

Universidade do Grande Rio “Prof. José de Souza Herdy” UNIGRANRIO

Willian da Silva Leal

**ANÁLISE NÃO-STANDARD: INFINITOS E INFINITÉSIMOS, A
FILOSOFIA, EPISTEMOLOGIA E A MATEMÁTICA NO CÁLCULO
DIFERENCIAL E INTEGRAL**

Rio de Janeiro - RJ

2022

WILLIAN DA SILVA LEAL

**ANÁLISE NÃO-STANDARD: INFINITOS E INFINITÉSIMOS, A
FILOSOFIA, EPISTEMOLOGIA E A MATEMÁTICA NO CÁLCULO
DIFERENCIAL E INTEGRAL**

Tese apresentada à Universidade do Grande Rio
“Prof. José de Souza Herdy”, como parte dos
requisitos parciais para obtenção do grau de doutor
em Humanidades, Culturas e Artes.

Área de concentração:
Letras, Ciências Humanas e Sociais: Corpo Urbano,
Legado Histórico, Legitimidades e Direitos.

Orientadora: Profa. Dra. Ana Carolina Motta
Coorientadora: Prof. Dra. Rosane Cristina de
Oliveira

Rio de Janeiro - RJ

2022

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UNIGRANRIO – NÚCLEO DE COORDENAÇÃO DE BIBLIOTECAS

L435a

Leal, Willian da Silva.

Análise não-standard: infinitos e infinitésimos, a filosofia, epistemologia e a matemática no cálculo diferencial e integral / Willian da Silva Leal. – Duque de Caxias, RJ: UNIGRANRIO, 2022.
212 f.

Tese (Doutorado em Humanidades, Culturas e Artes). - UNIGRANRIO. Escola de Educação, Ciências, Letras, Artes e Humanidades. Rio de Janeiro, 2022.

Orientadora: Ana Carolina Motta.

Coorientadora: Rosane Cristina de Oliveira.

1. Cálculo. 2. Não-standard. 3. Infinitesimais. 4. Filosofia. 5. Epistemologia. I. Motta, Ana Carolina. II. Oliveira, Rosane Cristina de. III. Título. IV. Unigranrio.

CDD – 511

WILLIAN DA SILVA LEAL

**ANÁLISE NÃO-STANDARD: INFINITOS E INFINITÉSIMOS, A FILOSOFIA, EPISTEMOLOGIA
E A MATEMÁTICA NO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL**

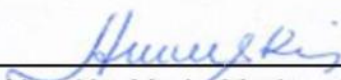
Tese apresentada à Universidade do Grande Rio “Prof. José de Souza Herdy”, como parte dos requisitos parciais para a obtenção do título de Doutora em Humanidades, Culturas e Artes.

Exemplar apresentado para avaliação da banca examinadora em 16 / 12 / 2022

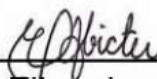
BANCA EXAMINADORA



Profa. Dra. Ana Carolina de Gouvêa Dantas Motta
Programa de Pós-Graduação em Humanidades, Culturas e Artes da
UNIGRANRIO



Profa. Dra. Haydêa Maria Marino de Sant'Anna Reis
Programa de Pós-Graduação em Humanidades, Culturas e Artes da
UNIGRANRIO



Profa. Dra. Eline das Flores Viter
UNIGRANRIO



Profa. Dra. Ana Carolina Carius
UCP



Prof. Dr. Thiago Leite Cabrera Pereira da Rosa
PUC-RIO

Dedico esta tese de Doutorado aos meus pais, Marli Inácio da Silva e José Aguiar Leal, que me presentaram com uma educação familiar exemplar, e sempre me incentivaram a seguir nos estudos, mesmo quando em diversos momentos parecia não ser possível dar seguimento. O senhor Aguiar disse no nascimento desse filho que aqui escreve que ele seria doutor (Engenheiro), e certo em tudo como sempre foi, a sua profecia se fez verdadeira, e agora tem um filho Doutor e com Doutorado, ainda que após o seu falecimento.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que de algum modo me fizeram crescer como cidadão, como homem e como uma pessoa ávida por conhecimento.

Agradeço aos meus pais Marli Inácio da Silva e José Aguir Leal (in memoriam) por me darem a vida, cuidarem de mim, investiram na minha educação e me incentivaram a crescer por meio do esforço em minha formação, me permitindo chegar a esse dia tão esperado.

Agradeço à minha irmã Lilian Silva Leal, que sempre foi uma grande amiga e que sempre acreditou que eu poderia chegar a tantas realizações profissionais e acadêmicas.

Aos professores do curso de Doutorado da UNIGRANRIO, por terem concorrido para a minha formação.

À UNIGRANRIO, na pessoa do Prof. Arody Herdy por ter me possibilitado realizar este sonho.

Aos professores que participaram do exame de qualificação, Prof.^a Dra. Ana Carolina Motta, Prof.^a Dra. Rosane Cristina de Oliveira, Prof.^a Dra. Haydéa Maria Marino de Sant'Anna Reis, Prof.^a Dra. Eline das Flores Victor, Prof.^a Dra. Ana Carolina Carius e Prof. Dr. Thiago Leite Cabrera da Rosa, pelas contribuições e orientações relevantes para a organização final da tese.

“Há dois labirintos do espírito humano: um respeita à composição do contínuo, o outro à natureza da liberdade; e ambos têm origem no mesmo infinito.”.

(Wilhelm Leibniz, 1646-1716)

RESUMO

A humanidade desde os tempos em que começou a cultivar plantas e criar animais tem a necessidade de desenvolver Matemática, criando calendários para prever a melhor época de plantio, o tempo para o nascimento de determinado animal, ou mesmo se preparar para as épocas de cheias nos rios próximos. Contar é uma atividade natural do ser humano, mas fomos além disso com o passar do tempo. Iremos discutir a coexistência de modelos tradicionais e inovadores na Ciência e a dificuldade que a academia demonstra em substituir um conhecimento vigente por um emergente, ainda que com vantagens comprovadamente superiores. Iremos trazer alguns modelos padrão (standard) em áreas afins e analisar por meio da filosofia, epistemologia e pedagogia tais modelos. Medir velocidade instantânea de móveis, bem como calcular a área de círculos, para sabermos o volume do silo cilíndrico onde guardamos nossos grãos, se mostram dois problemas bastante difíceis, e assolaram os matemáticos por milênios, desde Arquimedes e outros mais antigos. A solução desses problemas, de maneira genérica e formal surge no século XVII, com Newton e Leibniz. Esses dois gênios conseguiram generalizar não só em resultados, mas em método, tais questões. Por esse motivo estes são chamados de os pais do Cálculo Diferencial e Integral. Mostraremos essa evolução até os conhecimentos estabelecidos atualmente. Newton e Leibniz puderam conceber a existência de coisas e números muito pequenos e muito grandes, sem fundamentar formalmente tais números. Cauchy e Weierstrass alçaram um degrau acima nesse tema, mas ainda deixam o questionamento: “quem são esses números menores que todos os números, ou maiores que todos os números, que número real é esse que é maior do que o seu dobro? $0,999... = 1$, como isso?” Falta um pouco. Esse estudo mostra que só cerca de 300 anos depois, já no século XX, Abraham Robinson foi capaz de responder à essa pergunta, e este trabalho apresenta tal resposta em termos técnicos e pedagógicos. A fim de solucionar tal questionamento, Robinson teve que usar o seu lado filosófico, lógico, matemático, epistemológico, professor, que reconhece o valor dos criadores do Cálculo e de seus predecessores. Acreditamos que se deve emergir um paradigma novo, a análise e o cálculo não-standard (não padrão). Números dessa categoria não são reais, são ficções úteis, nas palavras de Leibniz, e ficções não são objetos matemáticos. Esse estudo traz uma perspectiva da implementação dessa nova teoria, na matemática e outras áreas, por uma análise histórica, filosófica, metodológica e matemática, mostrando que filosoficamente, tecnicamente e pedagogicamente, só temos a ganhar em permitir a chegada de uma matemática não-standard, no nosso mundo e nos nossos bancos Universitários, já que é bem mais intuitiva e lógica. A análise documental desenvolvida neste trabalho apresentou uma experiência em campo da desenvolvida nos Estados Unidos da

América da década de 1970 com a utilização da análise não-standard na educação. Além disso, apresenta-se uma análise minuciosa dos livros utilizados pelas universidades públicas da região sudeste do Brasil. Notamos que nenhuma das instituições apresenta tais conhecimentos tão importantes aos seus discentes. Concluímos este trabalho discutindo o nível de dificuldade das demonstrações matemáticas, a partir de conceitos do cálculo diferencial e integral, por meio da análise não-standard de forma incrivelmente mais intuitiva.

Palavras-chave: Cálculo. Não-standard. Infinitesimais. Filosofia. Epistemologia.

ABSTRACT

By the time humans started to grow plants and raise animals, they have had the necessity to develop Mathematics by creating calendars which indicated the best time for planting, calculating the birth period of certain animal or even preparing for flood period of the nearby Rivers. Counting is a human natural activity; however, we have gone beyond that when time passed by. We will discuss about the coexistence of traditional and innovative patterns in the Science and the difficulty the academy presents in changing current knowledge for an emergent one, there are proven superior advantages, though. We will bring some standard models in related áreas and analyze them by using the philosophy, epistemology and pedagogy. Measuring instantaneous speed of a moving object, such as calculating the área of circles to find out the volume of cylindrical silo where we store our grains, they are two very challenging problems which intrigued the mathematicians for millennia, including Arquimedes and older ones. The solution for these problems emerged in a general and formal way in XVII century with Newton and Leibniz. These both genius got to generalize these questions not only in results, but also in methods. That's the reason they are known as the fathers of the Differential and Integral Calculus. We will show this evolution till currently established knowledge. Newton and Leibniz could prove the existence of very tiny and very large things and numbers without formally substantiate them. Cauchy and Weierstrass reached an upper level related to these theme, and they still have a question: which are these smaller or larger numbers than all others ones; or which is this real number that is bigger than its Double? $0,999... = 1$, what is that?" it's still missing a little. This study shows that only about 300 years later in XX century, Abraham Robinson was able to answer this question and this academic work presents this answer in technical and pedagogical terms. In order to solve this question, Robinson had to use his philosophical, logical, mathematical, epistemological, pedagogical ability which recognizes the value of the Calculus creators and their predecessors. We believe there must emerge a new paradigm, the non-standard analysis and calculus. Numbers from this category are not real, they are useful fictions, Leibniz Said, and fictions are not mathematical objects. This study brings a perspective of implementing this new theory in Math and in other areas through a historical, philosophical, methodological and mathematical analysis, in order to show that philosophical, technical and pedagogically we will all have to evolve with this non-standard coming mathematics in our world as in our Universities once it is much more intuitive and logical. The document analysis developed by this academic work presented a field experience in the United States of America in the 1970s when it was used the non-standard analysis for education. Moreover, it is presented a thorough analysis of the books used in the public universities of the Southeast region of Brazil. We could realize that none of the institutions detains such knowledges which

are so important for their students. We may conclude this academic work by discussing the difficulty level of mathematical demonstrations, from the concepts of differential and integral Calculus through the non-standard analysis in a incredible and more intuitive way.

Keywords: Calculus. Non-standard. Infinitesimals. Philosophy. Epistemology.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Reta tangente à uma curva por Fermat.....	86
Figura 2 - Reta tangente à curva por Barrow	87
Figura 3 - Quadratura do Círculo por Arquimedes	92
Figura 4 - Área sob uma curva Guidorizzi	95
Figura 5 - Área sob a curva por Newton	111
Figura 6 - Coeficiente angular da reta tangente a curva $y = x^2$	130
Figura 7 - Construção do conjunto dos números hiper-reais	159
Figura 8 - A linha dos números hiper-reais.....	165
Figura 9 - Números infinitesimais e infinitos na linha hiper-real.....	167
Figura 10 - Operações aritméticas entre elementos infinitesimais, finitos, infinitos e apreciáveis.....	168
Figura 11 - Integração por meio da análise não-standard	177
Figura 12 - Soma de Riemann	190
Figura 13 - Representação de dx no gráfico	192
Figura 14 - Partições de um intervalo $[a, b]$	193
Figura 15 - Soma de Riemann por análise não-standard	194
Figura 16 - Notas de habilidades dos participantes da pesquisa de campo de SULLIVAN	201

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 -	Autores de Bibliografias de Cálculo e Análise.....	198-199
------------	--	---------

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
1.1	OBJETIVOS GERAIS	21
1.1.1	OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	22
2	ALGUNS MODELOS STANDARD DO CONHECIMENTO	26
2.1	MODELOS STANDARDS E A FILOSOFIA	32
2.2	MODELOS STANDARDS E A GEOMETRIA	33
2.3	MODELOS STANDARDS E AS CIÊNCIAS NATURAIS	34
3	UMA ANÁLISE FILOSÓFICO-EPISTEMOLÓGICA DO CÁLCULO INFINITESIMAL AO LONGO DA HISTÓRIA	35
3.1	REVOLUÇÃO CIENTÍFICA A PARTIR DE NEWTON	42
3.2	A EPISTEMOLOGIA DA CIÊNCIA PÓS IDADE MÉDIA(CIÊNCIA MODERNA)	46
3.3	ISAAC NEWTON E A SUA FILOSOFIA.....	49
3.4	LEIBNIZ E A SUA FILOSOFIA	56
4.	EVOLUÇÃO DOS CONCEITOS MATEMÁTICOS DO CÁLCULO INFINITESIMAL ...	66
4.1	O PROBLEMA DA RETA TANGENTE	85
4.2	O PROBLEMA DA QUADRATURA DO CÍRCULO	88
4.3	ALGUMAS CONTRIBUIÇÕES ANTES E DEPOIS DA CRIAÇÃO CÁLCULO NO SÉCULO XVII.....	95
4.4	A MATEMÁTICA DE NEWTON NO CÁLCULO INFINITESIMAL	104
4.5	A MATEMÁTICA DE LEIBNIZ NO CÁLCULO INFINITESIMAL	113
5.	A FILOSOFIA E A VERDADE NA CIÊNCIA	126
5.1	THOMAS KUHN	129
5.2	FRANCIS BACON	132
5.3	KARL POPPER.....	134
5.4	BOAVENTURA DE SOUSA SANTOS	136
6.	ANÁLISE NÃO-STANDARD DE ABRAHAM ROBINSON.....	141
6.1	A TRAJETÓRIA DE ROBINSON ATÉ A ANÁLISE NÃO-STANDARD	148
6.2	A FILOSOFIA DO TRABALHO DE ROBINSON	149
6.3	A MATEMÁTICA DO TRABALHO DE ROBINSON	151
6.3.1	NOÇÕES INICIAIS DA EXTENSÃO DOS REAIS (OS HIPER-REAIS).....	161
6.3.2	ALGUNS TEOREMAS E DEFINIÇÕES SOBRE FUNÇÕES E DEFINIÇÕES DE FUNÇÕES E SEQUÊNCIAS COMO FORMA NÃO-STANDARD	181
6.3.3	A DIFERENCIAÇÃO COMO FORMA NÃO-STANDARD.....	186
6.3.4	A INTEGRAÇÃO COMO FORMA NÃO-STANDARD.....	188
7.	O CÁLCULO NOS LIVROS DIDÁTICOS NOS ENSINOS MÉDIO E SUPERIOR ...	197
8	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	205
9	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	208

1 INTRODUÇÃO

A criação da matemática e suas técnicas, sempre foi estimulada pela ação cotidiana do homem, assim como a escrita foi criada, provavelmente, na Mesopotâmia, em função de necessidades da vida em uma organização de sociedade. Os sumérios, em cerca de 4 000 anos antes de Cristo, criaram as primeiras formas de escrita, onde principalmente era usada para anotar quantidades de animais em suas criações e os insumos necessários. Já os egípcios são vistos como os criadores da matemática, por meio da Geometria, e também por uma questão importante da convivência em sociedade, como vemos em Bueno (2021):

A Geometria, por outro lado, tem sua origem no Egito, onde os impostos governamentais eram cobrados de acordo com a área das terras cultivadas pelos agricultores. Nesse contexto, se uma cheia do rio Nilo alcançasse parte da terra de um agricultor, ele solicitava que os valores a serem pagos fossem reduzidos, proporcionalmente à parte alagada do terreno. Para que essas questões fossem resolvidas, técnicas geométricas elementares eram necessárias. Foi dessa necessidade do cálculo preciso de áreas de terras que surgiu o termo Geometria (geo + metria).(BUENO, 2021, p. 01)

Percebe-se nos últimos séculos a criação de uma dicotomia entre a Filosofia e a Matemática, ou mesmo entre as Ciências Humanas, Naturais e Exatas, e entendemos que essa separação, sobretudo, na forma de pensar nos fez cada vez mais especialistas, mas tanto na virtude quanto na desvirtude, afinal cada vez mais sabemos sobre um determinado tema, mas cada vez o relacionamos com outros.

A interdisciplinaridade é muito defendida como forma pedagógica de ensino a qual relaciona diversas áreas do conhecimento em um mesmo problema. Concordamos que é uma ferramenta potente na área educacional, mas pensamos que a interdisciplinaridade transcende questões meramente prático-pedagógicas: ao relacionar o raciocínio de um filósofo (seus questionamentos e argumentações) ao pensamento de um historiador (e o seu entendimento temporal e análise crítica dos acontecimentos do passado) e ao raciocínio de um matemático (suas resoluções e demonstrações) poderia, e por séculos foi visto isso, uma forma riquíssima de se fazer ciência. Sem esse rico entrelaçamento entre as diferentes áreas, não seria possível o desenvolvimento do conhecimento; sem os avanços na epistemologia das ciências, tais fatos não ocorreriam com fluidez e confiabilidade observados, por exemplo, na união dessas ditas, diferentes formas de conhecimento humano.

O pedagogo, por exemplo, consegue pensar em técnicas de ensino que podem, com uma vasta fundamentação teórica, perceber o que é melhor para o aprendizado, e de que forma o discente pode aproveitar mais de um estudo, e por muitas vezes foi e é capaz, ao longo da história, de eleger autores, escolas, metodologias, em que a troca de informações encontra um ambiente suscetível ao ensino.

Quando não conhecemos o nosso passado não sabemos atuar no presente e vislumbrar o futuro. A História do mundo, das ciências, das artes, do pensamento humano, é vital para que possamos sempre ir na direção de melhor desenvolvimento em todas essas áreas da atuação humana, e entender sobre a História das Ciências, e dos personagens que nos trouxeram aos dias de hoje, e todos os conhecimentos que temos disponíveis na atualidade são vitais no processo de crescimento.

Acreditamos, portanto, que esse estudo tem sua base pautada na interdisciplinaridade, ou até mesmo na transdisciplinaridade, já que os temas não se põem paralelamente e sim se mostram fundidos e transpassados uns pelos outros. Como veremos no decorrer do texto, fatores históricos, filosóficos e científicos permitiram ao homem um avanço monumental até os dias atuais. Em nossa percepção, tais avanços foram possíveis graças a interdisciplinaridade presente na história das ciências (POMBO, 2010).

Algo que é dado na sua forma mínima, naquilo que seria a pluri (ou multi) disciplinaridade, que supõe o pôr em conjunto, o estabelecer algum tipo de coordenação, numa perspectiva de mero paralelismo de pontos de vista. Algo que, quando se ultrapassa essa dimensão do paralelismo, do pôr em conjunto de forma coordenada, e se avança no sentido de uma combinação, de uma convergência, de uma complementaridade, nos coloca no terreno intermédio da interdisciplinaridade. Finalmente, algo que, quando se aproximasse de um ponto de fusão, de unificação, quando fizesse desaparecer a convergência, nos permitiria passar a uma perspectiva holista e, nessa altura, nos permitiria falar enfim de transdisciplinaridade. (POMBO, 2010, p.13).

O *Princípios* faz uma integração de diferentes disciplinas, com uma abordagem histórico-filosófica do conhecimento. Newton desenvolve um trabalho interdisciplinar onde seus estudos de física e matemática veem apoiados por uma questão filosófica e epistemológica inovadora e, portanto, é considerada uma das obras mais importantes sobre a interdisciplinaridade entre a filosofia, a lógica e a matemática, assemelhando-se à influência de *Organon* (1985) de Aristóteles (384a.C–322a.C), embora sejam vistos como disciplinares por muitos:

enquanto na época de Aristóteles ou na de Galileu os pesquisadores de diferentes áreas [ainda] se procuravam mutuamente para compartilhar seus conhecimentos, verifica-se hoje uma tendência geral que vai no sentido contrário, fazendo com que os pesquisadores se entrincheiram nas suas especialidades, ou subespecialidades, compartilhando seus conhecimentos apenas no interior de um círculo próximo e restrito. (LEIS, 2011, p. 113)

Se um dia os filósofos deixassem de questionar o homem e o mundo, ficaríamos estagnados no ponto incrível que conseguimos chegar; se os matemáticos não demonstrarem mais os seus resultados, o avanço tecnológico atual estaria findado.

Se o ser humano não tivesse a curiosidade que lhe é inerente, a sabedoria que desenvolvera, a vontade de completar lacunas físicas, epistemológicas, lógicas, divinas,

filosóficas, nós ainda estaríamos na idade da pedra. Acreditamos que todas essas atividades humanas, bem como todas as outras, nos trouxeram a esse século e construímos o homem que se apresenta na atualidade. Enquanto o *homo sapiens* surgiu, acredita-se há apenas 300 mil anos, e o homem tal como o conhecemos hoje, denominado de *homo sapiens sapiens*, existe uma notória evolução na construção do conhecimento: o homem atual é capaz de voar, de realizar viagens espaciais, de desvendar o fundo do mar, falar com pessoas do outro lado do mundo através de conexões sem fio. O homem atual pode curar doenças vindas de coisas “invisíveis”, criar seres vivos, e até quem sabe, ser possível viajar no tempo e presenciar tanto o futuro quanto o passado.

Por sermos o *homo sapiens sapiens*, somos uma categoria moderna de seres humanos, somos os “homens que sabem o que sabem”: temos a capacidade de raciocínio e fala, portanto, somos dotados de inteligência. No entanto essa “vantagem” nos traz também a seguinte obrigatoriedade: usar essa inteligência para descobrir e criar cada vez mais conhecimentos. Concordamos que esse diferencial deve estar presente em todos os segmentos de atuação humana.

Coisas sem solução, com lacunas, sem definição, sem fundamentação prática ou teórica, incompletas, o desconhecido, nos incomodam, e por isso somos tão evoluídos, ou talvez a nossa evolução seja a causa disso. Mas a questão posta é que o ser humano precisa do estado de dúvida, de crítica, de falseabilidade para o seu crescimento, utilizando um modelo padrão (standard) estabelecido, mas sempre procurando por melhores respostas, formalizações, e rigor, e pronto para receber um novo modelo (não-standard), que nos traga melhores resultados, ou melhores intuições, melhores teorias.

Por séculos os pensadores se depararam com um problema em trabalhar com números muito pequenos e tais números se mostraram necessários para a solução de problemas na Geometria e na Física. Nesses casos a solução sempre se deu de forma pontual, onde se resolviam por aproximações cada problema que lhes era apresentado, e nunca de forma precisa e generalizada, ou com uma linguagem formal lógico-matemática.

No século XVII o homem já possuía uma prática em que prevalecia a razão à outras formas de se fazer conhecimento. Tal fato e as várias tentativas de resolução do problema dos números infinitamente pequenos permitiram que dois gênios, Newton e Leibniz, pudessem dar a base formal, quase que ao mesmo tempo, que se esperava há tanto tempo para o problema proposto. Nesse sentido ambos são conhecidos como os pais do Cálculo Diferencial e Integral.

Esses números apareciam em diversos problemas, mas em dois deles de forma constante: o de se calcular área de figuras planas não poligonais e o problema da reta tangente à curva, que permitiria medir a taxa de variação de uma curva em um ponto e consequentemente, a velocidade instantânea de um móvel em um determinado ponto. Tais

problemas se mostraram difíceis à época, porque ambos pairavam sob o mesmo dilema dos números infinitamente pequenos.

Newton e Leibniz foram capazes de superar esse problema. No entanto eles o evitaram, já que nunca os definiram formalmente. Newton, em uma abordagem mais pessimista, ignorou a existência de tais números, enquanto Leibniz os considerava, embora não fosse capaz de formular uma teoria rigorosa sobre eles. Após o conhecimento de tal matemática, muitas críticas foram feitas, como encontramos em Mancosu (1989):

No início do século XVIII, o cálculo diferencial estava dentro da Academia de Ciências expostas a fortes críticas em Paris. Um grupo de matemáticos criticou o novo método de cálculo tanto por sua suposta falta de precisão quanto pelos resultados que produziu. Um debate acalorado se arrastou por cerca de seis anos até que os defensores do cálculo diferencial ganharam vantagem. (MANCOSU, 1989, p. 224).

O lado filósofo de ambos permitiu que pensassem a existência de coisas e números muito pequenos e muito grandes, enquanto o lado matemático permitiu “calcular” tais grandezas. A Geometria do mundo natural e a Álgebra do mundo idealizado se juntam em harmonia. A Física agora se faz em uma espécie de Metafísica do mundo natural.

Já resolvíamos tais problemas de forma bastante acurada, mas esses dois sábios conseguiram generalizar não só em resultados, mas em método. Tal feito foi possível a partir da articulação entre a filosofia e a matemática. O lado filosófico de ambos permitiu que pensassem a existência de coisas e números muito pequenos e muito grandes, enquanto os seus lados matemáticos “calcular” coisas com eles, e a Geometria do mundo natural e Álgebra do mundo idealizado se juntam em harmonia. Mas quem são esses números menores que todos os números, ou maiores que todos os números?

Ignorar que uma ciência possui falhas, ou falta de rigor significa fechar os olhos para uma inconsistência científica, e o fato de os resultados serem satisfatórios por um tempo, no máximo elege uma teoria à categoria de modelo standard, modelo padrão, mas somos forçados a procurar preencher tais lacunas epistemológicas ou mesmo matemáticas.

Com base nessa perspectiva, que trazemos a discussão sobre um tema que perpassa diversas áreas do conhecimento, os chamados modelos não-standard. Iremos comparar, por meio de algumas abordagens, o modelo standard com o modelo não-standard, analisando vantagens e desvantagens nas concepções de “mundo” em cada caso, remodelando a noção de “tempo”, o que trará um novo olhar por meio da filosofia, da história, da cultura, da epistemologia, da matemática, das ciências da natureza, e em várias outras áreas da atuação humana.

Na área de matemática, a abordagem não-standard é amplamente discutida pelos lógicos e possui grande destaque no ramo da filosofia da matemática. A referência mais comum ao termo se dá à chamada Análise não-standard, desenvolvida por Abraham Robinson, na década de 1960. Robinson concebe suas ideias a partir do tratamento dado

por Leibniz, Cauchy e Weierstrass, aos números infinitesimais, assunto que sempre gerou crises na História da Matemática. Esta crise ainda persistia na Matemática Contemporânea, embora ambos os criadores do Cálculo, Isaac Newton e Gottfried Leibniz, sem a formalização técnica esperada pelos matemáticos posteriores, foram capazes de generalizações nunca vistas antes.

Nesse estudo, iremos contrapor as ideias de Isaac Newton e Gottfried Leibniz, seja no sentido matemático ou filosófico, sobre os números muito pequenos (infinitamente pequenos) e muito grandes (infinitamente grandes), sobre os limites e os infinitesimais, respectivamente, e o desdobramento no Cálculo, na Lógica, e na Análise nos séculos que se seguiram, de tentativas de se formalizar finalmente, tais números “estranhos”.

Esse estudo mostra que só cerca de 300 anos depois de Newton e Leibniz, um ser humano chamado Abraham Robinson foi capaz de responder à essa pergunta, mas para isso teve que usar o seu lado filósofo, o seu lado lógico, o seu lado matemático, o seu lado epistemólogo, propondo uma nova teoria relacionada aos números infinitesimais e infinitos.

Reconhecemos o valor dos feitos de todos os cientistas anteriores que contribuíram na construção do Cálculo Infinitesimal. No entanto entendemos que está na hora de mudar, não só as contas e resultados ou até mesmo o método, mas a base teórica como um todo, na qual a ciência está alicerçada. É necessária uma mudança paradigmática estabelecida na análise e cálculo standard (padrão) e é hora de emergir um paradigma novo, a análise e o cálculo não-standard (não padrão) alinhando tais conceitos com os publicados por Robinson em 1961.

É necessário conceber a existência de números não reais, visto que tais números mostram uma ideia e um comportamento que não pode, nesse contexto, representar a realidade. Tais números não parecem ser capazes de modelar a magnitude de observações sobre fenômenos da natureza, que o cálculo se presta a fazer em muitas situações, solução encontrada pela primeira vez por Robinson.

Robinson propõe uma nova categoria de números, chamada de números hiper-reais, já que um número real infinitesimal, demonstra um comportamento nada intuitivo, e aparentemente externo ao conjunto construído na Teoria dos Conjuntos clássica, o que aparentemente burla a propriedade importante que possuem os números reais, denominada Ordenação Numérica.

Um número real infinitesimal positivo, $\delta > 0$, $\delta \in \mathbb{R}$, é um número real δ menor que todo número real positivo, para que possa no Cálculo, servir como a maior aproximação possível entre dois objetos matemáticos, mas sendo assim temos que $\delta < \frac{\delta}{2}$, já que δ é o menor dos números, portanto, multiplicando ambos os membros da inequação por $2 > 0$

temos que, $2\delta < \delta$, mas se dividirmos a inequação por $\delta \neq 0$, temos que $2 < 1$, o que é um absurdo, e isso é a base do Cálculo Diferencial e Integral e da Análise Real. Portanto o modelo standard, aceito pela academia até a atualidade, teria uma inconsistência, que é resolvida, de acordo com Robinson, pela formulação de uma classe de números denominada hiper-reais.

O Cálculo standard defende que $0,999\dots$ é igual a 1, pois a diferença entre eles é um número infinitamente pequeno, e que pode ser desprezado, já que não “atrapalha” as contas. Mas eu sinto que falta um pouquinho para que $0,999\dots$ seja igual a 1, então o que faço, ignoro a minha razão? Ou será que existe uma categoria para esse pouquinho que falta, já que ele pode não ser real, mas também não é irreal, pois ele está na minha racionalidade, então talvez ele deva se chamar hiper-real, tal como Robinson idealizou.

Portanto a pergunta de pesquisa que esse trabalho pretende responder é a seguinte: a partir da constatação da existência dos números hiper-reais, é possível construir um curso de cálculo diferencial e integral a partir desse novo paradigma nas universidades brasileiras?

1.1 OBJETIVOS

O objetivo geral deste estudo é discutir, por meio de comparações históricas, filosóficas, epistemológicas e principalmente matemáticas, os diversos escritos sobre o Cálculo Diferencial e Integral, ou o Cálculo Infinitesimal como alguns se referem, mostrando assim as fraquezas que a teoria vigente possui, sobretudo na questão lógica e epistemológica. Tal evidência se dá em função da sua construção sobre um alicerce lógico ou epistêmico frágil, e porque não dizer matemático, já que embora com resultados satisfatórios, lhe falta a formalidade e o rigor que se espera de uma ciência normal dominante. À luz do que descreve Thomas Kuhn, como a ciência e os paradigmas que a comunidade científica entende como fundamentada e segura acerca dos paradigmas científicos dominantes, e levar assim o leitor a refletir sobre uma mudança radical no Cálculo e na Análise, ou mesmo em outras áreas diversas, e a implantação de um novo modelo denominado Análise não-standard, que nos trouxe Abraham Robinson em 1961 d.C.

O estudo faz um panorama histórico na disciplina Cálculo a cerca de 1650 a.C, o qual se tem registro até os dias atuais, passando por diversos cientistas que contribuíram de algum modo para o desenvolvimento do mesmo, e assim veremos como o conhecimento humano se desenvolveu ao longo do tempo, e que erros e acertos sempre de alguma forma contribuem para a construção sólida de uma teoria, mesmo na dita mais exata das ciências exatas, a matemática.

Não temos a intenção de que esse trabalho sirva como um manual de Análise não-standard, já que acreditamos que a primeira questão posta acerca da implementação dessa análise passa pela questão histórica já mencionada, mas também em relação a questão filosófica inserida na discussão sobre duas abordagens, números reais e hiper-reais, que levam a resultados semelhantes quanto aos fins. Mas será que os fins justificam os meios, e não devemos questionar a forma como os meios foram implantados?

Aos matemáticos, durante todo o trabalho, teorias, técnicas e teoremas são trazidos, afinal não se pode criticar uma teoria sem ter acesso ao que ela traz, ao mesmo tempo que discutimos os precursores, as mentes brilhantes que primeiro pensaram sobre esta incrível matemática, mostramos essas descobertas e suas bases científicas, e mostramos as vantagens da nova análise, tanto na formalização dos conceitos, quanto ao grau de complexidade da disciplina. Observa-se que esta não aumentou e na maioria dos casos tornou o entendimento intuitivo e cognitivo até mais simples. Ratifica-se essa afirmação apresentando algumas demonstrações matemáticas neste trabalho, a fim de exemplificar tal simplicidade.

1.1.1 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Nesse estudo mostraremos por diversos prismas que a substituição de uma teoria dominante por outra visivelmente melhor encontra obstáculos que apenas podem ser entendidos como uma questão de tradição, que os acadêmicos muitas vezes se apegam, e no que se refere à questão do ensino, ainda acontece mais frequentemente já que o novo parece ser sempre visto como inimigo do processo de aprendizagem continuada.

Os objetivos específicos deste trabalho se baseiam nas seguintes questões:

- Analisar as principais diferenças do ponto de vista matemático entre a análise standard e a análise não-standard;
- Avaliar as questões epistemológicas que conduzem as duas teorias postas em estudo;
- Relacionar as propostas filosóficas que fundamentam ambas as teorias;
- Avaliar a adoção, por parte das universidades públicas brasileiras, sob o recorte da região sudeste, da teoria em estudo em seus currículos atualmente em vigor.

Para o percurso metodológico deste trabalho, propomos uma pesquisa exploratória e descritiva, de modo a verificar o tratamento que a academia está dando à evolução do conhecimento na área do Cálculo Infinitesimal e da Análise Matemática. Para tanto estudamos artigos publicados sobre o tema análise não-standard de Abraham Robinson, por meio de uma pesquisa na plataforma *Google Acadêmico* e na Plataforma Capes (repositório de teses e dissertações). A busca foi feita por estudos que abordem a análise não-standard,

através de artigos científicos, publicações em periódicos e revistas especializadas. Procurou-se, também, dissertações e teses desenvolvidas nos Programas de Pós-graduação nas últimas décadas, com o intuito de entender sobre se o tema tem sido divulgado e com que abordagem seus autores discorrem, sob o recorte dos mesmos temas que nortearam as buscas nas outras plataformas.

Além das publicações científicas relevantes, realizou-se uma análise dos currículos de cursos de formação acadêmica e profissional de estudantes do ensino superior, em cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática da Região Sudeste do Brasil. Essa escolha se justifica, pois, a região possui um número maior de universidades renomadas, as quais servem de embasamento para os currículos de diversas outras universidades públicas e privadas do país.

A partir daí, faremos uma análise qualitativa, por meio de uma pesquisa documental e bibliográfica, onde o interesse maior funda-se numa análise da realidade do pensamento generalista do ser humano, relacionando cada prática, standard e não-standard, na área da matemática, da filosofia, da teoria das ciências, da história, da epistemologia, dentre outras, com requisitos como relevância no âmbito científico e intelectual, interferências filosóficas, e culturais, no que se refere às consequências sociais.

A abordagem quantitativa ocorre apenas no Capítulo 7, onde faremos um comparativo entre as bibliografias dos cursos de Cálculo Diferencial e Integral I e Análise Matemática (Análise Real), que dão a base para o estudo dos temas que envolvem o Cálculo Infinitesimal. Investigaremos a tese de que os referidos cursos baseiam-se nos estudos ultrapassados na análise standard e quantitativamente, e avaliaremos uma ampla pesquisa de campo feita em 1976 e descrita por Kathlenn Sullivan, na qual, os resultados obtidos pela autora mostram que a análise não-standard é mais indicada também no âmbito pedagógico, além de epistemológico.

Sendo assim, além de uma pesquisa bibliográfica e coleta de documentos extensa, e com os resultados relacionados a propriedades, teoremas, técnicas e aplicações relacionadas principalmente a Física e o problema da velocidade instantânea, que sabemos estar relacionada ao problema da reta tangente e as derivadas e a Geometria no aspecto da reta real como descritora dos números reais, bem como o cálculo de áreas e volumes e integração de funções contínuas, por meio análise infinitesimal de Robinson, por meio dos números hiper-reais, no modelo não-padronizado, contrapondo o modelo dos limites de Isaac Newton.

