailan en la sierra, tenían claro el propósito de la danza.

Referencias

Begg,A. (1997). Some emerging influences underpinning assessment in statistics. En I. Gal, y J.B.Garfield(Eds.), The assessment challenge in statistics education (pp.17 -26). Amsterdam: IOS Pres

MINEDU (2015). Rutas de aprendizaje.

MINEDU (2015). Sesiones de Aprendizaje, Unidad Didáctica 2

Osorio, A. y Advincula, E. (2018). El uso del ciclo PPDAC para la creación de problemas en la gestión de datos. En IX Congreso Internacional Sobre Enseñanza de las Matemáticas. (pp. 133-140) Universidad Nacional de Huancavelica / Pontificia Universidad Católica del Perú. Recuperado de: <http://repositorio.unh.edu.pe/handle/UNH/1192>

Wild, C. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical Thinking in Empirical Enquiry. International Statistical Review (1999), 67, 3, 223-265.

Consideraciones Adicionales

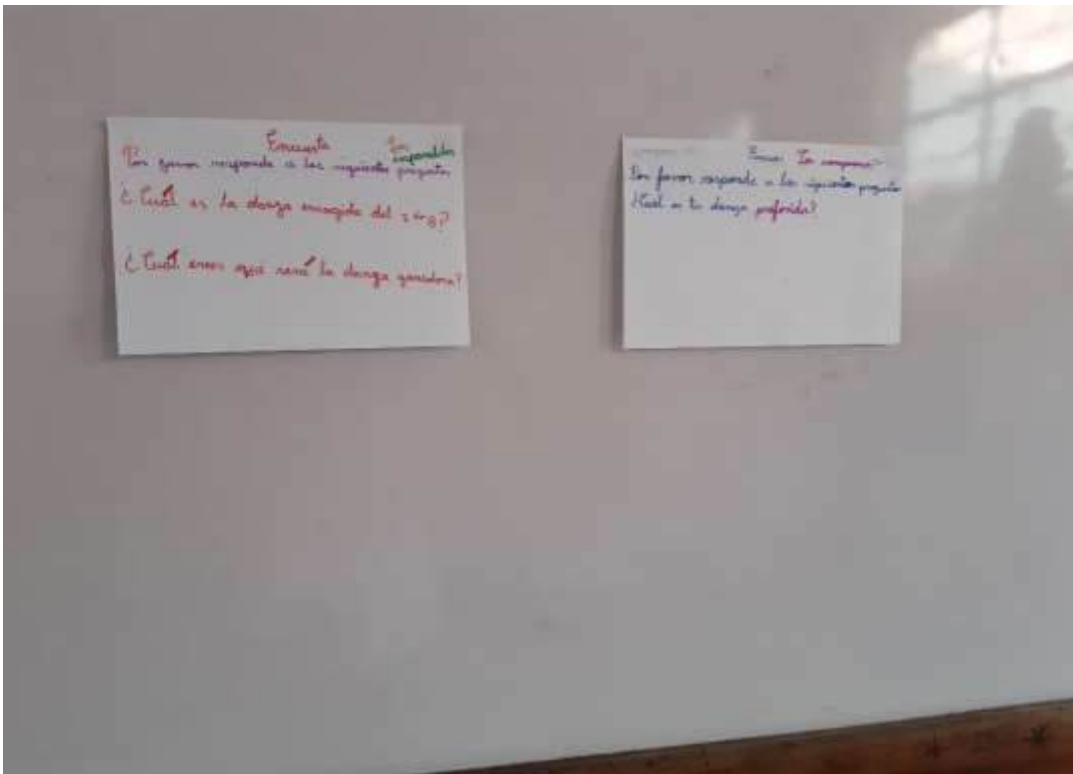


Figura 2. Encuestas elaboradas por los estudiantes en grupo

Encuesta	Respon	Total	Respon: Utilización de energía
Encuesta 1	IIIIIIII	16	✓
Encuesta 2	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 3	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 4	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 5	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 6	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 7	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 8	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 9	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 10	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 11	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 12	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 13	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 14	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 15	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 16	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 17	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 18	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 19	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 20	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 21	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 22	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 23	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 24	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 25	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 26	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 27	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 28	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 29	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 30	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 31	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 32	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 33	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 34	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 35	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 36	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 37	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 38	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 39	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 40	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 41	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 42	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 43	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 44	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 45	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 46	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 47	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 48	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 49	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 50	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 51	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 52	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 53	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 54	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 55	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 56	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 57	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 58	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 59	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 60	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 61	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 62	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 63	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 64	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 65	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 66	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 67	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 68	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 69	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 70	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 71	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 72	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 73	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 74	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 75	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 76	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 77	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 78	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 79	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 80	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 81	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 82	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 83	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 84	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 85	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 86	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 87	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 88	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 89	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 90	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 91	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 92	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 93	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 94	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 95	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 96	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 97	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 98	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 99	IIIIIIII	8	✓
Encuesta 100	IIIIIIII	8	✓

Figura 3. Tablas de datos elaboradas por los estudiantes en grupo

EXPERIENCIA DE LA COMPETENCIA, “RESUELVE PROBLEMAS DE FORMA, MOVIMIENTO Y LOCALIZACIÓN” EN EL ÚLTIMO PUENTE INCA DE QUESWACHAKA

Franklin Taipe Florez,
Julio Cesar Condori Huillca
Doris Castro Huamani
Willi Taipe Florez

panqui77@hotmail.com, cesar-ch@hotmail.com, dofranris@hotmail.com,
willitaipeflorez@gmail.com

Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco, Perú

Resumen

Se presenta una experiencia de aprendizaje con profesores de matemática en el marco del Currículo Nacional de Educación Básica para lograr la competencia "Resuelve problemas de forma, movimiento y localización", el objetivo fue de desarrollar las capacidades y lograr la competencia en los docentes con una experiencia de aprendizaje situado. Esta se desarrolló en el último puente inca de Queswachaka en Cusco y consistió en realizar, observaciones y mediciones convencionales y no convencionales. Esta información fue trabajada por grupos para las capacidades de Modela objetos con formas geométrica, Comunica su comprensión sobre las formas y relaciones geométricas, Usa estrategias y procedimientos para medir, Argumenta afirmaciones sobre las relaciones geométricas. Obteniendo: los modelos $(x + 0.98)^2 = 4(30.12)(y + 0.001)$ i $f(x) = 0.01x^2 - 0.31x + 22.32$., siendo comunicadas a través del Excel y Geogebra, se afirma la validez del modelo bajo las condiciones del lugar geográfico, lográndose la mencionada competencia en comparación a bibliografía especializada.

Palabras clave: Modelamiento, puente inca, competencia, capacidades matemáticas.

Introducción.

En el presente año se viene implementando el CNEB Currículo Nacional de Educación Básica en las Instituciones Educativas del nivel secundario, este currículo mantiene, direcciona y fortalece el enfoque por competencias, capacidades y los estándares de aprendizaje nacionales. En el área de matemática su desarrollo se da a través del enfoque Centrado en la Resolución de Problemas que promueve y facilita que los estudiantes desarrollen entre otras la competencia: Resuelve problemas de forma, movimiento y localización, donde se desarrolla en conjunto sus cuatro capacidades que son, Modela objetos con formas geométricas y sus transformaciones, Comunica su comprensión sobre las formas y relaciones geométricas, Usa estrategias y procedimientos para medir y orientarse en el espacio, Argumenta afirmaciones sobre relaciones geométricas.

Para el logro de competencias en los estudiantes, es necesario que los profesores logren desarrollar y trabajar en competencias a partir de situaciones reales concretas, aprovechando recursos propios de su zona y en uso del aprendizaje situado.

El aprendizaje situado trata de incentivar el trabajo en equipo y cooperativo a través de proyectos orientados a problemas que precisen de la aplicación de métodos analíticos que tengan en cuenta todo tipo de relaciones y vinculaciones. Esto necesariamente implica la participación activa y consciente del alumno, de ahí que este aprendizaje examine ideas que rodean más el "saber" que el "conocer" (Cook & Brown, 1999)

El puente colgante de cuerda Queswachaka une dos pendientes de un desfiladero del río Apurímac en el distrito Cusqueño de Quehue, en la sierra sur del Perú. La existencia de este puente data desde la época incaica y su mantenimiento y renovación se realiza mediante un rito ejecutado por las comunidades de Winchiri, Chaupibanda, Ccollana Quehue y Perccaro.

El 5 de agosto de 2009 el Instituto Nacional de Cultura del Perú declaró como Patrimonio cultural de la nación al «ritual de renovación del puente Queswachaca, así como los conocimientos asociados a su historia y construcción», también es considerado Patrimonio Cultural Inmaterial de la Unesco, tiene una peculiar forma de un objeto geométrico matemático similar a la de una parábola muy abierta, constituyendo en un objeto de estudio para una experiencia de lograr competencias en el área de matemática específicamente en el modelamiento matemático, gracias a sus elementos históricos relevantes lo accidentado del lugar geográfico y su significatividad e interés dado por los profesores.

Finalidad, Implementación y Metodología.

Finalidad de la Experiencia.

El objetivo de esta experiencia es lograr que los docentes puedan desarrollar la competencia matemática de, Resuelve problemas de forma, movimiento y localización, combinando las capacidades de Modelar objetos con formas geométricas, Comunicar su comprensión sobre las formas y relaciones geométricas, Usar estrategias y procedimientos para medir y Argumentar afirmaciones sobre las relaciones geométricas. Y así puedan transmitir a sus estudiantes, las actividades, las sensaciones, las dificultades y satisfacciones que produce el aprendizaje basado en competencias y que estos puedan desarrollarlos en su formación escolar secundaria.

Implementación de la Propuesta.

Mediante grupos se resolvió la situación problemática de modelar, comunicar, argumentar afirmaciones de la forma geométrica del puente de Queswachaka, haciendo uso de las orientaciones para el proceso enseñanza aprendizaje del CNEB. Ambos grupos deben realizar la actividad siguiendo dichas orientaciones: Partir de Situaciones significativas, Generar el conflicto cognitivo, Generar interés y disposición como condición para el aprendizaje, Promover el trabajo cooperativo, Aprender haciendo, Partir de saberes previos, Construir el nuevo conocimiento, Aprender del error o el error constructivos, Mediar el progreso de un nivel a otro, Promover el pensamiento complejo.

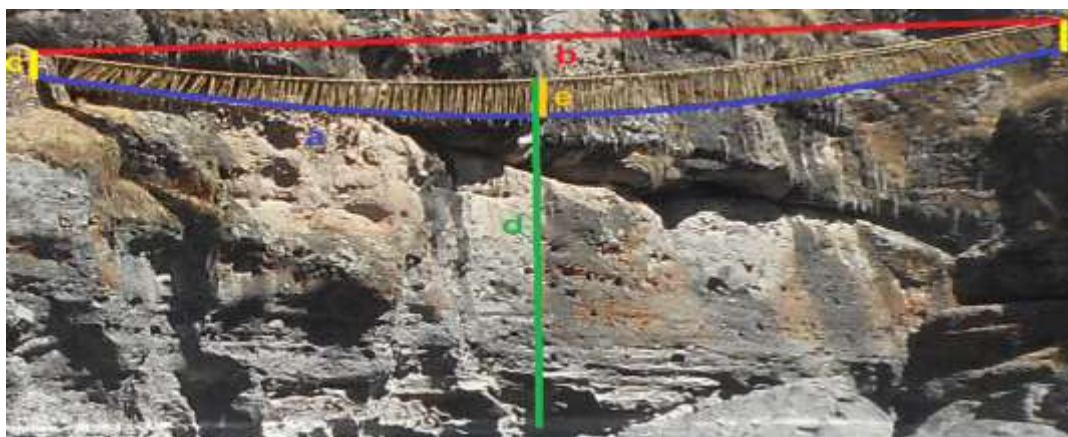


Figura 1. Medidas convencionales del puente Inca de Queswachaka.

Metodología General.

Se formaron dos grupos de profesores A y B cada grupo con 9 docentes entre varones y mujeres, en el lugar del puente de Queswachaka, realizan 5 medidas oficiales (a,b,c,d,e) de la Figura 1, con instrumento, haciéndose tres veces para tomar un promedio, y todas las medidas no convencionales que les pudiera ser útiles para la resolución de la tarea.

Metodología del grupo A.

Se tomaron las medidas no convencionales d1, d2, d3, d4, d5, d6 a1, a2, a3, a4, e1 y e2 tomando el eje de las abscisas (x), paralelo al nivel del río, como indica la Figura 2.



Figura 2. Medidas no convencionales del puente Inca de Queswachaka.

Se asume el origen de las coordenadas XY, como el vértice de la parábola, los resultados de las medidas se introdujeron al programa Excel, en el cual se determinara la ecuación de la parábola con la función insertar función de dispersión XY, a partir de la ecuación general de la parábola $(x - h)^2 = 4p(y - k)$, se encontrara los elementos de la parábola.

Metodología del grupo B.

Estrategia 01: Se insertará la imagen al Geogebra, para tener datos y también comprobar algunas expresiones geométricas de modo que el lado inicial por la izquierda, coincida con el eje "y" y que

el ras del río Apurímac coincida con el eje "x"; por lo tanto, se ubicó puntos en el trayecto de la curva inferior, para encontrar un modelo que reproduzca los elementos de puente de Queswachaka, Figura 4.

Estrategia 02: Para modelar una función cuadrática necesitamos mínimamente 3 puntos como el punto B que se ubica en el eje "y" y el punto K que cierra la curvatura de nuestro puente y algún punto que se ubique por la mitad de la curva como el punto G. Figura 4.

Estrategia 03: Se evaluará de resultados como una actividad transversal en nuestro proyecto, por lo que se verificara nuestra función modelada en el Geogebra, también realizaremos un desplazamiento de la función $f(x)$ en $q = 0,97m$. $f(x)+0.97$ que es la altura de los accesos.

Estrategia 04: Encontrar la altura aproximada del puente hacia el ras el río Apurímac, para lo cual encontraremos las coordenadas del vértice $V(h,k)$ que será el punto más cercano hacia el ras del río.

Estrategia 05: Hallaremos la longitud de la cuerda inferior aplicaremos el cálculo que nos permite encontrar dicha longitud involucrando la derivada y la integral definida.

Resultados Obtenidos.

Mediciones Instrumentales Generales.

Las mediciones iniciales y válidas para la tarea se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1

Medidas instrumentales del puente inca de Queswachaka.

N°	Símbolo	Elemento	Promedio de 3 medidas de ensayo.
1	<i>a</i>	<i>Longitud de la curva</i>	<i>29.12 m</i>
2	<i>b</i>	<i>Distancia entre los soportes</i>	<i>28.55 m</i>
3	<i>c</i>	<i>Altura de los accesos</i>	<i>0.97 m</i>
4	<i>d</i>	<i>Tiempo de caída de un objeto</i>	<i>2.02 s</i>
5	<i>e</i>	<i>Distancia máxima entre las cuerdas.</i>	<i>1.48 m</i>

Fuente: Elaboración propia en base a medidas experimentales hechas por los profesores.

Orientaciones para el proceso enseñanza-aprendizaje.

Las apreciaciones de los grupos, son:

Partir de Situaciones Significativas. - La construcción del puente inca, cada segunda semana de junio, es altamente significativo porque involucra a las IIEE de las Comunidades participantes y las oportunidades de aprendizaje son variadas para todas las áreas del currículo.

Generar el Conflicto Cognitivo. - Plantear la tarea de modelamiento matemático del objeto geométrico del puente, involucra el interés, generando un desequilibrio que motiva la búsqueda de una respuesta, lo que abrió paso a un nuevo aprendizaje.

Generar interés y disposición como condición para el aprendizaje. - El interés estuvo presente desde el inicio hasta el final, puesto que una actividad fuera del aula en un ambiente natural histórico, genero la disposición hacia el aprendizaje.

Promover el trabajo colaborativo. - En los grupos se organizaron en roles como de coordinador general, responsables de mediciones, de secretaria, y otros. Al sentirse miembros del grupo asumieron el conflicto como un reto grupal colaborando con todas sus habilidades y destrezas.

Aprender haciendo. - Las actividades de medición, observación, estimación, la declaración de conjeturas, argumentar afirmaciones, en el lugar del puente y el gabinete en aula, fueron actividades que lograron un aprender desde la misma práctica.

Partir de saberes previos. - Muchos saberes previos fueron utilizados, sistemas y técnicas de medición, plano cartesiano, función parabólica, excel, geogebra, números reales y otros.

Construir el nuevo conocimiento. - Resulto un éxito tener el nuevo conocimiento teórico del modelo matemático del puente de Queswachaka.

Aprender del error o el error constructivo. - Consideraciones técnicas del peso de la cuerda que influye en la curvatura, la exactitud de los puntos considerados para generar el modelo, no considerar como un modelo complejo a la totalidad del puente, reconsiderar afirmaciones.

Mediar el nivel de progreso a otro superior. - Los propios profesores acompañan a sus colegas hacia un nivel inmediatamente superior de posibilidades (zona de desarrollo próximo) con respecto a su nivel actual (zona real de aprendizaje).

Promover el pensamiento complejo. - En el grupo A, intuyeron el uso de la catenaria como curva influenciada por la gravedad, en el grupo B, usaron el cálculo integral para evaluar sus resultados.

Desarrollo de capacidades grupo A.

Para modelar objetos con formas geométricas y comunica la comprensión sobre las formas y relaciones geométricas, se efectuaron las medidas de la Figura 2.

Tabla 2

Medidas no convencionales, del puente inca de Queswachaka (metros)

<i>Símbolo</i>	<i>Medida</i>	<i>Símbolo</i>	<i>Medida</i>
<i>d1</i>	<i>1.17</i>	<i>a1</i>	<i>-13.05</i>
<i>d2</i>	<i>0.61</i>	<i>a2</i>	<i>-9.5</i>
<i>d5</i>	<i>0.16</i>	<i>e1</i>	<i>-4.5</i>
<i>d6</i>	<i>0.31</i>	<i>e2</i>	<i>5.5</i>
<i>d3</i>	<i>1.14</i>	<i>a3</i>	<i>11.0</i>
<i>d4</i>	<i>1.92</i>	<i>a4</i>	<i>14.07</i>

Fuente: Elaboración propia en base a medidas no experimentales hechas por los profesores.

Ingresados los datos al Excel, tenemos que la primera afirmación de considerar al vértice en el punto (0,0), fue reconsiderada con la información de la figura 3.