A ideia da implantação de um modelo não-standard na ciência teve, nesse trabalho, uma relação mais íntima com o estudo não-standard da Análise Matemática, contudo, o termo mencionado não se restringe à esta, e a proposta maior do projeto é que esse modelo seja pensado e utilizado, de forma Interdisciplinar, em todas as áreas do pensamento

humano, e nota-se a mesma dificuldade em se aceitar um novo modelo em diversas áreas, como foi o caso das Geometrias Não-Euclidianas tão criticadas em sua publicação, ou mesmo do Sistema Astronômico Heliocêntrico de Copérnico, dentre outras centenas de casos, que ainda que tardiamente, puderam substituir de forma satisfatória seus antecessores.

A fim de atender ao objetivo geral e os objetivos específicos, além de responder à pergunta de pesquisa proposta, esta tese foi estruturada por meio de uma sequência de análises de modelos padrão. No Capítulo 2 veremos alguns modelos standards na Filosofia, Geometria e Ciências Naturais, que remetem ao tempo e espaço da discussão dos primórdios da criação do Cálculo Infinitesimal, e vamos observar as influências do pensamento humano da época assim como a dificuldade de se permitir novos conhecimentos que se mostrem conflitantes com os conhecimentos estabelecidos. Tal fato nos conduz ao próximo passo. No Capítulo 3 iremos estudar as influências filosóficas e epistemológicas presentes nos primeiros escritos sobre a disciplina, e verificar os avanços tecnológicos atingidos com o término da idade média e início da Revolução Científica, que acontece nos séculos XVI e XVII.

O Capítulo 4 estuda o avanço no cálculo desde os tempos antigos até a criação do modelo vigente por Cauchy e Weierstrass, com base no Cálculo Infinitesimal de Newton e Leibniz, caracterizando assim a teoria vigente sobre tal teoria, que faremos em contra-ponto em relação à Análise de Robinson, e a inclusão dos números hiper-reais.

Como acreditamos que uma das questões de impedimento da substituição ou mesmo convivência, de modelos emergentes na academia e no ensino, se dá pela filosofia adotada pelos atores do processo vislumbra-se, no Capítulo 5, alguns filósofos e seus questionamentos sobre esse processo, então no Capítulo 6 pela descrição detalhada da análise não-standard no âmbito do Cálculo Diferencial e Integral e da Análise Matemática, duas disciplinas que acreditamos ser adaptadas para esse novo entendimento dos conjuntos numéricos, e dessa nova ciência que apresenta grandes vantagens nos diversos quesitos descritos nesse trabalho, irão trazer à Ciência e aos discentes.

Já no Capítulo 7, iremos trazer uma análise dos livros didáticos utilizados nas universidades públicas da região sudeste do Brasil, que são referência para diversas outras universidades públicas e privadas do país, o que deixa claro que as universidades não levam aos alunos esse novo conhecimento tão importante, que há várias décadas fora criado e publicado. Portanto, nesse capítulo, mostramos resultados bastante satisfatórios de uma ampla pesquisa de campo sobre o tema principal, a Análise Não-standard de Robinson, e um único livro de Cálculo que traz essa abordagem de forma aplicada e didática.

2 ALGUNS MODELOS STANDARD DO CONHECIMENTO

Historicamente, o estudo e construção dos conjuntos numéricos e seus axiomas se aproximam de uma visão que chamamos de platonismo¹. Nesse ponto de vista, os objetos matemáticos são dados como entidades abstratas independentes da mente humana. Os números ou formas geométricas, que estão constantemente presentes no mundo físico, pertencem à um tipo de essência abstrata que habita um universo não-físico de concepções. Nessa perspectiva, a base do sistema lógico e axiomático dos conjuntos numéricos se dá pela tentativa de formalizar a evidente relação entre o universo conceitual e os vislumbres do mundo físico.

A Aritmética e seus conjuntos numéricos idealizados e a Geometria com as suas figuras geométricas com seus postulados e axiomas, nos levam aos primórdios da matemática e a criação de um método filosófico de comprovação de seus teoremas. Aqui nós temos uma necessária leitura platônica da lógica matemática aplicada, onde nos referimos à existência e universalidade de ideias, e provar teoremas matemáticos significa explorar suas verdades eternas.

Por meio e na natureza, no mundo físico, podemos encontrar várias formas circulares e esféricas. O mundo físico dá origem ao conceito abstrato de um círculo e nós somos capazes de teorizar e comunicar sobre o círculo e sobre a esfera. O prisioneiro já se libertou das correntes do preconceito, ele já está fora da caverna em sua busca pelo conhecimento verdadeiro, ele já não é um ser humano comum, ele já não está preso à ignorância e ao senso comum que as sombras e seus sentidos deturbados o colocaram antes.

Mas o filósofo, que se libertara das correntes, e pode observar a luz do sol e a infinidade de cores do mundo exterior, o que lhe abriu a mente e exacerbou os seus sentidos, anseia por libertar o máximo possível de seres humanos da ignorância que vivem, contudo, ele volta à caverna para contar sobre as suas descobertas e suas indagações sobre o novo mundo físico que se mostra existente. Como sabemos, do texto de Platão, os prisioneiros, por medo de uma disseminação de “insanidades” e o perigo que são para mundo mataram o fugitivo.

O filósofo autêntico, e não o mero expositor de sistemas, é, como o verdadeiro cientista, um pesquisador incansável, que procura sempre renovar as perguntas formuladas, no sentido de atingir respostas que sejam “condições” das demais. A Filosofia começa com um estado de inquietação e de perplexidade, para culminar numa atitude crítica diante do real e da vida (REALE, 2002, p. 01)

¹ Corrente filosófica baseada no pensamento de Platão a qual defende a existência dos objetos abstratos.

Na teoria das ciências, na matemática, na filosofia, muitos fugitivos foram mortos, as vezes as suas teorias foram criticadas, ridicularizadas, e suas mortes intelectuais foram decretadas. Outras vezes suas línguas foram cortadas e seus corpos queimados como Giordano Bruno², condenado pela Inquisição Romana por heresia, com suas teorias cosmológicas, que conceitualmente estenderam o recém-criado modelo copernicano³ ou ainda Hipaso de Metaponto⁴, membro da Escola Pitagórica⁵ que provara a existência dos números irracionais⁶, que fora jogado em mar aberto.

Criar conceitos, divulgar novas ideias pode se mostrar uma ação perigosa para um filósofo ou mesmo para um matemático ou um cientista. O ser humano gosta do senso comum? Da ignorância? Se está funcionando porque mexer? Mas e se funcionar melhor ainda? Mas e se o conceito agora é melhor, mais verdadeiro, mais concebível pela mente humana, será que não vale o sacrifício de se libertar das correntes e voltar à caverna para contar sobre as novidades?

Vários paradoxos⁷ foram enunciados ao longo da história da matemática, alguns “solucionados” outros ainda não. Colocamos solucionados entre aspas, o porquê já é um paradoxo. Paradoxo é uma contradição, é algo que contraria os princípios básicos do pensamento humano. Aqui temos que se fora solucionado ele nunca fora um paradoxo, mas como foi chamado de paradoxo por tanto tempo não devemos mudar o seu nome.

O paradoxo de Zenão⁸, em uma exemplificação, basicamente diz que um atleta que pretende correr 100 metros, nunca alcançará o seu objetivo. Mas como não chegará? Basta que não pare de correr certo? Mas Zenão de Eleia argumenta:

² Giordano Bruno, um admirador de Copérnico, leva adiante essa ideia, propondo em seu *De l'Infinito universo e mondi* (Sobre o universo infinito e os mundos), de 1583, a concepção de um universo infinito, influenciado pelo neoplatonismo. Em 1600 Giordano Bruno é queimado na fogueira como herege. Em 1616 a Inquisição condena a obra de Copérnico. Um dos argumentos utilizados é que, nas Escrituras, Josué pede a Jeová que faça o Sol parar no céu até a derrota de seus inimigos (Josué, 10, 11-13); ora, se o Sol parou, é porque se movia em torno da Terra. Também no Salmo 93 é dito que “o mundo permanece imóvel”.

³ O Heliocentrismo consiste num modelo teórico de Sistema Solar desenvolvido pelo astrônomo e matemático polonês, Nicolau Copérnico (1473-1543). De acordo com o modelo copernicano, a Terra e os demais planetas se movem ao redor de um ponto vizinho ao Sol, sendo este, o verdadeiro centro do Sistema Solar.

⁴ Filósofo pré-socrático, membro da Escola Pitagórica que teria provado a existência dos números irracionais enquanto os pitagóricos acreditavam que só existiam os números racionais, e que segundo alguns documentos da época, teria sido assassinado por afogamento por um grupo de pitagóricos, ou até mesmo pelo próprio Pitágoras de Samos.

⁵ Fundada por Pitágoras de Samos, foi uma influente corrente da filosofia grega à qual pertenciam alguns dos mais antigos filósofos pré-socráticos.

⁶ São números reais que não podem ser obtidos pela divisão de dois números inteiros.

⁷ Um paradoxo é uma proposição que, apesar de aparentar um raciocínio coerente, demonstra falta de nexos ou de lógica, escondendo contradições decorrentes de uma análise incorreta de sua estrutura interna.

⁸ O texto refere-se a dois dos paradoxos atribuídos à Zenão, a saber : *A Dicotomia*: Se um segmento de reta pode ser subdividido indefinidamente, então o movimento é impossível pois, para percorrê-lo, é preciso antes alcançar seu ponto médio, antes ainda alcançar o ponto que estabelece a marca de

Para chegar à marcação dos 100 metros ele antes precisa pelo ponto da reta que corresponde a $\frac{1}{2}$, metade do trajeto, depois ele precisa passar pela marcação de $\frac{3}{4}$, em seguida pela marcação de $\frac{7}{8}$, em algum momento pela marcação $\frac{63}{64}$, e ainda $\frac{1023}{1024}$ do trajeto, que de forma decimal representa um trajeto de 99,90234375 m. Sendo assim, teríamos uma infinidade de pontos do trajeto antes que o atleta consiga alcançar a linha de chegada.

O infinito é uma abstração matemática, existe no mundo das ideias, mas não temos um exemplo no mundo físico. Sendo assim, no mundo físico o número de pontos é ilimitado, não tem limite, logo o atleta teria que percorrer infinitos pontos para alcançar a linha de chegada, o que levaria um tempo infinito para acontecer. Logo podemos concluir que ele nunca alcançará o seu objetivo. A divisibilidade infinita nos leva a resultados paradoxais, como vemos no paradoxo de Banach-Tarski⁹. Mas já vimos um atleta percorrer os 100 m rasos de corrida. Então podemos afirmar que o conjunto infinito de pontos tem um fim, e isso prova que temos um paradoxo, ou será que apenas uma história intrigante contada por Zenão?

Por meio dos seus paradoxos e do pensamento atribuído à escola filosófica dos eleáticos¹⁰ a qual pertencia, Zenão eliminou a ideia sobre números infinitos ou infinitesimais da cena matemática, que só aparecera novamente em torno de onze séculos depois, ainda que intuitivamente, por meio de tratamento e técnicas infinitesimais na pessoa de Kepler¹¹, Galileu e Torricelli, que proporcionaram grande avanço não só na física, mas também na matemática, já que permitiram assim a disseminação destes números muito grandes e muito pequenos nos trabalhos de Newton e Leibniz, por meio de uma formalização melhor do que seus predecessores, em suas nobres obras *Method of fluxiones* e *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus*, respectivamente. Mesmo que ainda não apresentando uma formalização rigorosa, o que os fez receber duras críticas quanto aos seus métodos.

um quarto do segmento, e assim por diante, *adinfinitum*. Segue-se, então, que o movimento jamais começará.

A Flecha: Se o tempo é formado de instantes atômicos indivisíveis, então uma flecha em movimento está sempre parada, posto que em cada instante ela está numa posição fixa. Sendo isso verdadeiro em cada instante, segue-se que a flecha jamais se move. (EVES, 2011, p. 418).

⁹ Uma esfera pode ser decomposta e recomposta em duas esferas cada uma do mesmo tamanho da original.

¹⁰ Escola filosófica pré-socrática, que concentra as suas questões filosóficas na comparação entre o valor do conhecimento sensível e o do conhecimento racional.

¹¹ Kepler considerava uma circunferência como um polígono regular de um número infinito de lados. Tomando-se cada um desses lados como base de um triângulo cujo vértice é o centro da circunferência, então a área do círculo correspondente fica dividida numa infinidade de triângulos delgados, todos de altura igual ao raio do círculo. (EVES, 2011, p. 424)

Alguns pensadores ao longo da história trabalharam em uma solução para os paradoxos de Zenão, a saber: Aristóteles¹², Arquimedes¹³, Bertrand Russell¹⁴, Hermann Weyl¹⁵ dentre outros, mas a base do paradoxo é de que a soma de uma série infinita de números infinitesimais deve, obrigatoriamente, ser infinita, o que embora ainda discutido por estudiosos da análise matemática, por muitos configura um problema de limites¹⁶ e séries convergentes do cálculo diferencial e integral, solucionado na dita moderna análise matemática. Essa teoria é inaugurada no século XIX, com obras de Augustin Cauchy, Karl Weierstrass e Richard Dedekind, que baniram a noção de número infinitesimal idealizados por Gottfried Leibniz, um dos criadores do Cálculo, no século XVII.

No século XX, mais precisamente na década de 1960, foi formulada a Análise Não-Standard, pelo matemático Abraham Robinson, onde reintroduz de maneira rigorosa os infinitesimais na análise matemática. E temos daí uma nova solução para o paradoxo de Zenão, pelas mãos de McLaughlin (1994).

Na mecânica quântica¹⁷, enunciada no século XX e que muitos físicos acreditam, o tempo pode ser caracterizado por unidades canônicas mínimas indivisíveis conhecidas como unidade de Planck, a qual representa uma espécie de limite fundamental de quão pequenas uma distância pode ser medida, isto é: é a menor medida que pode ser fisicamente significativa no universo. Logo, à medida que as distâncias do atleta à linha de chegada se aproximam da unidade fundamental, a distância até a chegada deixa de existir, portanto o atleta alcança e ultrapassa o objetivo de correr os 100 m.

Precisamos aqui destacar que isso não se aplica no mundo físico, das leis da mecânica clássica de Isaac Newton, já que só na mecânica quântica faz sentido. Para os seus seguidores, espaços que tendem ao comprimento definido por Planck, o que nos leva

¹² Filósofo grego, fundador da escola peripatética e do Liceu, visto como um dos fundadores da filosofia ocidental.

¹³ Filósofo, matemática, físico, engenheiro, considerado um dos principais cientistas da Antiguidade Clássica.

¹⁴ Um dos mais influentes matemáticos, filósofos, lógicos e historiadores do século XX.

¹⁵ Matemático, filósofo e físico teórico alemão, um dos primeiros a conceber a combinação da relatividade geral de Einstein e as leis do eletromagnetismo.

¹⁶ Suponha que seja definido quando está próximo ao número a . (Isso significa que f é definido em algum intervalo aberto que contenha a , exceto possivelmente no próprio a .) Então escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

e dizemos “o limite de $f(x)$, quando x tende a a , é igual a L ”

se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L (tão próximos de L quanto quisermos), tornando x suficientemente próximo de a (por ambos os lados de a), mas não igual a a . (STEWART, 2013, p. 81).

¹⁷ É a teoria física que obtém sucesso no estudo dos sistemas físicos cujas dimensões são próximas ou abaixo da escala atômica, tais como moléculas, átomos, elétrons, prótons e de outras partículas subatômicas, muito embora também possa descrever fenômenos macroscópicos em diversos casos.

mais uma vez à discussão do paradoxo na Matemática Pura, por meio da moderna análise matemática, o que caracteriza um modelo não-standard na física.

O paradoxo de Zenão citado acima exemplifica um problema que é discutido a mais de 2000 anos, que é caracterizado pela tentativa de identificar o menor número positivo obtido pela divisão infinita de um número positivo, isto é, existe o menor número real positivo maior do que zero?

Leibniz chamou esse número de infinitesimal, embora não tenha conceituado de forma rigorosa e sim se preocupado em obter resultados satisfatórios com certo rigor lógico, embora mesmo ele tenha se referido aos seus infinitesimais como "*que ce n'etaient que des fictions, mais des fictions utiles.*" (que eram apenas ficções, mas ficções úteis) na sua obra *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus* (LEIBNIZ, 1684, ver LEIBNIZ, 1983).

Mas um problema fora observado por vários de seus críticos que é caracterizado pelo fato de que um real infinitesimal é um número positivo, $\delta > 0$, $\delta \in \mathbb{R}$, menor que todo número positivo, e isso é a base do Cálculo Diferencial e Integral e da Análise Real. A esta análise que vamos chamar de modelo standard, aceito pela academia até a atualidade, configurando assim o paradigma dominante da análise, baseados na Propriedade Arquimediana¹⁸, a qual teria uma inconsistência.

Para Dauben (1998) Robinson consegue formalizar, através de argumentos lógicos rigorosos, a inclusão dos números infinitesimais no cálculo, até então negligenciada e, na prática, substituída pelo método $\varepsilon - \delta$. Para Robinson e seus seguidores, o limite e sua dita formal, com os seus epsilons e deltas, configuram apenas um jogo de argumentos mecânicos que nos levam mais uma vez à inconsistência do cálculo baseado no conceito dos limites, mais uma vez inconsistentes, como quando Isaac Newton os criou. É necessário conceber a existência de números não reais, aqui se propõe a nomenclatura hiper-reais.

Isaac Newton e seu cálculo baseado nos limites teve desde o século XVII até hoje vários seguidores e muitos matemáticos modernos teriam conseguido comprovar as suas ideias, visto que na época não foram comprovados acima de qualquer dúvida. No entanto o paradigma dominante hoje aceita que foi possível comprová-los com a evolução dos conhecimentos atingidos nos séculos XIX e XX.

Gottfried Leibniz e seu cálculo baseado nos infinitesimais também teve seguidores e defensores. Contudo, a análise matemática moderna, matemática e filosoficamente foi

¹⁸ A propriedade arquimediana dos números reais é a base de toda a análise matemática moderna, a saber: $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $x < n$. Para todo número real sempre existe um número natural maior, ou seja, o conjunto dos números naturais $N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ não é limitado superiormente.

banida por meios dos ϵ s/deltas, e as séries convergentes, que deram a vitória aos limites de Newton.

Como pudemos ver até agora, sobre a discussão até aqui travada, esses limites são quocientes de números reais, mas que números reais são capazes de responder às indagações dos incrédulos na teoria que diz que se uma sequência de números se aproxima muito, tanto quanto queiramos de um número real L , então ela alcança L . Mas quão próximo devemos chegar de L para que possamos, sem qualquer possibilidade de erro, aceitar que chegamos perto o suficiente? Será que próximos infinitesimalmente, como Leibniz defendeu? Então notamos aqui inconsistência, seja matemática ou filosófica em ambas as teorias.

Números muito pequenos e números muito grandes há mais de 2000 anos geram diversas discussões entre os pensadores das mais diversas áreas, fazem parte do mundo físico ou do mundo das ideias, são eles comprovadamente computacionais ou meramente objetos imaginados. Para muitos essa discussão é matemática enquanto para outros, trata-se de uma discussão metamatemática¹⁹.

Robinson concebe suas ideias a partir do tratamento dado por Leibniz e Cauchy aos números infinitesimais, assunto que sempre gerou crises na História da Matemática, crise esta que ainda persistia na Matemática Contemporânea.

Com base nessa perspectiva, iniciamos a nossa discussão por um tema que perpassa diversas áreas do conhecimento, os chamados *modelos não-standard*²⁰. De acordo com Gaifman (2004, p. 72) “Um modelo *não-standard* é aquele que constitui uma interpretação de um sistema formal que é *reconhecidamente diferente* da interpretação pretendida.”

Então temos um questionamento importante que se dá pela dicotomia observada atualmente, isto é um problema prático ou abstrato, da matemática pura ou aplicada, matemático, filosófico, lógico, pedagógico, psicológico ou epistemológico, mutuamente exclusivos, ou será um problema interdisciplinar²¹, que como em outras épocas todo cientista proeminente tratava.

¹⁹ A metamatemática é um conceito formulado por Jacques Herbrand em 1930 e expandido por Tarski e Gödel. Cuida do esclarecimento rigoroso, através de recurso à própria matemática, de conceitos como o de axioma, regra de inferência e demonstração formal ou dedução, de completude e de interpolação.

²⁰ Standard, da tradução do inglês, significa padrão, um formato padrão, assim o termo não-standard refere-se, nesse trabalho, como um estudo não padronizado, que não segue aos padrões pré-definidos.

²¹ Interdisciplinar é um adjetivo que qualifica o que é comum a duas ou mais disciplinas ou outros ramos do conhecimento. É o processo de ligação entre as disciplinas.

2.1 MODELOS STANDARDS E A FILOSOFIA

Modelos standard, muitas vezes, não permitem compreender objetos externos ao sujeito de forma acurada e de maneira universalmente aceitas entre diferentes sujeitos. Essas críticas epistemológicas remontam de Locke, Hume e Kant, para quem um mero empirismo ou um racionalismo isolado não seria capaz de compreender a realidade. Na obra “Contra o Método” do filósofo Paul Feyerabend²², temos um esboço de uma teoria anarquista do conhecimento, portanto é urgente, para Feyerabend, deixar de considerar a ciência como único paradigma da racionalidade.

Portanto, ainda que em termos específicos, de uma disciplina ou aplicabilidade tenhamos um modelo standard satisfatório, precisamos nos questionar sobre possíveis outros modelos que venham, ou aniquilar ou assimilar o modelo atual, que deve ser, portanto, verificado e levado ao patamar de ciência nova. Com o novo paradigma dessa ciência fundado, e o modelo agora chamado de não-standard, que se tornaria o novo modelo standard, com esse processo podendo ser repetido *ad infinitum*, que é a prática mais primeira da filosofia:

Quando se afirma que filosofia é a ciência dos primeiros princípios, o que se quer dizer é que a Filosofia pretende elaborar uma redução conceitual progressiva, até atingir juízos com os quais se possa legitimar uma série de outros juízos integrados em um sistema de compreensão total. Assim, o sentido de universalidade revela-se inseparável da Filosofia. (REALE, 2002, p. 01)

Os números hiper-reais de Robinson se alinham bastante aos infinitésimos de Leibniz, ainda que este não tenha sido eficiente em justificar tais infinitesimais de forma rigorosa, mas feliz em considerá-los; ainda que como uma espécie de dispositivo prático mas sem uma fundamentação lógico-matemática segura, que permitiu a Robinson, um lógico como Leibniz, pudesse finalmente tratá-los como uma entidade matemática e o rigor que se exige dela.

2.2 MODELOS STANDARDS E A GEOMETRIA

A geometria sempre norteou diversos estudos na Matemática, já que o seu modelo baseado em postulados tomados como verdades absolutas, que em seguida tornam-se bases sólidas para uma metodologia baseada na lógica, nos levam a deduções rigorosas, o que torna o processo totalmente confiável, como vemos nas palavras de Eves:

Em algum momento entre Tales, 600 a.C., e Euclides, 300 a.C., rematou-se a noção de discurso lógico como uma sequência de deduções rigorosas a partir de algumas suposições iniciais explicitamente enunciadas. Esse processo, o chamado *método postulacional*, tornou-se a verdadeira essência da matemática moderna; indubitavelmente, grande parte do desenvolvimento da geometria segundo esse modelo deve-se aos

²² Feyerabend tornou-se famoso pela sua visão científica anarquista da ciência e por sua suposta rejeição da existência de regras metodológicas universais. É uma figura influente na filosofia da ciência, e também na sociologia do conhecimento científico.

pitagóricos. Sem dúvida uma das maiores contribuições dos gregos primitivos foi o desenvolvimento desse método de raciocínio postulacional. (EVES, 2011, p. 115)

Aqui temos um problema posto, que seria a confiabilidade destes postulados, já que eles não se valem de demonstrações como os teoremas. O que ilustra perfeitamente essa questão vem das chamadas geometrias não-euclidianas, que podemos dizer, caracterizam-se por geometria não-standards, à época que foram postas, já que contradiziam uma geometria tradicionalmente consolidada: a geometria de Euclides de Alexandria.

O ponto de discussão que acompanhou os geômetras por alguns séculos se deu em relação ao chamado V axioma ou postulado de Euclides, conforme Barbosa (1985) “Por um ponto fora de uma reta m pode-se traçar uma única reta paralela a reta m ” (BARBOSA, 1985, p.72).

E a discussão então vem em duas frentes: se isto é verdadeiro e pode ser provado, teremos então um teorema e não um postulado, e ainda, se é falso, temos uma inconsistência na geometria, e portanto na matemática, e por muito tempo essa resposta não fora alcançada.

Por cerca de mil anos, os geômetras acreditavam poder provar esse postulado, devido ao fato de que ele parecia ser mais complexo que os outros quatro postulados, que eram rapidamente vistos como verdadeiros, e embora muitos tenham tentado, como Alhazen no século XI, Khayyâm no século XII e ainda Giovanni Saccheri no século XVIII, não obtiveram êxito em provar que era um postulado verdadeiro, o que o elevaria ao status de teorema, o que podemos ver se tratar então de um questionamento semântico da geometria.

Apenas no século XIX, os matemáticos Nikolai Lobachevsky e János Bolyai, de forma independente, publicaram estudos sobre a denominada geometria hiperbólica, que nega o V postulado, tendo como premissa a existência de infinitas retas paralelas a tal reta m de Euclides, portanto nega a geometria euclidiana nos termos de Lobachevsky, ou que depende de um parâmetro k , nos termos de Bolyai, e um pouco mais tarde, Bernhard Riemann, constrói uma família infinita de geometrias não euclidianas, nas quais tem-se a inexistência das tais retas paralelas, dentre elas a Geometria Elíptica.

Hoje sabemos da importância dessas geometrias em diversas áreas da atuação humana, como a aviação e a navegação marítima, e assim como análise não-standard, foi por muitos séculos dada como embasada e concluído o modelo padrão. A Geometria Euclidiana, e se mostrou passível de melhorias com novos estudos, e em sua publicação, Lobachevsky também sofreu duras críticas por diversos acadêmicos. A sua geometria, intitulada por ele, “Geometria Imaginária”, não só não teve o devido reconhecimento, como

ele fora, anos depois, afastado das suas atividades junto à Universidade de Kazan, da qual foi aluno, professor e até reitor.

2.3 MODELOS STANDARDS E AS CIÊNCIAS NATURAIS

Nas Ciências Naturais destacamos um modelo físico que ficou por séculos estabelecido, e ainda é usado em situações específicas, tomados alguns parâmetros que é o caso do que chamamos hoje de Física Clássica. Desenvolvida por Isaac Newton, baseia-se em um conjunto de equações que acreditava descrever as propriedades físicas do universo. Embora seja satisfatória para o lançamento de projéteis, a colocação de um satélite em uma órbita específica ou mesmo para descrever o movimento dos planetas, o eletromagnetismo encontrou problemas nessa física.

Newton acreditava que todos os observadores, em movimento ou não, observavam o mundo ao seu redor de maneiras idênticas, o que é negado pela Física Moderna de Albert Einstein, o qual observou que depois das publicações sobre o eletromagnetismo, em 1865, por James Maxwell, que parece mostrar o erro de Newton, já que se nota que fenômenos físicos eram observados de formas diferentes, quando se alterava o referencial inercial. Portanto a observação do espaço é relativa e não absoluta como se acreditava.

Um coeficiente matemático é descoberto por Lorentz, e este consegue modelar o espaço físico de tal modo que as estruturas das equações de Maxwell para o eletromagnetismo são satisfeitas, e isso prova que o tempo e o comprimento têm comportamentos diferentes e mudam as suas propriedades em relação aos diferentes referenciais, o que tem sérias interferências na Lei da Gravitação Universal de Newton, e conhecida então como Teoria da Relatividade de Einstein.

Então vemos aqui mais um exemplo de uma teoria que supera outra, seja por questões técnicas, epistemológicas ou semânticas, o que traz ao nosso ponto, que independentemente da ciência em vista, novos conhecimentos, novos modelos, modelos ditos não-padrão, devem ser considerados, analisados e implementados, quando fundamentados.

3 UMA ANÁLISE FILOSÓFICO-EPISTEMOLÓGICA DO CÁLCULO INFINITESIMAL AO LONGO DA HISTÓRIA

O que uma derivada realmente é? Resposta: um limite. – O que uma integral realmente é? Resposta: um limite. – O que uma série infinita realmente é? Resposta: um limite. Isso nos leva a: - O que é um limite? Resposta: um número. E, finalmente, a última questão: - O que é um número? (HAIRER; WANNER, 2008, p.170-171)

O conhecimento como visto hoje passou por muitas fases, onde os fundamentos filosóficos sofreram grandes mudanças o que proporcionou alterações na visão política, teológica, científica, metodológica e lógica. A Grécia Antiga, com Platão, Aristóteles dentre outros, proporcionou a construção das fundações sólidas da ciência no ocidente, onde a razão fora cada vez mais vista como a base das ciências: “pensar a verdade através da razão, deixando de lado o mito como forma possível de conhecimento” (MORAES; ARCELLO, 2000, p.2).

Para Marcondes, o pensamento do século XVII, marca uma ruptura com paradigma de pensamento em que a metafísica e ciência enquadravam-se no fim da Idade Média²³, uma ciência físico-matemática se instaura:

A revolução científica moderna resulta, portanto, da conjugação desses fatores, para o que contribuíram diferentes pensadores ao longo dos séculos XV a XVII, sendo que, em certos aspectos, rompe de fato decisivamente com a ciência antiga, mas em outros inspira-se ainda em teorias clássicas. Só com Newton, praticamente já no século XVIII, é que teremos a formulação de uma ciência físico-matemática plenamente elaborada em um sistema teórico. (MARCONDES, 2010, p. 169)

Na Idade Média, a verdade filosófica foi colocada na perspectiva cristã; tida como a verdade reveladora de Deus. Houve, então, uma exasperação da fé em tudo, em todas as ações humanas, como nas artes ou mesmo nas ciências.

A Geometria Analítica e a Álgebra, que surgem logo após o final da Idade Média, junto com as questões filosóficas levantadas na Idade Média sobre o infinito, o infinitésimo e sobre a cinemática, proporcionaram aos matemáticos uma análise matemática mais formal, já que pode ser mais rigorosa e menos baseada em construções geométricas, como os gregos antigos faziam, e assim uma matemática mais generalista pode ser desenvolvida, o que mais tarde culminou na criação de um Cálculo Infinitesimal, que com essa nova base epistemológica, pode ser descrito de uma maneira mais formal que em épocas anteriores

²³ A Idade Média foi um longo período da história que se estendeu do século V ao século XV. Seu início foi marcado pela Queda do Império Romano do Ocidente, em 476 d.C., e o fim, pela Tomada de Constantinopla pelos turcos-otomanos, em 1453. Foi também nesse período que surgiu e se consolidou o feudalismo, organização política, econômica e social baseada na posse da terra. Os humanistas do século XV e XVI chamavam a Idade Média de Idade das Trevas. Eles afirmavam haver ocorrido na Europa um retrocesso artístico, intelectual, filosófico e institucional em relação à produção da Antiguidade Clássica.

Percebe-se que a Idade Média trouxe pouca evolução à geometria grega ou à álgebra. Suas contribuições concentraram-se principalmente em especulações filosóficas sobre o infinito e o infinitesimal e no estudo inicial do movimento e da variabilidade. Essas questões, apesar de muitas vezes não estarem fundamentadas com rigor matemático suficiente, desempenharam papéis relevantes no desenvolvimento dos métodos e conceitos do Cálculo, pois levaram à associação da Geometria grega com a representação gráfica de variáveis, por meio do estudo da latitude das formas, antecedendo a Geometria Analítica. (BUENO, 2021, p. 6)

No período que se apresentava, a partir do século XVI, conhecido como Idade Moderna, era sabido que a Terra não é o centro do sistema solar, muito menos do universo e Deus já não é mais o único meio de acesso ao conhecimento. E nessa época algumas correntes filosóficas, como o racionalismo de Descartes, o empirismo de Locke e o idealismo de Kant travam debates enriquecedores sobre o novo patamar que a razão atinge na Ciência Moderna. Os novos cientistas agora olham para a Idade Média e para a Idade Antiga por um prisma atual, e sentem a necessidade de renovar a questão metafísica da filosofia. A filosofia agora se baseia na matemática, na experiência prática ou na experiência do fenômeno.

No próprio Kant vemos que a metafísica se instaura agora como parte formadora de ciência, dando a base para uma metodologia que alia as experiências (empírico) e a razão (racionalismo) na construção de conhecimento. Pode-se dizer de um idealismo sobre os conhecimentos *a priori* e assim permitindo às chamadas matemática pura e física pura, talvez então não podendo mais carregar essa alcunha, possam se desenvolver mais e mais. Sobre os ombros da metafísica, Kant entende

A matemática, a física, o próprio conhecimento empírico do homem, possuem um alto valor como meios para se alcançarem os fins da humanidade, na maioria das vezes fins contingentes, mas no fim das contas também para se atingirem fins necessários e essenciais, embora unicamente mediante um conhecimento racional por simples conceitos, o qual, designe-se como se quiser, não é propriamente outra coisa senão a metafísica. (KANT, 2001, p. 878-879).

A partir do século XV essas três práticas começam a aparecer como base científica e fortemente utilizadas pelos pensadores dessa época. A realidade e a experimentação proporcionam o racionalismo:

O advento da Ciência Moderna surgiria como resultante da constatação de erros e equívocos do passado na interpretação dos fenômenos e na explicação do mundo natural, cujos muitos desses enganos seriam patenteados principalmente a partir do final do século XV. Do processo investigativo e metodológico com o objetivo de conhecer e compreender tais fenômenos pela acumulação de novos conhecimentos adquiridos, pelo avanço teórico e experimental e pelo desenvolvimento do pensamento científico, decorreria uma nova etapa da evolução da Ciência. (ROSA, 2012, p. 13)

Os séculos XVI e XVII foram de vital importância na história mundial. O homem é inundado por uma nova dimensão lógica que fez com que ele pudesse levantar novas

hipóteses e procurar novas respostas sobre o mundo por meio do conhecimento. A fundamentação da filosofia do ponto material advinda de Demócrito²⁴ e Epicuro²⁵, a aplicação de conceitos e técnicas matemáticas ao empirismo da física e a geometrização da ciência do movimento são exemplos da genialidade dos cientistas desse período.

Uma nova visão da Natureza, a queda da visão grega²⁶ sobre a ciência que reinou por quase 2.000 anos, que foi substituída pelo pensamento da Revolução Científica, livrou a ciência das amarras, tornando-a uma disciplina autônoma, distinguindo-se assim da filosofia e da tecnologia, permitindo que a ciência tenha os seus próprios objetivos.

Agora o ser humano é educado em prol do raciocínio abstrato. A visão de natureza enquanto máquina não mais como organismo, o método experimental-científico com metodologia racional em busca de respostas definitivas priorizando o “como” e não o “por que”; os meios são mais importantes que os fins, diferente do que a escola aristotélica tanto preza. O conhecimento do que “difere do conhecimento do porquê” (ARISTÓTELES, 1987, p. 50).

Agora já não é suficiente publicar artigos científicos em revistas não acessíveis à maioria. É necessário que sejam divulgados os resultados em uma linha de montagem, para que todos possam ser convencidos do novo modo de vida, de ciência, de política, de religião que surge. Os filósofos naturais têm a obrigação de confirmações de seus dados e teorias, para isso, exigiam uma confirmação independente e crítica de suas descobertas.

Inicialmente surgiram, na Itália, no início do século XVII, academias científicas, como a Accademia dei Lincei que era uma academia voltada para a filosofia da natureza, bem como duas grandes sociedades científicas nacionais que marcam o apogeu da Revolução Científica: a *Royal Society of London for Improving Natural Knowledge*, criada por Carta Régia em 1662, e as *Académie des Sciences de Paris*, formada em 1666, e outras em outras partes do mundo, tínhamos agora ambientes acadêmicos para os filósofos naturais poderem encontrar-se para examinar, discutir e criticar recentes descobertas bem como antigas teorias.

²⁴ Demócrito de Abdera 460 a.C. – 370 a.C. Foi um filósofo pré-socrático da Grécia Antiga. Do ponto de vista filosófico, a maior parte de suas obras (segundo a doxografia) tratou da ética e não apenas da *physis* (cujo estudo caracterizava os pré-socráticos). Sua fama decorre do fato de ele ter sido o maior expoente da teoria atômica ou do atomismo. De acordo com essa teoria, tudo o que existe é composto por elementos indivisíveis chamados átomos (do grego, “a”, negação e “tomo”, divisível. *Átomo*= indivisível).