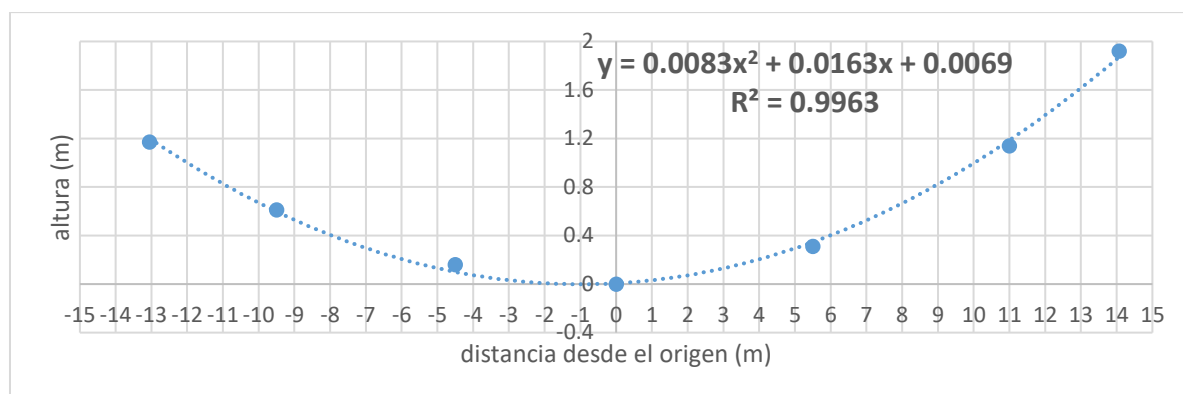


Figura 3. Modelo de la curva parabólica.

A partir de $y = 0.0083x^2 + 0.0163x + 0.0069$, tenemos la ecuación

$$(x - h)^2 = 4p(y - k) \rightarrow (x + 0.98)^2 = 4(30.12)(y + 0.001) , \text{ con elementos de la Tabla 3:}$$

Tabla 3

Elementos del objeto matemático modelizado.

<i>Elemento</i>	<i>Formula</i>	<i>Valor</i>
<i>p</i>	<i>p</i>	30.12
<i>vértice</i>	<i>(h ; k)</i>	<i>(-0.98 ; -0.001)</i>
<i>foco</i>	<i>(h ; k+p)</i>	<i>(0.98 ; 30.121)</i>
<i>directriz</i>	<i>y=k - p</i>	<i>y=-30.119</i>
<i>lado recto</i>	<i>4p</i>	120.48

Fuente: Elaboración propia en base a medidas no experimentales hechas por los profesores

Usa estrategias y procedimientos para medir, orientarse en el espacio y Argumenta afirmaciones sobre relaciones geométricas.

El grupo A, utilizó las mediciones de pasos para las medidas (1paso= 0.64 m), realizando tres repeticiones y tomados un promedio simple, la medida de los puntos en el plano cartesiano imaginario fueron realizadas con ayuda de escalas en dibujos, fotografías y esquemas.

Para la orientación espacial de la figura parabólica se consideró al vértice como un punto situado como en la Figura 2, y no como un punto simétrico de la curva, el eje de las abscisas es paralela al nivel del río.

Se planteó las afirmaciones, la distancia de los pedestales (b) es la misma con respecto a la curva inferior; El vértice se encuentra a 15.05 m desde la derecha y 14.07 m desde la izquierda con respecto a la Figura 2; la afirmación inicial que el vértice coincidirá con el origen de las coordenadas

imaginarias y desde esa afirmación se tomaran seis puntos para construir la ecuación que modele el problema, fue reconsiderada afirmándose que el origen imaginario debe ser cual indica el modelo y valor de la tabla 3.

Desarrollo de capacidades, grupo B.

Para la estrategia 01, los puntos se muestran en la figura 4-5 y tabla 4.



Figura 4. Vista del puente Qeswachaka en el Geogebra y puntos en su contorno

Tabla 4

Coordenadas de puntos en el contorno inferior del puente de Qeswachaka.

Puntos	B	C	D	E	F
Coordenadas	(0;21.14)	(2,81;21.11)	(6,04;19,17)	(0;21.14)	(9,99;18,54)
Puntos	G	H	I	J	K
Coordenadas	(17,15;18,49)	(20,01;17,70)	(23,22;19,45)	(25,74;20,19)	(28,57;21,41)

Fuente: Elaboracion propia.

Resultados de la Estrategia 02.

Punto B(0;21,14)

Punto G(17,15;18,49)

Punto K(28,57;21,41)

➤ Teniendo la función general de una parábola:

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ dónde: } a \neq 0.$$

Para el punto G(17,15;18,49):

Dónde: $x = 17,15$; $y = f(x) = 18,49$ y $c = 21,14$; la ecuación sería:

Para el punto K(28,57;21,41):

Dónde: $x = 28,57$; $y = f(x) = 21,41$ y $c = 21,14$; la ecuación sería:

➤ Resolviendo el sistema tenemos: **$a = 0,014$ $b = -0,40$ y $c = 21,14$**

- Teniendo los coeficientes, La función cuadrática quedaría de la siguiente Manera.

$$y = f(x) = 0,01x^2 - 0,40x + 21,14$$

Resultados de la Estrategia 03.

Se asume que bajo esta transformación geométrica donde la función $f(x)$ se desplaza 0,97 unidades verticalmente hacia arriba, se debe modelar también la cuerda superior, para lo cual comprobaremos dicha transformación en Geogebra:

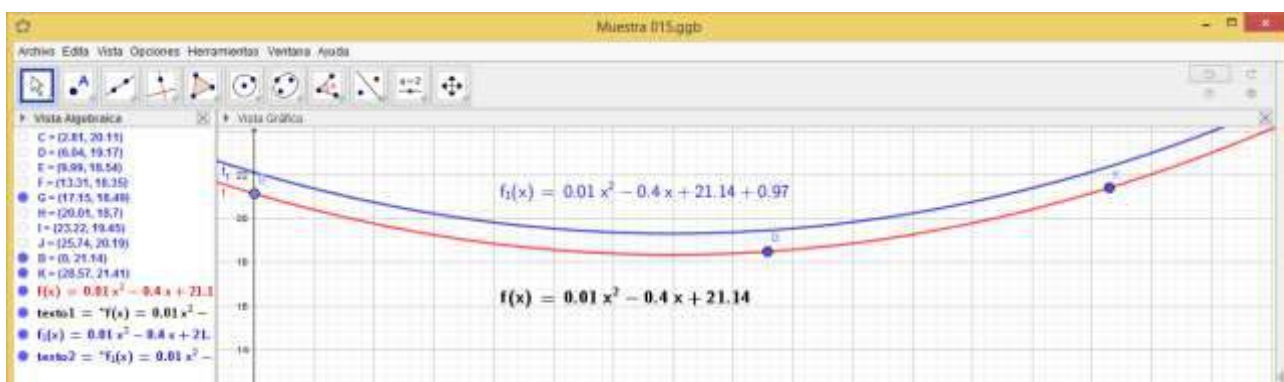


Figura 5. Comprobación de la transformación de la función $f(x)$ a $f_1(x)$ en Geogebra.

Resultados de la estrategia 04

- El punto más bajo sería el vértice de nuestra parábola, para lo cual aplicaremos la siguiente definición:

Sea el vértice: $V(h,k)$ donde: $h = -\frac{b}{2a}$, además, $k = f(h)$

Sabiendo que:

$$a = 0,01436 \quad b = -0,40076 \quad c = 21,14$$

$$\text{Entonces: } h = -\frac{-0,40076}{2(0,01436)} \quad h = 13,954 \quad h = 14,00$$

Sabiendo que nuestra función modelada es: $y = f(x) = 0,01x^2 - 0,40x + 21,14$

$$\text{Hallando } k = f(14,00) \quad k = (0,01436)(14)^2 - (0,40)(14) + 21,14 = 18,3545$$

$$K = 18,35 \text{ (Teórica)}$$

Por consiguiente, el vértice de la parábola es: $V(14,00;18.35)$

Finalmente concluimos que la altura aproximada de la soga inferior al ras del río es 18,35m.

- Es necesario reafirmar este resultado, aprovechando el tiempo de caída de un objeto desde el puente de Queswachaka, veamos:

$$\text{Si } t = 2,02 \text{ s} \quad h = \frac{g \cdot t^2}{2} ; h = \frac{9,8 \cdot 2,02^2}{2} ; h = 19,99 \text{ m (Experimental)}$$

La altura aproximada desde el puente hacia el ras de río es aproximadamente 19,99m.

Hallando el error experimental porcentual con la medida teórica, se tiene:

$$E = \frac{|Longitud\ Teórica - Longitud\ Experimental|}{Longitud\ Teórica} * 100\% \quad E = 8,94\%$$

Resultados de la Estrategia 05.

Recordemos que para encontrar la longitud de una curva aplicaremos el cálculo tal es así que:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad L = \text{Es la longitud de una función desde a hasta b.}$$

a y b : Es el intervalo en el que queremos hallar la longitud de la función f(x), f'(x)= Es la derivada de la función respecto a la variable "x".

Si $y = f(x) = 0,01x^2 - 0,40x + 21,14$ entonces $f'(x) = 0,02x - 0,40$. Aplicando la fórmula:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \int_0^{28,57} \sqrt{1 + [0,02x - 0,40]^2} dx = 29.13$$

Hallando el error experimental porcentual con la medida teórica, se tiene:

$$E = \frac{|Longitud\ Teórica - Longitud\ Experimental|}{Longitud\ Teórica} * 100\% \quad E = 0,034\%$$

Por consiguiente, el error es irrelevante.

Consideraciones de desarrollo de la competencia.

Si referenciamos nuestros resultados de ambos grupos, con las ideas de (Coll, 2007). Concluimos que si se ha dispuesto y dominado en base a las condiciones y circunstancias. La manera de usar los recursos personales, habilidades, actitudes, conocimientos y experiencias, que permitieron resolver de forma adecuada la tarea en el contexto del puente de Queswachaka, por lo tanto, se da como lograda la competencia resuelve problemas de forma , movimiento y localización, por haber combinado eficazmente las capacidades de, Modela objetos con formas geométricas y sus transformaciones, Comunica su comprensión sobre las formas y relaciones geométricas, Usa estrategias y procedimientos para medir y orientarse en el espacio, Argumenta afirmaciones sobre relaciones geométricas, en ambos grupos.

Referencias

Coll, C. (2007). Las competencias en la educación escolar, algo más que una moda y mucho menos que un remedio. *Aula de Innovación Educativa*, 161, 34-39.

- Cook, S.D.N., and J.S. Brown. 1999. Bridging epistemologies: The generative dance between organizational knowledge and organizational knowing. *Organization Science* 10: 381–400.
- Currículo Nacional de Educación Básica CNEB (2016) *Ministerio de Educación del Perú*.
- Lehmann Charles, H. (1989). Geometria Analitica. *Edit. Limusa. ISBN 968-18-1176-3*.
- Taípe Florez, F., Condori Huillca, J.C., Taípe Florez, Z. (2019). Resolución de las pruebas de nombramiento docente, ascenso de escala y especialistas, área matemática EBR y EBA. *ISBN 976-612-00-4505-3*.

EL USO DE LA REGLETA DE CUISENAIRE EN EL AULA

Elizabeth de Lourdes Caudana

caudanae@yahoo.com.ar

IPEM 116 "Manuel Belgrano" Anexo Rural Punta del Agua, Departamento Tercero Arriba, Córdoba,
República Argentina

Resumen

La presente propuesta pedagógica se implementó en el espacio curricular de matemática, en el primer año del ciclo básico del pluricurso en el IPEM 116 "Manuel Belgrano" Anexo Rural Punta del Agua, con Orientación Agro ambiente, departamento Tercero Arriba, provincia de Córdoba, República Argentina. Se desarrolló atendiendo a las dificultades que mostraban los estudiantes al no poder establecer la relación que existe entre los números naturales, fraccionarios, decimales y porcentaje. Ante esta situación se propone elaborar la Regleta de Cuisenaire como recurso didáctico con la finalidad de estimular y desarrollar las capacidades lógicas en los estudiantes dentro del marco del pensamiento matemático reflexivo y operativo aplicándola en la resolución de situaciones de aprendizajes específicas. La construcción y aplicación de este recurso les permitió desarrollar la comprensión y la asimilación de conceptos en los cuales presentaban dificultades promovió aprendizajes y toma de decisiones durante la ejecución del proyecto.

Palabras clave:

Recurso didáctico, Fracciones, Decimales, Porcentaje.

Introducción

El uso del material didáctico, juega un papel fundamental en el aprendizaje de las Matemáticas. Su correcta utilización constituye la comprensión de conceptos, relaciones y métodos matemáticos que permite un aprendizaje activo de acuerdo a la evolución intelectual del estudiante.

Las regletas de Cuisenaire son un versátil juego de manipulación matemática utilizado en la escuela, así como en otros niveles de aprendizaje (como en idiomas). Se utilizan para enseñar una amplia variedad de temas matemáticos, como las cuatro operaciones básicas, fracciones, área, volumen, raíces cuadradas, resolución de ecuaciones simples, los sistemas de ecuaciones, e incluso ecuaciones cuadráticas.¹⁶

Uno de los objetivos principales del docente consiste en ayudar al alumnado a desarrollar la capacidad de calcular, el uso de materiales didácticos con un enfoque lógico-manipulativo como

¹⁶ José Ángel Murcia Carrión (27 de enero de 2014). «Regletas Cuisenaire, la primera vez». <http://www.tocamates.com/>. Consultado el 20 de octubre de 2019.

las Regletas de Cuisenaire suponen un recurso a tener en cuenta¹⁷. Las regletas permiten la iniciación en el cálculo mediante la descomposición de los números con la ayuda de un soporte tangible y manipulativo, más fácil de entender por el alumnado en sus primeras etapas de aprendizaje debido a que les permite desarrollar el cálculo mental y su correspondiente representación. Además, permite al alumnado experimentar por su cuenta, fomentando el desarrollo de la autonomía del mismo mientras busca respuestas de forma independiente y espontánea¹⁸.

La experiencia se llevó a cabo con los estudiantes del primer año del ciclo básico (modalidad pluricurso) mediante el formato Aula Taller. Esta modalidad posibilitó el desarrollo de capacidades vinculadas con el trabajo en equipo y el pensamiento creativo, generando una dinámica de aprendizaje del tipo “aprender haciendo” ante una “situación problema”. Se promovió aprendizajes de técnicas de diseño donde los estudiantes tomaron decisiones planificando, organizando, gestionando y ejecutando el proyecto.

Propósito, diseño e implementación de la propuesta

Las dificultades identificadas que motivó el desarrollo de este proyecto se detecta cuando los alumnos del ciclo básico muestran obstáculo en demostrar y entender la relación que existe entre números enteros, números fraccionarios, números decimales y porcentaje.

Se indaga sobre los conocimientos previos a los estudiantes sobre los conceptos de fracciones, números decimales y porcentaje. Los mismos demuestran tener conocimiento de qué significa cada uno de ellos, pero no logran demostrar y entender la relación que existe entre sí.

Ante esta situación se les propone la elaboración de la REGLETA DE CUISENAIRE como recurso didáctico permitiéndole desarrollar la comprensión y la asimilación de conceptos a través de la construcción activa de forma manipulativa, gráfica y simbólica.

Los objetivos a tener en cuenta son:

Generales:

- ✓ Adquirir nuevas estrategias de aprendizajes que le permitan al estudiante apelar al pensamiento reflexivo.

Específicos:

- ✓ Implementar y desarrollar la comprensión de conceptos a través de la construcción de estrategias matemáticas.
- ✓ Mejorar el aprendizaje de los estudiantes.

Atendiendo a las **prioridades pedagógicas**: * mejora en los aprendizajes de Lengua, Matemática y Ciencias, * más confianza en las posibilidades de aprendizaje de los estudiantes,* Mayor tiempo en la escuela y en el aula en situación de aprendizaje, * Buen clima institucional que favorezca los

¹⁷ Martín-Adrián, A. (1999). «Las regletas de Cuisenaire. Actividades sobre longitud, área, perímetro y volumen.». Revista de didáctica de las matemáticas 37: 19-28.

¹⁸ Sociedad canaria de profesores de matemáticas (2014). «Proyecto Newton. Matemáticas para la Vida. Una vía para el aprendizaje significativo de las matemáticas.». REDINED. Consultado el 20 de octubre de 2019.

procesos de enseñanza y aprendizaje y **a las capacidades fundamentales**: * Oralidad, lectura y escritura, * Abordaje y resolución de situaciones problemáticas, * Pensamiento crítico y creativo y Trabajo en colaboración para aprender a relacionarse e interactuar, se establece desarrollar la propuesta pedagógica bajo el formato de Aula Taller.

Se decide trabajar colaborativamente junto al área de Educación Tecnológica brindando sus aportes relacionada con su especificidad como son reconocer los materiales, instrumentos, elementos para graficar, elaborar diagramas y esquemas.

Luego de coordinar con el área de Educación Tecnológica se realiza las siguientes actividades:

➤ **Primera parte:** ELABORACION DEL MATERIAL DIDÁCTICO.

- ✓ Se busca información e investigan sobre la REGLETA DE CUISENAIRE teniendo en cuenta: ¿Qué es? ¿Para qué se utiliza? ¿Cómo se usa?. ¿Cuáles son los modelos y cuáles son los más prácticos para usar?
- ✓ Se debate la información obtenida.
- ✓ Se registra aspectos fundamentales que caracterizan a la REGLETA DE CUISENAIRE.
- ✓ Se establece el tipo de regleta a construir. Se selecciona la Regleta donde exprese la unidad, su equivalente en número fraccionario, decimal, porcentaje y su modo de lectura.
- ✓ Luego se debate como se construirá, que materiales se utilizaría, las dimensiones de la misma, que espacio físico utilizarían para trabajar entre otros aspectos.
- ✓ Se distribuyen las tareas: búsqueda de materiales, (cartulinas, papel autoadhesivo, reglas, escuadras, calculadora, tijeras, pegamento)..
- ✓ Se armar grupos de tres estudiantes cada uno con sus respectivas actividades: Diseño, corte, plegado y armado.

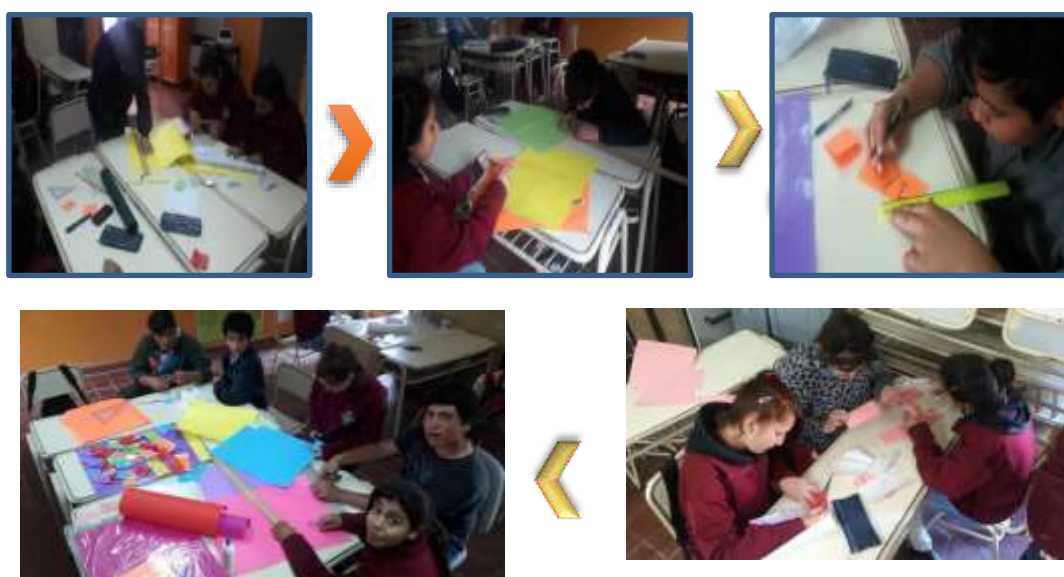


Imagen 1 Diferentes etapas de construcción de la Regleta.