²⁵ Filósofo grego do período helenístico, utilizou-se da teoria atômica de Demócrito para justificar a constituição de tudo o que há. Das estrelas à alma, tudo é formado de átomos, sendo, porém de diferentes naturezas. Dizia que os átomos são de qualidades finitas, de quantidades infinitas e sujeitos a infinitas combinações.

²⁶ No pensamento grego, de um modo geral, podemos perceber uma comunhão entre a natureza (*physis*) e o homem. O grego percebe o “kosmos” como harmonia, equilíbrio, sábia organização; cabendo ao ser-humano manifestar sua “humanidade” a partir de suas vocações, ou virtudes, neste grande “quebra-cabeça” cosmológico.

Esta prática em que os cientistas precisam cancelar os escritos de outros cientistas perdura até os dias atuais e os departamentos muitas vezes são parciais quanto às novas descobertas e publicações que podem estar em desacordo com as suas ideias, até mesmo de cunho político. Cada vez mais podemos ver críticas distribuídas apenas porque os artigos não estão alinhados com o pensamento do cientista ou mesmo do seu departamento.

No caso do cálculo antigo, como do século XVII, é inegável que falta de rigor ou inconsistências são observadas nos artigos antigos, seja por uma falha filosófica ou matemática, ou apenas porque certas escolhas, como a de uma linguagem mais acessível e menos obscura, ou porque o objetivo no momento era um resultado prático e não teórico, os críticos já o têm como falho ou sem valor, a ponto de sequer provocar a obrigação de uma justificativa para tais críticas como podemos ver em Vickers (2013), que escreve

Tão arraigado é o entendimento de que o cálculo inicial era inconsistente que muitos autores não fornecem uma referência para apoiar a alegação e não apresentar o conjunto de proposições inconsistentes que eles têm em mente. (VICKERS, 2013, p.146)

Já no século XVI muitos países europeus passavam por um processo de especialização gradual, como por exemplo a criação da *Accademia della Crusca* (1585)²⁷ que surgiu como uma academia da língua vulgar em oposição às academias que estudavam mais as línguas clássicas e ainda posteriormente a *Accademia del Cimento* (1657-1667), de forte enfoque experimentalista que atingiram o seu auge no século XVII, século que presenciou um fenômeno de desmembramento das academias como instituições separadas.

É sem dúvida um fenômeno do século XVI e XVII a formação das academias especializadas e exclusivas no estudo da filosofia da natureza com teor matemático-experimental. De acordo com Yates²⁸, o início do século XVII foi a era do nascimento das academias científicas modernas.

Os conceitos de infinitesimais e infinitos têm estado, historicamente, no centro das crises dos fundamentos da matemática, de acordo com alguns historiadores da matemática. A primeira "crise fundamental" está associada com a descoberta dos números irracionais (mais propriamente falando, das magnitudes incomensuráveis, pelos pitagóricos pré-socráticos²⁹, e depois de mais de 2.500 anos, ainda discutimos sobre tais conceitos onde, de

²⁷ A *Accademia della Crusca* é a mais prestigiosa instituição linguística da Itália, reunindo estudiosos e especialistas em linguística e filologia italiana, e a mais antiga entre as academias em atividade no país. Faz parte da Federação Européia das Instituições Linguísticas Nacionais, cuja função é estabelecer uma diretriz comum de proteção às línguas oficiais. Fundada em Florença, em 1583, a Crusca sempre se distinguiu por seu empenho em manter a pureza da língua italiana original.

²⁸ YATES, 1988, op. cit., p. 103.

²⁹ O primeiro período da Filosofia grega é denominado como Pré-Socrático (pois seus representantes fizeram uma Filosofia diferente da que foi feita por Sócrates, quase 200 anos depois de Tales de Mileto) ou Cosmológico (pois eles fizeram um tipo de cosmologia, que é uma maneira racional de entender a origem do Universo — cosmos, em grego — em oposição à visão mitológica).

um lado temos os descendentes dos intuicionistas como Kronecker e Brouwer³⁰ e, de outro, dos formalistas³¹ como Cantor³² e Hilbert³³.

As grandezas infinitesimais estão sempre no centro da discussão sobre a base e a consistência do Cálculo e da Análise, e de alguma forma tanto em Newton quanto em Leibniz essas grandezas surgem. Os limites e fluxões de Newton, com embasamento maior na física e fenômenos naturais e os incrementos ligados diretamente à dinâmica enquanto Leibniz e seus infinitesimais ou diferenciais com forte influência da lógica e da metafísica, que são menos intuitivas. Nas palavras de Newton, o seu método era mais natural e geométrico que o de Leibniz, então aqui vemos que a defesa de Newton sobre a sua criação não se dá pela filosofia ou mesmo pela matemática, mas parece ser pela psicologia ou pedagogia.

Uma questão importante se dá em entender que a metafísica não significa apenas uma possibilidade de se apoiar em simples especulações sobre a verdade (a psicologia), tomadas pela vontade do cientista como verdadeiras, mas entender que ela é, na verdade, a metafísica que se propõe ao inverso, que especula sobre a verdade obtida, indo além ou acima dos pressupostos da física ou da matemática

Que a metafísica sirva, como mera especulação, mais para prevenir erros do que ampliar o conhecimento, não prejudica em nada o seu valor, antes lhe dá mais dignidade e consideração, através do ofício de censor que assegura a ordem pública, a concórdia e o bom estado da república científica e impede os seus trabalhos ousados e fecundos de se desviarem do fim principal, a felicidade universal. (KANT, 2001, p. 879)

Portanto, a discussão que outrora fora sobre quem construiu primeiro, quem publicou primeiro, qual dos métodos é consistente e não só eficaz, até mesmo se um deles plagiou o

³⁰ A escola intuicionista nasceu por volta de 1908 com o matemático holandês L.E.J. Brouwer, embora algumas de suas ideias tenham sido antecipadas por matemáticos como Kronecker, nos anos de 1880 e Poincaré entre os anos 1902 e 1906. Brouwer propunha uma fundamentação radical da matemática, em bases construtivistas, e quebrava a tradição de uma única matemática de tradição clássica. Na tendência intuicionista da Matemática, a característica fundamental é a do construtivismo finito, isto nos leva a uma ciência em que as conclusões não devem ser derivadas das regras fixas contidas em um sistema formalizado, mas cada conclusão deve ser controlada com base em sua própria evidência, enquanto processo da construção dos conceitos.

³¹ O formalismo matemático é uma teoria que sustenta que as proposições da matemática e da lógica podem ser consideradas declarações sobre as consequências de certas regras de manipulação de símbolos ou termos ou cadeia de caracteres.

³² Georg Cantor, nascido em 3 de março de 1845, São Petersburgo, Rússia - falecido em 6 de janeiro de 1918, Halle, Alemanha), matemático alemão que fundou a teoria dos conjuntos e introduziu o conceito matematicamente significativo de números transfinitos, indefinidamente grandes, mas distintos um do outro.

³³ David Hilbert foi um matemático alemão eleito membro estrangeiro da Royal Society em 1928. foi um dos mais notáveis matemáticos, e os tópicos de suas pesquisas são fundamentais em diversos ramos da matemática atual. Suas contribuições à matemática são diversas, e envolvem, entre outras a consolidação da teoria dos invariantes, que foi o objeto de sua tese, a transformação da geometria euclidiana em axiomas, com uma visão mais formal que Euclides, para torná-la consistente, trabalhos sobre a teoria dos números algébricos, a criação dos espaços de Hilbert, durante seus trabalhos em análise sobre equações integrais e contribuição para as formas quadráticas, que serviriam como bases matemáticas da teoria da relatividade de Albert Einstein.

trabalho do outro, parece que Newton “ganha” o cabo de guerra porque seu método era mais fácil ou inteligível. Podemos levantar uma questão: os matemáticos puros, séculos mais tarde, elegeram o método de Newton, mais uma vez, como o vencedor, mas será que mais uma vez a psicologia de uma ciência mais fácil ou inteligível não os levou a um preconceito científico e uma parcialidade à Newton?

Mas como tornar inteligível um conceito do tudo, do infinito Kant (2001) escreve “Ora nenhum número é maior, porque sempre uma ou mais unidades lhe podem ser acrescentadas. Eis porque é impossível uma grandeza infinita dada e, [...]” (KANT, 2001, p. 460). E assim também não se pode fazer tal coisa com os limites ou infinitésimos

Mas, para pensar a totalidade dessa quantidade visto não podermos invocar limites que constituam por si mesmos a totalidade na intuição, temos de justificar o nosso conceito que, neste caso, não pode partir do todo para quantidade determinada de partes, antes deverá revelar a possibilidade de um todo pela síntese sucessiva das partes [...]. Com efeito, o conceito de totalidade é, neste caso, a representação de uma síntese completamente acabada das partes e este acabamento é impossível e, portanto, também o seu conceito. (KANT, 2001, p. 460).

Em outras palavras, não se pode conceber um conceito para infinito, visto que não se pode conceber um conceito para o primeiro termo, onde todos os outros sejam dados por um acréscimo a ele e aos seus ulteriores. Então não se pode ter o infinito real assim como não se pode ter o infinitésimo real, decorrente não se pode ter o limite real.

Neste trabalho, muitas vezes discutimos a autoria e a consistência acerca do Cálculo Diferencial e Integral apresentado por Newton e Leibniz no século XVII, bem como os seus precursores que já resolviam diversos problemas geométricos e mecânicos séculos antes, mas o objetivo deste estudo não é apenas escolher uma dessas personalidades, mas sim verificar a consistência do Cálculo em si. Estudando a história da matemática nas décadas e séculos após a publicação de Newton e Leibniz podemos encontrar diversas críticas ao trabalho de ambos e muitos especialistas alegam que o Cálculo, embora amplamente utilizado, só fora consolidado no século XIX. Um matemático protagonista nesse processo foi Augustin-Louis Cauchy³⁴.

Cauchy estabelece conceitos de variável, convergência, limite, continuidade, derivada e integral³⁵, e isso foi o pilar principal da aceitação do cálculo não mais somente na

³⁴Augustin-Louis Cauchy (Paris, 1789-1857) foi um matemático francês, um dos fundadores da teoria de grupos finitos. Em análise infinitesimal, criou a noção moderna de continuidade para as funções de variável real ou complexa. Mostrou a importância da convergência das séries inteiras, às quais seu nome está ligado. Definiu precisamente as noções de limite e integral definida, transformando-as em notável instrumento para o estudo das funções complexas. Sua abordagem da teoria das equações diferenciais inovadora, demonstrando a existência de unicidade das soluções, quando definidas as condições de contorno. Exerceu grande influência sobre a física de então, ao ser o primeiro a formular as bases matemáticas das propriedades do éter, o fluido hipotético que serviria como meio de propagação da luz.

³⁵ Embora tivesse ciência da facilidade operacional das diferenciais, Cauchy relegouas a segundo plano. Se dx é uma quantidade finita, ele definiu dy , de $y = f(x)$, simplesmente

física ou geometria, mas fundamentou de forma rigorosa de se pensar a matemática o que logo se tornou a base do estudo da Análise. Como em suas palavras temos (Cauchy, 1821)³⁶(tradução nossa) “*Quanto aos métodos, tentei dar-lhes todo o rigor exigido na geometria, para nunca recorrer a razões extraídas da generalidade da álgebra.*”.

Cauchy levanta um questionamento importante sobre as deduções que são a base da álgebra, visto que uma dedução se faz a partir de premissas, que podem tirar do cientista a intuição, pura ou empírica, e que podem ferir o seu conhecimento *a priori*, o levando a recorrer em erros de semântica, apoiados em acertos da sintaxe. Kant destaca o poder da intuição, mas alerta para o cuidado na formulação do sentido e da representação dos objetos, com os quais a geometria se mostra consistente, necessários, por exemplo, à construção de Cauchy:

É evidente que só na medida em que se situa simplesmente no sujeito, como forma do *sentido externo* em geral, ou seja, enquanto propriedade formal do sujeito de ser afetado por objetos e, assim, obter uma *representação imediata* dos objetos, ou seja, uma *intuição*.

Sendo assim, só a nossa explicação permite compreender a *possibilidade da geometria* como conhecimento sintético *a priori*. (KANT, 2001, p. 41).

Mas como sabemos atualmente, mesmo Cauchy possuía certas imprecisões advindas da linguagem aplicada e falhas consideráveis em seus estudos. Vários matemáticos que tiveram acesso aos novos escritos trabalharam com o objetivo de dar mais consistência ou generalizações aos resultados publicados por Cauchy. Sem sombra de dúvidas as contribuições de Cauchy foram de imenso valor, principalmente no que se refere a um tratamento baseado em séries numéricas, bem diferente do tratamento dado por Newton, que tinha um cunho fortemente geométrico, e assim Cauchy inicia um processo de aritmetização da análise matemática.

Vários filósofos influenciaram tanto a criação do cálculo bem como as tentativas de formulação rigorosa e demonstrações dele, e a dicotomia realismo versus idealismo repousa fortemente nessas ações. O realismo de Aristóteles se contrapõe ao idealismo de Descartes: o primeiro pensa no conhecimento como sempre indubitável, já que se ocupa em discutir a verdade conceitual, enquanto o segundo procura um conhecimento tenaz, prática que permite ao investigador ser mais livre das amarras metodológicas e com isso o possibilita mais descobertas, no primeiro vem-se inicialmente a verdade do objeto e o conhecimento depois, o que é o inverso no idealismo.

como $f(x)dx$. em 1696 Leibniz e Johann Bernoulli acordaram em chamá-lo de *calculus integralis*. (EVES, 2011, p. 464-465)

³⁶ Quant aux méthodes, j'ai cherché à leur donner tout le rigueur qu'on exige en géométrie, de manière à ne jamais recourir aux raisons tirées de l'algèbre (Cauchy, 1821, p. ii)

É atribuído, tanto a Cauchy quanto a Weierstrass, o sucesso da formalização rigorosa do cálculo infinitesimal. Mas esse posto é dado a eles pelos matemáticos e não pelos filósofos, já que seus processos nos levam a convergência de séries, e aos épsilon-delta, que são obtidos por um método de progredir infinitamente o qual um matemático entende bem pela sua prática. Mas esse processo não é entendido por um filósofo que entendem progredir indefinidamente

Os matemáticos referem-se simplesmente a um *progressus in infinitum*. Os investigadores de conceitos I (os filósofos) pretendem, por sua vez, considerar válida unicamente a expressão *progressus in indefinitum*. [...] Quando se diz: Prolongai uma linha, embora seja mais correto acrescentar *in indefinitum* do que *in infinitum*, porque o primeiro significa apenas: prolongai-a até onde *quiserdes* e o segundo: *não deveis* nunca terminar o seu prolongamento (o que não é aqui o que se pretende), a primeira expressão está perfeitamente certa se se trata apenas de *poder*, pois que podereis sempre prolongá-la até ao infinito. (KANT, 2001, B 539)

Inovações na filosofia, nas ciências exatas, nas ciências em geral fazem com que estejamos sempre em estado de revolução científica, e o século XX está repleto delas. É importante olharmos para o passado para entendermos o nosso presente, sobretudo no que se refere ao pensamento científico do homem, e assim esse estudo se faz a partir dessa premissa: entender as revoluções passadas para assimilarmos a ideia de uma revolução em processo, e as possíveis descobertas futuras que se darão por tais mudanças de pensamento.

3.1 REVOLUÇÃO CIENTÍFICA A PARTIR DE NEWTON

Muitos historiadores da ciência como Boyer e Eves atribuem a Newton uma revolução então denominada revolução newtoniana em função da grandiosidade de suas descobertas científicas, contribuições filosóficas e metodológicas que rompem com algumas práticas da época e assim podemos dizer que Newton cria uma revolução científica dentro da revolução científica que já acontecia nos séculos XVI e XVII. Mas para que possamos concordar com isso, devemos concordar que revoluções de fato ocorrem na ciência.

O quão radical deve ser uma mudança no modo de pensar e na forma de se fazer ciência para que se possa definir que uma Revolução Científica estaria ocorrendo naquele momento?

Denominar revolução quando se tem uma mudança radical no que se refere à política ou à economia ou a um regime governamental, parece ser de mais fácil aceitação, já que seria notória uma mudança deveras radical, como no caso da Revolução Francesa³⁷, que acaba com certos privilégios da aristocracia e pela queda do Antigo Regime monárquico

³⁷ A Revolução Francesa, iniciada no dia 17 de junho de 1789, foi um movimento impulsionado pela burguesia e contou com a participação dos camponeses e das classes urbanas que viviam na miséria. Em 14 de julho de 1789, os parisienses tomaram a prisão da Bastilha desencadeando profundas mudanças no governo francês.

absolutista e possibilitando o crescimento de repúblicas e democracias liberais, como chamamos hoje.

Neste exemplo, temos dados históricos, fatos históricos, temos datas representativas como 14 de julho de 1789 quando ocorre a Queda da Bastilha, mas a revolução não é um fato isolado ou apenas uma vontade de alguns. O pano de fundo da revolução social e política francesa se deu por uma mudança radical na forma de pensar do cidadão francês que ocorrera graças às ideias políticas emergentes do Iluminismo³⁸ que fora um movimento filosófico, político, social, intelectual, religioso, com ideias e ideais centrados na razão. Podemos ver, então, uma relação de causa e efeito entre a Revolução Francesa e o Iluminismo: o primeiro com datação precisada pelos historiadores; já o segundo com diversas discordâncias, já que assim como as revoluções científicas, é de difícil observação ou até mesmo definição, como vemos em Marcondes,

De fato, o rompimento com esse pensamento místico, iniciático e ocultista só ocorrerá com o Iluminismo do séc. XVIII, de caráter racionalista e secular, valorizando a experimentação e o materialismo e criticando a superstição. (MARCONDES, 2010, p. 172)

Outro exemplo clássico de uma revolução se dá pela Revolução Copernicana, que na obra *Crítica da Razão Pura*, de Immanuel Kant, é feita uma analogia entre a afirmação de Copérnico de que o sistema astronômico não era geocêntrico³⁹ mas sim heliocêntrico⁴⁰, poderia metafisicamente retirar o sujeito da periferia deslocando-o para o centro da discussão, isto é, uma alteração metodológica importante, onde não mais a natureza do objeto regula o sujeito, mas, este irá regular-se pela natureza do sujeito do conhecimento.

Copérnico possibilitou a formulação da física de Newton, considerando as forças invisíveis de atração entre todos os corpos. Como Newton já conhecia o fato de que uma mudança epistemológica interessante funcionou para Copérnico (que foi capaz, mesmo contrariando os seus sentidos, tomar hipóteses como verdadeiras inicialmente sem comprovação) que posteriormente se provaram verdadeiras. Sem isso Newton teria ignorado o invisível, e não se conheceria o mundo como conhecemos hoje, e não teríamos uma Ciência Natural baseada na razão e não apenas em dogmas (pelo menos a partir daquele momento).

Segundo Kant, em Lúcio Lourenço Prado (2018) “A metafísica é a única ciência capaz de acender alguma luz no estudo das coisas físicas”. (PRADO, 2018, p. 68)

³⁸ O Iluminismo, também conhecido como Século das Luzes e Ilustração, foi um movimento intelectual e filosófico que dominou o mundo das ideias na Europa durante o século XVIII, “O Século da Filosofia”. O Iluminismo incluiu uma série de ideias centradas na razão como a principal fonte de autoridade e legitimidade e defendia ideais como liberdade, progresso, tolerância, governo constitucional e separação Igreja-Estado.

³⁹ O Geocentrismo é uma teoria astronômica que considera a Terra fixa no centro do Universo, com todos os outros corpos celestes orbitando ao seu redor.

⁴⁰ É o nome do modelo estrutural cosmológico que coloca o Sol no centro do Universo.

Aqui vemos uma questão posta: por um lado sem a intuição não inovamos, mas com ela corremos o risco da inconsistência, como o caso visto e de ampla reflexão dada por Kant sobre seus contemporâneos geômetras e suas descobertas:

Kant, que observou que os geômetras da sua época não conseguiam demonstrar os seus teoremas somente por meio do raciocínio, antes faziam apelo às figuras, inventou uma teoria do raciocínio matemático segundo a qual a dedução nunca é estritamente lógica, exigindo sempre o apoio do que se chama «intuição». Toda a tendência matemática moderna, com a sua crescente exigência de rigor, tem sido contrária a esta teoria kantiana. As coisas matemáticas dos dias de Kant que não podem ser não podem ser — demonstradas, conhecidas por exemplo, o axioma das paralelas⁴¹. (Russell, 2006, p. 145-146).

Copérnico abre o caminho para a fundamentação de um Renascimento Científico baseado em um racionalismo e humanismo, que foi seguido por vários expoentes da história e com isso diversas descobertas que se seguem, permitindo assim um avanço inimaginável até então em diversos campos do conhecimento, findando no que chamamos hoje de Ciência Moderna.

A afirmação de Copérnico desafia a intuição e experiência; portanto ele cria uma ruptura com o paradigma consolidado, e tal atitude “revolucionária”, possibilitando assim que pensadores, nos tempos seguintes pudessem utilizar de metodologias baseadas na razão para descobrir incríveis resultados, como é o caso de cientistas como Johannes Kepler, Isaac Newton, Leibniz, Einstein e até mesmo um de seus mais ilustres seguidores, que por compactuar e divulgar as suas descobertas no ramo da astronomia, quase condenado à morte e exilado pela Igreja Católica.

Galileu Galilei, que no seu famoso livro “Diálogo sobre os dois Máximos Sistemas do Mundo Ptolomaico & Copernicano”, publicado em Florença em 1632, em uma fala de sua personagem Salviati, tenha assim se manifestado: “...não posso encontrar limite para a minha admiração de como tenha podido, em Aristarco e em Copérnico, a razão fazer tanta violência aos sentidos, que contra estes ela se tenha tornado soberana de sua credulidade”.

A Revolução Copernicana é um exemplo claro da interdisciplinaridade do pensamento humano. É uma evidência forte de que antes do processo de especialização presente no século XX principalmente e a formação dos departamentos científicos, a pesquisa científica se dava por um conjunto complexo de associações de ciências. As revoluções não acontecem em uma época específica e sim em um período em que mudanças científicas geram uma profunda mudança no modo de se fazer ciência.

⁴¹ Assim, a Geometria é toda uma construção lógica, que obedece a determinados pontos de partida, a certos pressupostos ou “dados”. A Geometria euclidiana, por exemplo, baseia-se no postulado de que “por um ponto tomado fora de uma reta, pode-se fazer passar uma paralela a essa reta e só uma”. Por outro lado, a Geometria, que é ciência de todas as espécies possíveis de espaço, como nos diz Kant, não pode definir o que seja “espaço”, partindo de uma noção pressuposta, de caráter operacional. (REALE, 2002, p. 2)

Os historiadores utilizam o termo Revolução Copernicana, o que demonstra o grau de importância do feito de Copérnico, de como a descrição do sistema geocêntrico foi capaz de mudanças radicais no pensamento humano já que, retira a figura do homem como o centro do universo, e mostra ser possível romper com um sistema pré-estabelecido, que leva o cientista a pensar em outras formas de paradigmas emergentes, na visão de Kuhn. Contudo em Copérnico ainda não temos a noção de universo infinito, que surge mais tarde com Nicolau de Cusa e Giordano Bruno

[...]o modelo heliocêntrico copernicano rompe com o sistema aristotélico-ptolomaico em um aspecto fundamental que é a adoção do Sol, e não da Terra, como centro, porém conserva ainda a concepção de um **cosmo fechado**, tendo como limite a esfera das estrelas fixas, típico da visão antiga. Será apenas progressivamente que a ideia de um **universo infinito** será incorporada à ciência moderna. (MARCONDES, 2010, p. 168)

Encontramos também o termo Revolução Newtoniana, já que a publicação da obra *Principia* de Newton, que se fez o objeto do auge de uma mudança do pensamento humano que já vira ocorrendo há algum tempo. Assim podemos dizer que se trata na verdade de uma única revolução, que se fez em torno de 144 anos, já que de uma forma objetiva existem duas obras, com datações que nos permitem de uma maneira matemática datar o início e o ápice dessa revolução: 1543, ano em que Copérnico publica o *De Revolutionibus* e 1687, ano em que Newton publica os *Principia*, e agora temos o que chamamos de ciência moderna

Uma das principais transformações do ponto de vista da metodologia científica está precisamente na inversão dessa ordem de prioridades. A ciência moderna surge quando se torna mais importante salvar os fenômenos e quando a observação, a experimentação e a verificação de hipóteses tornam-se critérios decisivos, suplantando o argumento metafísico. (MARCONDES, 2010, p. 168).

Entre o Sistema Cosmológico Heliocêntrico de Copérnico e a Lei da Gravitação Universal, tivemos incríveis contribuições de admiráveis cientistas como Galileu e Kepler. Portanto essa revolução deveria, ainda que de forma resumida, e sendo injusto por deixar vários cientistas à parte, se chamar Revolução Copernicana-Galileana-Kepleriana-Newtoniana, que levou a humanidade na formulação do que chamamos de Ciência Moderna.

A Astronomia vem ao longo dos séculos revolucionando o pensamento humano. A revolução científica, conhecida também como a revolução Copernicana-Galileana-Kepleriana-Newtoniana, que teve início no começo da idade moderna, é um exemplo claro disto e esta nos conduziu ao processo, que modernamente, denominamos Ciência. (MAGALHÃES, 2019, p. 10)

3.2 A EPISTEMOLOGIA DA CIÊNCIA PÓS IDADE MÉDIA, A CIÊNCIA MODERNA

A Revolução Científica, que tem seu ápice no século XVII, conduz a mudanças radicais em muitas formas de pensar do homem, bem como na questão metodológica e nas técnicas utilizadas para a construção do conhecimento alterando sensivelmente, portanto, a episteme desses pensadores.

Então podemos e devemos denominar como uma revolução e, nesse caso, uma Revolução Científica, já que foi um marco de importância magnífica, e que resultou em mudanças absolutamente radicais, com desdobramentos que perduram até os tempos modernos. Sobre essas observações é o que concordam muitos estudiosos da Teoria das Ciências, historiadores e filósofos. A partir desse momento discute-se a importância da razão e dos sentidos, em uma forma de racionalismo epistêmico, e a quem devemos confiar para um embate filosófico-científico, mais do que apenas metafísico.

O sistema astronômico de Copérnico bem como a Ciência Natural de Newton e Leibniz, nos dão clareza sobre como uma descoberta científica pode interferir no pensamento filosófico e vice-versa, já que muitas vezes a metodologia utilizada é que proporciona novas descobertas, e o avanço epistemológico obtido não se reduz à apenas ao cientista puro, mas ao ser humano integralmente, fazendo com que ele de forma interdisciplinar possa aumentar mais e mais o conhecimento de forma global e irrestrita.

Isso prova o teor interdisciplinar do tema deste trabalho, bem como a abordagem utilizada pelos autores, já que mais do que comparar modelos padrões com modelos não-padrões, estamos investigando as contribuições das mais diversas obras, em diversos departamentos e de que forma foram capazes de nos levar ao que chamamos de Ciência Moderna.

O século XVII é denominado por Whitehead⁴² como o século dos gênios, muito em função dos avanços científicos atingidos por Newton e Leibniz, não apenas pela criação do Cálculo, mas porque nesse período pudemos testemunhar a utilização de procedimentos matemáticos para elucidar experimentos físicos e uma forte geometrização da ciência do movimento/cinemática do movimento. Consequentemente tivemos metodologias científicas que romperam com o pensamento epistemológico aristotélico aplicado na Antiguidade e parte da Idade Média, e tal ação foi tão profunda que os historiadores denominaram como uma revolução epistemológica, uma revolução científica que nos levou à chamada ciência moderna e a filosofia moderna.

Esta revolução epistemológica e a ciência moderna, que é assim definida em função da criação de instrumentos técnicos que propiciaram a descrição e experimentação

⁴² Alfred North Whitehead nascido em 1861 foi um filósofo, lógico e matemático britânico. É o fundador da escola filosófica conhecida como a filosofia do processo, atualmente aplicada em vários campos da ciência, como dentre outros na ecologia, teologia, pedagogia, física, biologia, economia e psicologia.

científica, dando um suporte metodológico para a ampliação da percepção dos sentidos do homem. Ressaltamos que uma revolução ocorre em um processo longo de mudanças na forma de pensar e fazer ciência, e dizemos que ocorrera no século XVII porque entendemos que alcançara o seu auge nessa época, que fora aluída apenas no século XX, em função do novo paradigma da mecânica quântica.

Uma pesquisa científica não pode ser contaminada por métodos não racionais de investigação, sobretudo quando queremos estudar fenômenos naturais, que envolvem temas complexos sobre o entendimento sobre o mundo, e um certo conjunto de técnicas que regem a construção de uma Teoria do Conhecimento. Mas o que é afinal Epistemologia?

Epistemologia pode ser definida etimologicamente como discurso racional (*logos*) da ciência (*episteme*). A palavra grega *episteme* pode ser traduzida por conhecimento estabelecido, conhecimento seguro. A palavra grega *logos*, dona de várias acepções, pode ser aqui traduzida por “teoria racional [...]”. Epistemologia, a “teoria racional do conhecimento seguro”, a teoria da ciência. (CASTAÑON, 2007, p. 13).

Nesse estudo trataremos os termos que envolvem a Epistemologia, nas palavras de Castañon (2007) como “o termo Filosofia da Ciência, ou seja, o estudo sistemático das condições de possibilidade, métodos e critérios deste corpo especial de conhecimento, o conhecimento científico.”.

Mas essas mudanças já eram sensíveis tempos antes, como pelo célebre Galileu Galilei que para muitos foi o expoente maior na criação do conceito de ciência e precursor da ciência moderna. A questão principal da ciência moderna é a técnica e ele já mostrava avanços na sua técnica de fazer ciência, priorizando a ação, a intervenção e o pragmatismo, e não apenas a contemplação, que era marcante na ciência anterior.

Na verdade, alguns estudiosos chamam esse período de pré-ciência, e um dos desafios epistemológicos em trabalhar com uma Filosofia Natural se dá em relação ao objetivo da pesquisa científica: a questão do que é a razão e o real, a razão e os resultados esperados *a priori*, como explica Bachelard:

[...] é erradamente que se pretende ver no real a *razão* determinante da objetividade, quando nunca se pode obter mais do que a *prova* de uma objetivação correta. << A presença da palavra real, como diz muito bem Campbell, é sempre o sinal de um perigo de confusão de pensamento.>> Se quisermos continuar na verdade, é preciso conseguir por o problema sistematicamente mais em termos de objetivação do que de objetividade. Determinar um caráter objetivo não é tocar num absoluto, é provar que se aplica corretamente num método. (BACHELARD, 1971, p. 40).

Estudar e conjecturar sobre a natureza, e não apenas contemplá-la, romper com a convicção grega de que natureza terrestre e celeste são regidas por leis diferentes e confiar nos procedimentos técnicos matemáticos para comprovar tais conjecturas, rompendo assim com a filosofia aristotélica dominante, permitiu ao homem o grande avanço técnico e

tecnológico que presenciamos até a atualidade, como é o exemplo da consolidação da Química⁴³, no século XVIII, como ciência independente da farmácia, alquimia ou medicina.

Esse *status* de pré-ciência se dá pela falta de liberdade do homem pensar a natureza pela razão que o filósofo busca ter, e não só pela contemplação, como vemos em Bachelard (1978, p.81) “O espírito pré-científico não podia pensar *formalmente* os conceitos elementares, porque nunca os libertava *totalmente* do seu conteúdo. Não via que as essências devem ser definidas a partir das ex-estâncias, como agrupamento de condições lógicas.”

O conhecimento *a priori*, base de muitas correntes epistemológicas, é amplamente discutido sobretudo a partir dessa época e das descobertas obtidas em tal período, e o positivismo vem discutir essa e outras questões. Um dos expoentes dessa cena foi Augusto Comte (1798-1857), o qual discutiu a filosofia que se faz a partir das ciências exatas e a metafísica como meio de obtenção de ciência

Para Comte, a Filosofia só é digna desse nome enquanto não se diversifica da própria Ciência, marcando uma visão orgânica da natureza e da sociedade, fundada nos resultados de um saber constituído objetivamente à luz dos fatos ou das suas relações. Tal posição e tendência de Augusto Comte, baseando o saber filosófico sobre o alicerce das ciências exatas, estavam destinadas a obter repercussão muito grande em sua época, notadamente por sua declarada aversão à Metafísica e a quaisquer formas de conhecimento *a priori*, isto é, estabelecido independentemente da experiência, ou anteriormente à verificação dos fatos. (REALE, 2002, p.3).

Um dos legados dessa chamada Revolução Científica se dá em um aspecto crucial para a teoria do conhecimento, quando agora a Ciência e a Filosofia passam a ser parceiras no processo de construção científica, em que simultaneamente faz com que o cientista crie ciência de forma embasada, mas que possa sempre permitir um estado de falseabilidade dela, ainda que em uma ciência dita exata

Entre Ciência e Filosofia não haveria, portanto, uma diferença de essência ou de qualidade, mas, tão-somente, uma diferença de grau ou de generalidade. O físico ou o químico elaboram, apreciam um aspecto particular da realidade ou de algo: o mesmo faz o biólogo, o astrônomo ou o matemático. Cada qual tem seu campo de pesquisa e unifica e delimita os resultados de suas indagações. A Ciência é, portanto, um saber parcial unificado, referente a um aspecto abstraído de outros aspectos possíveis, como condição de observação e análise, nunca deixando de ser observação de fatos e de relações entre fatos. (REALE, 2002, p 3)

Assim como o Iluminismo está para a Revolução Francesa, o sistema Heliocêntrico está para o Racionalismo e o Renascimento, as Geometrias Não-Euclidianas⁴⁴ estão para a

⁴³ Química é a ciência que estuda a matéria, suas estruturas e propriedades, bem como as transformações que ela pode desenvolver.

⁴⁴ Na matemática, uma geometria não euclidiana é uma geometria baseada num sistema axiomático distinto da geometria euclidiana. Modificando o axioma das paralelas, que postula que por um ponto exterior a uma reta passa exatamente uma reta paralela à inicial, obtêm-se as geometrias elíptica e hiperbólica, dentre outras.

Epistemologia de Gaston Bachelard⁴⁵, a lei da gravitação universal⁴⁶ e a Filosofia Natural de Newton, os números irracionais estão para a inconsistência da filosofia pitagórica de mundo, os números imaginários e a Mecânica Quântica de Max Planck, os mônadas e a Lógica Matemática de Leibniz, onde uma ideia condenada ao fracasso por ser totalmente descabida no paradigma dominante, e alguns pensadores chegaram ao ponto de esconder tais descobertas por medo de serem criticados, ridicularizados, exilados ou mortos como a história apresenta.

O conceito de Ciência Moderna é bastante discutível, já que em diferentes épocas e lugares a ideia de Ciência já se mostrava presente, visto que o homem já mostra o desenvolvimento dela há muitos séculos, e em diversas civilizações. A Filosofia, assim como a Matemática, estão no cerne dessa questão, visto que os avanços tecnológicos, metodológicos, e a forma de pensar destas, influenciam o homem e a sua forma de produzir conhecimento, como vemos por Rosa (2012):

Diante da falta de consenso quanto ao conceito de Ciência, uma dificuldade adicional, e inicial, no estudo da sua evolução, está na determinação de quando e onde foi ela criada. Para os que sustentam ter ocorrido tal criação no Período Histórico, três principais correntes podem ser detectadas: uma recua o surgimento da Ciência às primeiras civilizações, como a mesopotâmica, a egípcia, a chinesa e a indiana; outra defende a Grécia do século V como berço da Ciência, produto direto da Filosofia, à qual estaria estreitamente vinculada e subordinada, por muitos séculos; e uma terceira considera a Ciência uma recente criação europeia, da Era Moderna (século XVI).(ROSA, 2012, p. 23)

Acreditamos que a análise não-standard de Robinson está para uma nova Revolução Epistemológica Moderna, e mais uma vez a história se repete, e o conjunto dos números ganha outros elementos, agora os números hiper-reais⁴⁷. Este fato pode ser um marco e uma nova Revolução Científica, sobretudo por defender uma metodologia onde prevalece o rigor semântico e sintático. É, portanto, uma revolução epistêmica, uma vez que trazemos a discussão sobre os números para um âmbito não só matemático: os números são dos matemáticos, mas o infinito é do mundo, ou seja, dos filósofos.

3.3 ISAAC NEWTON E A SUA FILOSOFIA

Newton foi um matemático, físico, teólogo e astrônomo, conhecido em sua época como um Filósofo Natural e um dos cientistas mais influentes da história, além de ser um dos protagonistas na chamada Revolução Científica.

⁴⁵ Gaston Bachelard (Bar-sur-Aube, 27 de junho de 1884 — Paris, 16 de outubro de 1962) foi um filósofo, químico e poeta francês. Seu pensamento está focado principalmente em questões referentes à filosofia da ciência.

⁴⁶ A gravitação universal é uma lei que permite calcular a força gravitacional exercida entre duas massas separadas com certa distância.

⁴⁷ O termo "hiper-real" foi introduzido por Edwin Hewitt em 1948.

Além das suas contribuições na filosofia, foi um dos grandes contribuintes dos alicerces da mecânica clássica e um dos criadores do Cálculo Diferencial.

Isaac Newton, no prefácio da primeira edição dos *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, escreve:

(...) ofereço esta obra como os princípios matemáticos da filosofia, pois todo o tema da filosofia parece consistir no seguinte -- dos fenómenos do movimento investigar as forças da natureza e, então, destas forças demonstrar os outros fenómenos; e com este propósito são apresentadas as proposições gerais do primeiro e segundo livros. No terceiro livro dou um exemplo disto na explicação do Sistema do Mundo; pois, pelas proposições matematicamente demonstradas no primeiro livro, no terceiro eu derivo dos fenómenos celestes a força da gravidade através da qual os corpos são atraídos para o Sol e para diversos planetas. Então destas forças, usando outras proposições matemáticas, deduzo o movimento dos planetas, dos cometas, da lua e do mar (...)⁴⁸

“Newton, o primeiro inventor de um sistema de física teórica, imenso e dinâmico, não hesita em acreditar que conceitos fundamentais e leis fundamentais de seu sistema saíram diretamente da experiência. Creio que se deve interpretar neste sentido sua declaração de princípio *hypotheses non fingo*.” (EINSTEIN, 1981, p.149).

É indiscutível a genialidade de Newton, bem como o quanto proporcionou de avanços científicos. Contudo não se pode negar em alguns momentos a falta de rigor semântico de Newton, ou a falta de preocupação com o rigor técnico de algumas de suas teorias. Entendemos que isso pode ter permitido tais avanços, já que Newton não ficara preso às técnicas aplicadas em sua época e por isso é um marco na História das Ciências, promovendo mudanças filosóficas e epistemológicas impactantes.

Muitas vezes vemos em Newton uma crença de que a ciência pode criar conjecturas suficientemente precisas sobre uma observação bastando para o seu agente científico dados suficientes. Isto sinalizou a fundação do que mais tarde ficou conhecido como determinismo científico, e que só fora abalado no século XX com suas publicações sobre a Teoria da Relatividade.

O determinismo permitiu a Newton deduzir diversos resultados pela observação de fenômenos naturais, e por isso é considerado o criador da Filosofia Natural. A partir desse marco, não mais apenas se contempla a natureza, pode-se tirar conclusões e as provar indutivamente.

(...) Ainda não consegui descobrir a razão dessas propriedades da gravidade a partir dos fenômenos, e não invento hipóteses. Portanto tudo o que não é deduzido dos fenômenos deve ser chamado de hipótese; e as hipóteses, se metafísicas ou físicas, baseadas em qualidades ocultas, ou mecânicas, não tem lugar na filosofia experimental. Nessa filosofia

⁴⁸ NEWTON, Isaac, *Principia mathematica philosophiae naturalis*, ed. Cajori, T.I, p.21 (1962, University of California Press), p.XVII. Esta edição corresponde à primeira tradução em língua inglesa feita por Andrew Motte sobre a última edição em idioma latino, publicada no ano de 1726, ainda em vida de Newton e por ele revista.

experimental proposições são deduzidas [inferidas] de fenômenos e [depois] generalizadas por indução (NEWTON, 1999, p.943).

As suas publicações renderam à Newton diversas críticas. A frase *Hypotheses non fingo* foi anexada por meio de um ensaio, “*General Scholium*”, à segunda edição do *Principia* de 1713, em resposta a críticas que recebeu após a publicação do *Principia* em 1687, o que contraria e muito a filosofia natural de Descartes e de Leibniz, e tem profunda discussão de âmbito metodológico, metafísico, teológico e científico. A contradição se dá aqui pois o próprio Newton, assim como Kepler, conseguiu descobrir incríveis resultados, principalmente em relação a Lei da Gravitação Universal, justamente por formar hipóteses, como defendido pelos filósofos John Herschel e William Whewell

Críticos desse método (método da hipótese), apontavam que hipóteses poderiam sempre ser ajustadas artificialmente para acomodar qualquer quantidade de dados. Mas foi notado que algumas dessas teorias tinham a virtude adicional de gerar previsões específicas de fenômenos até então não observados assim, cientistas como John Herschel e William Whewell argumentaram que hipóteses que salvam fenômenos poderiam ser justificadas quando fossem confirmadas por tais ‘novos’ fenômenos. (POLISELI, 2021, p. 173).

E aqui temos uma questão importante: em que momento o filósofo pode formar hipóteses e quando deve renunciar a ela se ainda não confirmada?

Newton e suas quantidades fluentes, Leibniz e seus infinitésimos, de alguma forma, levantaram hipóteses e conta a história, por meio dos diversos cientistas que desde então tentam provar que estavam corretos ou incorretos, provar suas afirmações ou negá-las, e não há um consenso acadêmico ainda sobre elas.

Nos livros didáticos temos a chamada definição formal de limite. Portanto Newton não teria definido formalmente o conceito de limites. Tal definição foi feita por Karl Weierstrass (1815-1897) no século XIX

O número L é o limite da função $f(x)$, onde $x = x_0$ se, dado qualquer número arbitrariamente pequeno ε , outro número δ possa ser encontrado tal que para todos os valores de x diferindo de x_0 por menos que δ , o valor de $f(x)$ diferir de L por menos que ε ” (BOYER, 1949, p. 287, tradução nossa)

Os autores desse estudo acreditam que as hipóteses formuladas por Newton e Leibniz devem sim ser renunciadas, por se tratar de fatos arbitrários, já que Newton nega a existência dos infinitesimais de Leibniz, e esse não nos traz uma definição formal dos mesmos, ainda que claramente os utilize como ferramentas na sua matemática.

Weierstrass formaliza os limites de Newton, mas usa δ e ε , que nada mais são do que os infinitésimos de Leibniz, mas que não têm o rigor matemático que se espera, já que se supõe existir um número real positivo menor que qualquer número real, o que nos leva a um questionamento epistemológico e a repensar a base na Análise Real com a teoria do Conjunto dos Números Reais, isto é, a matemática que é conhecida como a mãe das

Ciências Exatas pode ter uma das suas principais disciplinas baseada em hipóteses úteis, em uma prática filosófica *ad hoc*.

Embora Newton tenha diversos escritos sobre o seu método, jamais deixara claro a técnica do seu método científico, de acordo com o epistemólogo Laudan⁴⁹. O vocabulário utilizado, sobretudo no que se refere ao seu método investigativo, “foi vaga e inconsistentemente aplicada”, Newton não esclarece o real sentido dos termos “não invento hipóteses”, o que significa “deduzir” ou “induzir” leis de fenômenos naturais.

Newton no livro II do *Principia* parece apontar uma preocupação com o seu método filosófico na construção do cálculo como descritivo dos fenômenos naturais, já que o processo indutivo não deve ser iludido por hipóteses.

Na filosofia experimental devemos considerar as proposições inferidas pela indução geral a partir dos fenômenos como precisamente ou muito aproximadamente verdadeiras, apesar de quaisquer hipóteses contrárias que possam ser imaginadas, até o momento em que outros fenômenos ocorram pelos quais elas possam ou ser tornadas mais precisas, ou fiquem sujeitas a exceções.

Newton, portanto, diz se utilizar da indução⁵⁰ como técnica metodológica, mas ainda alega não montar hipótese. No entanto vemos em seus trabalhos uma forte metodologia matemática utilizada no intuito de dar segurança aos seus escritos, o que parece contrariar o método dito indutivo

Indução é uma argumentação na qual, a partir de dados singulares suficientemente enumerados, inferimos uma verdade universal. Enquanto na dedução a conclusão deriva de verdades universais já conhecidas, partindo portanto do plano do inteligível, a indução, ao contrário, chega a uma conclusão a partir da experiência sensível, dos dados particulares. (ARANHA, 1993, p.115)

Confirmando o nosso questionamento, mas ainda não diminuindo o poder da técnica aplicada por Newton, Aranha (1993) reitera

Apesar da aparente fragilidade da indução, que não possui o rigor do raciocínio dedutivo, trata-se de uma forma muito fecunda de pensar, sendo responsável pela fundamentação de grande parte dos nossos conhecimentos na vida diária e de grande valia nas ciências experimentais. (ARANHA, 1993, p.118)

Assim o chamado Estilo Newtoniano é visto por muitos como um método indutivo e hipotético-dedutivo em uma ordem pré-estabelecida, o que também não é uma unanimidade conceitual acadêmica.

⁴⁹ Foi um filósofo americano da ciência e epistemólogo. Criticou fortemente as tradições do positivismo, realismo e relativismo, e defendeu uma visão da ciência como uma instituição privilegiada e progressista contra os desafios populares. A visão filosófica de Laudan das tradições de pesquisa é vista como uma importante alternativa aos programas de pesquisa de Imre Lakatos.

⁵⁰ O termo indução utilizado nesse trabalho é tratado em termos de metodologia filosófica e não no sentido da indução matemática ou indução finita.

O método indutivo utilizado por Newton em sua matemática pode ser explicado pela presença do mesmo método em sua filosofia, como podemos ver nos trechos do Livro III do *Principia*, onde quatro regras são demarcadas por ele:

Regra I

Não devemos admitir mais causas para as coisas naturais do que as que são verdadeiras e suficientes para explicar suas aparências.

Regra II

Portanto, aos mesmos efeitos naturais temos de atribuir as mesmas causas, tanto quanto possível.

Regra III

As qualidades dos corpos que não admitem intensificação nem diminuição de graus, e que pertencem a todos os corpos dentro do alcance de nossas experiências, devem ser consideradas como qualidades universais de todos os corpos de qualquer tipo.

Regra IV

Na filosofia experimental devemos considerar as proposições inferidas pela indução geral a partir dos fenômenos como precisamente ou muito aproximadamente verdadeiras, apesar de quaisquer hipóteses contrárias que possam ser imaginadas, até o momento em que outros fenômenos ocorram pelos quais elas possam ou ser tornadas mais precisas, ou fiquem sujeitas a exceções (NEWTON, 1952, p 185-186).

Para Newton, portanto, a Natureza tem sempre um propósito e o seu pragmatismo se mostra em suas leis, onde cada uma delas tem uma razão de ser, e superficialidades são excluídas já que aumentam o grau de complexidade e a Natureza se faz de forma ingênua, com a mesma relação para todos os entes de mesma classificação ontológica. Com partículas menores impenetráveis ainda que divididas *ad infinitum*, e como já apontado nesse estudo antes e de ampla anuência de seus autores, a inconsistência maior denunciada por vários estudiosos, se dá principalmente pelo fato de que parece que Newton quebra a sua Regra IV.

Já que a filosofia experimental e o método indutivo devem, como o próprio Newton declara, ter o cuidado para não ser ludibriado por hipóteses, mas o fato dos seus limites parecerem cumprir o que a Natureza demonstra, sobretudo na cinemática dos corpos, parece ter dado a Newton a falsa impressão de que os tais números muito pequenos não existirem de forma mais profunda e rigorosa, mas apenas como um ser a ser ignorado.

O livro *Principia* recebeu diversas críticas nos anos que seguem a sua publicação e reedições onde alguns prefácios foram incluídos e da tradução de Trieste et al. (2016) podemos repercutir as explicações dadas por Newton na tentativa de responder a tais julgamentos sofridos pela obra:

Prefácio de Newton à Primeira Edição:

“Já que os antigos (como nos diz Pappus) consideravam a ciência da mecânica da maior importância na investigação das coisas naturais, e os modernos, rejeitando formas substanciais e qualidades ocultas, têm se esforçado para sujeitar os fenômenos da natureza às leis da matemática, cultivei a matemática, neste tratado, no que ela se relaciona à filosofia.”

“...mas como os artesãos não trabalham com rigor perfeito, diferenciam a mecânica da geometria, o que é perfeitamente preciso é chamado geométrico, o que é menos rigoroso é chamado mecânico. No entanto, os erros não estão na arte, mas nos artesãos.”

“...a geometria não nos ensina a traçar essas linhas, mas exige que sejam traçadas...a qual, então, mostra como os problemas podem ser resolvidos através dessas operações...”

“...desenhar linhas retas e círculos é um problema, mas não um problema geométrico. A solução deste problema é exigida da mecânica, e seu uso é mostrado pela geometria; e é a glória da geometria que, a partir desses poucos princípios, trazidos do nada, seja capaz de exibir tantos resultados.”

“...por muitas razões, sou induzido a suspeitar de que todos eles(fenômenos da Natureza) possam depender de certas forças pelas quais as partículas dos corpos, por algumas causas até aqui desconhecidas, ...sendo desconhecidas essas forças, os filósofos até agora têm tentado em vão a investigação da Natureza; mas espero que os princípios aqui expostos tragam alguma luz, seja a esse ou a algum outro método mais verdadeiro de filosofar.”

Peço enfaticamente que o que aqui realizei seja lido com indulgência e que meus trabalhos em um assunto tão difícil sejam examinados não tanto com espírito de censura, mas com o de reparar seus defeitos. (NEWTON, Cambridge, Trinity College 8 de maio de 1686).

O tom utilizado por Newton nesse prefácio incluído na segunda edição mostra que a primeira edição sofrera duras críticas no que se refere ao uso da matemática como embasamento à mecânica, prática incomum na época. Ele defende que a usou no que se relaciona com a filosofia, e que a geometria é uma ferramenta e não substitui a sua mecânica ou mesmo o seu estudo sobre os fenômenos da Natureza.

Aqui temos ao mesmo tempo a brilhante ação de Newton em inaugurar o que hoje chamamos de determinismo, onde as comprovações científicas se dão pela matemática e o seu rigor técnico, mas também vemos que ele ainda não depositava toda a sua crença de sua mecânica na matemática, o que provavelmente o fez não ter o rigor esperado pela Análise Matemática moderna.

Prefácio de Cotes à Segunda Edição:

“... a partir de alguns fenômenos selecionados, deduzem, por análise, as forças da Natureza e as mais simples leis de forças, e daí, por síntese, mostram a constituição do resto. Está é a melhor forma de filosofar, que nosso renomado autor coerentemente preferiu abraçar em detrimento do resto, e imaginou merecer ser cultivada e adornada pelos seus excelentes esforços. Desta, ele nos deu um exemplo ilustre com a explicação do Sistema do Mundo, deduzido da Teoria da Gravidade. Que o atributo da gravidade fosse encontrado em todos os corpos, outros suspeitaram antes dele, ou imaginaram, mas ele foi o único e primeiro filósofo que pode demonstrá-lo a partir das aparências e torná-lo uma base sólida para as especulações mais nobres.”

“Sei que algumas pessoas de grande renome, demasiado imbuídas de certos preconceitos, estão resistindo em aceitar este novo princípio e estão dispostas a preferir noções incertas às certas...”

“Esses homens podem chamá-las (as forças da natureza como a gravidade) de milagres ou qualidades ocultas, mas nomes maliciosamente dados não devem ser uma desvantagem para as coisas, a menos que esses homens

digam, por fim, que toda filosofia deva ser fundada no ateísmo. A filosofia não deve ser corrompida em cumplicidade com esses homens, pois a ordem das coisas não será mudada.”

(Roger Cotes Membro do Trinity College, Professor Catedrático de Astronomia e Filosofia Experimental. Cambridge, 12 de maio de 1713.)

Na segunda edição do *Principia*, parece ter havido um ataque mais intenso à sua filosofia, e ao método experimental indutivo, o que é defendido fortemente por Cotes como ser uma prática confiável, que levou Newton à incríveis descobertas inéditas e totalmente confiáveis, ainda que as tais forças ocultas não tenham sido elucidadas até então. Lembramos ao leitor que o objetivo aqui não é desmerecer, em hipótese alguma, o valor dos trabalhos de Newton, mas para darmos uma dimensão da intensidade das críticas, seja no âmbito técnico quanto filosófico, o que é totalmente normal, quando algo tão difícil e inédito é publicado.

Portanto como esse trabalho propõe mudanças, ainda que epistemológicas, na teoria apresentada por Newton e até mesmo de Leibniz, temos aqui materializada mais uma comunicação da enorme contribuição científica do trabalho incrível desenvolvido por esses engenhosos cientistas.

Nessa edição do *Principia* vale salientar que a palavra hipótese foi substituída pela palavra regra, provavelmente numa tentativa de se defender de alguns dos ataques, que alegavam que Newton teria feito um jogo matemático para demonstrar as suas descobertas, uma vez que a sua técnica se baseou no fato de que as leis da física e matemática advêm da observação e da experimentação. Tal fato o tornou o maior representante da Filosofia Experimental e do empirismo matemático, visto que ele toma a matemática como um modelo, mas não a causa ou uma congruência do próprio fenômeno.

Em uma carta enviada ao seu adversário Robert Hooke⁵¹, em 1676, Newton escreveu, “O que Des-Cartes fez foi um bom passo. Você contribuiu muito de várias formas, especialmente tomando as cores de placas finas em consideração filosófica. Se eu vi mais longe foi por estar sobre ombros [sic] ("sholders") de gigantes.”

Em uma leitura ingênua temos a figura de um cientista que enobrece, admira e se utiliza das descobertas dos pensadores e as descobertas do seu tempo e de épocas passadas, bem como uma expressão de reconhecimento e admiração à Hooke, que até então trocavam diversas correspondências e a escrita demonstrava um respeito de ambas as partes. Mas para alguns autores atuais, a frase seria uma provocação sarcástica sobre a situação física de Hooke que sofria de cifose.

⁵¹ Robert Hooke (1635–1703) foi um cientista inglês, nascido em Freshwater. Foi estudar em Oxford University, em 1653, onde começou como assistente de laboratório de Robert Boyle, em 1655, que futuramente colaborou para os estudos sobre gases, se destacando em mecânica.

Isaac Newton, embora tenha tido contado com a filosofia aristotélica em sua trajetória acadêmica e estudos sobre Platão, não as via como ferramentas únicas de desenvolvimento científico, mas entendia que a busca pelas respostas, pelas verdades está acima de qualquer método único ou filósofo único, e este escreve “Platão é meu amigo — Aristóteles é meu amigo — mas meu melhor amigo é a verdade”⁵² (NEWTON, 1664).

Então mesmo demonstrando uma independência filosófica e metodológica, se mostra influenciado por técnicas de filósofos anteriores, e vemos em alguns de seus textos a influência aristotélica bem presente, onde a matemática ocupa uma posição primeira na hierarquia científica, mas Newton pensou em uma filosofia natural, e se a filosofia platônica ou aristotélica, em algum ponto, se mostrar coerente e verdadeira, para Newton será bem-vinda.

Embora com algumas divergências matemáticas, o que notadamente distingue os cálculos de Newton e Leibniz, é a filosofia, formações diferentes, objetivos diferentes. Se mostraram sensíveis tais diferenças metodológicas, em função das diferentes influências de escolas filosóficas em ambos os cientistas. Agora iremos nos aprofundar na filosofia presente nos trabalhos do outro criador do cálculo: Gottfried Wilhelm Leibniz.

3.4 LEIBNIZ E A SUA FILOSOFIA

Os estudos de Leibniz anteciparam a filosofia analítica⁵³ e a lógica moderna. Leibniz, Descartes e Spinoza são considerados os maiores defensores do racionalismo⁵⁴ no século XVII. Uma análise de seus escritos nos permite classificar a sua filosofia como uma forma de filosofia escolástica, já que Leibniz não se mostra um empirista⁵⁵ mas sim um pensador que aplica a razão às definições canônicas ou antecessores. Se destaca o fato de que embora racionalista, Leibniz não seguia na totalidade a filosofia de Descartes, como vemos em Marcondes

⁵² Amicus Plato — amicus Aristoteles — magis amica veritas.

⁵³ A filosofia analítica é uma vertente do pensamento contemporâneo reivindicada por filósofos bastante diferentes e com duas caracterizações distintas, cuja filosofia precursora surgiu da superação da filosofia sintética do Século XIX. Originariamente, seu ponto comum foi a ideia de que a filosofia trata da análise do significado de enunciados linguísticos; isto é, a filosofia reduz-se a uma pesquisa sobre a linguagem..

⁵⁴ "Como a epistemologia (vertente filosófica que investiga as teorias do conhecimento), o racionalismo afirma que todo o conhecimento humano advém da pura racionalidade e do intelecto. As experiências práticas, para os racionalistas, não têm valor cognitivo, podendo inclusive enganar-nos ao oferecer-nos impressões errôneas. Os racionalistas defendem que as ideias surgem da pura e simples capacidade racional e impulsionam o intelecto, formando os conhecimentos com base nas leis universais da razão."

⁵⁵ O empirismo defende que toda a nossa estrutura cognitiva é formada com base na experiência prática, de modo que, quanto mais vastas, intensas e ricas as nossas experiências, mais amplo e profundo torna-se o nosso conhecimento. Aristóteles já defendia que o conhecimento advém da experiência, contrariando as teses platônicas, que eram essencialmente inatistas.

Nem todos os racionalistas desse período foram partidários da filosofia cartesiana, porém todos tomaram de alguma forma, ainda que criticamente, a filosofia de Descartes como referência e até mesmo como ponto de partida. É o caso de alguns dos pensadores mais representativos do racionalismo do séc. XVII que examinaremos em seguida, como Spinoza e Leibniz, e, em parte, Pascal. (MARCONDES, 2010, p. 210).

Leibniz, diferente de muitos de sua época, possuía formação universitária completa na área da filosofia, onde teve grande influência escolástica e aristotélica, o que pode evidenciar a sua prática analítica e racionalista em obras de estudo do Cálculo, uma clara metodologia construtiva de conceitos como de suas diferenciais e integrais.

Leibniz estudou incessantemente as obras do filósofo Francisco Suárez, um dos maiores escolásticos do século XVI e se mostrou bastante interessado nas novas metodologias e conclusões atingidas por filósofos como Descartes, Boyle e até mesmo o seu rival na paternidade do cálculo, Isaac Newton. Mas mesmo com tais influências, Leibniz e seus incômodos, tomou uma direção diferente, e se fez um precursor da lógica e da analítica moderna, bem como da filosofia da linguagem do século XX, o que acabou por influenciar Abraham Robinson e seu método e conclusões bem próximos do que Leibniz iniciou.

Das tantas influências filosóficas que Leibniz recebeu, podemos destacar, em suas próprias palavras, a influência que obtivera pela platonista, Anne Conway⁵⁶:

Os meus [sentimentos] em filosofia aproximam-se mais dos da falecida Condessa Conway, e defendem uma posição mediadora entre Platão e Demócrito, porque acredito que tudo ocorre mecanicamente como Demócrito e Descartes afirmam, contra a opinião de Henry More e de seus seguidores, e, no entanto, [também defendo] que tudo ocorre de acordo vitalmente e segundo causas finais, estando tudo cheio de vida e de percepção, contrariamente à opinião dos atomistas.

Leibniz é considerado um dos mais renomados racionalistas modernos, mas é importante frisarmos que Racionalismo é um termo muito geral, e não é uma questão de unanimidade que Leibniz fora realmente, literalmente um racionalista. Sobre o racionalismo Huenemann escreve

“Falando de uma forma muito ampla, é a visão de que o arcabouço mais íntimo do universo e o arcabouço mais íntimo da mente humana são um só e o mesmo. A razão – *ratio* em racionalismo – descreve tanto o que pode existir quanto o que pode ser pensado.(HUENEMANN, 2012, p. 98).

E ainda:

“Os racionalistas sustentam que existem algumas afirmações cuja justificativa (ou seja, cuja prova) não depende da experiência, mas se apoiam em vez disso na razão. Observe que isso não significa que alguém venha a acreditar nestas afirmativas sem experiência alguma. Presumivelmente, você tem que conhecer uma linguagem, e ter algum grau de sofisticação intelectual, antes que possa entender o que estas afirmações significam...Sei que elas (afirmações) são verdadeiras porque realizei muitos experimentos e nunca observei quais são as exceções a

⁵⁶ Professora adjunta da Faculdade de Educação e membro do PPGLM do Departamento de Filosofia da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ).

elas, nós suspeitaríamos que estas declarações estivessem ou brincando conosco ou que não teríamos entendido o que elas estavam dizendo.” (HUENEMANN, 2012, p. 105).

Então se pode discutir a afirmação de que Leibniz era um ferrenho racionalista, visto que ele de algum modo se utilizou de experimentos mentais para interpretar certos fenômenos, mas não podemos negar que Isaac Newton certamente um “racionalista puro” não era, já que sua obra é uma representante clara de uma Filosofia Experimental.

Muitas vezes temos uma tendência a acreditar que um racionalista tem a razão por si só como a única forma de conhecimento confiável, mas mesmo o racionalista pode confiar em premissas máximas, como vemos em Huenemann (2012) “a justificativa de algumas afirmações importantes independe de qualquer experiência particular”, então um sistema axiomático é sim passível de construção de conhecimentos. Portanto, a matemática e sua lógica são confiáveis *a priori*. Leibniz dessa forma mostrou ser um racionalista quando na criação do seu Cálculo, já que se baseou em premissas seguras, como em Huenemann (2012, p. 123)) vemos:

Descartes, Espinosa e Leibniz acreditavam que existem importantes verdades *a priori*. Além disso, eles todos concordam em várias afirmações interessantes que são *a priori* – a afirmação de que Deus existe, a afirmação que tudo tem uma causa, e em todas as alegações da matemática.

Nos escritos de Leibniz, Discurso de Metafísica, na seção 29 – Todavia, pensamos com as nossas próprias ideias e não com as de Deus, ele escreve:

Não sou, porém, da opinião de alguns hábeis filósofos, que parecem sustentar que as nossas próprias ideias estão em Deus, e de modo nenhum em nós. Isto, quanto a mim, deve-se a eles não terem ainda considerado suficientemente o que acabamos de explicar aqui, acerca das substâncias, nem toda a extensão e independência da nossa alma, que faz que encerre tudo o que lhe acontece e que expresse Deus e, com ele, todos os entes atuais e possíveis, como um efeito exprime a sua causa. Além disso, é uma coisa inconcebível que eu pense com as ideias de outro. É necessário que a alma seja realmente afetada de um certo modo quando pensa em algo, e tem de haver nela de antemão, não só a potência passiva de ser afetada assim, a qual está já totalmente determinada, mas ainda uma potência ativa, em virtude da qual sempre houve, na sua natureza, sinais da futura produção desse pensamento e disposições para o produzir no seu tempo. E tudo isto envolve já a ideia compreendida nesse pensamento. (LEIBNIZ, 1985, p. 69-70).

Leibniz era crente à Deus e cristão, mas sempre trabalhou com a premissa que os dogmas cristãos pudessem se conciliar com a sua metafísica, possibilitando uma independência de sua metafísica no que se refere à compreensão e perfeição desta. Leibniz é um racionalista e acredita em ideias *a priori*, vendo em Deus um depósito dessas, mas acredita que devemos utilizá-las na criação na nossa metafísica de mundo.

Leibniz e Newton se distanciam em alguns momentos em suas filosofias, e em suas técnicas matemáticas, o que causou diferenças importantes em seus cálculos, mas em

muitos momentos se valeram de metodologias muito próximas, já que sem a intuição e a imaginação tais resultados altamente afastados de uma realidade racional jamais teriam sido descobertos, já que a lógica traz o rigor, sobretudo o rigor matemático, mas a intuição permite ir além do que um sistema “real” e além do alcance dos nossos sentidos como vemos aqui:

Na verdade, “a lógica e a intuição têm cada uma seu papel necessário. Ambas são indispensáveis. A lógica, a única que pode dar a certeza, é o instrumento da demonstração: a intuição é o instrumento da invenção” (POINCARÉ, 1995, p.22-23).

Leibniz é considerado um dos criadores da lógica moderna e isso se dá muito em função do fato das suas obras embora permitindo a intuição e imaginação, em grande intensidade se mostra baseada no intelecto, que é lógico e confiável. Segundo Moreira (2003) Leibniz aceita a intuição como parte do método de construção científica, mas de forma materializada, e sobretudo descrita de forma simbólica, o que o faz um grade desenvolvedor da lógica matemática:

é através dos sentidos que podemos amparar o entendimento puro com instrumentos aptos a assegurar a certeza quando a intuição se esgota. A maneira como isso pode ser alcançado, estima, reside em tornar sensíveis os nossos pensamentos, recorrendo a traços materializados que os simbolizem. (MOREIRA, 2003, p. 72).

Em *Novos Ensaios*⁵⁷, livro II, capítulo V, Leibniz defende:

As ideias que se diz virem de mais de um sentido, como a do espaço, figura; movimento, repouso, são antes do sentido comum, isto é, do próprio espírito, pois são ideias do entendimento puro, que porém têm relação com o exterior, e que os sentidos fazem perceber; elas são também capazes de definições e demonstrações. (LEIBNIZ, 1989a, p.72)

Em seu escrito *Systeme nouveau de la nature et de la communication des substances, aussi bien que de l'union qu'il y a entre l'ame et le corps*, vol. IV, p. 477-487 (novo sistema da natureza e da comunicação das substâncias, bem como da união que há entre a alma e o corpo) com tradução de Nuno Ferro (2016), Leibniz nos dá uma satisfatória ideia do porquê da grandiosidade de sua contribuição como um dos criadores do cálculo, e do rigor matemático que apresentara

Ainda que eu seja um daqueles que trabalharam muito em Matemática, não deixei de meditar sobre a filosofia desde a minha juventude, pois sempre me pareceu que nela havia forma de estabelecer algo de sólido mediante claras demonstrações. Tinha entrado bem profundamente no país dos escolásticos, quando os Matemáticos e os Autores modernos me fizeram de lá sair ainda bem novo.

Leibniz demonstra mais uma vez que não é avesso aos experimentos mentais e que pode ser considerado um filósofo natural, quando escreve na mesma obra:

⁵⁷ Os *Novos Ensaios sobre o Entendimento Humano* são uma refutação capítulo-a-capítulo, seção-a-seção por Leibniz em relação a obra *Um Ensaio sobre o Entendimento Humano* de Locke.

Só os Átomos de substância, quer dizer, as unidades reais e absolutamente destituídas de partes, são as fontes das ações e os primeiros princípios absolutos da composição das coisas e como que os elementos últimos da análise das coisas substanciais. Poder-se-ia chamar-lhes pontos metafísicos; eles possuem qualquer coisa de vital e uma espécie de percepção, e os pontos matemáticos são os seus pontos de vista para exprimir o universo.

Leibniz em *Monadologia*, usa o termo Átomo da natureza, mas em suas palavras, é no sentido metafísico, mesmo que provavelmente uma ideia advinda da interpretação do mundo físico, um elemento indivisível, porém não material. Leibniz e a sua lógica universal, tende a estudar os objetos como um espaço relacional, e uma metafísica da substância, e para ele tudo representa uma entidade lógica, um número, como mostra Kant, em uma crítica à Leibniz, mas que entendemos ser um ponto positivo no cálculo e sua ciência natural em relação a de Newton:

Eis porque Leibniz, para quem todas as substâncias e mesmo os elementos da matéria representavam números, depois de lhes retirar pelo pensamento tudo o que possa significar uma relação exterior e, portanto, também a *composição*, fez delas sujeitos simples, com capacidade de representação, numa palavra, *mônadas*. (KANT, 2001, B 322)

Da discussão sobre quem foi o primeiro a pensar o cálculo, e às diferenças epistemológicas e filosóficas entre Newton e Leibniz, o mundo só teve a ganhar, pois esses dois gênios travaram uma batalha linda e as suas concepções distintas em diversas áreas do conhecimento nos trouxe contribuições inacreditáveis em um período tão curto de tempo.

Leibniz contraria a Newton e afirma que o espaço e o tempo são relativos, o que fora provado por Einstein no século XX, e a descoberta das partículas subatômicas, que permitiu enunciar a mecânica quântica, séculos depois, eram inimagináveis na época, mas Leibniz foi capaz, em algum grau, antecipar com a sua concepção metafísica de estrutura atomista baseada em sua concepção de Mônada.

Mônadas, representam um conceito crucial para a sua filosofia, visto que o mesmo se utiliza da ideia de substância simples que forma compostos, sendo ela indivisível, indissolúvel, e foi base para o seu cálculo infinitesimal, por se entender como as coisas primeiras de todas as coisas, como nas palavras de Leibniz, (2016, p. 39).

A Mônada de que vamos falar aqui não é outra coisa senão uma substância simples, que entra nos compostos; simples, quer dizer, sem partes.” e acrescenta “E é preciso que haja substâncias simples, visto que há compostos. Efetivamente, o composto não é outra coisa senão uma amálgama (amas) ou aggregatum dos simples.” (LEIBNIZ, 2016, p.39)

Na mesma obra Leibniz reforça a sua crença em uma substância simples formadoras na Natureza, mônadas são os átomos no sentido metafísico do autor: “Ora, onde não há partes, não há extensão, nem figura nem divisibilidade possível. E estas Mônadas são os

verdadeiros Átomos da Natureza e, numa palavra, os Elementos das coisas.” (LEIBNIZ, 2016, p. 39).

O universo para Leibniz é, portanto, um contínuo completo, denso, sem buracos, e de fato divisível ao infinito, já que cada menor de suas partes, os mônadas, é um ponto metafísico infinitesimal, tem-se um infinito continuum de infinitesimais.

Isto deve [sobre a ideia de número] entender-se com referência ao número *inteiro*. Pois do contrário o número na sua *latitude*, compreendendo o número rompido, o surdo⁵⁸, o transcendente e tudo aquilo que se pode tomar entre dois números inteiros, é proporcional à linha, e ali existe tão pouco *minimum* como no contínuo. Esta definição, que o número é uma multidão de unidades, só tem lugar nos inteiros. A distinção precisa das idéias na extensão não consiste na grandeza: pois para reconhecer distintamente a grandeza, cumpre recorrer aos números inteiros, ou aos Vejamos, pois, mais detalhadamente, o que significa P2: seja um corpo A, composto, como exige a metafísica leibniziana, por um número finito de elementos simples e indivisíveis [mônadas]. Como o que está em questão é a relação entre a divisibilidade do corpo e a divisibilidade do espaço, concebamos, separadamente de A, o espaço ocupado por A, o qual chamaremos de eA. O que P2 exige é que, ao ser dividido o corpo A, divida-se também, em igual medida, eA. Se A for decomposto em dois outros corpos B e C, estes, obviamente, serão partes de A, de modo que teremos entre A e B e entre A e C uma relação de todo e parte. Temos assim: $C + B = A$. Segundo o que exige P2, tal divisão implicará que a divisão de A trará consigo a divisão de eA em duas partes, eB e eC. Igualmente, entre eB e eA e entre eC e eA existirá uma relação de todo e parte, de tal forma que $eB + eC = eA$ outros conhecidos através dos inteiros; assim, da quantidade contínua é preciso recorrer à *quantidade discreta*, para ter um conhecimento distinto da *grandeza*. (LEIBNIZ, 1989, p.103).

Lúcio Lourenço Prado (2018) retrata a discordância de Kant com os indivisíveis e o isomorfismo do espaço físico e geométrico de Leibniz:

Em outras palavras, como foi afirmado no início deste trabalho, a *Monadologia Física* tem por objetivo provar basicamente duas coisas: a) que os corpos são compostos por elementos simples e indivisíveis, e b) que os espaços físico e geométrico são idênticos. (PRADO, 2018, p. 75).

Kant traz um argumento matemático heurístico como embasamento, contudo Prado alerta para um erro em sua composição, o que evidencia mais uma vez, a dificuldade filosófica de definir tais conceitos no que se refere às ciências naturais, o que ilustra o extraordinário trabalho dos filósofos que o tentaram:

Entretanto, ao oferecer uma das provas envolvidas na arquitetura lógica de seu escrito, ele supõe uma tese que, no fim das contas, é uma das teses a ser provada. Provar a infinita divisibilidade do espaço físico significa, em última instância, dentro do universo da *Monadologia Física*, provar sua identidade com o espaço geométrico. Porém, ao efetuá-lo, Kant supõe tal identidade. Estamos, pois, diante de uma argumentação circular: se é válido recorrer à oscilação entre os espaços geométrico e físico na demonstração da infinita divisibilidade do segundo, tal como Kant o fizera, significa que existe identidade entre os dois espaços; porém, se existe tal identidade, resulta provado que o espaço físico é de fato divisível ao infinito, pois o

⁵⁸ Número rompido: número fracionário. Número surdo: número irracional.

espaço geométrico indubitavelmente o é, o que torna a demonstração kantiana da proposição inútil. (PRADO, 2018, p. 75-76).