Segunda parte: APLICACIÓN MATERIAL DIDÁCTICO en el ámbito áulico.

- ✓ Se prepara una clase donde ellos mismos muestran como han trabajado, que técnicas han utilizado, además de los recursos a los alumnos del segundo ciclo.
- ✓ Experimentaron y descubrieron las relaciones entre números enteros, fraccionarios, decimales, porcentaje y cuál es su lectura.
- ✓ Descubrieron relaciones de equivalencias y de inclusión.
- ✓ Se trabajó el concepto de "mayor que", "menor que", "igual a" o "equivalente a".
- ✓ Intercambian conceptos y ejemplos con sus compañeros utilizando diferentes situaciones problemáticas.



Imagen 2 Regleta donde se muestra números fraccionarios y números decimales

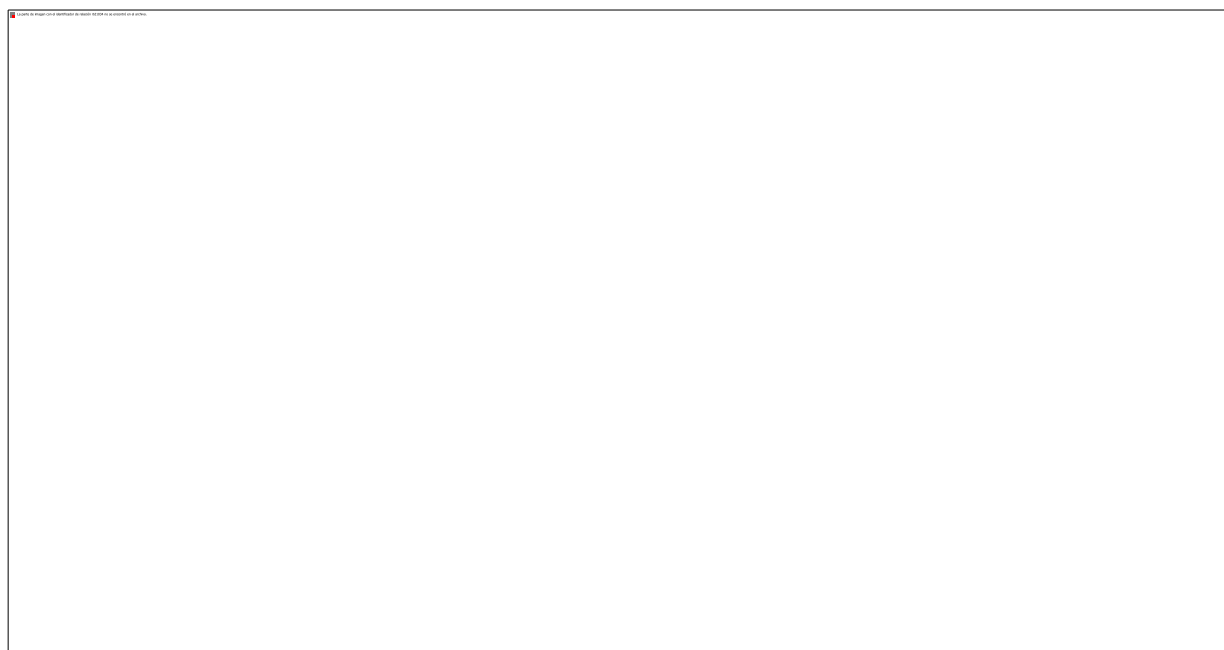


Imagen 3 Resolución de diferentes situaciones problemáticas.

Resultados obtenidos:

Estrategias de aprendizaje: ABP.

Formato curricular: Aula Taller.

Espacios: aula.

Recursos: - **materiales:** cartulinas, reglas, lápices, papel autoadhesivo, tijeras, fibrones entre otros.-
humanos: docente, maestra tutora.

Formas de agrupamientos: grupos de 3 estudiantes asignados para diseño, corte, plegado y armado.

Período: Agosto – setiembre 2018

- ✓ La metodología del desarrollo del formato Aula Taller permitió realizar un trabajo colaborativo entre los diferentes estudiantes del pluricurso respetando sus gradualidades como sus capacidades que caracteriza a cada uno de ellos y poder lograr un enfoque práctico y funcional en el desarrollo de las actividades.
- ✓ Los aprendizajes que promovió la experiencia tuvo el siguiente impacto en el ámbito escolar:
- ✓ Mayor desarrollo de procesos de pensamientos creativos y operativos.
- ✓ Uso de varias estrategias al momento del diseño, corte, armado y plegado consensuados entre los alumnos.
- ✓ Demostraron gran entusiasmo por la dinámica de la propuesta.
- ✓ Resolvieron diferentes situaciones problemáticas propuestas utilizando la Regleta como recurso didáctico llegando a obtener resultados favorables logrando así un aprendizaje significativo. .
- ✓ Trabajo colaborativo entre los estudiantes.
- ✓ Aprendizajes de interacción de pares.
- ✓ Mayor autonomía, organización y coordinación en los grupos de trabajos.

Consideraciones finales

- ✓ Los tiempos institucionales en el que se desarrolló esta propuesta son los que corresponden a las horas asignadas para ambos espacios curriculares por lo que se transforma en una práctica áulica de 6 semanas de trabajo desde el inicio hasta finalizado el mismo. (agosto-setiembre 2018).
- ✓ Las intervenciones docentes tuvieron que ver con la orientación y asesoramiento a media que iba aconteciendo el trabajo áulico. Los contratiempos que se presentaban fueron solucionados por los estudiantes con la ayuda de la docente durante el desarrollo de las actividades. El proyecto fue desarrollado en los tiempos estipulados.
- ✓ La evaluación se realizó en diferentes momentos del trabajo del estudiante sobre un conjunto de acciones o productos. Se evaluó el proceso de trabajo de los diferentes estudiantes estableciendo el mismo al iniciar al proyecto. Los trabajos de estas características tienen gran potencialidad en estimular a los estudiantes procesos de aprendizajes basados en problemas

con enfoques prácticos y funcionales.

- ✓ La propuesta de la utilización de este recurso didáctico mejoró el rendimiento mostrando resultados favorables de modo significativo al resolver situaciones problemáticas sin mayores obstáculos.

Referencias

José Ángel Murcia Carrión (27 de enero de 2014). «Regletas Cuisenaire, la primera vez». <http://www.tocamates.com/>. Consultado el 20 de octubre de 2019.

Martín-Adrián, A. (1999). «Las regletas de Cuisenaire. Actividades sobre longitud, área, perímetro y volumen.». *Revista de didáctica de las matemáticas* 37: 19-28.

Sociedad canaria de profesores de matemáticas (2014). «Proyecto Newton. Matemáticas para la Vida. Una vía para el aprendizaje significativo de las matemáticas.». REDINED. Consultado el 20 de octubre de 2019.

https://es.wikipedia.org/wiki/Regletas_de_Cuisenaire (Última entrada 24/05/2019)

<https://sites.google.com/site/materialdidacticoparampcl/home/regleta-cuisenaire> (Última entrada 05/05/2019)

<https://seeducansolos.wordpress.com/2011/05/22/juegos-sencillos-con-regletas/> (Última entrada 05/05/2019)

<https://es.scribd.com/doc/46750104/Fracciones-usando-regletas> (Última entrada 05/05/2019)

EDUCAÇÃO ESTATÍSTICA EM UM AMBIENTE DE MODELAGEM MATEMÁTICA: UMA ÓTICA INCLUSIVA NA EDUCAÇÃO INFANTIL

Roseli Rosalino Dias da Silva Angelino*

Ana Paula Gonçalves Pita**

Maria Lucia Lorenzetti Wodewotzki**

Andréa Pavan Perin***

dirección@autor1.com, anapaulagpita@gmail.com, mariallwode@gmail.com,
andreapavanperin@gmail.com

UNIAN – São Paulo, Brasil*

UNESP – Rio Claro, Brasil**

SESI – Serviço Social da Indústria, Brasil***

Resumen

Nosso objetivo foi promover ambiente que colaborasse com a inclusão de alunos com Síndrome de Down, Transtorno do Espectro Autista e dificuldades de aprendizagem permitindo acesso aos mesmos conteúdos que seus pares, além de estimular alimentação saudável e dar acesso à linguagem estatística aos pequenos estudantes. Para tanto, esses alunos foram incentivados a fazer coleta e organização de dados sobre quantidade de alunos que almoçavam ou não na escola e a fruta preferida. Assim, em pequenos grupos e, coletivamente construímos gráficos das atividades usando figuras para representar alunos que almoçavam ou não na escola e outras figuras para representar a fruta preferida. Desta forma, os gráficos foram expostos e fizemos uma roda de conversa sobre alimentação saudável e coleta/organização de dados. Pudemos perceber que a atividade contribuiu com a inclusão, pois todos participaram e fizeram considerações, de forma que mobilizaram vários campos de saberes, como oralidade, pensamento crítico e raciocínio estatístico.

Palabras clave: Educação Estatística, Modelagem Matemática, Educação infantil, Inclusão.

Introdução

Educar com equidade é garantir que todos tenham a mesma oportunidade de ingressar, permanecer e aprender (BNCC, 2018). A educação inclusiva tornou-se um direito inquestionável, de maneira que devemos assegurar um sistema educacional inclusivo; englobando todos os níveis de ensino, sem discriminação e baseando-se na igualdade de oportunidades. Quando pensamos nesta ação pedagógica, nossa pretensão foi de fazer com que os alunos interagissem e pudessem ter acesso aos mesmos conteúdos matemáticos que seus pares. Assim, podemos garantir um

aprendizado ao longo e para a vida, acreditando que a contribuição primordial desta será colaborar para uma matemática escolar mais inclusiva, e como resultado produzir conhecimentos na área de Educação Matemática.

O conceito de deficiência, antes apoiado em modelo clínico no qual as pessoas com deficiência tinham que se adaptar as condições da sociedade foi alterado pela Convenção sobre os direitos das pessoas com deficiência. De acordo com essa Convenção:

Pessoas com deficiência são aquelas que têm impedimentos de longo prazo de natureza física, mental, intelectual ou sensorial, os quais, em integração com diversas barreiras, podem obstruir sua participação plena e efetiva na sociedade em igualdade de condições com as demais pessoas (ONU Art.1 apud, BRASIL, 2015, p.11).

Entendemos que os aprendizes público alvo da Educação Especial são pessoas que apresentam um desenvolvimento qualitativamente diferente dos seus pares com desenvolvimento típico, e que cada aprendiz segue um caminho próprio de desenvolvimento (FERNANDES; HEALY 2016).

Para o desenvolvimento da atividade, amparadas em Skovsmose (2013), recorreremos ao ambiente de modelagem matemática. O citado autor nos diz que a melhor maneira de aprender é fazendo e praticando a construção de modelos. Assim, entendemos que é desta forma que o estudante desenvolve uma atitude mais crítica em relação a construção de modelos, ou seja, não basta entender a construção matemática de modelos, mas conhecer seus pressupostos e quais ideias estão por trás das fórmulas matemáticas. “Os estudos matemáticos tendem a melhorar as habilidades dos estudantes na estruturação e resolução de problemas lógicos” (p. 45).

Assim, entendemos que o autor sugere que o processo de ensino-aprendizagem de conceitos matemáticos se dê a partir de problemas que sejam elaborados pelos próprios alunos. Para ele, os problemas matemáticos adquirem significado para os alunos quando estão relacionados a processos importantes da sociedade, que lhes possibilitam desenvolver um comportamento social e político, pois identificam em seu meio cultural questões relevantes associadas às tratadas em sala de aula e se posicionam frente a elas.

Ainda em conformidade com Skovsmose (2013), existem três tipos diferentes de conhecimento para um processo de modelagem matemática à saber: o conhecimento matemático (os conteúdos), o conhecimento tecnológico (como construir e usar os modelos) e o conhecimento reflexivo (metaconhecimento). Desta forma, pudemos perceber que nossos pequenos estudantes por meio de um ambiente de modelagem Matemática puderam fazer reflexões sobre o que construíram e aprenderam.

Para Campos, Wodewotzki e Jacobini (2013) a modelagem matemática é uma forma eficaz e pode propiciar o desenvolvimento das três competências estatísticas, a literacia, o raciocínio e pensamento.

Por *literacia estatística*, entende-se a habilidade de ler e usar a linguagem básica da estatística para entender informações presentes na vida cotidiana. Não se trata apenas do saber fazer, mas de compreender o que, como e por que fazer de determinada forma em um contexto específico. Já o raciocínio está mais ligado ao trabalho com as ferramentas estatísticas – trabalho este não direcionado somente a operar com elas, mas atento aos seus significados mais profundos.

Caracteriza-se também pela capacidade do indivíduo de interligar as ideias associadas a essas ferramentas, bem como de utilizar os procedimentos estatísticos adequados a cada etapa, levando em consideração as particularidades do contexto em que estão sendo utilizadas. E, finalmente o pensamento, pode ser entendido como as estratégias mentais associadas à tomada de decisão em todas as etapas de um ciclo investigativo. Por esse motivo pode-se dizer que o pensamento estatístico está associado a uma forma de analisar criticamente os dados apresentados (PERIN E WODEWOTZKI, 2019).

Há um entendimento de que, por meio do desenvolvimento de projetos com os alunos, as metas de ensino de Estatística, desenvolver as referidas competências, resultam em aproveitamentos satisfatórios.

Além dessas três competências, Campos (2016) argumenta trabalhar as competências estatísticas a partir do ambiente de modelagem matemática é também proporcionar um ambiente para o desenvolvimento da competência crítica. Este autor afirma ainda que não se trata de criar uma nova dimensão para a Educação Crítica, mas de destacar seus aspectos dentro da Educação Estatística de forma que as atividades pedagógicas possam ser melhor planejadas e avaliadas.

Perin e Wodewotzki (2019) ao buscar as contribuições do ambiente de Modelagem Matemática na perspectiva do desenvolvimento das competências da Educação Estatística Crítica, observou, a partir das falas dos estudantes, que a competência crítica decorre da construção de dois tipos de crítica: a sociopolítica e a epistemológica.

Assim, tem-se que os principais objetivos da modelagem matemática trabalhar conceitos de estatística nas aulas são:

- proximar a Matemática de outras áreas de conhecimento;
- salientar princípios inerentes à Educação Crítica presentes na Matemática e que são importantes para a formação do aluno;
- relacionar situações do cotidiano e, assim, fomentar o interesse pela disciplina;
- estimular a criticidade e incentivar investigações e reflexões;
- melhorar a compreensão e a apreensão de conceitos matemáticos;
- desenvolver a habilidade para resolver problemas (CAMPOS, WODEWOTZKI E JACOBINI, 2013, p. 47)

Corroboramos com os autores que os trabalhos em sala de aula por meio da modelagem matemática colaboram com o ensino de Estatística e aproxima a comunidade escolar, pois os assuntos vão além da sala de aula, inferindo na formação crítica, participativa, colaborativa, conscientes dos problemas e motivados a buscar soluções. Para os autores supracitados (p.56):

[...] a modelagem matemática, ao conjugar a ideia de aprender Estatística fazendo Estatística por meio do estudo, da investigação, da análise, da interpretação, da crítica e da discussão de situações concretas que têm a ver com a realidade do aluno, seja ela profissional ou relacionada com o dia a dia, e ao se aproveitar dessa convivência diária com números, índices, gráficos e tabelas, se torna

coerente com os pressupostos da Educação Estatística.

Os autores fazem a afirmação acima explicando que os métodos da Educação Estatística encontram aplicação em diversas áreas do conhecimento estimando e inferindo sobre dados, em procedimentos de amostragem e planejamento de experimentos. Para os autores os trabalhos pedagógicos desenvolvidos por meio de um ambiente de modelagem matemática em consonância com a Educação Estatística é relevante por incentivar e contribuir para o desenvolvimento das competências das literacia, pensamento, raciocínio e crítica. Nesse sentido, pudemos perceber o sucesso diante dos nossos pequenos estudantes durante e após a realização das atividades e, ainda, na aprendizagem de sobre Estatística, no desenvolvimento da oralidade e no estímulo ao pensamento crítico, pois foi perceptível que houve possibilidade de um trabalho motivador para os alunos.

Alimentação saudável e competência estatística dos pequenos estudantes

Esta proposta foi realizada em uma escola pública do município de São Vicente/SP/Brasil numa classe denominada como Fase II da Educação Infantil, o que corresponde à alunos de cinco à seis anos de idade composta por 25 , sendo que dentre eles um aluno com Síndrome de Down - SD e dois com Transtorno do Espectro Autista – TEA. Assim, por meio do ambiente de modelagem que tencionamos promover acesso à uma linguagem estatística e, conseqüentemente, ao raciocínio estatístico aos pequenos estudantes e, principalmente, nossa pretensão foi fazer com que houvesse de fato a inclusão e entrosamento de todos da turma.

Diante dessas finalidades, após acesso à algumas literaturas sobre Modelagem Matemática (MEYER, CALDEIRA, MALHEIROS, 2017), Educação Matemática Crítica (SKOVSMOSE, 2013), Educação Estatística (CAMPOS, WODEWOTZKI, JACOBINI, 2013) e sobre Inclusão (VYGOTSKY, 2009; OLIVEIRA, 1995), planejamos nossas aulas e colocamos em prática o de tema alimentação saudável por perceber que a maioria dos alunos não tinham o hábito de comerem a “merenda” da respectiva unidade escolar ou, ainda, não trazerem em suas lancheiras, frutas para a hora do recreio. Assim, nossa pretensão foi trazer para a sala de aula por meio de um ambiente de modelagem o mundo real que fizesse emergir reflexões e discussões críticas sobre alimentação e que nossas crianças adquiressem hábitos saudáveis mais saudáveis. Para Campos, Wodewotzki e Jacobini (2013, p. 57) os alunos “estudarão Estatística porque terão interesse em resolver, interpretar, questionar e propor soluções para os problemas que, de alguma forma lhe dizem respeito”.