No âmbito da filosofia, Leibniz é provavelmente mais conhecido pela sua concepção dos mônadas ou unidades de substância como eternas e constitutivas do que é real em corpos e seus movimentos. Mônadas em algum nível assemelham-se aos átomos, porém, que caracteriza individualmente um mundo à parte em sua própria perspicácia, portanto uma espécie de átomo, mas não absoluto e sim relativo, o que o contrasta à Newton, e como cancelado por Einstein no século XX, Leibniz é veemente contra a ideia de espaço e tempo absolutos⁵⁹ de Newton e outros, em sua visão de espaço e tempo relativos.

Neste capítulo temos como objetivo principal fazer com que o leitor possa fazer um comparativo, observando semelhanças e discordâncias nas teorias filosóficas, metafísicas, epistemológicas, psicológicas e até mesmo matemáticas, entre os escritos de Newton e Leibniz, e nos permitimos, com o olhar científico moderno, apontar consistências e inconsistências, “erros” e acertos de ambos.

Para Newton, em *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural*:

I. O tempo absoluto, verdadeiro e matemático flui sempre igual por si mesmo e por sua natureza, sem relação com qualquer coisa externa, chamando-se com outro nome "duração"; o tempo relativo, aparente e vulgar é certa medida sensível e externa de duração por meio do movimento (seja exata, seja desigual), a qual vulgarmente se usa em vez do tempo verdadeiro, como são a hora, o dia, o mês, o ano.

II. O espaço absoluto, por sua natureza, sem nenhuma relação com algo externo, permanece sempre semelhante e imóvel; o relativo é certa medida ou dimensão móvel desse espaço, a qual nossos sentidos definem por sua situação relativamente aos corpos, e que a plebe emprega em vez do espaço imóvel, como é a dimensão do espaço subterrâneo, aéreo ou celeste definida por sua situação relativamente à terra.

Na figura e na grandeza, o tempo absoluto e o relativo são a mesma coisa, mas não permanecem sempre numericamente o mesmo. Assim, p.ex., se a terra se move, um espaço do nosso ar que permanece sempre o mesmo relativamente, e com respeito à terra, ora será uma parte do espaço absoluto no qual passa o ar, ora outra parte, e nesse sentido mudar-se-á sempre absolutamente. (NEWTON, 1952, p 195-196).

Na mesma obra Newton ainda reforça “Todos os movimentos podem acelerar-se e retardar-se, mas o fluxo do tempo absoluto não se pode mudar. A duração ou perseverança da existência das coisas é a mesma, quer os movimentos sejam rápidos, quer lentos, ou até nulos;”

⁵⁹ Originalmente introduzidos por Sir Isaac Newton, os conceitos de tempo e espaço absolutos forneceram uma base teórica que facilitou a mecânica newtoniana. De acordo com Newton, tempo e espaço absolutos, respectivamente, são aspectos independentes da realidade objetiva.

Leibniz, por outro lado, acredita na relatividade do espaço e do tempo, que de acordo com os avanços científicos dos dois últimos séculos, parecem configurar a verdadeira interpretação de Mundo:

O lugar é, ou particular — que se considera em relação a certos corpos — ou universal, que se refere a tudo, e em relação ao qual todas as mudanças com relação a qualquer corpo são tidas em consideração. Mesmo que não houvesse nada de fixo no universo, o lugar de cada coisa não deixaria de ser determinado pelo raciocínio, se houvesse meio de registrar todas as mudanças, ou se a memória de uma criatura fosse suficiente para isso, como se diz que os árabes jogam xadrez de memória e a cavalo. Contudo, o que não conseguimos compreender, não deixa de ser determinado na realidade das coisas. (LEIBNIZ, 1989, p.94)

E reitera:

É como acabo de dizer que o tempo e o espaço assinalam possibilidades além da suposição das existências. O tempo e o espaço são do tipo das verdades eternas que dizem respeito de maneira igual ao possível e ao existente. (LEIBNIZ, 1989, p.100)

Aos quinze anos entra para a universidade onde conclui o Bacharelato em Direito ao fim de dois anos e o Doutorado quando tinha vinte anos de idade. A sua Dissertação de arte combinatória de 1666, onde avança na ideia de tentar reduzir o pensamento a combinações de caracteres básicos de uma nova linguagem universal, tarefa que se dedicara até a sua morte, uma *Characteristica Universalis*, que reduziria a argumentação a um exercício algébrico, que para muitos foi uma tarefa parcialmente concluída nas mãos de George Boole⁶⁰, com o surgimento da Lógica Simbólica ou Álgebra Booleana.

A lógica simbólica moderna, de Leibniz em diante, derivou o motivo para progresso. Desde a publicação das Leis do Pensamento de Boole (1854), o assunto foi perseguido com certo vigor e alcançou um desenvolvimento técnico muito considerável. (RUSSELL, 1997, p 10) (Tradução nossa).

E confirma Olga Pombo (1997):

“o objetivo principal de Leibniz, a unidade possível dos seus trabalhos nesta matéria, seria então: investigar a origem motivada das línguas naturais; examinar os mecanismos responsáveis pela naturalidade do seu vocabulário (especialmente no caso do Alemão), a estrutura profunda que subjaz às particularidades gramaticais das várias línguas (investigações sobre a Gramática Racional) e aplicar essas descobertas à construção de uma nova língua filosófica dotada de uma similar, ou ainda maior, capacidade de revelação. Por essa razão, Leibniz exigirá da língua filosófica a construir que seja, também ela, natural, isto é, representativa do Mundo que nela se descobre e que ela visa dizer.” (POMBO, 1997, p. 24).

Já na dissertação de 1666, Leibniz mostrava a sua destreza com a lógica, que se tornaria o alicerce da lógica moderna concretizada no século XX, enunciando as premissas:

⁶⁰ George Boole matemático, filósofo britânico, criador da álgebra booleana, fundamental para o desenvolvimento da computação moderna.

1. Existem duas proposições primárias. O primeiro é o princípio de todos os teoremas ou proposições necessárias: o que é (então) ou é ou não é (então), ou vice-versa. O outro é a base de todas as observações ou proposições contingentes algo existe.
2. Demonstrações perfeitas são possíveis em todas as disciplinas.
3. Se considerarmos as disciplinas em si mesmas, elas são todas teóricas; mas suas aplicações, são todas práticas. Aqueles, porém, de forma que a aplicação segue mais imediatamente, são justamente chamados de práticos por excelência.
4. Embora todo método possa ser empregado em todas as disciplinas, à medida que seguimos os traços de nossa própria investigação ou da natureza produtora em nosso tratamento, ainda acontece nas disciplinas práticas que a ordem da natureza e a do conhecimento coincide, porque aqui a própria natureza da coisa se origina em nosso pensamento e dedução. Pois o fim em vista tanto nos leva a produzir os meios quanto nos leva a conhecê-los, o que não é verdade nos assuntos que podemos meramente saber, mas não podemos também produzir. Além disso, embora todos os métodos sejam permitidos, nem todos são convenientes.
5. O fim da lógica não é o silogismo, mas a simples contemplação. A proposição é, de fato, o meio para esse fim, e o silogismo é o meio para a proposição.

(tradução nossa)

Uma das maiores virtudes de Leibniz e o seu cálculo, se deu na interpretação simbólica dos fenômenos da natureza, e a ideia dos Mônadas, e a utilização dos seus infinitesimais, pode ser respondida como uma ação do filósofo natural no intuito de garantir condições de uma garantia na confiabilidade do conhecimento adquirido, e na crença de se forem eleitos os elementos de um conjunto de símbolos, alcançaríamos sucesso na empreitada que se põe.

Uma simbologia nos moldes em que Leibniz parece pretendê-la deve contemplar duas exigências: primeiro que todas as operações dos nossos raciocínios, todas as operações lógicas formais, sejam representáveis adequadamente por caracteres; segundo, que ela viabilize que todas e apenas as ideias envolvidas em uma determinada ideia sejam de algum modo abarcadas no caráter simbolizando a referida ideia.(MOREIRA, 2003, p. 75)

Leibniz, embora tenha apresentado uma lógica matemático-filosófica, mais sustentável que a de Newton, também encontrou problemas para esclarecer a ideia de seus números infinitesimais, e se mostrou, assim como Newton, preocupado em âmbito técnico em obter os resultados numéricos que deram base ao seu estudo quando ele refere-se aos números infinitamente grandes ou infinitamente pequenos sem maior embasamento analítico, mas que o fato de considera-los mostra o valor lógico de Leibniz, visto que Weierstrass em certa medida deu um nome à eles, os épsilons e deltas, e a teoria consistente para esses número só fora obtida a partir de Robinson, mas que só fora capaz

pela introdução feita por Leibniz, e agora conhecedor de uma lógica não existente à época de Leibniz, chamada de lógica moderna, portanto tem-se certamente aqui, uma continuidade histórica.

A ideia de um número fictício já era conhecida por Leibniz que já tivera contato com os chamados números imaginários (raízes quadradas de números negativos), e as grandes contribuições de tais números para a álgebra na época:

Cardano também considerou números negativos, chamando-lhes «fictícios>>, mas foi incapaz de fazer avançar o chamado «caso irredutível» da equação cúbica, no qual há três raízes reais que aparecem como somas ou diferenças daquilo que agora chamamos «números complexos». (STUIK, 1992, p. 147)

Agora que discutimos sobre a filosofia aparentemente presente nos trabalhos de Newton, Leibniz e outros matemáticos, devemos nos perguntar então sobre o que é, existe, como se caracteriza a Filosofia Matemática ou a Filosofia da Matemática. Não podem dois memoráveis cientistas discordarem sobre a matemática se ela sempre foi vista como totalmente confiável e não só em erros, mas em discrepâncias quaisquer não deveriam recorrer.

A Filosofia da Matemática tem sido até agora tão controversa, obscura e não progressiva como os outros ramos da filosofia. Apesar disso foi geralmente aceito que a matemática é, em certo sentido, verdadeira, os filósofos disputando sobre o que as proposições matemáticas realmente significavam: embora algo fosse verdade, duas pessoas não concordavam sobre o que era verdade, e se algo era conhecido, ninguém sabia o que era conhecido. Então por muito tempo, no entanto, como isso era duvidoso, dificilmente se poderia dizer que algum certo e exato conhecimento deveria ser obtido em matemática. (RUSSELL, 1997, p.4) (Tradução nossa).

4 EVOLUÇÃO DOS CONCEITOS MATEMÁTICOS DO CÁLCULO INFINITESIMAL

A Matemática é chamada por muitos de “a mãe das ciências exatas”, e isso se dá em função da crença que esta ciência é totalmente rigorosa, e esse rigor impede totalmente que “erros” possam ser cometidos por um ser humano, visto que o sistema lógico utilizado pela matemática é totalmente amarrado em um sistema lógico dedutivo que gera verdades absolutas, já que a técnica é perfeita e as premissas utilizadas são incontestáveis, afirmação esta que desde a Grécia Antiga e seus geômetras prezavam.

O leitor provavelmente ficará surpreso ao ser levado à várias reflexões filosóficas e epistemológicas em um capítulo do estudo em que a palavra matemática aparece com ator principal, contudo precisamos lembrar que boa parte da história da construção do cálculo infinitesimal se deu em função dessas questões, visto que de uma forma bem satisfatória, por vários séculos os resultados obtidos pelas técnicas aplicadas foram coerentes, mas a forma do filósofo e sua procura pela verdade que nos levaram à conhecimentos nunca vistos na humanidade, e a matemática é sem dúvidas protagonista nessa questão, mas não uma ciência solitária ou independente.

Esse trabalho não pretende ser um manual de história ou de filosofia do Cálculo, como podemos encontrar vários nas bibliotecas pelo mundo, mas um estudo que pretende levar o leitor a localizar-se em uma linha de evolutiva do pensamento científico e não em necessariamente uma linha do tempo das descobertas ao longo da história do Cálculo. Já vimos até aqui e veremos mais profundamente nos capítulos subsequentes que a noção de cálculo diferencial e seus infinitésimos, ao mesmo tempo que remetem aos antigos, remetem nas suas diferentes filosofias, ao tempo moderno.

A evolução dita no título deste capítulo refere à questão histórica, em menor escala, fala sobre a evolução metodológica, filosófica e epistêmica, portanto os pensadores e seus métodos são postos aqui apenas com o objetivo de conhecermos o que foi feito por que método. Obviamente que as datações são importantes para que nos coloquemos a par das ideias, da lógica, e dos métodos conhecidos pelos cientistas de cada época e as influências que podem ter recebido, e incontestavelmente a matemática que conheciam em seus tempos.

Por muito tempo os métodos aplicados nas diferentes ciências eram heurísticos, onde cada ciência era dotada de sua própria metodologia, mas a partir dos escritos de Descartes começamos a pensar em uma unificação de método para diferentes ciências, afinal o que é comum à estas é o homem, que não é um ser compartimentado, antes a matemática ocupava um nível inferior no realismo, mas com Descartes passa a ocupar a posição de Matemática Universal, um pensamento racional e lógico presenteia o homem

com uma técnica generalizada, confiável e rigorosa, acima de outras de outras ciências, de se construir conhecimento.

Com Descartes vemos na maravilhosa obra *La géométrie*, vemos o poder da generalização materializado na algebrização da geometria, e uma linguagem simbólica utilizada por forma simplificada, que possibilitou até a criação do chamado cálculo infinitesimal e suas semelhanças metodológicas com sua bela obra de 1637, que para muitos é o embrião da matemática moderna, de onde temos um tratamento formal dado à Geometria na mesma medida que já se tinha na Aritmética, e permitiu aos criadores do cálculo que se fizesse o mesmo em relação aos infinitos e infinitésimos, e à geometria que modelam

Como toda a Aritmética consiste apenas em quatro ou cinco operações, a saber, adição, subtração, multiplicação, divisão e a extração das raízes, que pode ser considerada um tipo da divisão, assim também não há outra coisa a fazer em Geometria, com respeito às linhas que se desejam conhecer, senão a elas adicionar ou subtrair outras para prepará-las para serem conhecidas ou, ainda, tomando uma, que chamarei de unidade a fim de relacioná-la o melhor possível com os números,[...] (DESCARTES, 1947, p. 222).

Contudo, analisando a história da matemática, podemos afirmar que esse rigor se dá muitas vezes no pós-criação de um conceito matemático, visto que o teor interdisciplinar dessa ciência, em geral parte-se de um problema do cotidiano, que nos leva a premissas *ad hoc*, que nos levam à ideias ou intuições, que geram resultados favoráveis às aplicações esperadas, e em geral, se os resultados obtidos mostram-se solucionadores dos problemas apresentados, com finais aparentemente corretos com métodos funcionais, são assim tidos como perfeitos.

Não se pode negar que mudanças filosóficas de pensamento, bem como o desprendimento de métodos matemáticos podem gerar especulações, que em alguns casos, mostram-se verdadeiras, ou acabam por incentivar a criação de conhecimentos futuros formais, como vimos diversas vezes na história das ciências, “Provavelmente, as primeiras contribuições significativas para o Cálculo foram feitas no século XVI pelo engenheiro Simon Stevin (1548-1620), da Bélgica. **Por ter menos preocupações filosóficas** e não dar tanta importância ao rigor matemático, Stevin utilizou um viés mais prático nas aplicações das ideias de Arquimedes.” (BUENO, 2021, p. 07, grifo nosso).

A matemática sempre passou por um dilema existencial, aplicabilidade versus formalidade, e em épocas diferentes uma ou outra tem uma posição de destaque em relação à outra. Eves (2011) “*A matemática primitiva necessitava de um embasamento prático para se desenvolver, e esse embasamento veio a surgir com a evolução para formas mais avançadas de sociedade.*” E certo momento da história começa-se a discutir outro ponto, que seria se a matemática está filosoficamente correta.

O homem sempre procurou soluções para os problemas do cotidiano apresentados em cada época e lugar

O rio Nilo também era fonte de inspiração para o desenvolvimento de tecnologias para aproveitar da melhor maneira possível sua presença ali. Como vimos, Heródoto atribuiu a difusão da Geometria às medições de terra às margens do rio após cada período de cheia. As terras mais próximas às margens eram as mais disputadas, pois eram mais férteis. (EICHENBERGER, 2016, p. 93)

Os papiros de Moscou e Rhind, um escrito egípcio que data de cerca de 1 650 a.C., já mostram a solução, ainda que aproximada, do cálculo da área de círculo, de volume de silos de grãos cilíndricos, dentre outros incríveis resultados para problemas aplicados na época, cuja falta de exatidão dos resultados numéricos, bem como a falta de rigor matemático só foram discutidos com a evolução das técnicas aplicadas, por meio de uma necessidade do ser humano por tentar alcançar a “perfeição” científica e um papiro de mais de 3600 anos de idade, e sua aproximação do valor de $\pi = \frac{256}{81}$, e o problema da área sob a curva do gráfico de uma função que se apresenta em certa medida no Papiro de Rhind, pode ser uma evidência de que o cálculo infinitesimal é mais antigo do que possamos imaginar.

O rigor técnico, apresentado já nesta época, como podemos ver no método axiomático em *Os Elementos* de Euclides de Alexandria (séc III a.C.), rende à matemática esse posto de ciência perfeita e rigorosa, que permite às outras ciências utilizarem-se de seus resultados, com plena certeza de que se forem introduzidas as variáveis corretamente, os resultados alcançados são totalmente confiáveis.

Mas aqui trazemos um questionamento, se as premissas de alguma forma veem da necessidade de resolução de um problema apresentado, como podemos garantir que de alguma forma essas premissas não são passionais? Como vemos nas práticas matemáticas na geometria dos povos mesopotâmios e egípcios, onde se objetivava resultados. Ou mesmo nos axiomas ou postulados que sustentam essas premissas e todos os resultados deduzidos a partir deles não podem estar contaminados com o nosso afã de alcançar respostas? Sistema a princípio dito rigoroso dos gregos com o seu sistema axiomático.

Esse questionamento nos leva a pensar em algo maior: O que é a matemática, o que é a Filosofia Matemática? Muito da matemática que temos hoje surgiu de uma forma quase que natural, onde o ser humano que evoluía social-econômica-tecnologicamente, se viu na necessidade de resolver problemas que lhe foram apresentados na tentativa de resolver situações postas por essas ações da humanidade cada vez mais distantes de seus ancestrais.

Agora o chamado *homo sapiens sapiens* (homem que sabe o que sabe), e o seu cérebro bem desenvolvido e de maior tamanho, o permite uma condição de pensamento e

raciocínio lógico e o fizeram se utilizar de ferramentas, tanto materiais quanto mentais mudando a sua forma de vida e a sua relação com os pares e com a natureza.

Em algum ponto da história humana esse ser humano se vê construindo uma matemática que resolve os dilemas dessa nova vida repleta de novidades e curiosidades, que o faz contemplar os fenômenos e assim se inicia o desenvolvimento da matemática, já que agora somos seres com condições físicas e mentais, que não só contamos ou fazemos cálculos básicos, mas construímos ferramentas científicas com certo grau de complexidade. A matemática tem dois inícios e dois sentidos, o construtivo:

O mais comum é construtivo, no sentido da complexidade gradualmente crescente: dos inteiros para os fracionários, os números reais, os números complexos; da adição e multiplicação para a diferenciação e integração e daí para a matemática superior. (RUSSELL, 2006, p.13).

E o sentido da abstração, que é caracterizado por um espírito mais avançado cientificamente, já que nos obriga a induzir e deduzir sobre pressupostos mais gerais, que se caracteriza fortemente na geometria e na análise, sobretudo no que se refere ao entendimento da Natureza.

O outro sentido, menos familiar, avança, pela análise, para a abstração e a simplicidade lógica sempre maiores; em vez de indagar o que pode ser definido e deduzido daquilo que se admite no começo, indaga-se que mais ideias e princípios gerais podem ser encontrados, em função dos quais o que fora o ponto de partida possa ser definido ou deduzido. (RUSSELL, 2006, p.13).

Nesse segundo sentido que nos colocamos na carestia de uma metodologia acima das puras técnicas pautadas em premissas postas naturalmente na atividade matemática, e assim inaugura-se a Filosofia Matemática, onde agora mais do que um ser de boa memória, de técnicas assertivas, temos um ser que pensa sobre novas formas epistemológicas e metodológicas de fazer matemática, e assim temos duas matemáticas, esta matemática e uma outra matemática trivial.

Já nessa época podemos ver indícios de que o Cálculo, em certa medida, já havia sido descoberto, porém não formalizado na medida da época, e era utilizado em larga escala, como quando no Papiro Egípcio de Moscou (1850 a.C.) onde um egípcio trabalhou o volume de um *frustum piramidal* (uma fatia de pirâmide), na astronomia dos babilônios 1700 a.C. aplicavam métodos geométricos sofisticados que previam as posições dos corpos celestes, Eudoxo (408-355 a.C.) que usou o chamado método da exaustão para calcular áreas e volumes, Arquimedes (287-212 a.C.) e sua propriedade arquimediana, inventando a heurística e foi capaz de calcular o comprimento da circunferência, e a determinação de um valor para π e tantos outros pensadores, por Arquimedes, e ao longo de séculos.

Além dos problemas de determinação de áreas e volumes, o problema da velocidade instantânea foi uma das procuras por uma formalização lógica, e a taxa de variação

instantânea, por meio de uma metodologia filosófica se faz, e isso teve como principal incentivador, o conceito conhecido hoje como Inércia que Newton descreveu mais tarde, advindo de Jean Buridan que chamou de *impetus*, como vemos em Bueno, 2021:

Essas ideias predominaram até o século XIV, quando um avanço teórico importante foi feito, contribuindo para uma evolução no sentido da construção do conceito de derivada. O início desse avanço ocorreu nos primórdios daquele século, com a introdução, atribuída ao filósofo francês Jean Buridan (1300-1358), da ideia de *impetus* - noção de que um corpo, uma vez em movimento, tem a tendência de continuar seu movimento, sem a ação de forças externas. (BUENO, 2021, p. 03)

E então chegamos ao século XVII, com a criação do Cálculo, como conhecemos hoje em seus fundamentos, por Newton e Leibniz, que embora conseguem descrever uma teoria com aplicações incríveis, sobretudo sobre a descrição de eventos da natureza, movimento dos astros, previsões sobre tais movimentos, que puderam ser confirmados fisicamente, e a descrição elementos até então inalcançáveis como a lei da gravitação universal e toda a mecânica.

Quando dizemos o cálculo foi criado nesse, estamos cometendo uma injustiça pensada, pois datamos assim pelo grau de formalismo conseguido pelos seus criadores, mas algumas técnicas aplicadas por eles, alguns resultados obtidos, já tinham sido feitos ou ao menos pensados, como é o caso de Oresme, dito por Eves (2011) “O maior matemático do período (século XIV) foi Nicole Oresme, nascido na Normandia por volta de 1323 [...] Num manuscrito não publicado ele obteve a soma da série

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} + \dots$$

o que faz dele um dos precursores da análise infinitesimal.” Que salientamos a importância de tal feito, pelo simples fato de que ele intuiu que uma sequência infinita teria um resultado numérico.

Com tantos indícios de que realmente a teoria funcionava, os cientistas da época não puderam negar alguma fundamentação verossímil, contudo sem o rigor que os matemáticos acostumaram-se a ver, sobretudo em uma teoria tão difícil e que trouxe afirmações difíceis de serem confirmadas experimentalmente, quanto quando Newton, ao observar os planetas, suas trajetórias, entende que há uma atração entre estes que denomina gravidade, mas mais ainda, ele assim induz que esse poder não pode ser apenas de planetas e escreve a proposição:

Proposição VII. Teorema VII

Que há um poder da gravidade pertencente a todos os corpos, proporcional às várias quantidades de matéria que eles contêm. (Newton, PRINCIPIA, p. 203)

Um das maiores virtudes de Newton, o seu método, que deu origem ao cálculo, e o determinismo matemático que inaugura, é justamente em induzir teoremas a partir de

observações, ainda que segundo ele não faça hipóteses, contudo é exatamente aí que críticas são direcionadas a ele, visto que parece tanto em Newton quanto em Leibniz, observar-se certa ausência de rigor, que precisamos esperar cerca de dois séculos para criar uma teoria mais rigorosa sobre tais descobertas.

Toda nova ciência é em primeira instância duvidada, ou não compreendida, e o cálculo assim como nos vários séculos em que a humanidade esbarrou com os seus conceitos, como em Arquimedes, não foi diferente. Mesmo para os matemáticos houve resistência, sobretudo no que se refere à metodologia, exacerbada por contrariar formas mais conservadoras como a propriedade arquimediana:

Apesar desta riqueza de resultados, muitos dos quais foram encontrados depois de Leibniz ter publicado o seu cálculo, Huygens pertence claramente ao período de antecipação. Ele confessou a Leibniz que nunca tinha conseguido familiarizar-se com o seu método. Do mesmo modo, Wallis nunca se sentiu à vontade com a notação de Newton. Huygens foi um dos grandes matemáticos do século XVII que tomaram seriamente em conta o rigor; os seus métodos estavam sempre na linha da tradição arquimediana. (STRUİK, 1992 ,p 171-172)

Wallis foi capaz de dar um tratamento mais aritmético à Geometria, o que explica esse afastamento do método de Newton, já que ele utilizava a sua ideia de limite, ignorando a existência de infinitos e infinitésimos, diferente do que fazia Wallis, como vemos por Bueno (2021):

Fazendo uso de ideias de Descartes e Cavalieri, Wallis transcendeu ambos ao utilizar as séries infinitas como parte de seus estudos e análises. Ao aritmetizar Geometria Indivisibilibus e abandonar o cenário geométrico, associando valores numéricos aos infinitos indivisíveis das figuras e usando pela primeira vez o símbolo ∞ , o inglês chegou, de forma menos laboriosa que Cavalieri, a resultados (para todos os valores inteiros de m) como:

$$\int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1} \quad (\text{BUENO, 2021, p. 16}).$$

Até o século XVII a Matemática se via em uma prática aristotélica, onde a dedução silogística⁶¹ era usada e não as deduções lógico-matemáticas⁶², o que colocava a Matemática em uma posição inferior na construção científica, o inverso do que um pensamento platônico preza. Segundo Aranha (1993) “É verdade que a dedução é um modelo de rigor. Mas também é estéril, na medida em que não nos ensina nada de novo, e apenas organiza o conhecimento já adquirido. Portanto, ela não inova, o que não significa que a dedução não tenha valor algum.

⁶¹ Silogismo, que tem origem na palavra grega *sylogismos* (“conclusão” ou “inferência”), é uma forma de raciocínio baseada na dedução. Esta linha de pensamento, criada pelo filósofo Aristóteles, utiliza duas preposições iniciais para se chegar a uma terceira, que no caso é a conclusão.

⁶² A dedução lógico-matemática consiste em se chegar a uma verdade particular e/ou específica a partir de outra mais geral ou abrangente, portanto, ao incluirmos um fato específico em outro mais geral, estamos raciocinando por dedução.

Desde os tempos de Euclides, vê-se a matemática como sendo regida por uma metodologia dedutiva, mas sem a intuição dos lógicos, estaria presa ao passado e sem as incríveis descobertas dos últimos séculos:

A matemática é uma ciência dedutiva: a partir de certas premissas, chega, por um estrito processo de dedução, aos vários teoremas que a constituem. É verdade que, no passado, as deduções matemáticas tinham com frequência falta de rigor; é também verdade que o rigor absoluto é um ideal dificilmente alcançável. Não obstante, se faltar rigor numa demonstração matemática, ela será, sob esse aspecto, defeituosa; não constitui defesa válida alegar que o senso comum mostra que o resultado é correto, pois se tivéssemos de confiar nisso, seria melhor abandonar completamente o raciocínio do que invocar a falácia em defesa do senso comum. Após o estabelecimento das premissas, nenhum apelo ao senso comum, ou «intuição» ou qualquer outra coisa que não a estrita lógica dedutiva, deve ser necessária à matemática. (RUSSELL, 2006, p. 145).

Embora alguns pensadores neguem perceber que o cálculo diferencial e integral criado no século XVII possui falhas, sejam elas filosóficas, metodológicas, matemáticas ou analíticas, já que resolvem de forma satisfatória vários problemas geométricos bem como mecânicos desde então, muitos percebem que apresentam inconsistências, e foram percebidas até mesmo por Newton e Leibniz, contemporâneos e muitos dos seus sucessores no século seguinte, perceberam e criticaram a formalização não apresentada pelos pais do cálculo. Problemas estes que ficaram em aberto por mais de 200 anos, se é que podemos afirmar que foram solucionados.

É inegável que Newton fora bastante influenciado pelo pensamento platônico, porém, vemos que a sua Física tem uma forte concepção construtivista já que é construída *a priori* e posteriormente provada em sua própria física, o que nos leva à uma contradição filosófica, já que o construtivismo vai contra o pensamento realista ou platonista, onde a Matemática teria o seu lugar de fala independente.

Aristóteles nos traz à reflexão da ciência como uma dicotomia do “o quê” e do “porquê”, e a matemática no centro dessa celeuma, já que investiga as causas dos fenômenos de forma consistente, o que pode ser a fonte de tantas críticas, e de tentativas de comprovações da nova matemática que emergia:

O conhecimento do que inere aos observadores empíricos e o conhecimento do porquê aos matemáticos, porque estes últimos estão de posse das demonstrações pelas causas, e muitas vezes ignoram o que, do mesmo modo que se nos entregarmos à contemplação do universal, ignoramos muitas vezes alguns dos casos particulares, por defeito de observação. (ARISTÓTELES, 1987, p.53)

Talvez a maior contribuição de Newton para o mundo tenha exatamente sido o de colocar a Matemática em uma íntima relação com a sua Filosofia Natural, permitindo assim que ela possa agir não mais como mera ferramenta que dá mais clareza aos argumentos dos seus modelos físicos, construir ou modificar paradigmas por meio de experimentos imaginários e não apenas interpretar dados empíricos.

Newton estava especificamente preocupado com o fato de que os infinitesimais não obedeciam ao axioma de Arquimedes e, portanto, não podiam ser aceitos como parte de um sistema matemático rigoroso, enquanto Leibniz estava igualmente preocupado com a aceitabilidade lógica dos infinitesimais.

A primeira apresentação pública de seu diferencial cálculo em 1684 foi severamente determinado por sua tentativa de evitar a lógica, dificuldade ligada ao infinitamente pequeno. O que deixa clara uma atitude intuicionista de ambos, onde parece que o fim justifica os meios, já que problemas abertos há muitos séculos foram finalmente resolvidos, embora no campo da análise matemática ainda pairasse uma nuvem negra sobre quem são esses pequenos e esses grandes números que há tanto perseguem os matemáticos puros.

O problema das tangentes às curvas era um dos que mais pensadores perseguiram uma solução na época, embora Newton e Leibniz tenham resolvido, satisfatoriamente, em seus trabalhos, alguns ilustres matemáticos desenvolveram teorias sobre o tema antes deles:

Pode-se dizer que a diferenciação se originou de problemas relativos ao traçado de tangentes a curvas e de questões objetivando a determinação de máximos e mínimos de funções. embora essas considerações remontem aos gregos antigos, parece razoável afirmar que a primeira manifestação realmente clara do método diferencial se encontra em algumas ideias de Fermat⁶³, expostas em 1629. (EVES, 2011, p. 428-429)

Agora de acordo com Boyer (1974, p. 255), Fermat escreveu um tratado, não publicado em vida, denominado *Método para achar máximos e mínimos*. Dentre outras coisas ele cria uma forma de encontrar máximos e mínimos de uma função polinomial, utilizando um método semelhante ao que usamos hoje na definição de derivada e igualando a zero, $\lim_{E \rightarrow 0} \frac{f(x+E)-f(x)}{E}$, embora não utilizasse os limites, mas um método descritivo análogo, a saber:

Para curvas polinomiais da forma $y = f(x)$ ele notou um modo muito engenhoso para achar pontos em que a função assume um máximo ou um mínimo. Ele comparou o valor de $f(x)$ num ponto com valor $f(x + E)$ num ponto vizinho. Em geral esses valores serão bem diferentes, mas num alto ou num baixo de uma curva lisa a variação será quase imperceptível. Portanto para achar os pontos de máximo e de mínimo Fermat igualava $f(x)$ e $f(x + E)$, percebendo que os valores, embora não exatamente iguais, são quase iguais. Quanto menor o intervalo E entre os dois pontos mais perto chega a pseudo-equação de ser uma verdadeira equação; por isso Fermat depois de dividir tudo por E fazia $E = 0$. Os resultados lhe davam as abscissas dos pontos de máximo e mínimo do polinômio. (BOYER, 1974, p. 255)

⁶³ Embora de uma forma ainda primitiva, mas a lógica do processo de Fermat condiz com o método habitual de se acharem máximos e mínimos de uma função $f(x)$, às vezes referido nos textos elementares de cálculo como *método de Fermat*. Fermat, porém, ignorava que a condição de a derivada de $f(x)$ se anular não é suficiente para se ter um máximo ou mínimo comum, mas apenas necessária. O método de Fermat também não distinguia entre valor máximo e valor mínimo. (EVES, 2011, p. 429).

Fato que Fermat não distinguiu máximo de mínimo, ou mesmo a questão dos pontos de inflexão, contudo já temos aí a descrição de um método eficiente em algum grau, e um precursor do cálculo diferencial, e não seria injusto como Boyer (1974) dia, “é razoável acompanhar Laplace ao saudar Fermat como descobridor do cálculo diferencial.”.

Fermat teria generalizado um fato pensado por Kepler sobre os incrementos de uma função, que tornam as diferenças infinitesimais, e essa relação com o que chamamos hoje de vizinhança de um ponto de acumulação, e assim obtendo Fermat, uma solução desejada na época, a determinação dos máximos e mínimos, do que chamamos hoje de funções reais, no que podemos denominar os primeiros passos da diferenciação, como em Eves:

Kepler observou que os incrementos de uma função se tornam infinitesimais nas vizinhanças de um ponto de máximo ou de mínimo comum. Fermat transformou esse fato num processo para determinar esses pontos de máximo ou de mínimo. (EVES, 2011, p. 428-429)

É incontestável que todos os cientistas que se debruçaram e sobre a discussão sobre o cálculo tinham um objetivo previamente traçado, entender e descrever fenômenos naturais e geométricos que há tanto se procurava, então um problema mais uma vez epistemológico se dá aqui:

Na nossa opinião, é preciso aceitar o postulado seguinte para a epistemologia: o objeto não pode ser designado como um <<objetivo>> imediato; por outras palavras, um movimento para o objeto não é inicialmente objetivo. É necessário aceitar, pois, uma verdadeira ruptura entre o conhecimento sensível e o conhecimento científico. (BACHELARD, 1971, p. 128).

O cerne do tema deste trabalho e da longa discussão sobre as semelhanças e diferenças entre os Cálculos de Newton e Leibniz talvez ser respondida exatamente por essa aparente contradição filosófica de Newton, que embora sob grande influência platônica se permitiu construir teorias baseadas no construtivismo, como parecia estar mais preocupado com os resultados e não a metodologia, não alcançara o grau de rigor semântico e a lógica matemática, como Leibniz conseguira.

A Análise Matemática Standard baseia-se no fato de que uma linha geométrica, ou seja, que existe uma relação biunívoca entre a reta e o conjunto dos números reais. Acredita-se que o conjunto dos infinitos pontos de uma reta pode ser coordenado pelo conjunto dos números reais, e que os números reais, em contrapartida, podem ser construídos por meio dos cortes de Dedekind⁶⁴, sequências de Cauchy⁶⁵ ou algum dispositivo similar.

⁶⁴ Se a é um número qualquer definido, então todos os números do sistema de $\mathbb{R}$ caem em duas classes, A_1 e A_2 , cada uma das quais contém um número infinito de indivíduos, a primeira classe A_1 compreende todos os números a_1 que são menores que a , a segunda classe A_2 compreende todos os números a_2 que são maiores que a , o número a em si pode ser atribuído a seu bel prazer para a primeira ou segunda classe, sendo respectivamente, o maior número da primeira classe ou o menor da segunda. Em cada caso a separação do sistema de $\mathbb{R}$ em duas classes A_1 e A_2 é tal que cada

Em análise matemática dizemos que o conjunto dos números reais é um Corpo Ordenado Completo, o que é questionado na análise não-standard é fato de $\mathbb{R}$ ser Completo, em outras palavras que a reta é formada por infinitos pontos, relacionados aos infinitos números reais, mas que o conjunto dos reais consegue “cobrir” completamente a reta.

Como visto, a preocupação de Isaac Newton era se os seus limites, eram capazes de obedecer à propriedade Arquimediana dos números reais, ou seja, o axioma arquimediano é um fato geométrico “verdadeiro”? O que é dado em nossa experiência imediata é uma parte limitada da linha geométrica com no máximo um número finito de pontos marcados nela, representando, por exemplo, o resultado de alguma medida física. A partir deste fato, todo o resto é uma extensão, ideal ou real.

Em matemática, cortes de Dedekind, uma homenagem ao seu idealizador, Richard Dedekind, são subconjuntos especiais do corpo ordenado, os números racionais, que são usados para construir um corpo ordenado completo arquimediano.

Um subconjunto $A \subset \mathbb{Q}$ é um corte de Dedekind, com $p, q, r \in \mathbb{Q}$, se satisfaz às seguintes propriedades:

1. $\emptyset \neq A \neq \mathbb{Q}$
2. Se $p \in A$ e $q \in \mathbb{Q}$ é tal que $q < p$ então temos que $q \in A$
3. Se $p \in A$, então $p < r$, para algum $r \in A$.

Intuitivamente um corte é uma semirreta racional que não tem um maior elemento.

O conjunto dos Racionais $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado, porém não é completo já que não satisfaz à propriedade arquimediana, em outras palavras, o conjunto dos racionais não é denso, o que faz com que não forme uma reta, visto que $\mathbb{Q}$ deixa “buracos” na reta, o que na análise matemática standard acredita-se serem cobertos pelos números irracionais.

Corpo Definição:

Segundo Lima:

R é um Corpo. Isto significa que estão definidas em R duas operações, chamadas adição e multiplicação, que cumprem certas condições, abaixo especificadas.

A adição faz corresponder a cada par de elementos $x, y \in R$, sua

número da primeira classe A_1 é menor do que cada número da segunda classe A_2 . (Traduzido para o Português por (SANTOS, 2012)).

Chama-se corte de Dedekind a uma partição (A, B) de $\mathbb{Q}$ em duas metades, A e B , de modo que todo o elemento de A seja um minorante de B , e, reciprocamente, todo o elemento de B seja um majorante de A . Um corte de Dedekind (A, B) representa o único número x que é simultaneamente um majorante de A e um minorante de B .

⁶⁵ Uma sequência (x_n) de um espaço métrico (M, d) diz-se sequência de Cauchy quando para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m, n > n_0$ temos $d(x_m, x_n) < \epsilon$. Nesta construção de um corpo ordenado completo, os números reais são vistos como classes (de equivalência) de sucessões de Cauchy, todas convergindo para o número que representam.

soma $x + y \in R$, enquanto a multiplicação associa a esses elementos o seu produto $x \cdot y \in R$.

Os axiomas a que essas operações obedecem são:
Associatividade: para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$ tem-se $(x+y)+z = x+(y+z)$ e $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

Comutatividade: para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ tem-se $x+y = y+x$ e $x \cdot y = y \cdot x$.
Elementos neutros: existem em $\mathbb{R}$ dois elementos distintos 0 e 1 tais que $x+0=x$ e $x \cdot 1=x$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

Inversos: todo $x \in \mathbb{R}$ possui um inverso aditivo $-x \in \mathbb{R}$ tal que $x + (-x) = 0$ e, se $x \neq 0$, existe também um inverso multiplicativo $x^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $x \cdot x^{-1} = 1$.

Distributividade: para $x, y, z \in \mathbb{R}$ quaisquer, tem-se $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$.
(LIMA, 2009, p. 11)

Corpo Ordenado

Ainda segundo Lima:

$\mathbb{R}$ é um corpo ordenado: Isto significa que existe um subconjunto $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$, chamado o conjunto dos números reais positivos, que cumpre as seguintes condições:

P1. A soma e o produto de números reais positivos são positivos. Ou seja, $x, y \in \mathbb{R}^+ \rightarrow x + y \in \mathbb{R}^+$ e $x \cdot y \in \mathbb{R}^+$.

P2. Dado $x \in \mathbb{R}$, exatamente uma das três alternativas seguintes ocorre: ou $x = 0$, ou $x \in \mathbb{R}^+$ ou $-x \in \mathbb{R}^+$. (LIMA, 2009, p. 12)

Um corpo é uma estrutura algébrica em que a adição e a multiplicação estão bem definidas. Os corpos são importantes objetos de estudo na álgebra já que constituem uma generalização útil de muitos sistemas de números, em particular os números racionais e reais. Em um corpo além das propriedades bem definidas, sempre podemos ordenar os números do conjunto.

Corpo Ordenado Completo

A caracterização do conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, ocorre por meio da descrição deste como um corpo ordenado completo, propriedade que $\mathbb{Q}$ não possui, já que embora seja um corpo ordenado, não é completo, visto que as lacunas entre dois racionais sempre possui números não pertencentes ao conjunto dos números racionais, denominados Irracionais.

De acordo com Lima (2009, p. 17), “A afirmação de que o corpo ordenado $\mathbb{R}$ é completo significa que todo conjunto não-vazio, limitado superiormente, $X \subset \mathbb{R}$ possui supremo $b = \sup X \in \mathbb{R}$ ”⁶⁶.

⁶⁶ Um número $b \in \mathbb{R}$ chama-se o supremo do conjunto X quando é a menor das cotas superiores de X . Mais explicitamente, b é o supremo de X quando cumpre as duas condições:

S1. Para todo $x \in X$, tem-se $x \leq b$;

S2. Se $c \in \mathbb{R}$ é tal que $x \leq c$ para todo $x \in X$ então $b \leq c$. (LIMA, 2009, p.16).

Desta forma, um corpo K ordenado $(K, +, \cdot, 0, 1, <)$ ⁶⁷ diz-se completo quando todo subconjunto não vazio limitado superiormente possui supremo.

Lema: Seja K um corpo ordenado. Se K é completo, então é arquimediano.

Axioma (Axioma Fundamental da Análise Matemática) Existe um corpo ordenado completo. Ele será chamado conjunto dos números reais e será denotado por $\mathbb{R}$.

Na visão ortodoxa os números reais são criados a partir dos racionais por pontos adjacentes representando certas classes de equivalência de sequências convergentes. E alega-se que os “elementos ideais” assim criados preenchem a linha, que seriam os números irracionais. E, como já foi argumentado, isso tem uma certa plausibilidade vista do ponto de vista de medições recortadas, como nos Cortes de Dedekind.

Mas esse ponto de vista é estático, não prestamos, por exemplo, atenção à taxa de convergência, ou seja, a como chegamos à medida registrada. Se fizermos isso, seremos levados a um conjunto de pontos mais rico ou denso na reta, e os pontos “saltados” podem representar os infinitesimais utilizados por Leibniz ou como veremos adiante os hiper-reais de Robinson, o que derrubaria o axioma Fundamental da Análise Matemática, já que o conjunto dos números reais seria um Corpo Ordenado, porém não completo.

E se, além disso, também nos preocupamos com o comportamento assintótico das sequências, somos quase inevitavelmente levados à noção plena dos números hiper-reais ou da análise não-padrão.

A propriedade arquimediana dos números reais é a base de toda a análise matemática moderna, a saber:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } x < n.$$

Para todo número real sempre existe um número natural maior, ou seja, o conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ ⁶⁸ não é limitado superiormente.

A propriedade arquimediana também pode ser formulada da seguinte forma:

$$\forall x > 0, \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } 0 < \frac{1}{n} < x.$$

Para todo número real sempre existe um número racional positivo menor, ou seja, o conjunto dos números reais não é limitado inferiormente.

De forma intuitiva, podemos afirmar que um conjunto que satisfaz à propriedade arquimediana, como o caso dos números reais, não possui números infinitamente grandes ou infinitamente pequenos, isto é, não possui um maior ou menor número.

⁶⁷ Em matemática, um corpo é um anel comutativo com unidade em que todo elemento diferente de 0 possui um elemento inverso com relação à multiplicação. Um corpo ordenado é um corpo no qual existe uma relação de ordem total, e em que as operações binárias do corpo são compatíveis com essa relação de ordem.

⁶⁸ Em análise real não consideramos o 0(zero) como um número natural.

O método de exaustão é um método utilizado para encontrar a área de uma forma geométrica como um círculo, inscrevendo nela uma sequência de polígonos cujas áreas convergem para a área da forma que a contém. O processo consiste em construir o algoritmo corretamente, de tal modo que a diferença entre a área do n -ésimo polígono e a forma geométrica circunscrita será arbitrariamente pequena quando n torna-se suficientemente grande. Assim quando a medida dessa diferença se torna arbitrariamente pequena, os valores possíveis para a área da forma geométrica “esgotarão”, colapsando no limite inferior da convergência dos elementos da sequência das áreas.

Originalmente o método de exaustão⁶⁹ tem seu início no século V a.c. com Antífon⁷⁰, mas não se sabe ao certo o quão claro o método foi para ele. O método se tornou rigoroso algumas décadas depois nas mãos de Eudoxo de Cnido, que mostrou aplicações nos cálculos de áreas e volumes.

Eudoxo resolveu o dito impasse dos incomensuráveis e seu método fundamenta-se no seguinte lema:

Se de uma grandeza qualquer se subtrair uma parte não menor do que sua metade, e do resto se subtrair não menos do que sua metade, e assim se prosseguir, restará ao final uma grandeza menor do que qualquer grandeza da mesma espécie.⁷¹

Bonaventura Cavalieri foi um grande matemático, assim como o seu professor Galileu Galilei, e deixou diversas contribuições nessa disciplina, como em logaritmos, geometria espacial e seu famoso princípio de Cavalieri, onde esse último foi um precursor do cálculo infinitesimal.

Mas a obra que mais o projetou, aliás sua grande contribuição à matemática, é o tratado *Geometria indivisibilibus*, publicado em sua versão inicial no ano de 1635. Nesse trabalho ele apresenta seu *método dos indivisíveis*, cujas raízes remontam a Demócrito (c. 410 a.c.) e Arquimedes (c. 287-212 a.c.) mas cuja motivação direta talvez se encontre nas tentativas de Kepler de achar certas áreas e certos volumes. (EVES, 2011, p. 425).

De certa forma, o cálculo infinitesimal há séculos já vinha sendo desenvolvido, e os problemas geométricos estão sempre no foco de seu desenvolvimento. Antes dos problemas da mecânica, o cálculo tinha como paradigmas desejados, os referentes ao

⁶⁹ O método da exaustão é um método para se encontrar a área de uma figura geométrica inscrevendo-se dentro dela uma sequência de polígonos cuja soma das áreas converge para a área da figura desejada. Se a sequência for corretamente construída, a diferença entre o n -ésimo polígono e a figura que os contém se tornará arbitrariamente pequena a medida que n se tornar grande. A medida que essa diferença se torna arbitrariamente pequena, os valores possíveis para a área da figura são sistematicamente “exauridos” pela limitação inferior imposta pelos polígonos cada vez maiores.

⁷⁰ Antífona de Rhamnus (480-411 a. C.) foi o mais antigo dos dez oradores áticos, e uma figura importante na política e intelectual ateniense do século V vida.

⁷¹ Tal lema, conhecido como “Lema de Arquimedes”, é uma das versões da primeira proposição do Livro X dos Elementos de EUCLIDES (2009). A teoria de Eudoxo é conhecida por meio da obra de Euclides, particularmente o Livro XII, como atesta Arquimedes no prefácio de sua obra *De sphaera et cylindro*.

cálculo de áreas de figuras planas e volumes de sólidos geométricos, e técnicas pouco ou nada rigorosas eram utilizadas, com resultados bastante satisfatórios.

A evolução desses objetivos remonta a Cavalieri e enquanto a técnica matemática mostra-se bastante satisfatória, sobretudo sobre o cálculo de volumes, e de forma bastante rigorosa em termos gerais, a menos no sentido do rigor filosófico, já que se vale mais uma vez das medidas bem pequenas que nos levam à noção dos infinitesimais mais uma vez sem uma definição formal. De modo intuitivo Cavalieri antecipa o Cálculo de Newton e Leibniz, ainda que de modo específico, já que um dos grandes avanços destes nobres pensadores se deu pela generalização do método matemático do cálculo criado por estes no século XVII. Por Eves (2011), temos indícios do valor de Cavalieri para o cálculo moderno:

Os princípios de Cavalieri⁷² representam ferramentas poderosas para o cálculo de áreas e volumes e, ademais, sua base intuitiva pode facilmente tornar-se rigorosa com o cálculo integral moderno. Com a aceitação desses princípios como evidentes, intuitivamente, podem-se resolver muitos problemas de mensuração que normalmente requereriam técnicas avançadas de cálculo. (EVES, 2011, p. 426).

O próprio Leibniz reconhece o valor de pensadores anteriores, e a influência que tiveram sobre o seu cálculo, criado na noção das suas diferenciais, em forma de razões de números bem pequenos:

Em nosso tempo, Cavallerius (Cavalieri) reviveu o método de Arquimedes e deu aos outros a oportunidade de ir mais longe. E, claro, o próprio Descartes, quando em alguns lugares imaginou que um círculo é um polígono regular de um número infinito de lados, usou esse raciocínio quando falava da cicloide. (LEIBNIZ, 1947, p. 42) (tradução nossa)

Os princípios de Cavalieri permitiram a Johann Kepler (1571-1630), determinar a área de uma elipse, e um importante resultado na ciência natural, suas leis do movimento planetário, sem as quais que Newton não poderia ter criado o conceito da mecânica do cosmos como conhecemos:

Essas leis são marcos fundamentais da história da astronomia e da matemática. Pois, num esforço para justificá-las, Isaac Newton foi levado a criar a mecânica celeste moderna. Essas leis são:

- I. *Os planetas movem-se em torno do Sol em trajetórias elípticas com o Sol num dos focos.*
 - II. *O raio vetor que liga um planeta ao Sol varre áreas iguais em intervalos de tempo iguais.*
 - III. *O quadrado do tempo para que um planeta complete sua revolução orbital é diretamente proporcional ao cubo do semieixo maior da órbita.*
- (EVES, 2011, p.357).

⁷² [...]os chamados *princípios de Cavalieri*:

1. Se duas porções planas são tais que toda reta secante a elas e paralela a uma reta dada determina nas porções segmentos de reta cuja razão é constante, então a razão entre as áreas dessas porções é a mesma constante.
2. Se dois sólidos são tais que todo plano secante a eles e paralelo a um plano dado determina nos sólidos secções cuja razão é constante, então a razão entre os volumes desses sólidos é a mesma constante. (EVES, 2011, p. 426).

Mesmo sob tantas críticas, os indivisíveis possibilitaram a formulação de diversas teorias, com inumeráveis resultados teóricos e práticos, consequentemente de importância imprescindível para a evolução da matemática, da filosofia e da ciência em si, a intuição e o empirismo, muitas vezes criticados por diversos pensadores podemos dizer, possibilitaram tais avanços, como relata Eves (2011), *“A descoberta empírica dessas leis, a partir da massa de dados de Brahe, constitui um dos mais notáveis trabalhos de indução jamais feitos na ciência. Nunca se sabe quando uma parte da matemática pura poderá receber uma aplicação inesperada.”*

A criação de Cavalieri nos leva mais uma vez à questão dos indivisíveis, antes criticados e agora mais uma vez, como pelo matemático Paul Guldin (1577-1642), e a questão posta é semelhante ao questionamento sobre os infinitesimais, sobre como um objeto geométrico pode em alguma instância ser indivisível, isto é, possuir a menor medida real possível. Sabemos que o termo indivisível foi substituído modernamente por infinitesimal, por limite, por épsilons, mas ainda sem a formalidade esperada.

Mais uma vez temos o grande problema que se arrastava há milênios, como definir os tais indivisíveis, e mais tarde como definir os infinitesimais, por meio de uma interpretação geométrica ou física, fora de uma concepção metafísica ou metamatemática, e essas críticas foram direcionadas a Cavalieri por parte de Guldin e Tacquet, mas que de alguma forma contribuíram para a criação de técnicas satisfatórias futuras, como vemos por Bueno (2021):

A falta de uma definição do conceito de indivisíveis e a ausência de uma explicação de como a soma de elementos sem dimensão poderia levar à composição de uma área ou volume levaram ao surgimento de sérias críticas ao trabalho de Cavalieri. Elas vinham, principalmente, dos matemáticos Paul Guldin (1577-1643) e André Tacquet (1612-1660). Para combater esses ataques, Cavalieri sustentou que as superfícies e os volumes poderiam ser gerados pelo fluxo de indivisíveis, o que não foi desenvolvido satisfatoriamente para o seu método geométrico. Essa evolução acabou sendo feita por seu sucessor, o também italiano Evangelista Torricelli (1608-1647), e culminou, posteriormente, com o método das fluxões, de Isaac Newton. (BUENO, 2021, p. 11)

Inegavelmente as técnicas dos indivisíveis proporcionaram resultados incríveis, sobretudo na geometria e até mesmo na mecânica dinâmica, e foram utilizados, principalmente após a construção dos princípios de Cavalieri, por renomados cientistas como Torricelli⁷³, Fermat⁷⁴, Pascal, Saint-Vincent⁷⁵, Barrow⁷⁶ e outros.

⁷³ O trabalho de Torricelli sobre tangentes marca uma evolução da visão clássica e estática, caminhando em direção à introdução da noção de velocidade instantânea. Torricelli considerou que as curvas são geradas por um ponto que se move com velocidade não necessariamente constante. Ele empregou essa ideia, então, para determinar tangentes de parábolas e de outras curvas, presentes nos trabalhos de Arquimedes. (BUENO, 2021, p. 12)

⁷⁴ Fermat desenvolveu um trabalho pioneiro não só no que se refere à diferenciação, mas também no que se refere à integração. (EVES, 2011, p. 432)

Arquimedes (287 a.C. – 212 a.C.) utiliza o método de exaustão de Eudoxo em suas obras *De conoidibus et sphaeroidibus*, *Quadratura parabolae* e *O método* (cf. HEATH, 1950), lidando com os infinitésimos sem magnitude⁷⁷, pois não são obtidos pela divisão de entes geométricos, mas por uma aproximação numérica. A matemática grega, podemos afirmar que está na origem da criação do cálculo, seja pela questão do desenvolvimento lógico axiomático de Euclides, seja pela própria discussão sobre os infinitesimais ou pela exaltação da geometria como base científica e filosófica, como vemos por (Eves):

Podem-se notar três importantes e distintas linhas de desenvolvimento durante os primeiros 300 anos da matemática grega. Primeiro temos o desenvolvimento do material que acabou se organizando nos *Elementos*, [...]. Em segundo lugar, há o desenvolvimento de noções relacionadas com infinitésimos e infinitos e processos somatórios que só foram esclarecidos de vez com a invenção do cálculo nos tempos modernos. Os paradoxos de Zenão, o método de exaustão de Antífon e Eudoxo e a teoria atomística associada ao nome de Demócrito [...] dedicadas às origens do cálculo, [...] A terceira linha de desenvolvimento é a da geometria superior, [...].(EVES, 2011, p. 132-133)

Muitos alegam que Arquimedes seja o precursor das noções de limites desenvolvidas por Newton no século XVII, mas muitos acreditam tratar-se na verdade do oposto, que Arquimedes nega a existência de tais limites, já o que teria feito é apenas e tão somente uma aproximação grosseira com o único objetivo de atingir um resultado satisfatório para alguns problemas geométricos existentes na época.

A questão posta sobre a magnitude nos leva à dicotomia número versus quantidade, ou medida, já que os cardinais sim, intuitivamente representam quantidades, como o número de letras em um alfabeto, mas como um número infinitamente pequeno ou infinitamente grande pode representar uma quantidade não se sabe. A “solução” se deu mais uma vez pela especificidade disciplinar, onde pelas mãos de uma especialista, nesse caso de um matemático, são coisas congruentes:

Prevaleceu a opinião de que o número e quantidade eram os objetos de investigação matemática, e que os dois eram tão semelhantes que não requeriam uma separação cuidadosa. Assim, o número foi aplicado a quantidades sem qualquer hesitação e, inversamente, onde os números existentes foram considerados inadequados para medição, novos foram criados no único fundamento de que toda quantidade deve ter uma medida numérica. (RUSSELL, 1997, p 157)(Tradução nossa).

⁷⁵ Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667) foi um eminente quadrador do círculo do século XVII. Aplicou métodos do pré-cálculo a vários problemas de quadratura. (EVES, 2011, p. 402)

⁷⁶ Isaac Barrow (1630- 1677) O trabalho matemático mais importante de Barrow é *Lectiones opticae et geometricae*, [...] O prefácio do tratado tece agradecimentos penhorados a Newton por parte do material do livro, provavelmente aquela que se ocupa da óptica. É nesse livro que se encontra uma abordagem muito próxima do processo moderno de diferenciação, mediante o uso do chamado *triângulo diferencial*, que ainda se encontra nos textos atuais de cálculo. (EVES, 2011, p. 434).

⁷⁷ O termo “magnitude” está etimologicamente relacionado a *μεγεθος*. Assim, *μεγεθος* em grego e *magnitude* em latim ambos significam “grandeza”, “grande” sendo *mega* (*μεγα*) em grego e *magnum* em latim.

Na Grécia antiga já se tratavam os infinitésimos, como podemos ver em no tratado "O Método", que era desconhecido até o início do século XX, Arquimedes afirmava que também usava infinitésimos nos seus trabalhos, não para demonstrar resultados, mas sim para descobri-los.

Rubens Lintz, matemática e autor de história da matemática, sobre o método da exaustão como precursor da teoria dos limites, diz: "Esta afirmação absurda é mais uma consequência trágica do fato de não se colocar a matemática grega em sua devida perspectiva histórica [...] este erro lamentável [...] tem sido o responsável por uma das maiores deformações do pensamento histórico de que se tem notícia" (LINTZ, 2007, p. 210-11). Para Lintz, o uso do método da exaustão pelos gregos decorre exatamente de seu cuidado em eliminar processos limites (cf. LINTZ, 2007, p. 234).

É importante salientar que a propriedade arquimediana não garante que o conjunto R não possua "buracos", ela só garante que R não é limitado superior ou inferiormente, não temos de forma óbvia que a menor das cotas inferiores e a maior das cotas superiores existam.

Conhecedores desse questionamento, os matemáticos puros, em sua posição de detentores do poder de escolhas das proposições básicas da teoria, enunciam o Axioma do Supremo:

Se $A \subseteq R$ é um subconjunto não vazio e limitado superiormente, então $\exists S \in R$ tal que $S = \sup A$.

Isto é, de forma axiomática ou até mesmo arbitrária, diz-se que todo subconjunto dos números reais que possua uma cota superior sempre possui a menor das cotas superiores, e essa cota é um número real, ou seja, que não cairá em um "buraco", assim podemos ver que a reta dos números reais é realmente uma reta, mas essa informação crucial para a fundamentação do cálculo diferencial e integral standard baseia-se em um axioma, e como é sabido, axiomas não são demonstráveis.

Um defensor da análise padrão poderia alegar que o que prova que não existem tais buracos é a propriedade dos intervalos encaixantes⁷⁸ e que uma propriedade é um teorema e pode ser demonstrada, contudo, mais adiante iremos provar que a propriedade citada e o axioma do supremo são equivalentes, ou seja, cada um deles implica no outro então sempre temos um deles como hipótese(axioma) e o outro o teorema.

Antecipando a discussão sobre a não consistência da análise padrão(standard), temos ainda o fato de que o axioma do supremo implica na propriedade arquimediana,

⁷⁸ Dada uma sequência $I_n = [a_n, b_n]$ de intervalos fechados tais que $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \dots$, existe pelo menos um ponto $c \in R$ que pertence a todos os intervalos, isto é, c pertence a intersecção e todos os intervalos. Uma maneira equivalente é dizer que $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$. A propriedade dos intervalos encaixantes expressa a ideia de que R não tem buracos. De fato, se existisse um buraco, cercand-o cada vez mais de perto por números $a_n < b_n$, obteríamos uma sequência de intervalos fechados $I_n = [a_n, b_n]$ com intersecção vazia.

portanto, três propriedades importantes do conjunto dos números reais, que são a propriedade dos intervalos encaixantes, a propriedade arquimediana e o axioma do supremo são equivalentes, e basta tomar a terceira delas como axioma, que as outras duas decorrem daí.

Além das discussões filosóficas acerca do novo cálculo apresentado, muitos cientistas apresentaram problemas em relação à análise utilizada por Newton e Leibniz, todos sem sucesso em algum ângulo, mas cada um deles contribuiu de algum modo para novas descobertas no tema que se pôs na ocasião, como pode-se destacar a contribuição de Lagrange:

O trabalho de Lagrange teve profunda influência nas pesquisas matemáticas subsequentes, pois ele foi o primeiro matemático de primeiro time a reconhecer o estado insatisfatório dos fundamentos da análise e, em vista disso, a se empenhar pela rigorização necessária. Sua tentativa, que esteve muito longe de ser um sucesso, consubstanciou-se na grande obra *Théorie des Fonctions Analytiques Contenant les Principes du Calcul Différentiel*⁷⁹. A ideia basilar consistia em representar uma função $f(x)$ por uma série de Taylor. (EVES, 2011, p. 484)

Lagrange foi capaz de desenvolver de forma espetacular o estudo sobre o cálculo de variações, bem como as equações diferenciais parciais, além de introduzir a notação $f'(x)$ que usamos até os dias atuais, porém em sua tentativa de evitar os limites como os de Newton não foi bem-sucedido, pois falhou em levar em consideração a questão da convergência das séries, Eves (2011) “Lagrange entendia que sua abordagem tinha evitado o uso de limites, mas, como ele não deu a devida atenção à questão da convergência e da divergência, que se baseiam na ideia de limite, não conseguiu atingir os objetivos que tinha em vista, e ele via a mecânica e geometria como aplicações da análise, mas essa como um ramo distinto, em uma forma de análise algebrizada, e com as suas demonstrações independentes, como diz Roque:

As restrições com relação aos métodos infinitesimais fizeram a análise abandonar todas as suas referências geométricas para se fundar somente na álgebra. Na sua *Mécanique analytique* (Mecânica analítica), de 1788, Lagrange já afirmava que a mecânica deve ser vista como uma parte da análise matemática, podendo prescindir de figuras ou de qualquer consideração geométrica. (ROQUE, 2012, p. 333)

Cauchy, depois de mais de 200 anos nos traz uma possibilidade de comprovar os resultados obtidos no cálculo do século XVII, por meio de uma linguagem mais rigorosa e métodos mais analíticos. Ele analisa o conceito de variável(ou sequência) e aceita que estas assumem diferentes valores porém não todos, isto é, poderiam estar limitadas a um intervalo específico, e Cauchy vê a variável de uma forma dinâmica, mais para o conceito moderno de sequência numérica e não um elemento arbitrários, e aqui temos uma das

⁷⁹ Teoria das funções analíticas contendo os princípios do cálculo, sem qualquer consideração de quantidades infinitesimais ou evanescentes, de limites ou de fluxões, e reduzido à análise algébrica de quantidades finitas.

“falhas” apontadas sobre os estudos de Cauchy, quando ele permite que algumas sequências pudessem ter mais de um limite, o que nos dias atuais não é aceitável, já que consideramos o limite como o maior dos valores de tais limites.

Basicamente, Cauchy⁸⁰ elabora métodos analíticos de identificação de convergência de sequências numéricas, assim determinando o limite de tais sequências de forma rigorosa. Um dos teoremas idealizados por ele é visto aqui, na forma de seu primeiro teorema:

Procura o limite, ou os limites, para os quais converge, ao mesmo tempo em que n cresce indefinidamente, a expressão $(u_n)^{1/n}$; designada por k o maior destes limites, ou, em outros termos, o limite dos maiores valores da expressão da qual se trata. A série $[u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, \dots]$ será convergente, se se tem $k < 1$, e divergente se se tem $k > 1$. (CAUCHY, 1821, p.132).

Vemos claramente no teorema acima demonstra um rigor na linguagem nunca antes visto e alguma aritmetização do cálculo antes tão impregnado por um método apenas intuitivo e geométrico, e estas características do novo tratamento analítico permitiu ao próprio Cauchy finalmente apresentar uma definição sobre as quantidades infinitamente pequenas:

Dizemos que uma quantidade variável se torna infinitamente pequena, quando seu valor numérico diminui infinitamente de modo a convergir para o limite zero. É bom observar sobre este assunto que não se deve confundir um decréscimo constante com um decréscimo indefinido.⁸¹ (CAUCHY, 1821, p.26, tradução nossa).

Cauchy ainda fala sobre os números muito grandes. Dizemos que uma quantidade variável se torna infinitamente grande quando o valor numérico aumenta indefinidamente de modo a convergir para o limite. Ainda é essencial observar que não se deve confundir uma variável que aumenta indefinidamente com uma variável que aumenta constantemente⁸². (CAUCHY, 1821, p.27, tradução nossa).

É importante observarmos que Cauchy baseia os seus estudos no conceito de limites e os infinitésimos são vistos apenas como casos particulares dos limites para as variáveis que têm limite igual a zero, contudo se mostra de grande utilidade matemática e filosófica, já

⁸⁰ Apenas dois anos após a morte de Lagrange, Cauchy ingressou no corpo docente da Ecole Polytechnique como professor de análise e passou a ministrar o mesmo curso que Lagrange tinha ensinado. Ele herdou o compromisso de Lagrange de estabelecer os fundamentos do cálculo, mas seguiu Maclaurin e d'Alembert em vez de Lagrange e buscou esses fundamentos na formalidade dos limites. (BRADLEY, 2009)

⁸¹ On dit qu'une quantité variable devient *infiniment petite*, lorsque sa valeur numérique décroît indéfiniment de manière à converger vers la limite zero. Il est bon de remarquer à ce sujet qu'on ne doit pas confondre un *lécroissement* constant avec un *décroissement* inféfini.

⁸² On dit qu'une quantité variable devient *infiniment grande*, lorsque sa valeur numérique croît indéfiniment de manière à converger vers la limite. Il est encore essentiel d'observer ici qu'on ne doit pas confondre une variable qui croît indéfiniment avec une variable qui croît constamment.

que redefine a ideia dos infinitesimais de Leibniz⁸³, já que para este os infinitésimos eram constantes e agora para Cauchy estes são variáveis.

4.1 O PROBLEMA DA RETA TANGENTE

No final do período grego os matemáticos estavam preocupados em estudar curvas geométricas além da reta, do círculo e da elipse, curvas definidas por alguma propriedade de seu lugar geométrico e o foco principal se baseava-se em dois problemas:

- i) Dada uma curva qualquer com uma região do plano delimitada, calcular a área dessa região.
- ii) Dada uma curva e um ponto desta, como determinar a reta tangente à essa curva nesse ponto.

Na época não se sabia que esses dois problemas na verdade estão intimamente ligados, o que se explica, pela falta de uma melhor notação matemática, conhecimento sobre os números negativos, o não conhecimento da relação entre a álgebra e a geometria que conhecemos hoje como geometria analítica.

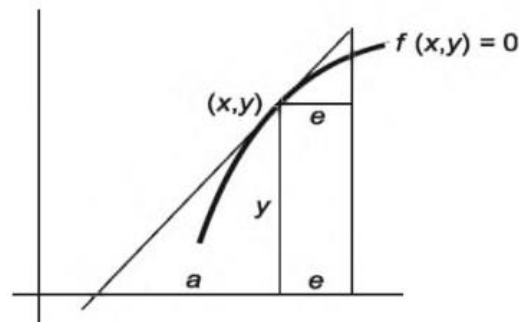
Neste estudo, a discussão principal se dá em função de uma definição formal do que estamos chamando, como Leibniz, de números infinitesimais, mas o problema que inicia, historicamente, essa definição é o problema das tangentes, que antes de Newton e Leibniz já tivera sido discutido por brilhantes matemáticos. Como Fermat em 1629, nas palavras de Eves (2011):

Pode-se dizer que a diferenciação se originou de problemas relativos ao traçado de tangentes a curvas e de questões objetivando a determinação de máximos e mínimos de funções. Embora essas considerações remontem aos gregos antigos, parece razoável afirmar que a primeira manifestação realmente clara do método diferencial se encontra em algumas ideias de Fermat, expostas em 1629. (EVES, 2011, 428-429).

Ainda por Eves (2011) “Fermat também descobriu um procedimento geral para determinar a tangente por um ponto de uma curva cuja equação cartesiana é dada.”. Em linguagem moderna, basicamente o que Fermat faz é encontrar a *subtangente* relativa a um ponto (x, y) da curva, ou seja, um segmento de reta com extremidades na projeção do ponto de tangência sobre o eixo x e a interseção com esse eixo, e subsequente relação geométrica com semelhança de triângulos, estabelecendo as coordenadas de um ponto bem próximo do ponto de tangência, a saber:

⁸³ Leibniz baseou-se em princípios heurísticos.

Figura 1: Reta tangente a uma curva por Fermat



(EVES, 2011, p. 430)

$$\frac{e}{a} = \frac{d}{y} \Rightarrow d = \frac{y \cdot e}{a}, \text{ logo o ponto tem coordenadas } \tilde{x} = x + e \text{ e } \tilde{y} = y + \frac{y \cdot e}{a} = y \cdot \left(1 + \frac{e}{a}\right).$$

Tomando esse ponto como um ponto da curva $f(x,y)=0$ temos que

$$f\left(x + e, y \cdot \left(1 + \frac{e}{a}\right)\right) = 0.$$

Ainda por Eves (2011), “À sua maneira, Fermat determinou tangentes às seguintes curvas: elipse, cicloide, cissoide, conchoide, quadratriz e folium de Descartes⁸⁴.”.

Mas mais uma vez temos aqui a questão posta sobre os infinitesimais, já que Fermat baseia o seu pensamento em dois fatos equivalentes, o primeiro a reta tangente tomada deve coincidir com a reta secante utilizada para determinação da distância infinitesimal

$e > 0$, o segundo, desse modo, que tomamos o ponto $P\left(x + e, y \cdot \left(1 + \frac{e}{a}\right)\right)$, como um ponto

da curva, e assim fazendo $e = 0$, onde reside a inconsistência apontada nesse estudo sobre esses tais números bem pequenos, isto é, os dois pontos da secantes “tendem” a coincidir.

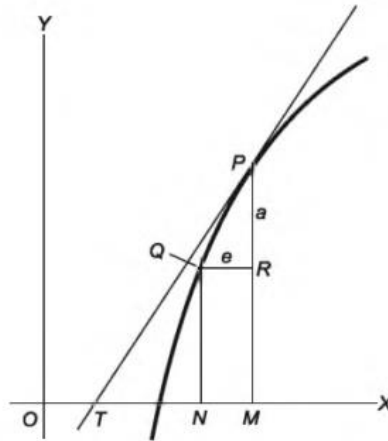
De uma forma parecida Isaac Barrow, mentor de Isaac Newton, também faz um estudo sobre a questão da reta tangente à uma curva dada, em sua obra *Lectiones opticae et geometricae* como dito por Eves (2011)

O trabalho matemático mais importante de Barrow é *Lectiones opticae et geometricae*, do ano em que ele renunciou à sua cátedra em Cambridge. O prefácio do tratado tece agradecimentos penhorados a Newton por parte do material do livro, provavelmente aquela que se ocupa da óptica. É nesse livro que se encontra uma abordagem muito próxima do processo moderno de diferenciação, mediante o uso do chamado *triângulo diferencial*, que ainda se encontra nos textos atuais de cálculo. (EVES, 2011, p. 434).

⁸⁴ Em matemática, uma curva ou linha curva é, em termos gerais, um objeto semelhante a uma linha reta, mas que não é obrigatoriamente retilíneo. Tecnicamente, uma curva é o lugar geométrico ou trajetória seguida por um ponto que se move de acordo com uma ou mais leis especificadas, neste caso, as leis comporão uma condição necessária e suficiente para a existência do objeto definido. Frequentemente há maior interesse nas curvas em um espaço euclidiano de duas dimensões (curvas planas) ou três dimensões (curvas espaciais).

Também em linguagem moderna, para o melhor entendimento do leitor, o objetivo é encontrar a reta tangente à curva da figura, no ponto P, e toma-se um ponto Q da curva, próximo de P. Assim temos, segundo Barrow, que os triângulos PTM e PQR são praticamente semelhantes, e por Eves (2011)” argumentava Barrow, considerando o triângulo menor indefinidamente pequeno.”, temos que:

Figura 2: Reta tangente à curva por Barrow



(EVES, 2011, p. 435)

$$\frac{PM}{TM} = \frac{PR}{QR}$$

Da figura temos que, $QR = e$ e $PR = a$, sendo assim, o ponto P é dado por $P(x, y)$ e $Q(x - e, y - a)$, substituindo essas coordenadas na equação da curva, e desprezando as potências de e e de a , conseguimos encontrar $\frac{a}{e}$, e portanto encontramos $TM = x = y \cdot \frac{a}{e}$, sendo assim temos ainda que:

$$OT = OM - TM = OM - PM \cdot \frac{QR}{PR} = x - \frac{TM}{PM} = x - y \cdot \frac{e}{a}.$$

E sendo assim temos a reta tangente determinada, já que conhecemos dois pontos da mesma. Barrow nos traz um método com uma lógica mais formal do que a de Fermat, e foi capaz de encontrar a reta tangente à diversas curvas, como a *curva kappa*, uma particular *curva de Lamé*, *folium de Descartes*, *quadratriz*, *tangentoide*, (Eves, 2011)” A razão $\frac{a}{e}$ é, obviamente, nosso moderno $\frac{dy}{dx}$ e o questionável procedimento de Barrow pode facilmente tornar-se rigoroso com o uso da teoria dos limites.”, e que hoje chamamos de coeficiente angular da reta tangente.