Desta forma, os estudantes, em grupos, foram incentivados à fazer um levantamento de dados e pesquisar em outras salas a quantidade de alunos que almoçavam ou não na escola. Para tanto, os alunos foram divididos em pequenos grupos e cada grupo fez a entrevista em uma respectiva sala de aula. Desta maneira, orientamos os alunos à preencherem com um “X” uma pequena planilha composta por duas colunas (como exposto abaixo), mesmo os alunos que apresentaram dificuldade conseguiram desenvolver com a ajuda dos colegas e a mediação da professora. Para Vygotsky (2009, p. 329), “em colaboração, a criança se revela mais forte e mais inteligente que trabalhando sozinha”. Desse modo, os aprendizes tinham que fazer o seguinte questionamento aos colegas:

"Você comeu a merenda na escola?".

Figura 4 – Planilha utilizada pelos alunos para a entrevista com os colegas.

Fonte: elaborado pelas autoras

Em um segundo momento, os mesmos alunos, ao chegarem à classe se depararam com três tipos frutas kiwi, maçã e banana, no entanto, para fazerem a degustação destas frutas deveriam "comprar" uma ficha com a figura da fruta de preferencia. Assim, cada vez que quisessem experimentar uma das frutas tinham que adquirir uma ficha e entregar nas bancadas montada dentro da própria sala de aula pela professora e colaboradores. No decorrer da degustação, essas fichas com os desenhos das frutas iam sendo guardadas para serem utilizadas para a montagem dos gráficos.

Posteriormente, em pequenos grupos e coletivamente construímos os gráficos sobre os dados coletados. O primeiro gráfico (figura 2) foi sobre os dados coletados na primeira atividade e usamos figuras para representar os alunos que almoçaram ou não e, assim construir as colunas (SIM e NÃO). Já o segundo gráfico, as colunas foram representadas pelas fichas das frutas degustadas (figura 3).



Figura 5 – Gráfico sobre alunos que comem ou não merenda na escola.

Fonte: arquivo pessoal.



Figura 6 - Gráfico sobre a fruta preferida.

Fonte: arquivo pessoal

Desta maneira, os gráficos foram expostos e fizemos uma roda de conversa sobre “alimentação saudável” e sobre a coleta, organização dos dados, construção e importância dos gráficos.

Pudemos perceber por meio desta ação pedagógica que a Educação Estatística por meio da modelagem promove discussões ricas e de interesse dos alunos, pois torna o educando protagonista dos temas a serem trabalhados tornando um cenário de reflexão e valorização de uma consciência crítica e diálogos.

Nossos resultados

Conforme Perin e Wodewotzki (2019, p. 263) a educação estatística por meio a modelagem matemática revelam ideias que se associam ao desenvolvimento da crítica epistemológica e da crítica social. Sendo que a primeira, de acordo com as autoras, diz respeito à ao reconhecimento de algumas fragilidades das ferramentas estatísticas, já a segunda, refere-se a refletir sobre seus próprios comportamentos diante das pesquisas estatísticas ou qualquer outro conjunto de ações de interesse social e/ou comunitário. Assim, pudemos perceber e considerar que a atividade contribuiu para que os alunos fizessem suas considerações e mobilizassem vários campos de saberes, como oralidade e raciocínio lógico e repensar sobre um comportamento mais saudável com relação à alimentação. Partimos do pressuposto que todos têm potencial para aprender e se desenvolver, tornando-se mais autônomos nas práticas escolares. Considerando os alunos inclusos, constatamos que o ambiente de modelagem estimula o trabalho em equipe, o aprender com o outro (professores e colegas) por meio das interações e brincadeiras ** permitindo aos alunos se tornarem autores de seus saberes

Percebemos, ainda, a importância no desenvolvimento de práticas pedagógicas mais inclusiva e crítica para que os alunos estabeleçam relações entre cotidiano e aprendizagem, desse modo nos conectamos com o pensamento de Vygotsky que diz: situações concretas que envolvem as crianças em seu cotidiano intervêm vigorosamente em seu comportamento e desenvolvimento. (OLIVEIRA, 1995). Para Siqueira, "uma proposta de matemática para a Educação Infantil deve instigar a exploração de uma grande variedade de ideias matemáticas", aproveitando as experiências de mundo que as crianças têm, intencionando tornar a matemática significativa. (SIQUEIRA, 2007, p.3), e complementa afirmando que "as ideias matemáticas construídas pela criança na Educação Infantil serão a base em todo seu percurso escolar" (SIQUEIRA, 2007, p.3),

Considerações Finais

Nossa intenção ao pensarmos sobre as ações pedagógicas descrita e no ambiente aqui mencionado foi no desenvolvimento de recursos e atividades de aprendizagem estatística, bem como contribuir com a para instrumentalizar Educação Matemática Inclusiva evidenciando as potencialidades dos alunos com desenvolvimento "típicamente diferente", escolar mais inclusiva, para instrumentalizar uma Matemática escolar mais inclusiva, e conseqüentemente, produzir conhecimentos na área de Educação Estatística para que os alunos estabeleçam relações entre os conceitos cotidianos em situações de aprendizagem matemática.

Nessa atividade pudemos perceber que os alunos foram puderam vivenciar as etapas de uma investigação estatística, pois coletaram, organizaram e analisaram dados. Assim, entende-se que foi dados um passo a frente no que se refere ao desenvolvimento do pensamento estatístico.

Quanto ao raciocínio, entendemos que aspectos ligados à elaboração de gráficos também foram trabalhados. A literacia pôde ser trabalhada no momento em que os alunos fizeram suas argumentação no que se refere a leitura e interpretação dos dados coletados.

Finalmente, a competência crítica nos julgamentos emitidos pelos alunos no que tange a importância de uma alimentação saudável e sua responsabilidade nesse processo.

Referencias

BRASIL, Base Nacional Comum Curricular disponível em <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br>> Acesso em: 22 jan.2019.

_____. Ministério da Educação. Orientações para implementação da política de educação especial na perspectiva da educação inclusiva. Brasília. MEC/SEE.2015. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/arquivos/pdf/politicaeducspecial.pdf>>. Acesso em: 01 nov. 2017.

CAMPOS, C. R. *Towards critical statistics education: theory and practice*. Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2016.

CAMPOS, R.C.; WODEWOTZKI, M.L.L.; JACOBINI, O.R. Educação Estatística: teoria e prática em ambientes de modelagem matemática. 2ª edição. Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2013.

FERNANDES, Solange H.A.A; HEALY, Lulu. Rumo a Educação Matemática Inclusiva: Reflexões sobre nossa jornada. RENCIMA, Edição Especial: Educação Matemática, São Paulo, v.7, n.4, p.28-48, 2016.

MEYER, J. F. C. A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS. A. P. S. Modelagem em Educação Matemática. Belo

Horizonte: Autêntica, 2017.

OLIVEIRA, Marta K. de. Vygotsky: Aprendizado e desenvolvimento um processo sócio histórico. 3. ed. São Paulo: Scipione. 1995.

PERIN, Andréa Pavan; WODEWOTZKI, Maria Lúcia Lorenzetti. As competências da Educação Estatística e a competência crítica: uma discussão sobre possíveis entrelaçamentos. In: LOPES, Celi Espasandin; PORCIÚNCULA, Mauren; SAMÁ, Suzi. Perspectivas para o ensino e a aprendizagem da Estatística e Probabilidade. Campinas, SP: Editora Mercado da Letras, 2019.

SIQUEIRA, Ricardo de G. Educação matemática na educação infantil: um levantamento de propostas. 135f. Dissertação de Mestrado. PUC, São Paulo. 2007. Disponível em: <<https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11268>> Acesso em: 18 jul.18.

SKOVSMOSE, O. Educação matemática crítica: a questão da democracia. Campinas: Papirus, 2013.

VYGOTSKY, Lev S. A construção do pensamento e da linguagem. Tradução: Paulo Bezerra. 2ª ed. São Paulo: Editora WMF Martins Fontes, 2009.

USANDO EL CICLO PPDAC PARA EL ANÁLISIS DIDÁCTICO DE UNA SITUACIÓN PROBLEMA DE SECUNDARIA

Augusta Osorio Gonzales*

Gladys Flores Cuevas**

Juliana Pérez Taxi**

arosorio@pucp.edu.pe, gladys.flores.cue@gmail.com , julianapereztaxi@gmail.com

Instituto de Investigación sobre Enseñanza de la Matemáticas, IREM-PUCP, Perú*

I.E. José Olaya Balandra, UGEL 07, Perú**

Resumen

La presente experiencia es presentada por profesores de la Ugel 7 de Lima Metropolitana que viene capacitándose con el IREM-PUCP en el marco de un trabajo de formación de profesores en la competencia Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre para el nivel secundario. La situación significativa propuesta en el cuaderno de trabajo del MINEDU para el tercer grado de secundaria es estudiada a la luz de la herramienta didáctica ciclo PPDAC y para el análisis se utiliza la relación de las etapas de dicho ciclo con los desempeños propuestos para el grado correspondiente. El resultado esperado es analizar si la situación cumple con las características necesarias para el desarrollo del pensamiento estadística y si los contenidos trabajados en ella corresponden con el grado indicado.

Palabras clave: *Situación significativa, Estadística, ciclo PPDAC.*

Introducción

Hace varias décadas, en muchos países se viene enfatizando en la importancia en desarrollar el pensamiento estadístico desde la educación básica y en Perú, se refleja en los diseños curriculares que han ido transitando desde el Diseño Curricular Básico (2004). Ese primer Diseño por niveles, mostraba los aprendizajes graduados por contenidos y la componente "estadística y probabilidades" presentaba una mayor concentración de temas en el tercer grado de secundaria, siendo introducida en primero de secundaria. Se transita luego al Diseño Curricular Nacional (2009) también articulado por niveles, donde la estadística y la probabilidad se enseña desde el nivel primario. Con la RM 199-2015 se modifica los cuatro "dominios" de matemática por las cuatro competencias, la que sienta las bases del vigente marco curricular el Currículo Nacional de Educación Básica - CNEB (MINEDU, 2016), donde específicamente se destaca el planteamiento de estándares y desempeños de aprendizaje que se deben desarrollar de forma progresiva en las cuatro competencias matemáticas. Cabe precisar que las cuatro capacidades a desarrollar en la competencia "Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre" tenemos:

- Representa datos con gráficos y medidas estadísticas y probabilísticas.
- Comunica su comprensión de los conceptos estadísticos y probabilísticos.
- Usa estrategias y procedimientos para recopilar y procesar datos.
- Sustenta conclusiones o decisiones con base en información obtenida.

Además de los cambios en el currículo prescrito a favor de generar mayor alfabetización estadística y desarrollo del pensamiento estadístico, MINEDU ha realizado esfuerzos en dotar de materiales para los docentes con estrategias didácticas, tal como las “rutas de aprendizaje” donde se propone a la investigación escolar como una orientación didáctica para desarrollarla competencia de gestión de datos (MINEDU, 2015, p.105). Esta propuesta esta basada en el ciclo del PPDAC (problema, Plan, Datos, Análisis y Conclusión), herramienta que permite desarrollar el pensamiento estadístico como la primera dimensión del marco del Pensamiento Estadístico (Wild y Pfannkuch, 1999). Sin embargo, es aún poco lo que se logra en el currículo implementado, en el proceso mismo de enseñanza de la estadística, ello ¿por qué? Es posible que una de las respuestas sea que el docente, a pesar de ahora dedicar mayor tiempo en el programa curricular del grado o tener herramientas u orientaciones para su práctica pedagógica, en su formación no ha desarrollado cabalmente la forma de razonamiento y pensamiento estadístico como para promoverla en sus estudiantes. Como refiere Batanero, la naturaleza de la estadística difiere de la de la cultura determinista tradicional en clase de matemáticas (Batanero, 2001, p.7). Desde el trabajo de monitoreo realizado a la práctica pedagógica por la UGEL 07 en las II.EE de su jurisdicción se puede evidenciar que los docentes aun abordan la enseñanza de la estadística predominantemente algorítmico, muchas veces lejos de la realidad.

Es en ese sentido, el Instituto de investigación sobre la enseñanza de las matemáticas IREM– PUCP dentro de su línea de investigación de desarrollo de la competencia didáctico matemático en profesores de matemática, ha venido realizando talleres de capacitación con docentes de matemática de la UGEL 07 pertenecientes al CIDOMAT (círculo de docentes de matemática), en sesiones desde marzo de 2019. Dentro de estos talleres los docentes reconocen y vivencian cada etapa del ciclo del PPDAC, utilizando diversas situaciones de la vida cotidiana y las problemáticas planteadas en el cuaderno de trabajo “Resolvamos Problemas” (MINEDU, 2017). De las 20 fichas que presenta un cuaderno de trabajo, cada una de ellas con problemas o situaciones problemáticos propuestos, tres fichas corresponden a gestión de datos y una ficha a probabilidades.

El presente artículo pretende mostrar la potencia del modelo del ciclo del PPDAC como una estrategia didáctica para el docente, analizando una situación planteada en la ficha N.º 2 del cuaderno de trabajo del tercer grado de secundaria, de tal manera que el análisis permita identificar las oportunidades u obstáculos de aprendizaje de la estadística que se brinda a los estudiantes involucrando los saberes básicos de la estadística y los que se desea alcanzar para el grado. Es posible también que la situación problemática no corresponda al grado para el que está propuesto, entonces se revisará los desempeños del programa curricular de secundaria.

Marco teórico

Wild y Pfannkuch (1999), en su propuesta sobre el Pensamiento Estadístico, muestran que los aspectos de un determinado problema real bajo la mirada de la Estadística es más que solo recolectar datos, implica también conocer adecuadamente la realidad que rodea al problema. La dimensión 1 de esta propuesta, el ciclo de investigación empírica o PPDAC, sería la herramienta ideal que permite revisar a profundidad todos los aspectos de un problema real relacionado con la recolección de datos; y es por tanto la base para el desarrollo del Pensamiento Estadístico.



Figura1. Relación entre el ciclo PPDAC y los conceptos o procedimientos Estadísticos del nivel primario.

En Osorio y Advincula (2018), se puede ver la relación de cada etapa del ciclo PPDAC, con los contenidos de los desempeños del nivel primario en la competencia Resuelve problemas en gestión de datos e incertidumbre, tal como se muestra en el siguiente esquema (ver figura 1).

Para el nivel secundario, el ciclo PPDAC debe estar más completo y acercarse a la propuesta original de la dimensión 1 de Wild and Pfannkuch. Esto quiere decir, que hay que incorporar nuevos elementos en cada una de las etapas.

Por ejemplo, no basta con identificar el problema que se resolverá, sino que hay que diferenciarlo de la problemática real y tener en consideración el propósito que se persigue para poder ofrecer además de la solución del problema, conclusiones adecuadas a ella. Se tiene que planificar la forma de recopilación de datos antes de aplicar los instrumentos, para poder estar atentos a posibles problemas durante el levantamiento de los datos. Hay que pensar en el análisis de los datos antes incluso de tenerlos, pues eso permite tener claro que se busca en ellos y estar atentos a la aparición de información no prevista. Es importante que los alumnos piensen en posibles resultados antes de tener los datos, pues eso nos permite ver que tanto han interiorizado el problema. (Ver figura 2)

CICLO PPDAC



Figura2. Relación entre el ciclo PPDAC y los conceptos o procedimientos Estadísticos del nivel secundario.

La situación significativa ideal para trabajar la competencia Resuelve problema de gestión de datos e Incertidumbre en el nivel secundario, exige que el profesor proponga un problema relacionado con alguna problemática cercana a la realidad de los estudiantes o un problema social que los afecte directamente, que motive su intervención para identificar la información relevante y que tengo un propósito que les interese.

Los contenidos estadísticos que intervengan en la solución del problema propuesto deben estar acordes con el grado del alumno y deben corresponder al nivel de exigencia que estos requieren para seguir avanzando en el desarrollo de su pensamiento estadístico.

Lo ideal es que los alumnos recopilen sus propios datos o dispongan de las listas de datos ya recopilados, porque el solo contar con los datos organizados en tablas o gráficos puede limitar el potencial de análisis que los alumnos puedan desarrollar.

También hay que tener en cuenta, que el no proporcionar un propósito que justifique la propuesta del problema puede producir que los alumnos se mecanicen en cálculos y pierdan la posibilidad de profundizar en el contexto que envuelve la situación. Esta sería una limitante para poder desarrollar el pensamiento crítico de los alumnos, que justamente tiene una alta vinculación con las conclusiones que los alumnos puedan desarrollar en la última etapa del ciclo.

Análisis de la situación significativa

La situación por analizar se ubica en el libro "Resolvamos problemas 3" (p.25) distribuido por el Ministerio de Educación (2017) para el 3er grado de secundaria. Todas las fichas del cuaderno de trabajo "Resolvamos Problemas" presentan al inicio, un cuadro que indica competencia,

capacidades y desempeños que se pretende desarrollar a lo largo de la ficha. A continuación, se presenta el cuadro correspondiente a la ficha 2

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre	Representa datos con gráficos y medidas estadísticas o probabilísticas.	Representa las características de una población en estudio mediante variables cualitativas o cuantitativas, y el comportamiento de los datos de una muestra de la población a través de histogramas, polígonos de frecuencia y medidas de tendencia central.
	Comunica su comprensión de los conceptos estadísticos y probabilísticos.	Lee tablas y gráficos de barras, histogramas, polígonos de frecuencia o circulares, así como diversos textos que contengan valores sobre las medidas de tendencia central.

Figura 2. Competencia, capacidades y desempeños a abordar en la ficha N° 2

La situación planteada es la siguiente:

Ana, con mucho esfuerzo, pudo abrir un restaurante. Ahora desea hacer un estudio sobre la ocupación de sus clientes, los platos de comida que prefieren y sus edades.

El primer día tomó los siguientes datos de las primeras 20 personas:

OCUPACIÓN	Cantidad	COMIDA	Cantidad	EDADES	Cantidad
Estudiante	9	Tallarines	6	De 18 a menos de 24	6
Trabajador	8	Arroz con pollo	7	De 24 a menos de 30	4
Casa	3	Cebiche	3	De 30 a menos de 36	2
TOTAL	20	Pescado frito	4	De 36 a menos de 42	3
		TOTAL	20	De 42 a 48	5
				TOTAL	20

Responde:

1. ¿Qué variables estadísticas ha tenido en cuenta para su estudio?
2. ¿Qué porcentaje de las personas prefieren arroz con pollo o cebiche?
3. ¿Por qué crees que agrupó las edades de 6 en 6 para su estudio?

Figura 3. Situación problemática planteada en ficha N° 2

La situación será analizada a través de las etapas del ciclo PPDAC y se propondrán algunas preguntas para que se pueda pasar por estas etapas.