Contudo ainda recorrendo na mesma inconsistência, onde discordamos de Eves quanto ao rigor da teoria dos limites, quando supõe que os triângulos são “praticamente semelhantes” já que o seu método baseia-se no fato de que ϵ é “indefinidamente pequeno” , fazendo menção, ainda que inconsciente, aos infinitesimais mais uma vez, mas ambos podem sim serem considerados precursores do Cálculo Diferencial, e autores de um método eficiente para determinar a reta tangente à uma curva do plano e um ponto da mesma.

Hoje, ainda no Cálculo não-standard, um estudante pode achar a reta tangente por uma fórmula, ainda que a chamada derivada siga a falta de rigor já apontada nesse estudo, que como veremos ainda se baseia nos limites de Newton, e nos números reais e seus infinitésimos, mas que gera um resultado satisfatório. A técnica aplicada é vista nos livros didáticos como em (Guidorizzi, 2001).

Definição. Sejam f uma função e p um ponto de seu domínio. O limite

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

quando existe e é finito, denomina-se *derivada* de f em p e indica-se por $f'(p)$. Assim

$$f'(p) = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

A reta de equação

$$y - f(p) = f'(p)(x - p)$$

é, por definição, a *reta tangente* ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$. Assim, a *derivada* de f , em p , é o *coeficiente angular da reta tangente* ao gráfico de f no ponto de abscissa p .

4.2 O PROBLEMA DA QUADRATURA DO CÍRCULO

A evolução de algumas civilizações antigas, e suas práticas culturais, o desenvolvimento da agricultura, pecuária, e outras atividades proporcionou um grande avanço científico, na tentativa de resolver problemas postos a partir dessas práticas. Povos como os Egípcios, Chineses, Gregos, foram precursores no desenvolvimento do que hoje chamamos de ciência, e a matemática sempre esteve presente nesses avanços, visto que a partir dela diversas dessas atividades puderam ser otimizadas, problemas puderam ser resolvidos, melhorando cada vez mais tecnologicamente as ações do ser humano.

Tais avanços permitiram que o homem agora pudesse se perguntar cada vez mais sobre a sua existência e sobre o mundo em que vive, e a Filosofia assim, foi grande influenciadora do avanço demonstrado por essas civilizações, e embora bastante discutida, podemos dizer que foram as criadoras do conceito de ciência, já que não apenas resolviam

problemas práticos pontuais necessários, mas já nessa época, criavam generalizações, e com metodologias baseadas na busca pelo questionamento e pela instauração da verdade e da lógica.

A distinção entre a prática da vida do ser humano e da abstração que o distingui definitivamente do homem antigo, é um marco no que se refere à definição de homem científico, e diversos povos contribuíram para esse momento, mas os gregos, claramente tiveram uma participação gigantesca nesse processo, desde os povos mais antigos, mas para muitos estudiosos a partir do século V depois de Cristo, como diz Rosa (2012)

Na História da Ciência, um dos Períodos mais importantes e mais complexos foi o da Grécia Antiga, principalmente a partir do século VI antes da Era Cristã, pois foi quando se iniciou e se desenvolveu, pela primeira vez, o espírito científico, marco fundamental na evolução do pensamento humano, e quando ocorreria, em consequência, o advento da Ciência abstrata. Esse novo espírito viria a ser o grande divisor entre a civilização grega e as demais civilizações daquele Período Histórico, os quais trilhariam caminhos distintos na busca de resposta às inquietações do Homem quanto a seu Destino e quanto à Natureza e seus fenômenos. (ROSA, 2012, p. 99).

A abstração, os sistemas lógico-dedutivos-indutivos, uma matemática axiomáticas, baseadas não apenas na prática, mas exaltando o pensamento humano, a ciência como definimos hoje, tem sua base em povos que puderam mostrar incríveis construções e análises do mundo, e já na época demonstraram a confiabilidade na razão humana, e a busca pela verdade fundamentada, nos permitiram chegar a avanços incríveis nos séculos que se seguiram, chegando à descobertas até poucos séculos impossíveis, já que os sistemas lógicos, e as práticas epistemológicas não lhes davam embasamento suficiente, e os gregos podemos afirmar que são os precursores desse processo, como o próprio Albert Einstein ilustra

Admiramos a Grécia antiga porque fez nascer a ciência ocidental. Lá, pela primeira vez, se inventou a obra-prima do pensamento humano, um sistema lógico, isto é, tal que as proposições se deduzem umas das outras com tal exatidão que nenhuma demonstração provoca a dúvida. É o sistema da geometria de Euclides. Esta composição admirável da razão humana autoriza o espírito a ter confiança em si mesmo para qualquer nova atividade. E se alguém, no despertar de sua inteligência, não foi capaz de se entusiasmar com uma arquitetura assim, então nunca poderá realmente se iniciar na pesquisa teórica. (EINSTEIN, 1981, p. 62).

Diversas mentes incríveis surgem na Grécia Antiga, e a Filosofia, bem como a Matemática são enormemente desenvolvidas e não seremos injustos em escolher esse povo como o principal fundador de uma tentativa de resolver problemas de todos os âmbitos, e fez o homem acreditar ser capaz de resolvê-los em um acúmulo de conhecimentos e técnicas, tal como acreditamos até os dias atuais, (Funari, 2002, p. 50)” A Filosofia começou ocupando-se do problema da origem do mundo e da verdadeira realidade, da unidade por detrás das aparências. Desde o século VI a.C. uma série de

pensadores, na Jônia e na Magna Grécia, começaram a se ocupar desses temas. Ainda por Funan

Foi então que surgiu o pensamento racional e a Filosofia, definida como o estudo caracterizado pela intenção de ampliar a compreensão da realidade. Nesse contexto, pensadores como Tales, de Mileto, Pitágoras, de Samos e seus seguidores determinaram os princípios da Geometria; Hecateu, de Mileto, desenvolveu a Geografia, entre outros pensadores. Explicar o mundo a partir da razão, deixando de lado deuses, mitos e acasos mágicos e procurando identificar princípios, estabelecer uma ordem para os fenômenos naturais e sociais a partir da reflexão sobre a experiência cotidiana foi uma preocupação que começou a ocupar as mentes de alguns homens inquietos e criativos. (FUNAN, 2002, p. 50)

Essa criatividade, que assim foi permitida a esses homens, os fizeram desenvolver teorias generalistas e resultados monumentais sobre a Geometria que os cercavam em função de uma visão analítica de mundo, e como caso particular o estudo sistemático da geometria e seus fundamentos como nos relata Eves (2011) “Os primeiros três séculos da matemática grega, começando com os esforços iniciais de Tales por uma geometria demonstrativa (por volta de 600 a.C.) e culminando com os notáveis *Elementos* de Euclides (por volta de 300 a.C.), constituem um período de realizações extraordinárias.”, que permitiu, por exemplo, que Descartes desenvolvesse a geometria analítica, que foi base para o Cálculo de Newton e Leibniz.

A forma lógica e dedutiva da matemática, parecia para Platão de grande valia na construção de conhecimentos, e a Geometria principalmente, já que a sua forma abstrata de construção se mostrava diferente apenas de uma prática simples de uma técnica que resolvia um problema específico, mas uma forma de generalizar conhecimentos, e que poderiam ser aplicados em diversas outras empreitadas científicas, até mesmo fora da matemática. Platão demonstra isso claramente no lema posto em sua Academia, (EVES, 2011) “Que aqui não adentrem aqueles não versados em geometria”.

Uma filosofia da matemática nasce dessa visão de mentes com a de Platão, que embora não seja conhecido por feitos em matemática, quase todos os grandes trabalhos de matemática nessa época, século IV a.C., foram desenvolvidos por amigos ou discípulos dele, provavelmente pela sua influência, já que era grande defensor de uma filosofia pautada na matemática, e a sua visão de mundo e de prática divina, baseada na Geometria, como Eves (2011) destaca

A matemática parecia da mais alta importância a Platão devido ao seu componente lógico e à atitude espiritual abstrata gerada por seu estudo; por essa razão ela ocupava um lugar de destaque no currículo da Academia. Alguns veem nos diálogos de Platão o que poderia ser considerada a primeira tentativa séria de uma filosofia da matemática. (EVES, 2011, p. 132)

O problema da quadratura do círculo, é um dos chamados “Os três famosos problemas”⁸⁵, cuja importância principal se dá no fato de que, diferente do que se acreditava até o século XIX, não podem ser resolvidos de forma construtiva, com régua e compasso, exceto em aproximação.

O terceiro problema dessa lista permitiu que diversas contribuições fossem feitas ao longo dos séculos, visto que envolveu temas difíceis, e a relação antes desconhecida com o problema das tangentes e finalmente com a criação do Cálculo Diferencial e Integral

Provavelmente nenhum outro problema exerceu um fascínio maior ou mais duradouro do que aquele de construir um quadrado de área igual à área de um círculo dado. Já em 1800 a.C. os egípcios haviam “resolvido” o problema, tomando o lado do quadrado igual a $\frac{8}{9}$ do diâmetro do círculo dado. De lá para cá, literalmente milhares de pessoas trabalharam no problema e, a despeito de já se ter uma demonstração de que a construção é impossível com os instrumentos euclidianos, não há um ano que não tenha sua safra de “quadradores de círculo”. (EVES, 2011, p. 140).

Este autor nos traz, e aqui iremos reproduzir, uma “solução” interessante para o problema, que fora desenvolvida como uma melhoria de contribuições e de “soluções” anteriores advindas de Anaxágoras (c. 499-c. 427 a.C.), seu contemporâneo Hipócrates de Quiro, Hípias de Elis (c. 425 a.C.), Dinostrato (c. 350 a.C.), dentre outros.

Pode-se conseguir uma solução elegante do problema da quadratura com a espiral de Arquimedes que, efetivamente, foi utilizada por Arquimedes (c. 225 a.C.) com essa finalidade. Dinamicamente, pode-se definir a espiral como o lugar dos pontos P que se movem uniformemente ao longo de um raio que, por sua vez, gira uniformemente num plano em torno de sua origem. Se tomarmos como sistema polar de referência a posição OA do eixo de rotação quando P coincide com a origem O do raio, temos que OP é proporcional ao ângulo AOP e a equação polar da espiral é $r = a\theta$, em que a é a constante de proporcionalidade.

Tracemos o círculo de centro O e raio igual a a . Então OP e o arco do círculo entre as semirretas OA e OP são iguais, pois ambos são dados por $a\theta$ (ver Figura 3). Segue-se então que se tomamos OP perpendicular a OA , OP terá comprimento igual a um quarto da circunferência do círculo. Com o a área K do círculo é metade do produto de seu raio por sua circunferência temos:

$$K = \left(\frac{a}{2}\right)(4OP) = (2a)(OP)$$

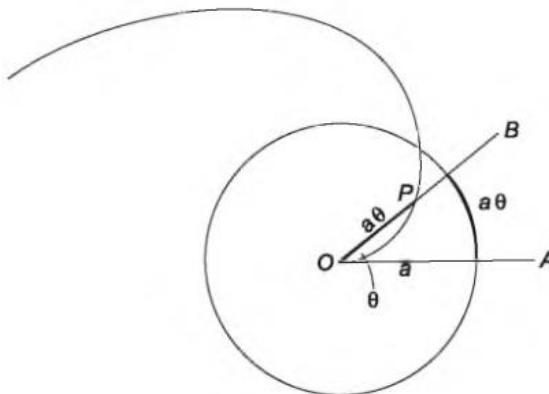
Assim, o lado do quadrado pretendido é média proporcional entre $2a$ e OP , ou entre o diâmetro do círculo e o comprimento do raio vetor da espiral que é perpendicular a OA .

⁸⁵ 1. *Duplicação do cubo* ou o problema de construir o lado de um cubo cujo volume é o dobro do de um cubo dado.

2. *Trissecção do ângulo* ou o problema de dividir um ângulo arbitrário dado em três partes iguais.

3. *Quadratura do círculo* ou o problema de construir um quadrado com área igual à de um círculo dado. (EVES, 2011, p. 133-134)

Figura 3: Quadratura do Círculo por Arquimedes



(EVES, 2011, p. 141)

Podemos trisseccionar (mais geralmente, multisseccionar) um ângulo $A O B$ com a espiral de Arquimedes. Suponhamos que OB corte a espiral em P e façamos a trisseccção do segmento OP com os pontos P_1 e P_2 . Se as circunferências de centro O e raios OP_1 e OP_2 cortam a espiral em T_1 e T_2 então OT_1 e OT_2 trisseccionam o ângulo AOB .

Segundo Eves (2011) e Boyer (1974)

A regra egípcia para achar a área do círculo tem sido considerada um dos maiores sucessos da época (1650 a.C.). No Prob. 50 o escriba Ahmes assume que a área de um campo circular com diâmetro de nove unidades é a mesma de um quadrado com lado de oito unidades. Comparando com a fórmula moderna $A = \pi r^2$ vemos que a regra egípcia equivale aproximadamente a atribuir a π o valor $3 \frac{1}{6}$ uma aproximação bastante elogiável; mas novamente não há sinal de que Ahmes soubesse que as áreas de seu círculo e seu quadrado não eram *exatamente* iguais. (BOYER, 1974, p. 13).

Seguindo o gosto mesopotâmio de fazer tabelas e listas, uma tableta do grupo de Susa compara as áreas e os quadrados dos lados de polígonos regulares de três, quatro, cinco, seis e sete lados. [...]. Na mesma tableta o escriba dá 0;57,36 como razão entre o perímetro do hexágono regular e a circunferência do círculo circunscrito; e disso podemos concluir imediatamente que o escriba babilônio tinha tomado $3;7,30$ ou $3 \frac{1}{8}$ como aproximação para π . Isso é pelo menos tão bom quanto o valor adotado no Egito. (BOYER, 1974, p. 28).

Seu método (Arquimedes) para cálculo raízes quadradas, ao achar o perímetro do hexágono circunscrito, e para médias geométricas, era semelhante ao dos babilônios. O resultado do cálculo de Arquimedes sobre o círculo foi uma aproximação do valor de π expressa pelas desigualdades $3 \frac{10}{71} < \pi < 3 \frac{10}{70}$, uma aproximação melhor que a dos egípcios e a dos babilônios. (BOYER, 1974, p. 93).

Nas obras chinesas, como nas egípcias, chama a atenção a justaposição de resultados precisos e imprecisos, primitivos e elaborados. São usadas regras corretas para as áreas de triângulos, retângulos e trapézio. A área do círculo era calculada tomando três quartos do quadrado sobre o diâmetro ou um dozeavos do quadrado da circunferência – resultado correto se se adota o valor três para π – mas para a área do segmento o *Nove capítulos* usa o

resultado aproximado $\frac{s(s+c)}{2}$, onde s é a seta (isto é, o raio menos o apótema) e c a corda ou base do segmento. (BOYER, 1974, p. 144).

Em *Lilavati*, Bhaskara (1114 a cerca de 1185). A área do círculo é corretamente dada como igual a um quarto da circunferência vezes o

diâmetro e o volume da esfera como um sexto do produto da área da superfície pelo diâmetro, mas para a razão da circunferência para o diâmetro de um círculo Bhaskara sugere ou 3927 para 1250 ou o valor “bruto” 22/7. (BOYER, 1974, p. 162).

Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667) foi um eminente quadrador do círculo do século XVII. Aplicou métodos do pré-cálculo a vários problemas de quadratura. (EVES, 2011, p. 402).

Johann Bernoulli escreveu sobre múltiplos tópicos, como fenômenos ópticos relacionados com reflexão e refração, determinação das trajetórias ortogonais de uma família de curvas, retificação de curvas e quadratura de áreas por meio de séries, trigonometria analítica, o cálculo exponencial e muitos outros assuntos. (EVES, 2011, p. 465).

O segundo filho de Giacomo Riccati, Vincenzo Riccati (1707-1775), um jesuíta, foi professor de matemática e trabalhou em equações diferenciais, séries infinitas, quadraturas e funções hiperbólicas. (EVES, 2011, p. 476).

Um número se diz *algébrico* se é raiz de algum polinômio não nulo de coeficientes racionais; caso contrário, se diz *transcendente*. F. Lindemann provou (em 1882) que π é transcendente. Esse fato garante que o problema da quadratura não pode ser resolvido com os instrumentos euclidianos. (EVES, 2011, p. 146).

Newton fez numerosas e notáveis aplicações de seu método dos fluxos. Determinou máximos e mínimos, tangentes a curvas, curvaturas de curvas, pontos de inflexão e convexidade e concavidade de curvas; aplicou-o também a muitas quadraturas e retificações de curvas. (EVES, 2011, p. 439-440).

Com a criação do Cálculo, esse problema pode ser resolvido e generalizado, onde se pode criar um método para a quadratura de qualquer curva contínua, no que hoje conhecemos como Integral Definida aplicada ao cálculo de área entre curvas, e como conhecido já por Barrow antes de Newton e Leibniz, caracteriza o que chamamos de Teorema Fundamental do Cálculo, e com isso sabemos que os dois dos maiores problemas da Matemática, estão ligados, o problema das tangentes e das quadraturas/cubaturas⁸⁶.

Leibniz foi capaz de perceber a relação entre o problema das tangentes e das quadraturas, e claramente sem a interferência de uma possível leitura de trabalhos de Newton, já que o seu método era bem diferente, e é um dos pontos de estudo nesse trabalho, já que achamos que Leibniz se aproxima mais da ideia realmente rigorosa na criação do Cálculo. Bueno destaca essa capacidade do brilhante Leibniz

em 1686, Leibniz publicou um novo texto, dando ênfase ao Cálculo Integral. Mostrou que a quadratura se caracteriza como o método inverso ao utilizado para encontrar tangentes, focando na relação inversa entre diferenciação e integração, o que o levou ao Teorema Fundamental do Cálculo. A ideia central da abordagem trazida por Leibniz distinguia-se da de Newton, pois não se fundamentava na noção de taxa de variação (derivada ou fluxo), mas na conceituação de diferenciais. (BUENO, 2021, p.27-28).

Hoje um estudante de Cálculo Diferencial e Integral calcula a área do círculo, isto é, pode quadrar o círculo facilmente, por meio de uma Integral Definida, a saber

⁸⁶ O problema da quadratura é um problema de cálculo de área, enquanto o da cubatura com o cálculo de volumes, que após a criação do cálculo Integral, sabemos que está relacionado ao cálculo de Integral de uma curva.

Da equação cartesiana reduzida da circunferência, centrada na origem e de raio r :

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$$

Temos a área do círculo dada pela integral definida:

$$Área = 4 \cdot \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

E seja a integral indefinida $I = \int \sqrt{r^2 - x^2} dx$

Fazemos a substituição $x = r \cdot \text{sen}(u)$ e $dx = r \cdot \cos(u) du$, com $r \geq 0$ e $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$ então:

$$I = \int \sqrt{r^2 - r^2 \text{sen}^2(u)} \cdot r \cos(u) du$$

$$I = \int \sqrt{r^2 (1 - \text{sen}^2(u))} \cdot r \cos(u) du$$

$$I = \int \sqrt{r^2 \cos^2(u)} \cdot r \cos(u) du$$

$$I = \int r \cos(u) \cdot r \cos(u) du$$

$$I = \int r^2 \cos^2(u) du$$

Sabe-se que: $\int \cos^2(u) du = \frac{u}{2} + \frac{\text{sen}(2u)}{4}$ então:

$$I = \frac{r^2}{2} \left[u + \frac{\text{sen}(2u)}{2} \right] + C$$

Mas como $u = \arcsen\left(\frac{r}{x}\right)$, então:

$$I = \frac{r^2}{2} \left[\arcsen\left(\frac{x}{r}\right) u + \frac{x}{r} \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}} \right] + C$$

Aplicando os limites de integração, temos:

$$Área = 4 \cdot \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = 2r^2 \left[\arcsen\left(\frac{x}{r}\right) + \frac{x}{r} \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}} \right]_0^r = 2r^2 \cdot \arcsen(1)$$

Portanto:

$$Área = 2r^2 \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$Área = \pi \cdot r^2$$

Ou ainda, por mudança polar:

$$Área = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi} r^2 d\theta$$

Com solução:

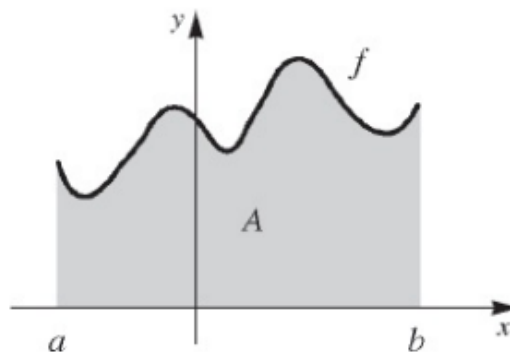
$$Área = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot [\theta]_0^{2\pi} = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot [2\pi - 0] = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot 2\pi = \pi \cdot r^2$$

Onde r = raio do círculo.

Leibniz, por sua vez, definiu a integral a partir da soma de um número infinito de retângulos infinitamente pequenos (BUENO, 2021). O cálculo de áreas hoje tem uma solução genérica, feito só atingido pelas contribuições desses grandes matemáticos, e embora ainda nos livros didáticos em geral venham com a forma clássica do Cálculo Diferencial e Integral, já se pode “quadrar” qualquer curva, como em Guidorizzi (2001)

Seja f contínua em $[a, b]$, com $f \geq 0$ em $[a, b]$. Estamos interessados em definir a área do conjunto A do plano limitado pelas retas $x = a, x = b, y = 0$ e pelo gráfico de $y = f(x)$.

Figura 4: Área sob uma curva



(GUIDORIZZI, 2001, p. 141)

Definimos a área de A por

$$Área = \int_a^b f(x) dx.$$

4.3 ALGUMAS CONTRIBUIÇÕES ANTES E DEPOIS DA CRIAÇÃO DO CÁLCULO NO SÉCULO XVII

Por muitos matemáticos, a prática comum baseava-se apenas em ignorar a questão dos infinitesimais e tratar apenas com os números não-nulos, que funcionavam bem intuitivamente, em muitos casos com a ideia geométrica de subdividir mais e mais o número, e assim evitar tratar o problema posto pelos infinitos e infinitésimos, conforme Boyer (1974): a aritmética do zero era muitas vezes ignorada, e as vezes encontramos alguns matemáticos que ousavam mencioná-los enquanto outros não

Bhaskara (1114 a cerca de 1185), quem preencheu algumas lacunas na obra de Brahmagupta, por exemplo dando uma solução geral da equação de Pell e considerando o problema da divisão por zero. Aristóteles observara que não existe uma razão pela qual um número como quatro excede o número zero; mas a aritmética do zero não entrava na matemática grega, e Brahmagupta não se comprometera quanto à divisão de um número diferente de zero por zero. É, pois, na *Vija-ganita* de Bhaskara que achamos pela primeira vez a afirmação de que um tal quociente é infinito. (BOYER, 1974, p. 161)

Como é sabido, a operação de Integração e a diferenciação são operações inversas, e a diferenciação se preocupa com a taxa de variação da função, enquanto a integral com um somatório de tais taxas, e Isaac Barrow já teria conhecimento da primeira, segundo Eves (2011)

Apesar de indícios tênues que apontam noutra direção, em geral considera-se que Barrow foi o primeiro a perceber, de maneira plena, que a diferenciação e a integração são operações inversas uma da outra. Essa importante descoberta é conhecida como *teorema fundamental do cálculo* e aparece enunciada e provada nas *Lectiones* de Barrow. (EVES, 2011, p. 435).

Os métodos de Fermat e Barrow, embora eficientes, não possuíam uma sistematização metodológica do processo, e uma simbologia satisfatória, que pudesse ser aplicada de forma generalizada, o que compete à Newton e Leibniz, o título de criadores do cálculo, por terem sido capazes de obter tais resultados.

Faltava ainda a criação de um simbolismo geral com um conjunto sistemático de regras analíticas formais e também um redesenvolvimento, consistente e rigoroso, dos fundamentos da matéria. Foi à primeira dessas duas coisas, ou seja, à criação de um *cálculo* manipulável e proveitoso, que Newton e Leibniz, trabalhando independentemente, deram sua contribuição. Assim, embora Newton e Leibniz tenham tido muitos precursores, a criação do cálculo em geral é atribuída a eles. (EVES, 2011, p. 435).

A generalização esperada de uma teoria matemática só foi alcançada nos trabalhos de Newton e Leibniz, visto que antes deles os problemas eram resolvidos de forma pontual, e métodos que funcionavam em algum caso não funcionavam noutros, e assim temos a incrível atuação desses cientistas, como podemos ver nas palavras de Roque

A maior novidade introduzida na matemática por Newton e Leibniz reside no grau de generalidade e unidade que os métodos infinitesimais adquiriram com seus trabalhos. Os matemáticos já tinham um enorme conhecimento sobre como resolver problemas específicos do cálculo infinitesimal, mas não se dedicaram a mostrar a generalidade e a potencialidade das técnicas empregadas. (ROQUE, 2012, p. 306).

Esses dois ilustres matemáticos se aproximaram bastante do sucesso em criar o cálculo diferencial e integral, mas a história remete a Newton e Leibniz tal sucesso, contudo apenas dois séculos depois podemos dizer que os seus resultados estariam demonstrados na figura de Cauchy e Weierstrass, embora testados sem nunca acusar uma inconsistência de resultados.

Muitas teorias sobre o cálculo já haviam sido pensadas por diversos matemáticos, até o século XVII, e muitas delas por Newton, que se dedicou por muito tempo a atividades que usavam o cálculo para fundamentar-se, mas Newton tinha o hábito de não publicar as suas descobertas, e apenas as usava para resolver os problemas que estudava

Todavia, tanto o Cálculo quanto outras descobertas impressionantes feitas por Newton permaneceram desconhecidos por cerca de meio século, pois o cientista não aceitava bem as críticas, muitas vezes infundadas, à sua obra. Acredita-se que, até 1669, apenas Isaac Barrow conhecesse o trabalho matemático de Newton. Nesse ano, porém, um dos seus artigos, intitulado *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*⁸⁷, que trata das séries infinitas e suas aplicações para cálculo da área, foi enviado por Barrow a seu amigo John Collins⁴ (1625-1683), em Londres. A partir de então, Newton começou a ser percebido.

Mesmo tendo realizado essas descobertas incríveis, Newton recusou-se a permitir que Barrow e Collins tentassem publicar o seu trabalho. *De analysi* permaneceu inédito, então, até 1711. (BUENO, 2021, p. 23)

Newton viu que a diferencial representava a taxa de variação da curva no ponto, e que na mecânica representava a velocidade instantânea do móvel no instante t , e conseguiu completar o trabalho de seus precursores, quando dá um tratamento analítico para as curvas e os resultados da reta tangente, através do seu método dos fluxos, e dando um significado físico para a questão da continuidade da curva, ainda sem utilizar o conceito de função, que utiliza Leibniz mais tarde.

Newton fez uma descoberta matemática mais importante, o método dos fluxos, cuja essência ele comunicou a Barrow em 1669. Seu *Method o f Fluxions*, embora escrito em 1671, só foi publicado em 1736. Para Newton, nesse trabalho, uma curva era gerada pelo movimento contínuo de um ponto. Feita essa suposição, a abscissa e a ordenada de um ponto gerador passam a ser, em geral, quantidades variáveis. A uma quantidade variável ele dava o nome *defluente* (uma quantidade que flui) e à sua taxa de variação dava o nome *defluxo* do fluente. Se um fluente, como a ordenada do ponto gerador, era indicada por y , então o fluxo desse fluente era denotado por $\dot{y}$. (EVES, 2011, p. 438-439).

Para muitos estudiosos o conceito de Newton não é melhor do que de Leibniz por tratar a função como um conceito físico, já que de algum modo impõe a questão de movimento e de tempo à geometria, e Leibniz trabalha o seu cálculo de forma estática e não dinâmica, mostrando uma abordagem mais matemática nesse sentido, além de se sentir mais à vontade em considerar os números infinitesimais, onde o método de Newton claramente os evita sempre.

Todos que estudaram cálculo diferencial já viram a definição de derivada através de um limite, e por Eves (2011) “Deve-se a Cauchy grande parte da abordagem do cálculo apresentado nos atuais textos universitários, como os conceitos básicos de limite e

⁸⁷ Da análise por meio de equações tendo um número infinito de termos.

continuidade. Cauchy definiu a derivada de $y = f(x)$ em relação a x como o limite, quando $\Delta x \rightarrow 0$, da razão

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Embora tivesse ciência da facilidade operacional das diferenciais, Cauchy relegou-as a segundo plano. Se dx é uma quantidade finita, ele definiu dy , de $y = f(x)$, simplesmente como $f'(x)dx$.”

Salientamos que algum rigor foi alcançado por Cauchy, contudo, a sua ideia sobre os infinitesimais ainda se mostra inspirada na geometria, faltava para muitos matemáticos, uma interpretação puramente aritmética, e sua linguagem não fora considerada totalmente rigorosa aos olhos da análise real moderna, já que o seu conceito se aproxima bastante das ideias difundidas no século XVIII, por Leonard Euler por exemplo.

Muito se discutiu e se discute sobre a formalidade dos conceitos que cercam essa nova matemática, como vemos nas contribuições de d'Alembert e Euler, no relato de Boyer (1974)

d'Alembert considerava discutível o uso que Euler fazia de séries divergentes (1768) apesar dos sucessos conseguidos. Além disso, d'Alembert fazia objeções a Euler por esse assumir que diferenciais são símbolos para quantidades que são zero mas no entanto são qualitativamente diferentes. [...], d'Alembert afirmou que “a diferenciação de equações consiste simplesmente em achar os limites da razão de diferenças de duas variáveis contidas na equação”. Opondo-se aos pontos de vista de Leibniz e Euler, d'Alembert insistia que “uma quantidade é alguma coisa ou é nada? se é alguma coisa, não desapareceu ainda; se é nada, ela literalmente desapareceu. A suposição de que há um estado intermediário entre esses dois é uma quimera”. (BOYER, 1974, p. 331)

O rigor e a exatidão da ciência ocorrem em sua base epistemológica em função de objetivos específicos dessa ciência, que devem ser observados os fundamentos não só dos efeitos, mas também das causas, Aristóteles, (1987), p. 95, “Uma ciência é mais exata e anterior, quando conhece ao mesmo tempo o que e o porquê, e nunca o *que* separado do seu *porquê*”.

Obviamente, esse estudo tem como figura central de discussão a questão dos infinitesimais, porém, a preocupação maior se dá em discutir a análise padrão que hoje, ainda, se mostra o paradigma dominante atual entre os acadêmicos de análise real, e embora Cauchy sofra críticas sobre o seu avanço no conceito sobre os infinitesimais, é inegável a sua contribuição na tentativa de trazer o rigor matemática para o cálculo do século XVII, e talvez o conceito protagonista dentre as contribuições deste seja a noção de

continuidade⁸⁸ ligada intimamente com o conceito de convergência, que apresentou diferenças consideráveis sobre o conceito descrito por Euler⁸⁹.

Muitos ilustres matemáticos cooperaram muito com a construção do cálculo como conhecemos hoje, embora poucos tenham tido sucesso em tornar essa nova disciplina mais formal e rigorosa, matemática ou filosoficamente, mas puderam criar extraordinárias aplicações para o mesmo, como podemos ressaltar as figuras de *Bernoulli, Clairaut, Euler* e *Riccati*, como por exemplo, na resolução de equações diferenciais.

Mesmo com toda contribuição de Cauchy, que mais se preocupava em tratar da continuidade, ainda sem uma definição formal, vemos uma aritmetização da análise matemática, e um afastamento da geometria como base conceitual, tida como pouco rigorosa no cálculo, mas ainda sem uma definição nesses termos para os limites, que só acontece, inicialmente com Bernhard Bolzano em 1817 no livro *Rein analytischer Beweis*, que segundo Boyer(1974, p. 381) “*devotado a uma prova puramente aritmética do teorema de localização de álgebra, e isso exigia um conceito não geométrico de continuidade de uma curva ou função. Indo bem mais longe em suas ideias pouco ortodoxas, ele anunciou algumas propriedades importantes dos conjuntos infinitos em uma obra póstuma de 1850, Paradoxien des Unendlichen.*”

É interessante ambientar o leitor de que diferente do que poderíamos imaginar por senso comum, a álgebra só se inicia por volta do século XVI, e o conceito de função ainda não estava estabelecido na época desses cientistas como podemos ver aqui:

[...] a noção de função, como conhecemos hoje, começa a se manifestar quando se faz necessária uma ferramenta matemática para investigar fenômenos naturais – estudos iniciados por Galileu Galilei (1564-1642) e Johannes Kepler (1571-1630). Seu desenvolvimento se deu, sobretudo, graças às várias possibilidades permitidas pela notação algébrica criada por François Viète (1540-1603) e pela geometria analítica introduzida por René Descartes (1596-1650) e Pierre de Fermat (1601-1665) (BARONI, 2014, p. 15)

Encontramos aqui mais uma diferença entre as concepções de Newton e Leibniz, quanto ao que entendiam sobre funções:

Baseado em motivações físicas (movimentos de corpos), Newton estabeleceu uma relação íntima entre os conceitos de função, variação e cálculo fluxional. O método de fluxões descreve as variações em termos de grandezas fluentes (funções) e só tem sentido se pensado em contextos naturais. Já Leibniz teve seu interesse despertado pelo estudo de curvas e o problema de tangentes; e foi nesse contexto que elaborou os conceitos

⁸⁸ Seja uma função $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $a < c < b$. A função f é contínua no ponto c , se $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ existe quando $x \rightarrow c$ e é igual a $f(c)$, ou de uma forma mais concisa: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ onde $[a, b]$ é qualquer um dos intervalos das formas: (a, b) , $(a, b]$, $[a, b)$ ou $[a, b]$. Se não existe $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ ou se existe $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ quando $x \rightarrow c$, mas $\lim_{x \rightarrow c} f(x) \neq f(c)$, dizemos que a função f é descontínua em $x = c$.

⁸⁹ Leonhard Euler (1707-1783) [Euler 1755] foi o expoente mais proeminente dos infinitesimais, embora tenha dedicado apenas uma pequena parte de seu imenso corpus científico a questões de fundações. (BRADLEY, 2009).

fundamentais do cálculo. Tanto a ideia de função como a distinção entre curvas algébricas e transcendentais ocorreram a Leibniz quando ele se deparou com problemas de natureza geométrica ligados ao cálculo. (BARONI, 2014, p. 17).

Credita-se também a Leibniz o termo função, como relata Baroni (2014) “A palavra *função* apareceu, pela primeira vez, num artigo escrito por Leibniz em 1692 (Leibniz, 1692). Ele chamava de funções as quantidades geométricas variáveis relacionadas a uma curva, tais como coordenadas, tangentes, subtangentes, normais, raio de curvatura, etc.”⁹⁰

Ainda de acordo com Boyer (1974, p. 381) “*Bolzano parece ter percebido até, por volta de 1840, que a infinidade de números reais é de tipo diferente da infinidade dos inteiros, sendo não enumerável*”. Mostrando assim um maior entendimento sobre o infinito e os infinitésimos, bem como uma melhor interpretação sobre a natureza da teoria dos conjuntos, sobretudo em relação ao conjunto dos números reais.

Bernhard Riemann, por volta da década de 1830, foi capaz de enunciar profundos teoremas relacionando a teoria dos números com a análise clássica, e das diversas contribuições, é conhecido por deter o melhor refino na definição de Integral, e sua relação com a geometria, como diz Boyer (1974)

“Aqui vemos um aspecto notável da obra de Riemann – uma concepção fortemente intuitiva e geométrica da análise que está em marcado contraste com as tendências aritmetizantes da escola de Weierstrass. Seus processos foram chamados “um método de descoberta” ao passo que os de Weierstrass constituíam “um método de demonstração”. (BOYER, 1974, p. 406)

Observemos que a geometria não um mal para as construções do cálculo, sobretudo porque as suas aplicações em grande maioria são geométricas, mas historicamente e filosoficamente o que temos nesse tempo e nos tempos modernos é uma preocupação com a fundamentação e o rigor da análise, o que a geometria se mostra muito mais indutiva e intuitiva do que comprovadamente formalista. Contudo, com essa base geométrica exige-se muito mais cuidado na formulação das premissas dadas>

Uma ciência que se define a partir de princípios menos numerosos é também mais exata do que a ciência que repousa em princípios positivos, como é caso da Aritmética, mais exata do que a Geometria. (ARISTÓTELES, 1987, p. 95-96).