Etapla plan: La situación problema no presenta un propósito específico, pero el enunciado y las tablas nos guían sobre cuál sería la posible problemática, tener algún conocimiento sobre los clientes y sus preferencias. El problema nos habla de conocer ciertas características de los clientes y los datos nos permite saber las variables estadísticas que se ha tenido en cuenta para el estudio.

Tabla 1

VARIABLE ESTADISTICA	CLASIFICACIÓN
Ocupación laboral del cliente	Variable cualitativa nominal
Plato preferido del cliente	Variable cualitativa nominal
Edad del cliente	Variable cuantitativa continua.

Fuente: propia.

Para esta etapa solo se ha realizado una pregunta que está relacionada con la variable:

¿Qué variables estadísticas ha tenido en cuenta para su estudio?

A ello se le podría agregar preguntas tales como:

- ¿Cuál es el problema relacionado con la recopilación de datos, que desea resolver Ana?
- ¿Cuál crees que es el propósito de que Ana se proponga realizar un estudio?

Etapla planificación: En relación con la posible población, la situación permite determinar que son todos los clientes del restaurante de Ana. Al analizar la muestra encontramos que esta no es representativa, ni aleatoria al no tener todos los clientes las mismas oportunidades de formar parte de ella, ya que solo se consideró a los 20 primeros clientes que asistieron al restaurante de Ana el primer día. Para que la muestra sea representativa y aleatoria, debería ser tomada durante varios días de las primera semanas (3 a 5 días) o durante todos los días de la primera semana.

Para el recojo de los datos es posible que se haya utilizado una encuesta y/o el registro de pedidos de platos. Para el recojo de datos de la tabla 1 (ocupación), debió haberse realizado una pregunta cerrada de opciones múltiples. Para obtener los datos de la tabla 2 (comida) debió hacerse una pregunta cerrada de opciones múltiples o tomarlos de los pedidos de platos realizados por los clientes. Para los datos de la última tabla (edades) debió haberse hecho una pregunta abierta, o cerrada de opciones múltiples de intervalos, esto último debido a la dificultad que tienen algunas personas en dar a conocer su edad.

Para esta etapa se podría incluir las siguientes preguntas que permitirá al estudiante analizar la muestra y no aceptarla simplemente.

- Considera que ¿es buena la muestra tomada?; ¿por qué?
- ¿Qué tipo de instrumento habría permitido el recojo de estos datos?

Etapla datos: En relación de cómo pudieron ser aplicados los instrumentos, es posible que se entregara al cliente la encuesta en físico o en una tablet y que los datos de la tabla 2 (comida) se hayan extraído del registro de pedido.

Para esta etapa no se ha realizado ninguna pregunta, por lo que se podría plantear:

- ¿Cómo se aplicó el instrumento?

Etapla Análisis: En esta etapa se trabaja con los datos para obtener información, elaborando tablas de frecuencia, gráficas y medidas estadísticas. Se busca también establecer relaciones entre los datos y el contexto de la situación problema.

En la situación que se está analizando, no es necesario elaborar tablas porque ya se cuenta con ellas (tres tablas separadas), lo que imposibilita establecer relaciones entre las variables.

En la situación se presentan dos preguntas:

¿Qué porcentaje de las personas prefieren arroz con pollo o cebiche?

¿Por qué crees que agrupó las edades de 6 en 6 para su estudio?

las cuales no conducen al uso de objetos estadísticos como las medidas de tendencia central o de dispersión, esta última medida estadística debe ser desarrollada en 3er grado de secundaria. Si revisamos los conceptos estadísticos relacionados con las preguntas hechas vemos que se sitúan más bien en los grados anteriores, dado que en ellos se ven temas como frecuencia relativa y construcción de tablas por intervalos.

Preguntas que se proponen para esta etapa:

- ¿Qué medida de tendencia central podrías determinar, en cada conjunto de datos presentados en las tablas de frecuencia?
- ¿Qué variables relacionarías para obtener más información y que den respuesta al problema de Ana?

Etapla conclusión: Para esta etapa no se proponen preguntas que permitan comunicar los resultados del problema. Las posibles conclusiones que se desprenden de la situación planteada solo se reducen a la extracción de información de las tablas dadas, la cual se realizaría en base al interés o conocimiento del contexto que puedan tener los alumnos.

Se propone agregar las siguientes preguntas:

- ¿Qué podemos concluir del estudio realizado?, ¿estas conclusiones dan respuesta al problema que tenía Ana?

Conclusión

De acuerdo a la revisión de los desempeños propuestos por el CNEB y la situación problemática analizada se encuentra que de acuerdo a las preguntas planteadas y la forma como se presenta los datos en la tabla N° 3 (edades), esta situación estaría dirigida para segundo de secundaria y no para tercer grado de secundaria ya que, por ejemplo, en tercer grado los datos por intervalo se presentan considerando la notación pertinente.

El análisis de la situación problemática ha permitido ratificar la importancia de que el estudiante comprenda el propósito de la situación problemática a abordar, ya que ello permite al estudiante desenvolverse mejor en cada una de las etapas posteriores del ciclo PPDAC, por ejemplo, le permite al estudiante determinar las variables, los instrumentos, establecer relaciones entre variables para una gestión pertinente de los datos.

La situación significativa planteada en el cuaderno de trabajo muestra varias deficiencias con respecto a lo que se espera que sea una situación problemática que permita desarrollar el pensamiento estadístico en los alumnos. Es responsabilidad de los profesores el revisar las situaciones presentadas a sus alumnos antes de utilizarlas y poder ajustarlas a las necesidades del grado o del nivel de conocimiento de los alumnos.

Referencias

Batanero, C. (2001). Didáctica de la estadística. p. 3-8

MINEDU (2004). Diseño curricular básico de secundaria.

MINEDU. (2009). *Diseño curricular nacional de educación básica regular*. Ministerio de Educación del Perú - Dirección General de Educación Básica Regular.

MINEDU. (2015). *Diseño curricular nacional de educación básica regular*. Ministerio de Educación del Perú - Dirección General de Educación Básica Regular.

MINEDU. (2016). *Programa curricular de nivel primaria*. Ministerio de Educación del Perú.

MINEDU. (2017). *Resolvamos Problemas, Cuaderno de trabajo*. Ministerio de Educación del Perú - Dirección de Educación Secundaria.

MINEDU. (2015). *Rutas de aprendizaje*. Ciclo VII. p.104 -111

Osorio, A., y Advincula, E. (2018). El uso del ciclo PPDAC para la creación de problemas en la gestión de datos. En IX Congreso Internacional Sobre Enseñanza de las Matemáticas. (pp. 133-140) Universidad Nacional de Huancavelica / Pontificia Universidad Católica del Perú. Recuperado de: <http://repositorio.unh.edu.pe/handle/UNH/1192>

Wild, C. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical Thinking in Empirical Enquiry. *International Statistical Review* (1999), 67, 3, 223-265.

A CONSTITUIÇÃO DA MATEMÁTICA NA PROPOSTA CURRICULAR DA REDE PÚBLICA MUNICIPAL DE EDUCAÇÃO DE SÃO LUÍS

Waléria de Jesus Barbosa Soares

Carlos André Bogéa Pereira

walleria_soares@hotmail.com, andre.bogea@hotmail.com

Semed/São Luís-MA, Brasil

Resumen

A Rede Pública Municipal de Educação de São Luís, por meio do Núcleo de Currículo, está responsável pelo trabalho de atualização das Propostas Curriculares para o Ensino Fundamental, que toma como referências as orientações da Base Nacional Comum Curricular do Brasil (BNCC), homologada em 2017. Nesse contexto, o presente trabalho objetiva apresentar uma reflexão sobre o entendimento do Grupo de Trabalho de Matemática (a partir da experiência de dois elaboradores - autores deste texto) sobre a constituição da matemática como área de conhecimento e componente curricular na presente proposta curricular. A metodologia qualitativa de abordagem bibliográfica nos faz constatar que é preciso compreender que: os problemas matemáticos estão dentro e fora da escola; as tecnologias são grandes aliadas do ensino de matemática; e, a Matemática emocional é o elo entre o trabalho coletivo e a ética.

Palabras clave: *Proposta Curricular, Área de conhecimento, Componente curricular, Matemática.*

Introdução

O ensino e aprendizagem da matemática por meio de uma visão crítica e reflexiva do mundo deve oferecer aos estudantes ferramentas necessárias para que sua geração e as futuras possam lutar pelas mudanças que melhorem sua qualidade de vida. Por isso, o ensino de matemática requer educadores matemáticos conscientes das dificuldades que se encontram no ensino-aprendizagem de matemática hoje, compromissados em aprender e desenvolver novas práticas pedagógicas e dispostos a ajudar os estudantes.

Nesse sentido, este texto, fruto de uma pesquisa qualitativa e bibliográfica, apresenta uma reflexão, por meio de dois elaboradores (autores deste texto), sobre a Proposta Curricular de Matemática para os Anos Finais do Ensino Fundamental da Rede Pública Municipal de Educação de São Luís que passou por atualização nestes dois últimos anos (2018 e 2019) a partir de orientações nacionais por meio da Base Nacional Comum Curricular para o Ensino Fundamental, homologada em 2017, a partir da compreensão da Matemática como área de conhecimento e como componente curricular para a rede em questão.

Partimos do princípio de que se considerarmos que o que é aprendido em Matemática na

atualidade é para que o estudante retorne em seu meio, para compreendê-lo melhor e poder transformá-lo, ou seja, fazer uma inter-relação da Matemática com sua utilização na vida, ficará mais fácil a compreensão, consolidação dos conhecimentos matemáticos, pois o estudante percebe que a sua utilização em alguns momentos de sua vida facilitará o seu entendimento e realização de atividades proporcionando-lhe uma melhor qualidade de vida.

Acreditamos que a Proposta Curricular de Matemática, aqui analisada, orienta para uma matemática escolar significativa, ou seja, aquela que parte de princípios metodológicos críticos e renovadores com estratégias que venham favorecer ao professor, melhorar sua prática docente e ao estudante, melhorar a sua aprendizagem.

Ponto de partida: compreensão da Matemática como área de conhecimento e como componente curricular

Ao definirmos a matemática como área de conhecimento, percebemos que os saberes matemáticos são culturais e desenvolvidos gradativamente em suas épocas pela necessidade do meio e pelo desejo de um projeto maior para sobrevivência da humanidade. Existem diferenças acentuadas para a época de outrora, pois a cultura acumulada e desenvolvida a cada dia é quase inalcançável.

Em função dessa problemática criam-se parâmetros na tentativa de tornar acessível o mínimo dessa cultura matemática para todo o território nacional, a fim de que, as exigências relevantes dessa cultura sejam alcançadas. A escola torna-se o meio de acesso desse conhecimento que agora é sistematizado e institucionalizado, dando origem à matemática escolar ou a matemática como componente curricular. De acordo com a BNCC (2017), cada componente curricular possui um conjunto de habilidades que estão relacionadas aos objetos de conhecimento (conteúdos, conceitos e processos) e que se organizam em unidades temáticas.

Nessa nova organização deixamos de entender a matemática como disciplina (quando se relaciona consigo mesma) para a entendermos como componente curricular (quando se relaciona com outras disciplinas). A matemática, agora, é integrada e integradora de outras áreas e componentes. Como componente curricular ela visa através das habilidades, conquistar competências, para que o estudante desenvolva suas capacidades intelectuais, sociais, afetivas e sensório-motoras, necessárias à sua formação cidadã.

Dada à diversidade existente no país é natural e desejável que ocorram alterações no trato dos objetos de conhecimento da matemática escolar, pois os mesmos devem considerar as habilidades adequadas às características peculiares de cada sala de aula associada à sua localidade.

Devemos então, acompanhar as novas tendências e o dinamismo com que a sociedade ludovicense utiliza a informação matemática, adaptando o seu currículo a esse movimento. Em sintonia com a BNCC (2017), é necessário que as habilidades sejam pensadas, considerando a singularidade de São Luís onde o crescimento da cidade deu-se de forma desordenada sem projetos de urbanização, refletindo assim em uma cidade muito heterogênea em termos regionais, sociais e culturais, existindo assim na sua rede educacional, escolas situadas em contextos muito diferentes em localidades urbanas e rurais.

É preciso que a prioridade não seja o acúmulo excessivo de conteúdos, mas que o estudante saiba buscar, selecionar, filtrar e utilizar os objetos de conhecimento quando o momento exigir ou que

crie uma representação pessoal aos conteúdos extraídos das habilidades através de uma metodologia adequada.

Os objetos de conhecimento do componente curricular matemáticos devem estar selecionados e organizados levando em consideração as cinco unidades temáticas apresentadas na BNCC, a saber: Números; Geometria, Grandezas e Medidas; Álgebra e Estatística e Probabilidade. Todas essas unidades temáticas devem ser trabalhadas desde os anos iniciais e devem se relacionar entre si, o que nos leva a compreendermos que “a Matemática não pode ser vista como um componente unilateral, pois apresenta uma dialeticidade, que envolve um ir e vir dentro do processo contínuo de aprendizagem” (MARANHÃO, 2018, p. 305).

Devemos considerar então que as unidades temáticas do componente matemática a serem absorvidas pelos os estudantes devem fazê-los saber, fazer e ter atitudes positivas em relação à Matemática. Ou seja, devemos desenvolver conteúdos de diferentes naturezas: conceituais, procedimentais e atitudinais.

Aprendemos os conteúdos conceituais por meio de um processo de elaboração e construção pessoal de conhecimentos da Matemática. Exemplo: os diferentes significados das operações aritméticas, a compreensão de potenciação, a diferença entre área e perímetro de figuras planas ou área e volume de sólidos geométricos. Aprendemos os conteúdos procedimentais a partir da realização de ações ou pesquisas, exercitação múltipla, reflexão sobre a própria atividade matemática e aplicação em contextos diferenciados dos ensinamentos da matemática. Exemplo: cálculo do resultado da adição, leitura e interpretação de situações-problema, pesquisas, uso da régua, compasso e esquadro. E, finalmente, aprendemos os conteúdos atitudinais a partir de procedimentos vinculados à compreensão de conteúdos matemáticos associados a valores que em geral exigem reflexão, tomada de posição e elaborações complexas de caráter pessoal. Exemplo: cooperação nas atividades em grupo, respeito aos colegas que compreendem mais lentamente o conteúdo matemático, responsabilidade com suas atividades.

Enfim, a matemática como componente curricular busca formar cidadãos éticos, com atitudes positivas frente à resolução de um problema matemático na escola e na vida, que superem o individualismo e valorizem a colaboração. Nesse sentido, tecemos algumas considerações advindas dessas percepções, que constituíram essa pesquisa.

Os problemas matemáticos estão dentro e fora da escola

O grande desafio dos professores de matemática da Rede Pública Municipal de Educação de São Luís é fazer o estudante compreender o seu papel na sociedade, de agente ativo e transformador da sua realidade. As situações-problema são uma metodologia que orienta e provoca aprendizagem, em que resolver problemas não modifica apenas a Matemática, mas também aquele que os resolve, isto é, o próprio estudante.

É ampliando os conhecimentos e sabendo utilizá-los que se faz possível resolver, a cada dia, problemas matemáticos mais complexos. Então, professores de matemática precisam rever seu próprio modo de aprender e de construir a experiência para que possam ensinar os estudantes.

Ensinar Matemática é também ensinar o estudante a resolver problemas, sendo necessário refletir sobre o saber matemático e como esse componente curricular vem sendo trabalhado nas escolas. É

interessante destacar assim a gama de fatores que as aulas de matemática envolvem: leitura e interpretação dos dados, compreensão do problema, tomada de decisão, verificação da resposta de maneira crítica, criatividade para encontrar a solução.

A tarefa de trazer problemas matemáticos do dia a dia não é simples nem rápida, tanto para quem ensina como para quem aprende, pois requer dedicação, tempo e compreensão das dificuldades inerentes a cada situação. É preciso que o professor esteja atento às questões que não sejam diretamente relacionadas à sala de aula, pois nenhuma intervenção no processo de aprendizagem pode fazer mais diferença do que um professor bem formado (ONUICH, 1999).

É necessário conhecer a realidade da turma, seu contexto social, cultural, econômico, para que os estudantes possam se identificar com os problemas propostos. Os conceitos matemáticos são construídos assim, quando o estudante é capaz de expressar, sintetizar, concluir respostas com autonomia e sabe aplicar em diversas situações de aprendizagem além de compreender a existência de tais conceitos nas situações fora da escola.

Quando nos reportamos especificamente aos problemas matemáticos escolares, constatamos que existem muitos aspectos referentes aos processos de ensino e à aprendizagem da resolução de problemas que merecem ser discutidos. O conhecimento ensinado na escola e a matemática aplicada ao cotidiano têm abordagens diferentes, uma enfatiza o conhecimento formal o qual torna-se distante da realidade do estudante e a outra dá ênfase ao cotidiano.

Esse conhecimento matemático passa despercebido diante dos olhos de inúmeros estudantes que não conseguem buscar e nem mesmo associar a matemática com as suas atividades diárias. Essa concepção torna o ensino um desafio tanto para o professor quanto para o estudante. Na realidade, ensinar a resolver problemas é, antes de tudo, auxiliar o estudante a compreender os conceitos envolvidos no problema em questão. Para isso, o estudante deve descobrir o prazer em trilhar diferentes caminhos possíveis para a solução dos mesmos.

Comungando com Smole e Diniz (1991), as situações-problema são uma metodologia que representa não somente a forma de resolver problemas, pois destacam que os problemas fazem parte do cotidiano. Nesse sentido, as autoras afirmam que o aprendizado matemático está completo quando o estudante é capaz de resolver problemas e de propor seus próprios problemas, entendendo como problema todo obstáculo que mereça ser analisado e ultrapassado. Isso mostra o tanto que os estudantes necessitam de incentivos e estímulos para enfrentar o trabalho que lhe é proposto.

É necessário que o professor de matemática conheça, em primeiro lugar, a relação do estudante consigo mesmo e, em segundo lugar, em relação com os demais. É imprescindível oferecer informações que o ajude a superar os desafios da matemática, permitindo que os estudantes relacionem as atividades com o seu contexto social, aproximando escola e realidade.

As tecnologias são grandes aliadas do ensino de matemática

A globalização e a evolução tecnológica têm influenciado as relações humanas na sociedade. As escolas têm procurado inserir no contexto educacional recursos tecnológicos que podem auxiliar no processo de ensino e aprendizagem, como a utilização de computadores, lousas digitais,

projetores, tablets e celulares, que possibilitam modelos diferentes de manuseio em sala de aula.

Moran (2017) defende que é possível ensinar e aprender de diversas maneiras, incluindo o modelo convencional. Mas, o progresso do universo digital possibilita inúmeras alternativas de aprendizagem. Diante de tantos caminhos, não é uma tarefa simples traçar um rumo a ser percorrido pelas instituições de ensino que pretendem alcançar uma educação de qualidade.

Como a educação precisa passar por mudanças de ordem estruturais, a escola precisa se tornar um espaço vivo, agradável e estimulante, com professores preparados, com currículos que contemplem o cotidiano dos estudantes. Logo, com metodologias que possibilitem a participação ativa de seus alunos, a aprendizagem pode acontecer de forma isolada ou em grupo, estando juntos fisicamente ou conectados por meio de uma rede de comunicação (MORAN, 2017).

Nesse sentido, as Tecnologias de Comunicação e Informação (TIC), como aliadas ao ensino de Matemática, podem favorecer a aquisição do conhecimento, simulando a realidade ao nosso redor, auxiliadas pelo aumento da capacidade de armazenamento, velocidade de processamento dos dados e compartilhamento de informações, possibilitando a abertura de espaço para a participação e criatividade dos estudantes.

A inclusão também de tecnologias digitais nas aulas de matemática faz-se necessária em função da demanda de uma sociedade conectada virtualmente por meio de dispositivos eletrônicos como: computadores, celulares e tablets, possibilitando a interação entre o aluno com vários tipos de programas, capazes de utilizar recursos como animação, imagem e sons auxiliando o processo de ensino e aprendizagem. Os programas digitais poderão explorar diferentes situações de aprendizagem através da utilização de softwares, durante as aulas (MACHADO, 2012).

As TIC podem trazer novas possibilidades para o ensino/aprendizagem de matemática. As aulas receberão outra conotação com o seu auxílio, tendo como possível consequência a possibilidade de reter a atenção dos estudantes. Porém, o professor de matemática precisa estar preparado para utilizar esses dispositivos. Segundo Belloni (2009) é necessário conhecer os novos modos de aprender com as TIC para que possamos ensinar os estudantes.

Nesse contexto, ressaltamos que as concepções de educação matemática recomendam aos professores criar oportunidades para a realização de descobertas e experiências pelos estudantes (LORENZATO, 2006). Logo, uma forma de proporcionar o descobrimento e a experimentação no contexto escolar é a incorporação da ludicidade nas atividades matemáticas, através da utilização de softwares educacionais.

Os professores de matemática da Rede Pública Municipal de Educação de São Luís devem compreender que os recursos tecnológicos associados ao ensino de matemática podem assim, ser utilizados para estimular o senso crítico dos estudantes por meio de atividades curriculares capazes de explorar as percepções visuais e sonoras, seja por meio de softwares educativos digitais ou jogos eletrônicos, provocando uma ruptura com as estruturas tradicionais, consolidadas ao longo do tempo através uma prática educativa repetitiva. Porém, é necessário que fique claro que os equipamentos tecnológicos são um meio, não representam um fim em si mesmos.

A Matemática emocional é o elo entre o trabalho coletivo e a ética

Partimos do princípio de que a afetividade influencia na aprendizagem. Com relação à aprendizagem matemática isto se torna mais evidente. A Matemática ainda é um dos Componentes Curriculares que mais deixa marcas negativas nos estudantes.

Ao aprender matemática o estudante recebe estímulos contínuos associados a ela – problemas, atuações do professor, mensagens sociais, etc. – que geram nele certa tensão. Diante desses estímulos reage emocionalmente de forma positiva ou negativa (CHACÓN, 2003). Para muitos estudantes a influência emocional negativa ou aversão é tão marcante e inesquecível que descartam de suas vidas tudo que lembra a matemática.

Mas essa aversão nem sempre existiu. Pensemos numa criança que está iniciando sua vida escolar, antes mesmo de ingressar na Educação Infantil ela já experimentou a matemática principalmente nas suas brincadeiras. E agora como a escola vai receber essas vivências? Lembremos que de acordo com a BNCC (2017) a entrada de crianças na creche ou na pré-escola significa na maioria das vezes, a primeira separação das crianças dos seus vínculos afetivos familiares para se incorporarem em uma situação de socialização estruturadas. Levando em conta que há uma ruptura emocional com a família na entrada dessa criança na escola, como agir diante disso?

A escola deve estar preparada para receber os estudantes em qualquer fase ou modalidade dando continuidade às atividades já vivenciadas anteriormente, e que no presente, embora sistematizadas, não cause traumas advindos de um ambiente não propício.

De acordo com a BNCC (2017), é dever das instituições de ensino acolher as vivências e os conhecimentos constituídos pelas crianças no ambiente de família e no cotidiano de sua comunidade, e articulá-los em suas propostas pedagógicas, tem o objetivo de ampliar o universo de experiências, conhecimentos e habilidades dessas novas aprendizagens, atuando de maneira complementar à educação familiar.

Isso realmente acontece na educação infantil, todos da escola se esforçam no cuidado para que o ambiente seja aconchegante, cuidam para que as crianças não sofram traumas emocionais nem físicos; as atividades são lúdicas; a matemática está nas historinhas contadas com todo entusiasmo pela professora, nos jogos eletrônicos, nos desenhos orientados, nas pinturas, nas contagens orais nas descobertas dos números, tudo contextualizado. Que prazer existe em estudar matemática na educação infantil e que no ensino fundamental, principalmente nos anos finais, deixa de existir?

Precisamos refletir. Escola, professores e pais: que conduta apresentamos em relação à matemática? Enquanto professor como eu apresento esse componente curricular para os estudantes? Tento reproduzir a minha experiência que tive quando era estudante, positiva ou negativa? Se foi negativa o que devo fazer para não reproduzir isso?

A atitude é importante, pois, segundo Chacón (1997), os estudantes que possuem crenças rígidas e negativas sobre a matemática têm sua aprendizagem normalmente passiva e, no momento da aprendizagem, trabalham mais a memória do que a compreensão.

Apesar do saber matemático se construir de noções objetivas, abstratas e gerais, não há como negar a intermediação da subjetividade e da particularidade na atividade humana de sua elaboração (PAIS, 2002). Ao professor de matemática cabe usar métodos diversificados que tornem o ambiente da

sala de aula acolhedora, proporcionando parcerias úteis para uma aprendizagem matemática de qualidade, o que torna possível a troca de ideias entre os estudantes.

Portanto, o professor de matemática da Rede Pública Municipal de Educação de São Luís deve dar sentido à matemática, mostrando que ela foi feita por pessoas que acertaram e também erraram, que há sentimentos envolvidos na sua prática, e que ela é acessível a todos, sem exceção.

Considerações finais

O ensino e a aprendizagem de matemática que perdurou durante muito tempo nas escolas era aquele em que o estudante era um ser passivo, espectador de um monólogo apresentado pelo “detentor” do conhecimento, o professor, que transmite-o de forma acumulativa, escalonada, como se fossem “capítulos” e no final de um determinado período estariam da forma de “livro-conhecimento” no cérebro do estudante que assim adquiriria conhecimento matemático.

Essa concepção de “ensinar matemática”, em que o professor supostamente é detentor de todo o conhecimento, é que busca ser rompida pela Rede Pública Municipal de Educação de São Luís ao apresentar uma proposta curricular para o ensino de matemática construída por/ para os próprios professores de matemática da presente rede que tratam de sua própria realidade.

A proposta curricular de matemática assim constituída apresenta a orientação para a ruptura de uma prática fragmentada e conservadora que não permitia aos estudantes uma visão do todo. O ensino de matemática proposto busca o desenvolvimento de habilidades que conecte os estudantes de São Luís com o contexto e a realidade em que vivem, dando significado àquilo que aprendem.

Desta forma, a partir de nossa experiência, enquanto elaboradores do Grupo de Trabalho de Matemática da Rede Pública Municipal de Educação de São Luís, constatamos que a proposta curricular da rede orienta para o ensino da Matemática que se apropria dos conceitos e procedimentos matemáticos básicos que são direitos de todos (e não apenas de alguns privilegiados intelectualmente, especialmente do sexo masculino), e contribui para a formação do futuro cidadão que se engajará no mundo do trabalho, das relações sociais, culturais e políticas.

Referencias

- BELLONI, M. L. (2009). *O que é média-educação*. 3. ed. rev. Campinas-SP: Autores Associados.
- BRASIL. (2017). *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: 2017.
- GOMÉZ CHACÓN, I. M. (2003). *Matemática emocional: os afetos na aprendizagem matemática*. Trad. Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed.
- LORENZATO, S. (Org.). (2006). *O Laboratório de ensino de matemática na formação de professores*. Campinas: Autores Associados.
- MACHADO, A. S. (2012). *Explorando o uso do computador na formação de professores de ciências e matemática à luz da aprendizagem significativa e colaborativa*. Dissertação (Mestrado)- Universidade Federal do Ceará, Fortaleza.

- MARANHÃO. (2019). Documento Curricular do Território Maranhense para a Educação Infantil e Ensino Fundamental. SEDUC.
- MORAN, J. F. (2017). Metodologias ativas e modelos híbridos na educação. In: YAEHASHI, S. et al (Orgs.). *Novas Tecnologias Digitais*. Reflexões sobre mediação, aprendizagem e desenvolvimento. Curitiba: CRV. pp.23-35.
- ONUICHIC, L. R. (1999). Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). *Pesquisa em Educação Matemática*. São Paulo: Editora UNESP. pp.199-220.
- PAIS, L. C. (2002). *Didática da Matemática: uma análise da influência francesa*. 2. ed. Belo horizonte: Autêntica.
- SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. (2001). *Ler, escrever e resolver problemas: Habilidades Básicas para aprender Matemática*. Porto Alegre: Artmed.

VIBRACIONES Y ONDAS CON MATHEMATICA

Roy Sánchez Gutiérrez

rwsanche@pucp.edu.pe

Instituto de Investigación sobre Enseñanza de la Matemáticas, IREM-PUCP, Perú

Resumen

Los diversos y variados problemas científicos y tecnológicos necesitan, para ser resueltos adecuadamente, de una formulación técnica, de un sustento matemático o soporte estadístico. Los métodos matemáticos desempeñan un papel importante en el modelamiento de problemas reales. Para describir las vibraciones de resortes, de láminas rectangulares o circulares requieren de conocimientos teóricos de matemáticas y físicas. Los métodos matemáticos son las herramientas teóricas, son los modelos matemáticos, que explican o detallan pormenorizadamente su comportamiento una ecuación diferencial junto a valores iniciales o problemas de valores de frontera se pueden determinar o aproximar la solución. Para visualizar o simular dichas soluciones nos apoyaremos en Mathematica de Wolfram o Matlab. Los problemas de valores iniciales explican los sistemas masa-resorte y problemas de valores de frontera las vibraciones de láminas rectangulares o circulares. Para describir estos sistemas se necesitan varias disciplinas matemáticas tales como las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, las ecuaciones en derivadas parciales, series de Fourier y métodos numéricos.

Nuestro objetivo es explicar a los estudiantes y profesores de ciencias e ingeniería la solución de los problemas de resortes, vibraciones de láminas rectangulares y láminas circulares usando los modelos matemáticos; mostrar la gráfica de la solución y simular estos problemas de vibraciones con la ayuda de Mathematica (Wolfram) o Matlab.

Palabras clave: Vibraciones mecánicas, ecuaciones diferenciales, series de Fourier, problemas de valores iniciales, problemas valores en la frontera, métodos numéricos.

Introducción

Con frecuencia se requiere describir el comportamiento de algún sistema o fenómeno real en términos matemáticos. La descripción matemática de un sistema o fenómeno se denomina modelo matemático. La solución de ese modelo nos brindará las características de ese fenómeno.

Vibraciones. Sistema masa-resorte

Operadores Diferenciales.

Un operador es una aplicación definido sobre algún subconjunto de $\mathbb{R}^n$ que transforma una función en otra función. Los operadores que trataremos son lineales en su dominio y que incluyen ecuaciones diferenciales en su definición. Consideramos los espacios de n dimensiones, $\mathbb{R}^n$. Con el operador Nabla se pueden estudiar problemas que incluyan gradientes, divergencias y rotacionales. El operador de Laplace sirve para las ecuaciones diferenciales parciales y con ello estudiar las membranas circulares (el operador en coordenadas polares). También podemos definir otros operadores que incluyan ecuaciones diferenciales, funciones integrales, matrices, etc.

Sistema masa-resorte.

Para describir el movimiento del sistema masa resorte se requiere de leyes, una de ellas es la **ley de Hooke**. Esta ley dice que el resorte ejerce una fuerza de recuperación en sentido contrario a la dirección de la elongación y proporcional a la cantidad de elongación. La segunda ley de Newton para deducir la ecuación diferencial que nos da la ecuación del movimiento con las fuerzas que intervienen en el sistema a partir del punto de equilibrio. Finalmente, las fuerzas amortiguadoras que actúan sobre el cuerpo, se consideran proporcionales a la velocidad instantánea.

La ecuación diferencial que describe el desplazamiento de una masa sujeto a un resorte, es decir, las vibraciones mecánicas de la masa,

$$my''[t] + by'[t] + ky[t] = g(t), y[t_0] = y_0, y'[t_0] = y'_0;$$

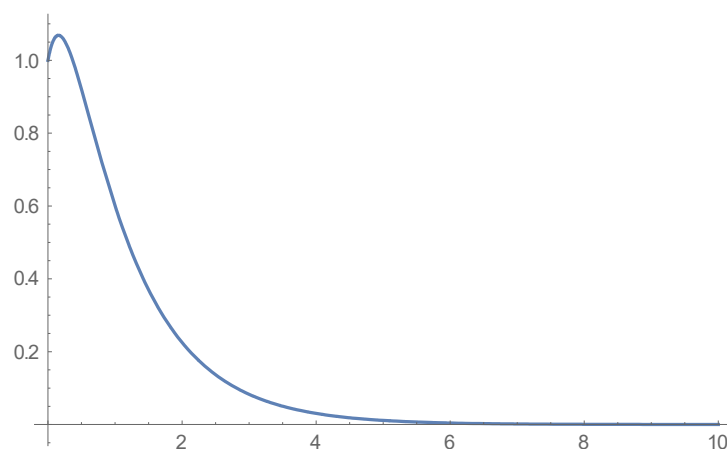
donde $m > 0$ es la masa, $b > 0$ es la constante de amortiguamiento o fricción y $k > 0$ es la constante de rigidez del resorte.

Movimiento sobre amortiguado.

La ecuación diferencial

$$y''[t] + 5y'[t] + 4y[t] = 0, y[0] = 1, y'[0] = 1$$

con las condiciones iniciales dicen que el movimiento de la masa parte de una posición localizada 1 unidad por debajo de la posición de equilibrio con una velocidad descendente de 1 m/s. La gráfica de la solución del movimiento amortiguado

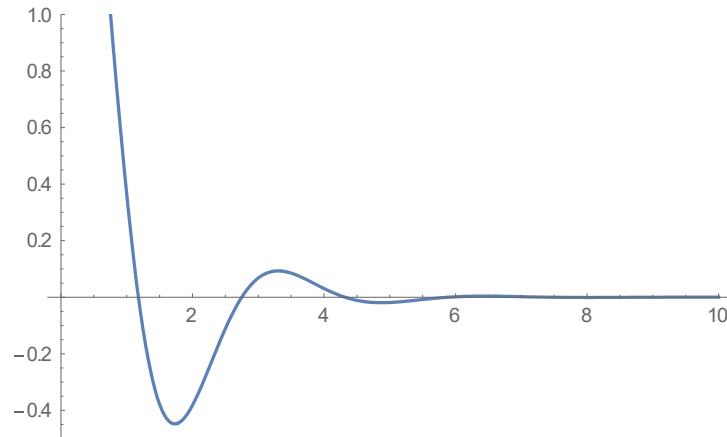


Movimiento críticamente amortiguado

La ecuación diferencial

$$y''[t] + 2y'[t] + y[t] = 0, y[0] = 0, y'[0] = -3;$$

tiene un movimiento críticamente amortiguado. Inicia con una fuerza de vibración pero es superado por las fuerzas de amortiguamiento.

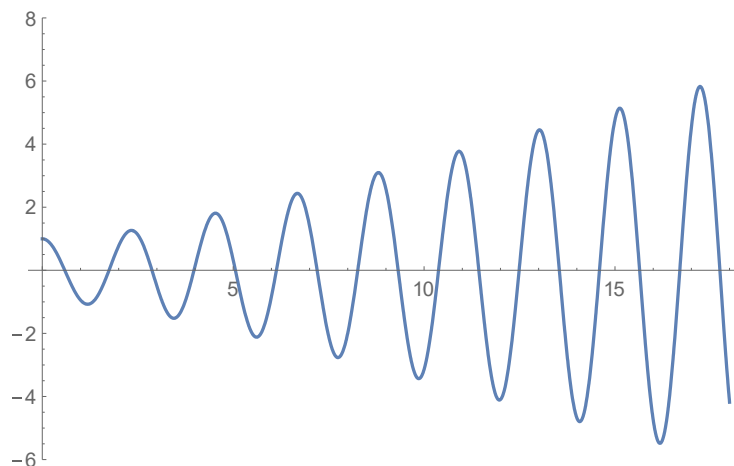


Resonancia. Cuando en la fuerza que obliga al sistema a seguir vibrando $f(t)$ tiene frecuencia igual a la frecuencia de las vibraciones libres no amortiguadas, $\gamma = \omega$. Esta igualdad puede ocasionar problemas a sistemas de vibraciones como en el siguiente ejemplo.

La ecuación diferencial

$$y''[t] + 9y[t] = 2\cos(3t), y[0] = 1, y'[0] = 0;$$

Determina el movimiento



Para tiempos grandes y cuando $\gamma = \omega$, las grandes oscilaciones de la masa forzarán el resorte más allá de su límite elástico. Es un poco ideal por no considerar las fuerzas de rozamiento.

Ondas en una dimensión y dimensión dos

Vamos a darle propiedades de vector a las funciones de clase C^∞ . Definimos el producto interior de dos funciones como la integral sobre un intervalo. Dos funciones serán ortogonales si dicha integral es cero. La solución de los movimientos vibratorios en dos dimensiones usando series de Fourier. Un conjunto infinito de funciones ortogonales será la base para las funciones de la serie de Fourier.

Las series de Fourier son muy útiles para describir los fenómenos periódicos, fenómenos "intermitentes" de corta duración.

Series de Fourier.

Sea una función $f(x)$, continua por tramos para $x \in]-L, L[$ con $L > 0$, periódicas de período $T = 2L$, donde $f(x) = f(x + T)$. La función $f(x)$ puede ser continua por tramos con un número finito de discontinuidades de salto. La serie de Fourier de una función

$f(x)$, $x \in]-L, L[$ con $L > 0$ está dada por

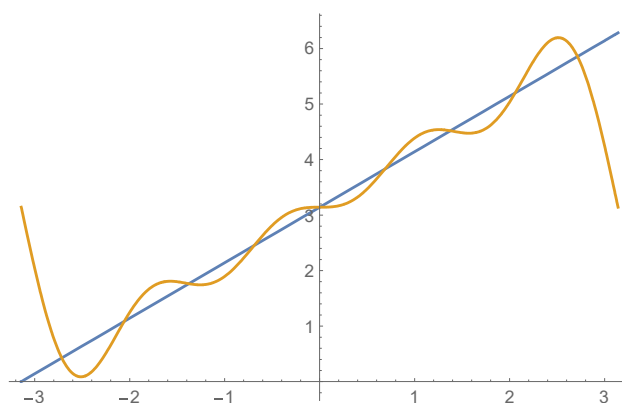
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right]$$

Por determinar los coeficientes a_n y b_n , denominados coeficientes de Fourier.

Convergencia. La función debe ser de clase C^1 , la función y su derivada deben ser continuas en el intervalo $I =]-L, L[$. La serie de Fourier converge a $f(x)$ en los puntos de continuidad y en los puntos de discontinuidad en la media aritmética del salto.

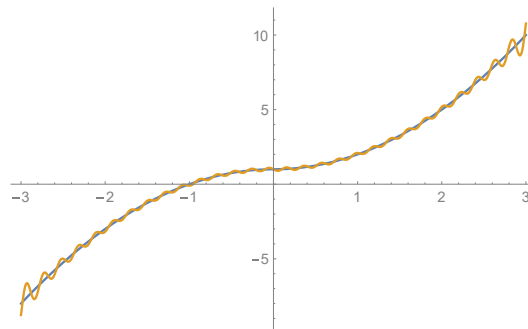
Ejemplos

Series de Fourier de $f(x) = x + \pi$.



Una función seccionada en el intervalo $] -\pi, \pi[$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x < 0 \\ 1 + x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$



Describiremos gráficamente la idea de convergencia en las series de Fourier. Cuantos más sumandos se considera, la aproximación de la gráfica de la serie es "casi coincidente" con la gráfica de f .

Las funciones que tienen simetría respecto al eje de ordenadas o respecto al origen de coordenadas serán representadas por series de Fourier solo en cosenos o series de Fourier solo en senos para que cumpla con las características de simetría.

Serie de potencias. Las funciones analíticas se pueden expresar como serie de potencias alrededor de un número en un intervalo, denominado intervalo de convergencia. Su aplicación es la solución de problemas de valores iniciales.

Ejemplo.

La función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ con series de potencias alrededor del origen de coordenadas.



Onda Unidimensional

Sea una cuerda de longitud $L > 0$, localizado sobre el intervalo del eje x , $[0, L]$ con extremos en $x = 0$ y $x = L$. El movimiento de la cuerda se da en el plano xy , perpendicular al eje x , son vibraciones transversales al eje x . La cuerda es flexible y homogénea. El desplazamiento de un punto de la cuerda está representado por la función $u(x, t)$, donde t es el tiempo.

La ecuación en derivadas parciales que sirve de modelo matemático junto a sus condiciones de frontera y las condiciones iniciales,

$$\begin{cases} a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, & 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(0, t) = 0, & u(L, t) = 0 \\ u(x, t) = f(x), & \frac{\partial u}{\partial t}(0, t) = g(x) \end{cases}$$

El método de separación de variables resuelve este problema lineal. Divide el problema en dos ecuaciones diferenciales ordinarias equivalentes con condiciones de frontera. La superposición de las soluciones resulta ser la solución de la onda unidimensional.

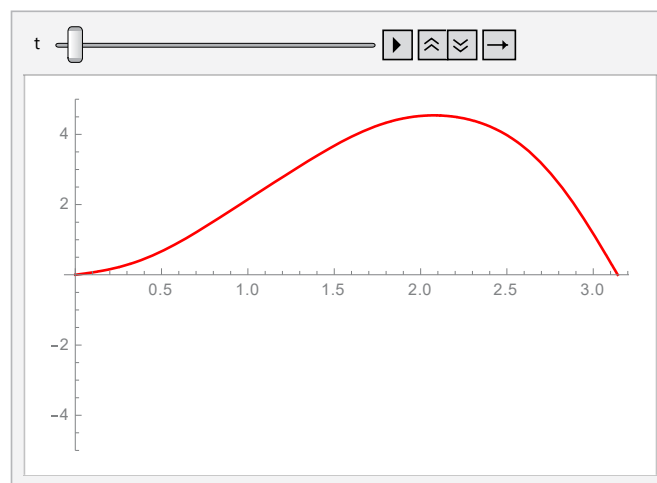
Sobre las condiciones de frontera, se tienen tres formas, estáticas, en movimiento o mixtas, denominadas de Dirichlet, de Neuman o de Robin, respectivamente.

Ejemplo. Una cuerda de longitud $L = \pi$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, & 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(0, t) = 0, & u(\pi, t) = 0 \\ u(x, t) = x^2(\pi - x), & \frac{\partial u}{\partial t}(0, t) = 0 \end{cases}$$

La solución $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4(1+2(-1)^n)}{n^3} \right) \cos(nt) \sin(nx)$.

Mostramos una animación para $n = 6$ en la solución de la ecuación de onda.



La solución resulta de una superposición de ondas estacionarias o modos normales.

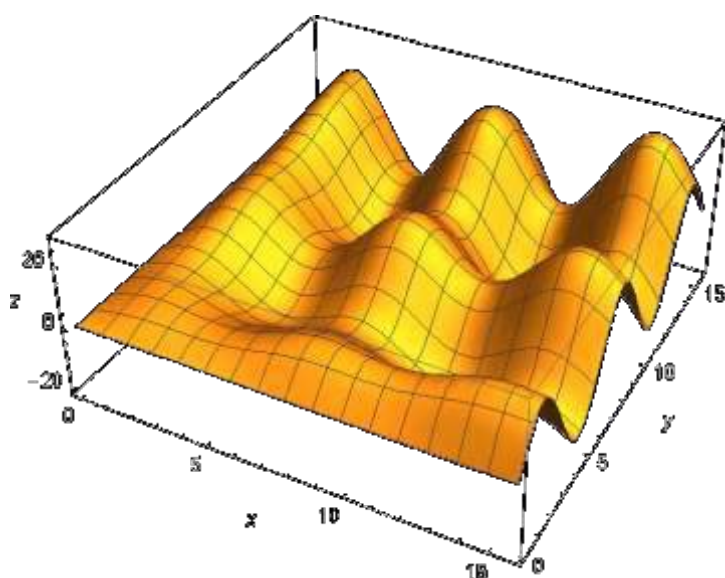
Numerosos instrumentos musicales emplean cuerdas vibrantes para generar los sonidos que producen. Cuando una cuerda vibra con una frecuencia dada, las vibraciones con su frecuencia se transmiten a través del aire y llegan al oído del que escucha.

Membranas Rectangulares.

Membrana rectangular de dimensiones a y b , ubicado en el plano xy , sobre la región rectangular $[0, a] \times [0, b]$, sujeta en la frontera o bordes de la membrana.

Sobre las condiciones de frontera, tenemos la de Dirichlet que tiene las fronteras fijas, sin movimientos, condiciones de frontera, la **condición de frontera de Neumann** se presenta cuando se le especifican los valores de la derivada o del movimiento inicial, la derivada de una solución tomada sobre la frontera, borde o contorno del dominio.

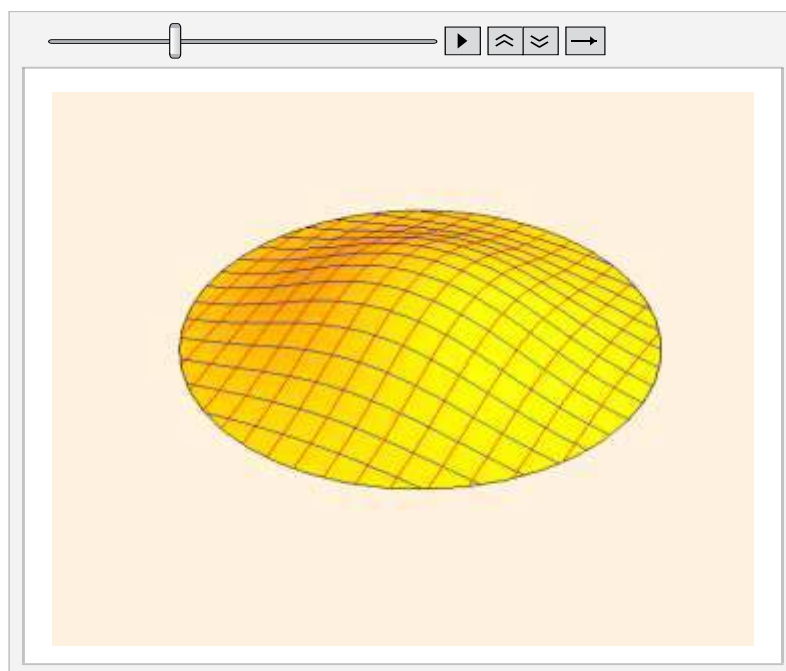
Las ondas también se pueden generar sobre planos, esferas, toros, superficies hiperbólicas, etc. Con diferentes condiciones de frontera y condiciones iniciales.



Membranas Circulares

Un problema de valores en la frontera es el de una membrana circular sujeta en su frontera y que vibra los puntos interiores de la membrana perpendicularmente al plano que los contiene. Las ecuaciones bidimensionales de onda expresadas en coordenadas polares.

El método de separación de variables asume la existencia de simetría axial, es decir, la función que describe el movimiento es independiente de la coordenada angular. Se denomina a estas vibraciones, **vibraciones radiales**. Un modelo físico evidente es la de un tambor vibratorio. Podemos imaginar cuando se lanza una piedra a una piscina con agua, las ondas en forma circular que se forman son movimientos en tres dimensiones perpendiculares al plano de la superficie del agua.



Una membrana circular de radio $\rho = R$ con condiciones de frontera de tipo Dirichlet, es decir, fijos. La función $u(\rho, t)$ es el modelo matemático que describe el movimiento de los puntos interiores de la membrana, que satisface las condiciones de frontera y condiciones iniciales.

El operador Laplaciano se expresa en coordenadas polares para describir mejor el movimiento vibratorio de los puntos de la membrana en términos de (r, θ) .

Referencias

- Hassani, S. (2000). *Mathematical Methods*, Springer.
- Kreyszig, E. (2003). *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*, Editorial Limusa.
- Nagle, S. (2005). *Ecuaciones Diferenciales con Problemas en la Frontera*, Editorial Pearson.
- Piskunov, N. (1977). *Cálculo diferencial e Integral*, Editorial MIR Moscú.
- Zill, D. (2008). *Ecuaciones Diferenciales*, Editorial McGraw Hill.

APRENDIENDO A ENTENDER LA NOCIÓN DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Judith Catherine Chávez Salinas

d.jchavez@upla.edu.pe

Universidad Peruana Los Andes, Perú

Resumen

La siguiente experiencia educativa está relacionada con el eje de resolución y creación de problemas, se realizó con estudiantes del segundo ciclo de la escuela profesional de Administración, quienes en su aprendizaje tienen dificultades al momento de comprender la noción de límite de una función real, es por ello que nuestro objetivo fue contribuir a mejorar la comprensión y el aprendizaje de este objeto matemático haciendo uso una secuencia didáctica diseñado en base a la Teoría de Situaciones Didácticas, ya que en ella se encuentra desarrollada situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización, que los alumnos lograron desarrollar en su mayoría. Los resultados obtenidos son satisfactorios, pues los alumnos en su mayoría logran entender la noción de límite y les resulta más fácil luego entender la definición formal de límite.

Palabras clave:

Situación didáctica, límite, función.

Introducción

Los estudiantes de las carreras de letras en la universidad a menudo tienen dificultades con el aprendizaje de las matemáticas en los diferentes cursos generales o de especialidad, y por consiguiente el rendimiento académico se ve afectado y en muchos casos tienen que repetir las materias, por experiencia propia en la enseñanza del curso de Matemática Superior, que en sus contenidos está inserto el objeto matemático límite de una función, es necesario que los estudiantes empiecen comprendiendo lo que es un límite de forma intuitiva y práctica, que contribuye a que los alumnos entiendan e interioricen el concepto de límite de una función real de una manera intuitiva haciendo uso de situaciones y contenidos muy familiares para ellos para luego introducirlos en la definición formal, pues de esta manera comprender inicialmente mejor el significado de este objeto para luego introducirlo en el lenguaje más formal.

Finalidad, diseño e implementación de la propuesta

Finalidad de la propuesta:

Mejorar la comprensión y entendimiento de la noción de límite de una función, en los estudiantes de Administración, jóvenes que de manera general no les gusta la matemática, pero sin embargo

tienen que llevar estos objetos matemáticos que les son indispensables en el desarrollo de otros temas y tópicos de especialidad.

Diseño de la propuesta:

Esta propuesta se ha trabajado con 28 estudiantes de la EP de Administración de la Universidad Peruana Los Andes del segundo ciclo de estudios.

Para el diseño de la secuencia de actividades se ha tenido en cuenta la Teoría de Situaciones Didácticas de Guy Brousseau.

El tema de límite de una función forma parte del curso de Matemática Superior del segundo ciclo y para la aplicación del diseño se han formado 8 grupos de 3 estudiantes y un grupo de 4 para que puedan discutir entre ellos sobre sus resultados y poder emitir sus conclusiones respecto a las situaciones presentadas.

Previo al trabajo de la aplicación de la propuesta se les recuerda nociones de números reales y funciones, contenidos aprendidos en primer ciclo.

SECUENCIA DE SITUACIONES PROPUESTAS PARA ENTENDER LA NOCIÓN DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Situación 1:

Dada la función $f(x) = \frac{2}{x}$ completa la siguiente tabla y responde:

- 1.1. Determina el dominio de la función
- 1.2. En el siguiente cuadro se va a observar el comportamiento de las imágenes de la función $f(x)$ propuesta. Para ello se dan valores a la variable x , como se muestra a continuación:

x	$f(x)$
1	
2	
10	
100	
1000	
10000	
100000	
1000000	
10000000	
100000000	
1000000000	
10000000000	

- a) ¿Qué observas con respecto a los valores propuestos de la variable x ?
- b) Con respecto a la pregunta anterior, siguiendo esta tendencia, ¿a qué número se aproximan los valores de la variable x , según indica la flecha?
- c) Halla las imágenes de la función y completa el cuadro. ¿Qué sucede con los valores de la variable $f(x)$? ¿A qué valor se aproximan?
- d) Teniendo en cuenta la situación en c), en algún momento o bajo cierta circunstancia, este valor podrá ser cero.
- e) Construye un gráfico con los resultados obtenidos en a, b y c.
- f) Expresa con tus propias palabras lo obtenido en el gráfico construido en d).
- g) ¿Qué sucedería si en lugar de dar valores positivos grandes se le da valores negativos grandes? Elabora un cuadro como al inicio y anota el comportamiento de las imágenes.
- h) Analiza el cuadro que has obtenido y escribe con tus propias palabras una conclusión al respecto.
- i) Con los datos obtenidos hasta el momento construye un gráfico adherido al realizado en el paso e).
- j) Observa el gráfico obtenido y analiza, este podrá cortar al eje Y, explica tu respuesta.
- k) ¿Cómo analizarías el comportamiento de la función teniendo en cuenta la respuesta obtenida en j) ?
- l) Elabora un cuadro como al inicio para poder realizar el análisis respectivo. Ten en cuenta que vas a trabajar valores que se encuentran muy próximos al número cero tanto por su lado derecho como por el izquierdo.
- m) Observa y expresa con tus propias palabras la conclusión del análisis que has realizado con respecto a los datos de lo obtenido en el paso anterior.
- n) Construye un gráfico adherido al construido en el paso i)

Situación 2:

Dada la función $f(x) = \frac{x^2 - 36}{x - 6}$

2.1 Determina el dominio de la función.

2.2 Teniendo en cuenta el dominio de esta función:

- a) A partir de los valores que se tiene como dominio de la función, ¿qué sucede con las imágenes de la función, si los valores de la variable x se aproximan a seis? Construye un cuadro para esto. Ten en cuenta que los valores se pueden aproximar por su lado derecho o por el izquierdo.

x	$f(x)$

- b) Grafica la función y observa su comportamiento para los valores cercanos a $x=6$.
- c) Se puede considerar en el análisis valores para x como por ejemplo el 1, 2, 3, 8, 9, 10. ¿qué sucede si considero estos valores?
- d) Expresa con tus propias palabras lo obtenido en el análisis realizado en a) y b).

Situación 3:

En la siguiente función $f(x) = \frac{x-1}{2}$

3.1 Determinar el dominio de la función

3.2 ¿Qué sucede con los valores de la función, a qué valor se acercan, si los valores de la variable x se aproximan al número 1? Construye una tabla para anotar tus observaciones

x	$f(x)$

- a) Grafica la función y observa su comportamiento alrededor del valor $x=1$
- b) Expresar en palabras lo obtenido en conclusión del análisis realizado.

Situación 4:

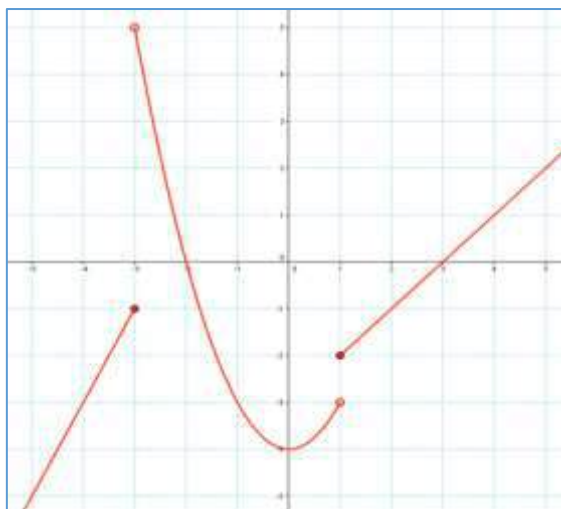
A partir de la tabla, responda:

x	$f(x)$
1,90	8,90
1,93	8,9201
1,96	8,99201
1,99	8,999201
1,999	8,9999201
1,9999	8,99999201
A	B
2,0001	9,00008
2,001	9,0008
2,01	9,008
2,1	9,08

- a) Si los valores de la variable x se aproximan por la derecha de A, ¿Qué valor tiene A? y si se aproximan por la izquierda, ¿Qué valor tiene A?.
- b) ¿A qué número se acerca los valores de la función $f(x)$, qué valor tendría B?
- c) Escriba una conclusión sobre el comportamiento de la función cuando x se aproxima a A.

Situación 5:

A continuación, se muestra la gráfica de una función por tramos, en la que vamos a analizar el comportamiento de las imágenes de la función teniendo en cuenta lo siguiente:



- a) Si los valores de x se aproximan al número -3 , sus imágenes ¿a qué valor se aproximan? (Ten en cuenta el lado por el que se aproximan los valores de la variable x para que puedas dar una respuesta.)
- b) Si los valores de la variable x se aproximan al número 1 , sus imágenes ¿a qué valor se aproximan? (Ten en cuenta el lado por el que se aproximan los valores de la variable x para que puedas dar una respuesta.)

Resultados obtenidos

Se mejora la comprensión del objeto matemático límite de una función, dado que son estudiantes del área de letras que tienen dificultad en el aprendizaje de las matemáticas, pues al mostrarles esta secuencia de actividades logran entender de manera intuitiva el significado de límite de una función para luego para a la definición formal en el que se utilizará términos como épsilon y delta.

Consideraciones finales

- A partir de las respuestas obtenidas luego de la aplicación de la secuencia de situaciones didácticas se hizo mención a los límites que habían hallado de manera práctica, por ejemplo en el caso de la situación 1 se mencionó que hallaron $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} = 0$, y así se mencionó en las demás situaciones.
- Esta propuesta puede variar teniendo en cuenta el nivel de dominio del aprendizaje de los estudiantes en relación a los temas de números reales y funciones, pues para poder realizar los análisis respectivos es menester tener conocimientos previos.

Referencias

- Álvarez Manilla, J. M., Valdés Krieg, E. & Curiel de Valdés, A. B. (2006). Inteligencia emocional y desempeño escolar. *Revista Panamericana de Pedagogía*, 9, 9-33.
- Blásquez, S & Ortega T. & Gatica S. & Benegas J. (2006). Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial del análisis matemático en la universidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 189-209.
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. (1ª ed) Buenos Aires, Argentina.
- Leithold, L. (1998). *El Cálculo*. (7ma edición). Oxford University Press México, S.A. de C.V.
- Vidal R., *La didáctica de las matemáticas y la teoría de situaciones*. Recuperado el 20 de octubre de <https://educra.cl/wp-content/uploads/2016/01/DOC-La-Didactica.pdf>

O LABORATÓRIO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E INCLUSÃO NA FORMAÇÃO INICIAL DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

Karem Keyth de Oliveira Marinho*

Elielson Ribeiro de Sales**

kmarinho@uea.edu.br, esales@ufpa.br

Universidade do Estado do Amazonas, Brasil*

Universidade Federal do Pará, Brasil**

Resumen

O presente trabalho descreve duas atividades desenvolvidas no âmbito do Laboratório de Educação Matemática e Inclusão (LEMIn), voltadas para a Resolução de Problemas, porém com perspectivas, metodologias, resultados e percepções diferentes, a fim de evidenciar o processo de construção da atividade em um ambiente formativo colaborativo na qual a autonomia docente e a reflexão são incentivadas. Assim apresentamos as atividades separadamente a fim de contextualizar o seu processo de construção, bem como suas contribuições para a formação do futuro Professor de Matemática e para os estudantes do Ensino Básico envolvidos. Ao final, observamos que a Resolução de Problemas não foi o único ponto convergente nas atividades, além disso, ambas foram idealizadas visando minimizar dificuldades de estudantes do Ensino Básico e proporcionaram aos acadêmicos, uma reflexão acerca do que fora desenvolvido.

Palabras clave: *Resolução de Problemas, Professor reflexivo, Prática reflexiva, Educação Inclusiva.*

Introdução

O Laboratório de Educação Matemática e Inclusão (LEMIn) do Curso de Matemática do Centro de Estudos Superiores de Tabatinga da Universidade do Estado do Amazonas (CSTB/UEA) foi implementado em 2017 por meio de projetos de extensão universitária e iniciação científica e nesses dois anos de atividades “vem se consolidando como um espaço de práticas inovadoras para o ensino e aprendizagem de Matemática, buscando atuar na perspectiva da Educação Inclusiva” (Oliveira, Pinto, Santos & Marinho, 2018).

Neste espaço, considerado como formativo pois intenciona ser um espaço de reflexão e colaboração para contribuir na formação inicial dos Professores de Matemática e suas práticas docentes, também se constitui como colaborativo por compreendermos a voluntariedade, identidade e espontaneidade dos membros, desde seu ingresso, pois não há critérios de seleção para entrada de acadêmicos e professores, além de o trabalho ocorrer de forma conjunta, na qual as decisões são negociadas pelos pares sem considerar níveis hierárquicos entre professor e aluno. As tomadas de decisão e execução das atividades são responsabilidades assumidas pelo grupo que delibera sobre como o processo irá ocorrer (Fiorentini, 2004)

Com isso, sua construção enquanto espaço formativo colaborativo, vem passando por relevantes ressignificações, pois constantemente há uma reflexão de como o LEMIn pode tornar-se cada vez mais adequado e inclusivo e nesse caminhar, destacamos seu caráter interdisciplinar, visto a as atividades realizadas por acadêmicos dos cursos de Licenciatura em Matemática e Licenciatura em Letras, como também de itinerância que está em fase de estruturação de modo a permitir uma mobilidade das atividades entre as instituições envolvidas.

Com isso, espera-se que neste ambiente, os partícipes sintam-se seguros e tenham a liberdade de expor sua opinião, sempre respeitando as demais, já que o termo "Inclusão" que se faz presente em seu nome, prioriza um ambiente que respeite as diferenças de modo que todos se sintam respeitados pelo que são e pensam.

Consideramos relevante tais aspectos neste ambiente visto que as práticas realizadas na formação inicial do professor exercem um papel fundamental para a construção da identidade deste profissional, tendo em vista a influência que estas exercem sobre a sua atuação docente ao longo de sua carreira. Segundo Colares, Gonçalves, Colares & Leão (2011, p.14),

a importância de se estar investigando a formação da prática docente, entre outras finalidades, almeja preparar [...] o professor no exercício de sua prática como ator que reflete sobre as ações que realiza em seu cotidiano. O significado da preparação de docentes para o exercício de uma prática reflexiva se tornou um tema recorrente nas discussões sobre a formação do professor nas últimas décadas.

Corroborando com esse aspecto, D'Ambrósio (1994) ainda explicita que um professor fará em sua prática aquilo que ele viu alguém fazendo, ou seja, dificilmente fará o que não vivenciou, logo, vislumbramos que o LEMIn, como espaço formativo colaborativo poderá propiciar aos acadêmicos vivenciar práticas diferenciadas e, considerando sua posição no grupo de respeito as diferenças, instigar a adoção de uma postura crítica e reflexiva.

Assim, buscamos, nesse breve relato, socializar duas atividades desenvolvidas nesse ambiente, selecionadas por terem trabalhado com Resolução de Problemas, a fim de que os aspectos ressaltados anteriormente se tornem notórios e possibilite perceber pontos convergentes entre as atividades, além de evidenciar quais aspectos se tornaram relevantes para a formação inicial dos Professores de Matemática.

A Resolução de Problemas nas ações do LEMIn

No início de cada ano acadêmico nos reunimos para o planejamento semestral das atividades a serem desenvolvidas. Algumas dessas atividades são realizadas em parceria com outros Programas enquanto outras ocorrem de forma autônoma, na qual os acadêmicos buscam desenvolvê-las a fim de aperfeiçoar sua prática docente, bem como desenvolver-se enquanto pesquisador.

Nos amparamos em Imbernón (2011) que ressalta a importância das práticas reflexivas para a formação inicial dos professores explicitando que:

Os futuros professores e professoras também devem estar preparados para entender as transformações que vão surgindo nos diferentes campos e para ser receptivos e abertos a concepções pluralistas, capazes de adequar suas atuações às necessidades dos alunos e alunas em cada época e contexto. Para isso é necessário aplicar uma nova metodologia e, ao mesmo tempo, realizar uma pesquisa constante (o professor é capaz de gerar conhecimento pedagógico em sua prática) que faça mais do que lhes proporcionar um amontoado de conhecimentos formais e formas culturais preestabelecidas, estáticas e fixas, inculcando-lhes uma atitude de investigação que considere tanto a perspectiva teórica como prática, a observação, o debate, a reflexão, o contraste de pontos de vista, a análise de realidade social, a aprendizagem alternativa por estudo de casos, simulações e dramatizações. (Imbernón, 2011, p.64)

Nesse contexto, evidenciamos as pluralidades de ideias advindas de propostas feitas pelos próprios acadêmicos, nas quais citamos a manipulação de materiais concretos, ludicidade, jogos de raciocínio lógico etc.

Assim, durante a reunião de planejamento, uma das metas estabelecidas foi a participação em um evento científico a fim de divulgar as ações realizadas no âmbito do LEMIn. Com isso, os acadêmicos começaram a refletir sobre as ações que seriam divulgadas e nesse caminhar, alguns aproveitaram para realizar novas ações, das quais selecionamos duas, das oito desenvolvidas, que tiveram o foco para a Resolução de Problemas, porém, com perspectivas, metodologias, resultados e percepções diferentes.

Consideramos que a Resolução de Problemas como um importante aliado na formação do Professor reflexivo pois a concebemos como uma metodologia inovadora, que atua na compreensão dos conhecimentos matemáticos, permitindo a interpretação correta de situações-problemas e o desenvolvimento do raciocínio lógico, das competências e habilidades matemáticas (ONUICH, 1999; SMOLE; DINIZ, 2001; POLYA, 2006; DANTE, 2009).

Oficina pedagógica sobre Resolução de Problemas algébricos e/ou geométricos: uma experiência pedagógica com alunos do Ensino Médio

A experiência será narrada de forma pessoal, haja vista que a autora do trabalho é também a Coordenadora do LEMIn e foi quem orientou a realização da atividade. Lembro-me que o acadêmico já estava decidido em não querer realizar uma atividade que envolvesse ludicidade, sua preocupação era a contextualização dos conteúdos matemáticos. Participante do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (Pibid), o acadêmico contou que por vezes observara tal dificuldade por parte dos estudantes do Ensino Médio.

E assim decidiu, ao delimitar o conteúdo, por trabalhar problemas voltados para Álgebra e Geometria. Sua fascinação por Matemática o levou a escolher problemas que gostava envolvendo aspectos teóricos ou matemática aplicada. E essa foi sua maior dificuldade: selecionar problemas envolvendo o cotidiano dos alunos e acessíveis para o nível de ensino. Recordo-me que em seus questionamentos, o mesmo afirmava que os problemas eram interessantes pois ele gostava de resolvê-los e por isso considerava que os alunos também iriam gostar. Então, em nossos diálogos buscava explicar a necessidade de olharmos para nossos alunos e não apenas para o que gostamos,

pois, os estudantes tinham dificuldades em compreender conteúdos que nós já conhecíamos.

A partir desse diálogo o discente buscou outros problemas, foi quando o questionei sobre os problemas da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) e o acadêmico respondeu-se não conhecer e se mostrou interessado em buscar problemas no banco de dados desta Olimpíada. Assim o mesmo iniciou sua pesquisa e não apenas selecionou, como também adaptou problemas que considerou relevante e interessante para os alunos.

De posse de dez problemas, com muito entusiasmo, o acadêmico juntamente com um amigo, também membro do LEMIn, deram início a atividade que foi estruturada em uma Oficina Pedagógica para alunos da 1ª série do Ensino Médio. Após a oficina voltamos a conversar para a escrita dos resultados. Ao perguntar como foi, notei que o mesmo não estava tão alegre de quando estava planejando as atividades, e foi quando este me respondeu que não foi como o esperado.

A princípio os alunos não demonstraram interesse em participar da atividade, mas aos poucos começaram a interagir. No entanto não era esse o esperado, o acadêmico tinha a expectativa de os estudantes participarem com mais interesse desde o início da atividade. Um dos aspectos considerados para o desinteresse dos alunos, fora o fato de os mesmos estarem habituados com problemas corriqueiros de livros didáticos, geralmente apresentados ao final dos capítulos e pouco desafiavam, intrigam ou motivam os alunos a solucioná-los (DANTE, 2009). Pois, uma vez que a dinâmica começou e os alunos conheceram os problemas, começaram a interagir.

Assim conversamos bastante sobre cada ponto do que tinha ocorrido, e nesse diálogo o mesmo reconheceu que no planejamento das atividades devemos conhecer os alunos e as suas dificuldades, também percebeu que mais atividades como estas precisam ser realizadas, pois mesmo observando que os alunos apresentaram uma certa melhora na compreensão dos problemas, ainda estavam habituados com a resolução de problemas-padrão e não de situações-problemas.

O diálogo com o acadêmico evidenciou relevantes aspectos de sua reflexão acerca de sua ação docente com os estudantes, corroborando para uma postura crítica diante de sua prática docente. E em suas considerações, o acadêmico deixou claro que percebe que são muitos os desafios enfrentados pelo Professor em sua prática, mas apesar das dificuldades encontradas em sala de aula, compreende que a Resolução de Problemas, enquanto metodologia, é um caminho viável para se trabalhar em sala de aula podendo contribuir em aspectos como o raciocínio lógico-matemático, a interpretação dos problemas e consequentemente no entendimento e visualização dos conteúdos matemáticos em seu cotidiano.

Clube de Leitura: uma experiência literária na Educação Matemática

As ações do LEMIn, quando voltadas para a Formação de Professores, se desenvolvem de várias formas, além das atividades desenvolvidas pelos acadêmicos, também promovemos um evento intitulado Ciclo de Formações que neste ano realizou sua segunda edição. Tal narrativa se faz necessário para contextualizar o nascimento do Clube de Leitura.

Na primeira edição do Ciclo de Formações, realizamos o minicurso “O Teatro e a Educação Matemática: um espetáculo em cena”, como uma das propostas do evento, visamos apresentar maneiras diferenciadas de se ver e fazer Matemática. Visando a continuação deste minicurso, realizamos na segunda edição do evento uma formação intitulada “Entre o teatro e a Educação Matemática: o espetáculo está em cena” na qual contamos com esquetes construídas por três membros do LEMIn que participaram do minicurso e como resultado, criaram uma narrativa envolvendo conceitos matemáticos em um ambiente amazônico, na qual chamaram de “Matemazônia”.

A partir dessa narrativa, construída e encenada por acadêmicos membros do LEMIn, surgiu o Clube de Leitura: Os livreiros de Matemazônia, na qual dois acadêmicos trabalharam a leitura interpretativa de textos matemáticos criativos a fim de minimizar a dificuldade dos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental em ler e interpretar problemas matemáticos. Para tanto, fora realizada uma roda de leitura (Figura 1) sobre o roteiro de Matemazônia de modo a proporcionar aos estudantes, após a leitura de cada parágrafo, elucidar dúvidas e expor compreensões acerca dos termos matemáticos presente no texto.



Figura 1. Momento da roda de leitura sobre o texto Matemazônia.

Os aspectos positivos acerca dos resultados desta atividade ressaltaram o interesse e interação dos alunos durante toda a atividade, na qual a acadêmica evidenciou a relevância da comunicação entre o professor e o aluno de modo a permitir a manifestação de suas ideias, e seus questionamentos. Além disso, os estudantes tiveram um momento de criação, dando continuidade na narrativa Matemazônia em que puderam criar personagens e modificar a própria estória. Dentre os contrapontos, a acadêmica salientou o tempo na qual considerou curto, argumentando que em atividades como estas, os alunos precisam de mais tempo para criar.

Considerações finais

Diante do relato socializado, percebemos que o LEMIn se constitui em um espaço que possibilita a realização de práticas reflexivas que visam não apenas a formação inicial dos Professores de Matemática, como também proporciona aos estudantes do Ensino Básico vivenciar atividades diferenciadas que visam contribuir para seu aprendizado, não apenas voltado para os saberes

escolares, como também interligá-los ao cotidiano.

Ao refletir sobre as atividades apresentadas neste trabalho, percebemos que a Resolução de Problemas não foi o único ponto convergente nas atividades, visto que, ambas foram idealizadas visando minimizar dificuldades de estudantes do Ensino Básico e proporcionaram aos acadêmicos, uma reflexão acerca do que fora desenvolvido, influenciando sua carreira docente.

Cabe ressaltar que esse aspecto se torna relevante para a formação desses profissionais na medida em que elimina a dicotomia entre o que é aprendido no curso superior e a realidade encontrada nas escolas, formando, cada vez mais, profissionais preparados para enfrentar os desafios presentes em sua prática docente, haja vista a postura autônoma e reflexiva adotadas desde a idealização até a reflexão dos resultados.

Referencias

- Colares, M. L. I. S., Gonçalves, T. O., Colares, A. A. & Leão, J. P. P. (2011). O professor-pesquisador-reflexivo: debate acerca da formação de sua prática. *Olhar de professor*, 14, 151-165.
- D'Ambrosio, U. (1999). *Educação Matemática: da teoria à prática*. 13a ed. Campinas, SP: Papirus.
- Dante, L. R. (2009). *Formulação e resolução de problemas de matemática: teoria e prática*. São Paulo: Ática.
- Fiorentini, D. (2019). Pesquisar práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente? In M. C. Borba & J. L. Araújo, J. L. (Orgs.) *Pesquisa qualitativa em educação matemática*. (6a. ed., Cap. 2, pp. 47-76). Belo Horizonte: Autêntica.
- Imbernón, F. (2011). *Formação docente e profissional: formar-se para a mudança e a incerteza*. (S. C. Leite, Trad.). 9a ed. São Paulo: Cortez.
- Oliveira, K. R., Pinto, F. M., Santos, J. C. & Marinho, K. K. O. (2018). O cubo mágico de Rubik no Ensino de Matemática por meio da Extensão Universitária. *Anais do Encontro Internacional de Ensino e Pesquisa em Ciências na Amazônia*, Tabatinga, Amazonas, Brasil, 8.
- Onuchic, L.R. Ensino-Aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In M. A. V. Bicudo (Org). *Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectiva*. (Cap. 12, pp. 199-220). São Paulo: UNESP.
- Polya, G. (2006) *A arte de resolver problemas*. (H. L. Araújo, Trad.). Rio de Janeiro: Interciência.
- Smole, K. & Diniz, M. I. (Orgs.). (2001) *Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática*. Porto Alegre: Artmed.

SERIE Didáctica de las Matemáticas
Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas (IREM-PUCP)

ACTAS DEL X CIEM inaugura la serie Didáctica de las Matemáticas del Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas IREM-PUCP, creada con el objetivo de difundir los resultados de las investigaciones actuales, reflexionar sobre su influencia en el diseño de los programas de estudio de las matemáticas y sus efectos actuales y futuros sobre su enseñanza y aprendizaje en los diferentes niveles educativos.

El IREM-PUCP es una comunidad de investigadores en Didáctica de las Matemáticas, estrechamente vinculados con la comunidad matemática, cuya finalidad académica es la realización de investigación al más alto nivel pero que comprende los resultados de sus investigaciones persiguen un fin aún más alto: mejorar la enseñanza de las Matemáticas en el Perú en todos los niveles de formación.

Francisco Ugarte Guerra
Director del IREM PUCP 2017-2020