Tantas teorias sobre a análise eram publicadas nessa época, por dois motivos inevitavelmente cruciais em época de formalização de uma teoria, visto que já se passaram cerca de 200 anos, de um paradigma que era falsificado porém não era demonstrado de forma definitiva:

⁹⁰ O conceito e a simbologia de funções, próxima a que conhecemos hoje, foram estabelecidos por Johann Bernoulli (1667-1748) que foi utilizada por Leonhard Euler em sua obra *Introductio in analysin infinitorum* (1748) e adotada por Cauchy no século seguinte.

- i) A confiança nas operações executadas sobre séries infinitas, e suas convergências.
- ii) A falta de qualquer definição da expressão “número real” que estava no centro da aritmetização da análise.

Bolzano publica um livro em 1817 apresenta uma definição de limite mais preocupada com o rigor matemático, porém ficou por muito tempo desconhecido pela comunidade científica, mas antecipara a visão de uma obrigatoriedade de se construir um rigor em análise que Klein o chamava “o pai da aritmetização”. De acordo com Eves(2011) “Bolzano tinha inclinação para a lógica e a matemática, especialmente a análise, e pode ser considerado um precursor da “aritmetização da análise””.

Posteriormente, uma definição semelhantemente rigorosa fora tornada mais conhecida com Karl Weierstrass, chamado por muitos como o “pai da análise moderna”, em 1861 nos traz uma definição rigorosa de limite, que é conhecida nos livros de Cálculo atuais como a definição formal para limites, e acredita-se que Weierstrass tenha eliminado assim a inconsistência dos infinitesimais, e a falta de uma definição de limites, que Cauchy⁹¹ nunca dera:

Em notação atual a definição de Weierstrass para um limite é dada por⁹²:

Seja f uma função definida em algum intervalo aberto que contenha o número a , exceto possivelmente no próprio a . Então dizemos que o **limite de quando x tende a a é L** , e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

se para todo número real $\varepsilon > 0$ houver um número $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta \quad \text{então} \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

E definiu continuidade por:

f é contínuo em x_0 se, para qualquer real estritamente positivo ε , existe um real estritamente positivo δ tal que, se x está a uma distância de x_0 estritamente menor que δ , então o valor da função f em x está em uma distância estritamente menor que ε do valor da função f em x_0 .

Em linguagem simbólica:

$$f \in C^0(x_0) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

Como dito antes, o não entendimento claro sobre os números reais, mais especificamente sobre os números irracionais, era o grande obstáculo a uma definição formal dos limites, e Weierstrass procura distanciar o cálculo da geometria e pra isso teria que definir número irracional independente do conceito de limite, e corrige erro

⁹¹ O capítulo 2 é intitulado “Sobre quantidades infinitamente pequenas e infinitamente grandes”, o que ilustra o fato de que os fantasmas de quantidades que partiram de Leibniz ainda não haviam partido no momento em que Cauchy escreveu; Acho que eles não foram devidamente exorcizados até Weierstrass entrar no jogo. (E depois há o trabalho relativamente recente de Abraham Robinson (1918-1974) deixando-os entrar novamente...). Em qualquer caso, nenhuma definição épsilon-delta explícita pode ser encontrada no *Cours d'analyse de Cauchy*. (Michael Berg é professor de matemática na Loyola Marymount University em Los Angeles, CA.). (Tradução nossa).

⁹² Weierstrass nos traz também definições baseadas em seus “epsilons e deltas” para derivadas e integrais.

epistemológico de Cauchy supondo a existência de um limite de uma sequência convergente tomando a própria sequência como o número ou o limite.

Agora os números irracionais são *agregados* de racionais, e vemos assim uma sutileza epistemológica em Weierstrass, já que de modo simplificado o que ele teria feito foi dizer que o número 1 não é o limite da série $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$; ele é a sequência associada a essa série.

Entre os escritos de Bolzano e Weierstrass sobre o tema passaram-se quase cinquenta anos, mas hoje encontramos nos livros de análise real um teorema que em justiça à Bolzano leva o nome de teorema de Bolzano-Weierstrass: um conjunto limitado S contendo infinitos elementos (pontos ou números) tem ao menos um ponto de acumulação.

O método aplicado por Weierstrass, até então, responde aos anseios dos matemáticos em relação à falta de rigor matemático no cálculo e na análise, e a partir dele os estudos se deram por esse caminho. Nesse trabalho não pretendemos citar todos os ilustres cientistas que contribuíram com a formação dessa disciplina, mas citar aqueles que de alguma forma foram vitais na construção e discussão sobre tais temas, que em algum momento mudaram a história dos números, do cálculo e da análise, ainda sabendo que provavelmente cometeremos injustiças por não trazer outros nomes dentre tantos gênios da ciência.

No cálculo temos quatro pontos pilares que são os Limites, Continuidade, as Derivadas e as Integrais, que foram e serão tratadas as duas últimas como forma de entender a relação intrínseca que acontece entre elas, contudo, a discussão maior se dá entre os números muito pequenos, números muito grandes, (infinitésimos e infinitos), e o que alicerça todo o cálculo que é o cálculo dos limites.

Em certa medida, podemos afirmar que tanto as convergências em limite de Cauchy, quanto os épsilons de Weierstrass representam uma revolução kuhniana em todos os seus termos sobre o paradigma dominante dos números infinitesimais e limites de Leibniz e Newton.

Claramente temos em Weierstrass um avanço em direção de uma definição rigorosa para os limites e os infinitesimais, que influenciou muitos matemáticos no estudo da análise por meio dos ε 's e δ 's até a atualidades, onde ele consegue dar profundidade aos números pequenos de Leibniz e Cauchy, mas revisitando Robinson, e sua análise não-standard, é impossível não nos perguntarmos

Quem são esses ε 's e δ 's?

Ainda não são os mesmos números bem pequenos de antes, mas agora escritos de maneira mais “matemática”?

Será que Weierstrass não teria sido o precursor do entendimento que há uma classe de números que não se podem ser chamados de reais, já que parece descrever o menor número real de todos, que só faria sentido se estivesse fora do conjunto dos reais, e só não fora capaz de denominá-los números hiper-reais?

A essa altura o leitor tem o claro juízo de que os autores deste estudo têm uma predisposição a aceitar melhor as ideias de Leibniz em detrimento das de Newton, já que um dos temas principais deste trabalho seja o estudo da Análise Não-Standard, que em certo nível difere de tudo que fora publicado até então, no cálculo e na análise matemática. Embora saibamos que os resultados físicos obtidos por todos esses cientistas ao longo dos séculos se mostram aceitáveis, a discussão maior se dá no âmbito da Filosofia, da Epistemologia e da Metamatemática, claro que sem ignorar o rigor acadêmico matemático obrigatório em todo trabalho científico.

O cálculo como referido muitas vezes aqui é chamado nas Universidades de Cálculo Diferencial e Integral, o que mostra que estudar as derivadas e as integrais é o objetivo central dessa disciplina, contudo, há uma hierarquia nos programas de tais disciplinas, onde antes destes conceitos devemos aprender sobre os limites, já que as derivadas são formas de limites e as integrais configuram uma espécie de operação matemática inversa das derivadas.

Cauchy, Bolzano e Weierstrass, atores importantes nessa discussão não nos trouxeram grandes novidades nos estudos das derivadas, diferentemente do que fora mostrado em relação às Integrais, já que não via as derivadas como as protagonistas e as integrais apenas os seus inversos, como se mostrava aos olhos de Newton e muitos estudiosos do século XVIII, Cauchy mais uma vez se aproxima de Leibniz que via a integral como soma de infinitésimos e para Cauchy era o limite de uma soma à esquerda e tinha um papel independente e importante no cálculo.

Agora o cálculo integral tornou-se uma disciplina autônoma. A relação entre as derivadas e as integrais se dá, ainda nas obras de Cauchy através do Teorema Fundamental do Cálculo: Newton e Leibniz já haviam formulado o TFC, mas foi Cauchy o primeiro, ao que se sabe, a trazer uma prova rigorosa desse importante teorema para o cálculo e para a análise. (Boyer, 1949).

Cauchy, Weierstrass, Cantor e Dedekind amputaram a noção de infinitesimais, baseados no fato de que um número não precisa quantificar a magnitude de um objeto, mas suas lógicas se valem de convergência, de proximidades, de épsilons, que ao suporem esses números como números reais caem mais uma vez em uma quantidade que é maior do que o seu dobro, que entendemos apresentarem um rigor matemático, mas apenas no sentido semântico e simbólico:

Weierstrass, Dedekind, Cantor e seus seguidores apontaram que, se os números irracionais devem ser empregados significativamente como medidas de frações quantitativas, eles devem ser definidos sem referência à quantidade; e a os mesmos homens que mostraram a necessidade de tal definição suprimam a necessidade que eles criaram. (RUSSELL, 1997, p 158)(Tradução nossa).

Cauchy em sua ilustre obra *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique Cauchy*, (1821) diz que: **“O número tinha que ser positivo e real, mas uma quantidade poderia ser positiva, negativa ou zero, real ou imaginária, finita, infinita ou infinitesimal.”** O que mostra que além de contribuir com a formalização do cálculo, entra na questão, talvez, principal do entrave sobre os números muito pequenos ou muito grandes, a questão do que é número e o que é quantidade ou magnitude.

Boa parte da chamada matemática superior, depende em alguma medida dos limites, e até Weierstrass uma associação entre estes e os infinitesimais, já que a noção de medida era presente nos números e nos objetos que esses números mediam, mas agora se sabe ou se pensa, temos que na verdade trata-se de um conjunto de quantidades finitas que têm zero como limite e por isso a maioria dos matemáticos veem em Weierstrass a solução do dilema posto há tantos séculos.

Mas ainda temos em Weierstrass, um número positivo real menor que sua metade, como vemos por Russell referindo-se ao limite weierstrassiano:

Trata-se de infinitésimos numéricos ou números (ou quantidades) infinitesimais, de natureza diferente da dos números reais «ordinários». Um infinitésimo positivo é um número desta nova espécie que é menor do qualquer número real positivo dado. O que parecia um erro na época de Weierstrass revelou-se, quase cem anos depois, uma alternativa credível⁹³. (RUSSELL, 2006, nota p.103).(nota dos tradutores).

O Cálculo Infinitesimal e a Análise Matemática passaram por incríveis evoluções e modernizações, e os matemáticos citados e diversos outros, tiveram grande participação nesse processo, contudo entendemos que é vital para esse estudo uma investigação centrada no que vamos denominar “início” e “fim”, início com uma base sólida científica, mas inconsistente em vários aspectos, e o fim com o embasamento lógico formal e rigoroso da Análise não-standard, então esse trabalho investiga cada degrau que levaram os cientistas ao patamar do “início” e também do “fim”, assim faremos agora um estudo mais profundo na matemática de Newton, conseguinte de Leibniz, e mais à frente de Robinson.

4.4 A MATEMÁTICA DE NEWTON NO CÁLCULO INFINITESIMAL

No Livro I, com título O Movimento dos Corpos, encontramos na primeira secção, dez Lemas que configuram as proposições necessárias para a fundamentação dedutiva dos

⁹³ Russell refere-se ao trabalho de Abraham Robinson na década de 1960, sobre a análise não-standard.

teoremas apresentados sobre o movimento. Estas proposições, embora não referenciadas por Newton, correspondem às noções elementares do cálculo diferencial. Na matemática, tais lemas discorrem sobre os limites aplicados à linhas, arcos e áreas de figuras planas, e diferente de Renê Descartes⁹⁴, Newton mostra provas feitas exclusivamente por raciocínios geométricos, sem o tratamento analítico antes introduzido na Geometria por Descartes.

A metodologia utilizada por ele no que se refere às demonstrações é justificada em suas palavras:

“(...) Estes Lemas foram permitidos para evitar as aborrecidas deduções envolvidas nas demonstrações ad absurdum, de acordo com o método dos antigos geómetras. Pelo método dos indivisíveis as demonstrações são mais curtas, mas, porque a hipótese dos indivisíveis parece ser, até certo ponto, desarmoniosa e, portanto esse método é considerado para o cálculo menos geométrico(...)”⁹⁵

Newton escreve no Livro I *Principia*

“[...], por velocidade final entende-se aquela com a qual o corpo move-se, nem antes de chegar à sua posição final, quando cessa o movimento, nem depois, mas no exato instante em que ele chega. Isto é aquela velocidade com a qual o corpo chega à sua posição final, e com a qual o movimento cessa. De forma semelhante, por razão final das quantidades evanescentes, deve-se entender a razão das quantidades nem ante, nem depois de desaparecerem, mas aquela com a qual elas desaparecem. Igualmente, a primeira razão de quantidades nascentes é aquela com a qual elas começam e deixam de ser (ou são aumentadas ou diminuídas). Há um limite que a velocidade no final do movimento pode atingir, mas não exceder. Essa é a velocidade final. E existe um mesmo limite em todas as quantidades e proporções que começam e deixam de ser. E uma vez que tais limites são certos e definidos, determiná-los é um problema estritamente geométrico. Mas o que for geométrico, pode ser utilizado para determinar e demonstrar qualquer outra coisa que também seja geométrica.”

Sobre a algebrização da geometria, já em desenvolvimento na época, Newton tenta justificar a sua técnica na resolução de seus limites, ainda no *Principia*.

Pode-se ainda objetar que se forem dadas as razões finais de quantidades evanescentes, suas grandezas finais também serão dadas; e, assim, todas as quantidades consistirão de indivisíveis, o que contraria o que *Euclides* demonstrou no que se refere a incomensuráveis, no décimo Livro de *Elementos*. Mas essa objeção está fundamentada em uma falsa hipótese. Pois aquelas razões finais com as quais as quantidades desaparecem não são verdadeiramente as razões das quantidades finais, mas os limites para

⁹⁴ René Descartes (1 de março de 1596 – 11 de fevereiro de 1650) foi um filósofo, físico e matemático francês. Durante a Idade Moderna, também era conhecido por seu nome latino Renatus Cartesius. Notabilizou-se sobretudo por seu trabalho revolucionário na filosofia e na ciência, mas também obteve reconhecimento matemático por sugerir a fusão da álgebra com a geometria - fato que gerou a geometria analítica e o sistema de coordenadas que hoje leva o seu nome. Por fim, foi também uma das figuras-chave na Revolução Científica. Descartes, por vezes chamado de "o fundador da filosofia moderna" e o "pai da matemática moderna".

⁹⁵ Ibid., p.22.

os quais as razões de quantidades, diminuindo sem limite, sempre convergem; e dos quais elas se aproximam mais do que por qualquer diferença dada, mas nunca além dela, nem de fato a alcançam, até que as quantidades sejam diminuídas *in infinitum*. Isso parecerá mais evidente em quantidades infinitamente maiores. Se duas quantidades, cuja diferença é dada, forem aumentadas *in infinitum*, a razão final dessas quantidades estará dada, isto é, a razão de igualdade. Mas não segue daí que as próprias quantidades finais ou maiores, das quase aquela é a razão, sejam dadas. Portanto, se no que segue, para ser mais facilmente compreendido, eu vier a chamar as quantidades de mínimas, evanescentes ou finais, não se deve considerá-las quantidades de qualquer grandeza determinada, mas deve-se concebê-las como quantidades que estão sempre diminuindo sem fim.

Em outras palavras, o que Newton constrói no texto acima, é um método para trabalhar com quantidades infinitamente pequenas, onde se temos duas quantidades infinitamente pequenas, e elas estão em uma rota direta em direções opostas, e tendem a se encontrar, então em determinado tempo elas serão indistinguíveis, isto é, serão iguais. Esse método é o que hoje a análise padrão entende pela definição de limite de uma função real, mas notamos a dificuldade de Newton em definir esses tais números infinitamente pequenos, mas que não são iguais a zero, e que entendemos que mesmo habilmente feito.

Newton se exime da obrigação de definir tais números, em função de uma dificuldade epistemológica clara ou diríamos até, pela ausência desses números na época, já que entendemos que tais números eram os infinitesimais como Leibniz tentou definir, Weierstrass pensou finalmente ter formalizado e que Abraham Robinson o fez de forma matematicamente satisfatória.

Newton precisava fundamentar uma das bases do seu tratado na física, que era a ideia de velocidade instantânea, e evitar cair em um possível paradoxo, já que o conceito de velocidade média, isto é, a velocidade de um móvel em determinado espaço percorrido já se aproximara Aristóteles com a ideia de mais rápido, onde de acordo com (Peter Damerow et al., p.15), ele teria afirmado que

1. O mais rápido de dois corpos percorre mais espaço no mesmo tempo.
2. O mais rápido de dois corpos atravessa o mesmo espaço em menos tempo.

A “velha definição” é presumivelmente a de Aristóteles

Em todos os casos em que uma coisa está em movimento com velocidade uniforme ... se tomarmos uma parte do movimento que seja comensurável com o todo, todo o movimento é completado em tantos períodos iguais quantos fazem parte do movimento. (GALILEU, 1989) (Tradução nossa).

A definição de Galileu remove a restrição de comensuráveis. Arquimedes não definiu movimento uniforme em nenhuma circunstância. Então em Galileu podemos na linguagem atual definir velocidade média em um percurso Δs , como sendo a razão entre a distância percorrida pelo tempo transcorrido.

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Newton obviamente foi provavelmente o cientista que mais contribuiu para a criação do Cálculo Diferencial, afinal embora tenha aparentemente se esquivado da obrigação de definir os infinitesimais, foi capaz de construir os conceitos sobre as derivadas, sobretudo sobre algumas indeterminações das derivadas que puderam ser brilhantemente exploradas mais tarde.

Embora Galileu tenha se aproximado muito de tal feito, a concepção de velocidade instantânea ainda hoje é a que Newton descrevera, a menos da linguagem e a simbologia que é atual, como vemos no volume I Mecânica, Fundamentos de Física de Halliday e Resnick página 19:

“A velocidade em um dado instante é obtida a partir da velocidade média reduzindo o intervalo de tempo Δt até torná-lo próximo de zero. À medida que Δt diminui, a velocidade média se aproxima de um valor-limite, que é a velocidade instantânea:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}.$$

Observe que v é a taxa com a qual a posição x está variando com o tempo em um dado instante, ou seja, v é a derivada de x em relação a t .”

Nota-se nos escritos de Newton que a ideia de infinitésimos e a relação geométrica o incomodava, e mesmo com as diversas críticas que recebeu por de certa forma evitá-los em prol da funcionalidade da sua mecânica, Newton continuou os evitando

Newton não se sentia à vontade com os infinitésimos que, a seu ver, tinham credenciais geométricas duvidosas, e tentou eliminá-los por meio da ideia de velocidade instantânea [...] (COHEN; WESTFALL, 1981).

O ponto principal na inconsistência matemática de Newton, no que tange o cálculo diferencial se manifesta nas dúvidas dele próprio, já que embora quase sempre utilizou o que podemos chamar de “método geométrico de magnitudes infinitamente pequenas”, não se sentia à vontade com isso, fazendo com que não procurasse definir tais números, como feito por Leibniz, ou quem sabe assim como Robinson, entendesse que tais números não fariam parte do escopo dos números reais, trazendo assim mais um conjunto de números irraciais ou como proposto nesse estudo, números hiper-reais.

Na obra “Quadrature of Curves”, Newton parece abandonar a ideia de número muito pequeno, definindo agora o seu método das fluxões, que acompanha desde então a sua teoria do cálculo, e escreve já no primeiro parágrafo da introdução do tratado:

Considero as quantidades matemáticas neste lugar não como consistindo de partes muito pequenas; mas como descrito por um movimento contínuo. As linhas são descritas e, portanto, geradas não pela aposição de partes, mas pelo movimento contínuo de pontos; superfícies pelo movimento das linhas; sólidos pelo movimento de superfícies; ângulos pela rotação dos lados; porções de tempo por um fluxo contínuo: e assim em

outras quantidades. Essas gêneses realmente acontecem na natureza das coisas e são vistas diariamente no movimento dos corpos. E desta maneira os antigos, desenhando linhas direitas móveis ao longo de linhas direitas imóveis, ensinaram a gênese dos retângulos. (NEWTON, 1745, sem numeração).

E ainda reforça dizendo que:

Busquei um método para determinar quantidades a partir das velocidades dos movimentos ou incrementos, com os quais são geradas; e chamando essas velocidades dos movimentos ou incrementos de *fluxões*, e as grandezas geradas de *fluentes*. Caí gradualmente no método das fluxões, que usei aqui na quadratura das curvas, nos anos de 1665 e 1666. (NEWTON, 1745, sem numeração)

Podemos ver claramente que Newton, mesmo se negando a utilizar os números muito pequenos, ou infinitesimais, parece preocupado com a falta de rigor matemático de sua teoria, quando logo após descrever o seu método, escreve: **“Os menores erros em questões matemáticas não devem ser negligenciados.”** Mesmo assim, de acordo com Eves (2011) “Newton fez numerosas e notáveis aplicações de seu método dos fluxos. Determinou máximos e mínimos, tangentes a curvas, curvaturas de curvas, pontos de inflexão e convexidade e concavidade de curvas; aplicou-o também a muitas quadraturas e retificações de curvas.”

O “erro” apontado por muitos de seus críticos se dá justamente porque Newton, em última análise, trabalha com quantidades simultaneamente tão próximas de zero que se pode pensar nelas como zero, mas ao mesmo tempo impedidas de serem zero, e operações “ditas” possíveis de eliminar este problema não eram conhecidas em sua época, ele apenas as consideravam iguais a zero quando não geravam algum tipo de problema algébrico e zero em todo o resto do tempo, e a falta de uma justificativa clara para isso, bem como os questionamentos sobre a teoria moderna dos limites, nos levam ao descrédito no rigor matemático da teoria, ainda que não haja uma refutação dos resultados numéricos obtidos.

Newton indiscutivelmente foi um gênio e sempre trouxe à discussão a questão da aparente não realidade dos números muito pequenos, parece deixar claro que se não acredita na existência de tais, prefere falar sempre do método e dos resultados com seu método das fluxões e seus resultados em forma de limite, ainda fazendo menção aos infinitesimais de Leibniz, que pensava também não ser a resposta para a questão complicada que acompanha o ser humano há milênios:

Este método [das fluxões] deriva imediatamente de sua própria natureza, não de indivisíveis, diferenças leibnizianas ou quantidades infinitamente pequenas. Pois não existem quantidades primeiras nascentes ou quantidades últimas evanescentes, existem somente razões primeiras de quantidades nascentes e razões últimas de quantidades últimas evanescentes (NEWTON, 1714, *Philosophical transactions*, In: MP-3, p. 17-18).

Nas palavras do próprio Newton, há uma recusa aos infinitesimais, que entendemos ser um dos maiores problemas na matemática diferencial deste, onde em algumas cartas enviadas por ele fala sobre a disputa não só sobre quem teria criado primeiro, mas em relação à base matemática utilizada por ele e pelo seu rival Leibniz, como em *Commercium Epistolicum Collini Et aliorum, De analysi promota*, de 1715, onde escreve na terceira pessoa quando fala de si, embora seja sabido que o texto é de sua autoria. Newton inicialmente defende que a simbologia utilizada por ele é anterior ao que Leibniz apresenta em suas obras

O Sr. Leibniz não tem Símbolos de Fluxões em seu Método, e portanto, os Símbolos de Fluxões do Sr. Newton são os mais antigos do tipo. O Sr. Leibniz começou usar os Símbolos de Momentos ou Diferenças dx , dy , dz no ano de 1677. Sr. Newton representado Momentos pelos Retângulos sob as Fluxões e o Momento o , quando escreveu sua Análise, que foi pelo menos quarenta e seis anos atrás. O Sr. Leibniz usou os Símbolos Rx , Ry , Rz para as Somas dos Ordenados desde o ano de 1686; Sr. Newton representou a mesma coisa em sua Análise, inscrevendo o Ordenado em um Quadrado ou Retângulo. Todos os do Sr. Newton Os símbolos são os mais antigos em seus vários tipos por muitos anos. (WILKINS apud NEWTON, 2002, p. 19).(tradução nossa)

A base do cálculo de Newton se baseia em uma questão de movimento, de uma dinâmica contínua, que ele tem por base métodos anteriores de subdivisões de áreas e volumes, como vemos pelos princípios de Cavalieri, obviamente em sua interpretação de uma mecânica de movimento, e se distancia totalmente da tarefa de conceituar esse contínuo por meio dos números, e suas equações baseiam-se somente nos limites e diferenciais, sem uma conceituação formal dos tais números bem pequenos que seriam as magnitudes infinitamente pequenas que ele utiliza ainda que não os conceba. Mais uma vez em sua escrita isso se revela, tendo ele a clara intenção de alegar que considerar tais números, que chamamos de infinitesimais, e que Leibniz em algum momento da sua trajetória no cálculo as vê como existentes ainda que para uma vantagem técnica

[...] o Método das Fluxões, como usado pelo Sr. Newton, tem todas as Vantagens do Diferencial, e algumas outras. [...]. Não temos Ideias de Quantidades infinitamente pequenas e, portanto, o Sr. Newton introduziu Fluxions em seu método, para que ele pudesse proceder por quantidades finitas tanto quanto possível. É mais Natural e Geométrico, porque fundamentado no *primæ quantitatū nascentium rationes*, que têm um Ser em Geometria, enquanto *Indivisibles*, sobre os quais o O Método Diferencial está fundado, não tem Ser nem na Geometria nem na Natureza. Elas são *primæ quantitatū nascentium rationes*, mas não *quantitates primæ nascentes*. Natureza gera Quantidades por Fluxo ou Aumento contínuo; e os antigos geômetras admitiram tal uma Geração de Áreas e Sólidos, quando desenhavam uma Linha na outra por Movimento local para gerar uma área, e a área em uma linha por movimento local para gerar um sólido. (WILKINS apud NEWTON, 2002, p. 19) (tradução nossa)

Newton fundamenta o seu método dos fluxos, como em um estudo cinemático, onde uma quantidade, como a abscissa de um ponto móvel, cresce de forma constante, tornando assim a curva contínua, se pensamos no tempo como contínuo, em um fluxo constante. Por Eves (2011, p. 439) “Essa taxa de crescimento constante de alguma fluente é o que ele chamava *fluxo principal*, podendo o fluxo de qualquer outro fluente ser comparado com esse fluxo principal. Newton indicava o fluxo de $\dot{y}$ por $\ddot{y}$ e assim por diante. Por outro lado, denotava o fluente de y pelo próprio y no interior de um pequeno quadrado, ou às vezes por $\frac{1}{y}$.

Quanto à questão dos infinitesimais, nunca considerados por Newton, ele cria um conceito denominado *momento* de um fluente, que concebe a ideia de um incremento infinitamente pequeno sofrido por um fluente como x , em que usou o símbolo o e o fluente de x por $\dot{x}o$, onde considera que esse incremento o possa ser desprezado sempre que possuir potência maior ou igual a 2, e assim obtendo uma equação em função apenas de x e y , caracterizando assim a tão criticada forma de seu método, já que o é maior que zero e igual a zero sempre que conveniente.

De acordo com Bueno (2021), Newton não publicou diversas de suas descobertas para evitar críticas ao seu trabalho, e várias dessas descobertas relacionadas ao Cálculo Infinitesimal ficaram desconhecidas por cerca de 50 anos, e provavelmente apenas Isaac Barrow tivesse conhecimento sobre essas descobertas.

Em 1669, um dos seus artigos, intitulado *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, que trata das séries infinitas e suas aplicações para cálculo da área, foi enviado por Barrow a seu amigo John Collins (1625-1683), em Londres. A partir de então, Newton começou a ser percebido. (BUENO, 2021, p. 23).

Nessa obra, Newton dizia que se houvesse uma abscissa x e uma ordenada y , de forma que a área abaixo da curva fosse dada por:

$$z = \left(\frac{n}{m+n} \right) a x^{\frac{m+n}{n}}$$

Então, se o momento de variação da abscissa fosse o , a nova abscissa seria $x + o$, e a nova área:

$$z + oy = \left(\frac{n}{m+n} \right) a (x + o)^{\frac{m+n}{n}}$$

Aplicando o seu teorema binomial, dividindo a expressão por o e descartando os termos contendo o , Newton encontrava:

$$y = ax^{\frac{m}{n}}$$

Ou seja, afirmava que, se uma área fosse dada por:

$$z = \left(\frac{n}{m+n} \right) ax^{\frac{m+n}{n}}$$

Então, a curva que origina essa área seria denotada por:

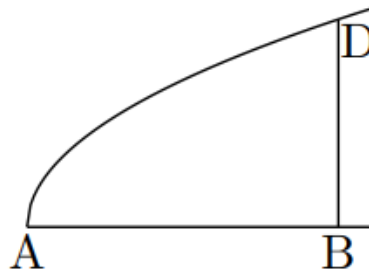
$$y = ax^{\frac{m}{n}}$$

Além disso, de forma inversa, Newton argumentava que, se a base AB de uma curva AD for perpendicular à ordenada BD, de acordo com a Figura, e ainda, se AB for chamado de x e BD de y, com a, b, c ... sendo quantidades dadas e m e n inteiros, então, se

$y = ax^{\frac{m}{n}}$, a área de ABD será⁹⁶:

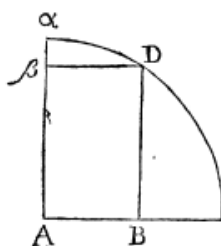
$$\text{Área} = \left(\frac{n}{m+n} \right) ax^{\frac{m+n}{n}}$$

Figura 5: Área sob a curva por Newton



(EVES, 2011, p. 428)

To find the Base from the Length of the Curve given.



45. If from the Arch αD given the Sine AB was required; I extract the Root of the Equation found above, viz. $z = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{40}x^5 + \frac{1}{112}x^7$ (it being supposed that $AB = x$, $\alpha D = z$, and $A\alpha = 1$) by which I find $x = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7 + \frac{1}{362880}z^9$ &c.

46. And moreover if the Cosine $A\beta$ were required from that Arch given, make $A\beta (= \sqrt{1 - xx}) = 1 - \frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{64}z^4 - \frac{1}{720}z^6 + \frac{1}{40320}z^8 - \frac{1}{3628800}z^{10}$, &c.

Newton escreveu *De Analysis* (1669) para reivindicar a prioridade do método de análise usando séries infinitas. O procedimento deste método é expandir a derivada ou a diferencial de uma quantidade procurada em uma série infinita da forma

$$\sum_i a_i x^{\frac{m_i}{n_i}},$$

e, em seguida, obter a quantidade por integração termo a termo. (OSADA, 2021, p. 32)

Newton apenas considera o movimento, mas ainda não esclarece a questão da divisão por zero em seus limites, onde os usa como zeros ou diferentes de zero quando conveniente, o que destacamos ser um problema na teoria tanto de Newton quanto de Leibniz, mas que ao menos por Leibniz foi considerado um número, ainda que algum tipo de número ideal, já que embora Leibniz tenha dito que são *ficções úteis*, os considerou, criando um método puramente matemático-geométrico, e não físico.

Alfred Rupert Hall foi um historiador da ciência britânico, que editou uma coleção de artigos científicos não publicados de Isaac Newton e de correspondências do mesmo, e no livro *De Galileu a Newton*, afirma que no livro *O Analista* de George Berkeley, escrito no século XVIII, faz duras críticas ao Método das Fluxões que fundamenta o cálculo de Newton, e diz que está incorreto pois baseia-se em uma espécie de jogo matemático dos números muito pequenos. Berkeley questiona o fato de Newton obter as suas derivadas inicialmente incrementando a função de um valor infinitesimal δ , depois da execução algébrica de $\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}$, ele dizia ser δ muito pequeno portanto, muito próximo de zero.

E levanta a questão, porque δ não seria desprezível no início do cálculo, visto que era tão pequeno? E ele mesmo respondia que seria porque se assim fosse, o cálculo não funcionaria. Para Berkeley, tomar δ igual a zero resultaria na indeterminação do zero dividido por zero, e assim seria melhor ignorar tal situação para o bem dessa nova matemática, então Newton usaria estratégias para que o seu cálculo funcione, e possa assim construir a sua física, mas que para Berkeley vota contra a credibilidade dessa criação.

Alguns de seus contemporâneos, especialmente o bispo George Berkeley (1685–1753) na Inglaterra e Michel Rolle (1652–1719) na França, reconheceram os problemas nos fundamentos do cálculo. Rolle, por exemplo, disse que o cálculo era “uma coleção de falácias engenhosas”, e Berkeley ridicularizou quantidades infinitamente pequenas, uma das noções básicas do cálculo inicial, como “os fantasmas de quantidades que partiram.” Tanto Berkeley quanto Rolle admitiram abertamente a praticidade do cálculo, mas desafiaram sua falta de fundamentos rigorosos. [...] os colegas de Rolle na Academia de Paris acabaram por convencê-lo mudar de ideia, mas Berkeley permaneceu cético por toda a sua vida. (BRADLEY, 2009, prefácio dos tradutores) (tradução nossa).

Após o conhecimento do cálculo de Newton e Leibniz, diversos matemáticos tentaram comprovar ou falsificar seus métodos, criando métodos baseados nas suas teorias, ou como acontece até os dias atuais, negá-los ou confirmá-los, ainda que metodologicamente, como o caso relatado por Roque:

O matemático escocês Colin MacLaurin propôs, em 1742, uma resposta inspirada nos argumentos geométricos e cinemáticos de Newton na qual rejeitava os infinitesimais. Seus argumentos traziam de volta, por exemplo, as demonstrações indiretas, por dupla contradição, usadas por Arquimedes. Ele desprezava a algebrização e erigia a técnica geométrica de encontrar limites como base do cálculo, apesar de nem definir o que são limites nem as regras para operar com eles. (ROQUE, 2012, p. 315).

Mesmo com as contribuições de diversos matemáticos durante os séculos seguintes a Newton e Leibniz, tais infinitésimos ainda perduram como um desafio ao rigor matemático e os vários trabalhos sobre as análises não-standards, como a de Robinson e outros, parecem estar finalmente na solução de tais incômodos. E ainda se põe a questão matemática e epistemológica, como em Bradley (2009) *“Ao longo dos anos, três principais escolas de pensamento desenvolvidas: infinitesimais, limites e álgebra formal de série.”* (tradução nossa).

Newton e suas fluxões procura evitar os infinitesimais e trabalhar apenas com uma vaga noção de limites, e faz de seu cálculo algo da dinâmica física, enquanto Leibniz nunca considerou limites, e aproximou o seu cálculo da geometria e da lógica, por visto por muitos como tendo alcançado um sucesso enormemente maior do que Newton, na questão matemática do cálculo, de quem agora faremos um estudo sobre as suas questões fundamentais e da sua matemática.

Destacamos a profunda admiração dos autores deste estudo às descobertas deste brilhante cientista, e como não poderíamos falar de uma forma mais clara sobre a grande mente que temos a oportunidade de estudar sobre os seus trabalhos e a chance de gozar dos conhecimentos trazidos por ele, trazemos o texto abaixo por Eves (2011, p. 441) em apud à algumas personalidades ilustres em homenagem à Newton:

Sua grandeza foi reconhecida por juízes de elevado quilate científico, como Leibniz, que nobremente lhe prestou um tributo dizendo: “Tomando a matemática desde o início do mundo até a época em que Newton viveu, o que ele fez foi, em grande escala, a metade melhor”. E há também a observação de Lagrange considerando Newton o maior gênio de todos os tempos, e também o mais feliz, pois só há um sistema do Universo e coube a ele o privilégio de instituí-lo. Suas realizações foram expressas poeticamente por Alexandre Pope nos versos

*A Natureza e as leis da Natureza jaziam ocultas na noite;
Deus disse, ‘Faça-se Newton’, e a luz se fez.*

4.5 A MATEMÁTICA DE LEIBNIZ NO CÁLCULO INFINITESIMAL

De acordo com biografia de Gottfried Leibniz, em 1673, também em missão diplomática, visitou Londres, tendo apresentado na Real Academia de Ciências a sua

máquina de calcular mecânica, com as quatro funções, adição, subtração, multiplicação e divisão, e foi capaz de fazer cálculos mais facilmente e rapidamente, que podemos dizer que foi uma evolução que nos leva até os dias atuais, com máquinas eletrônicas, incrivelmente precisas e simples, e capazes de tratar incriveis operações e resultados. Esta, para além de somar e subtrair, o que já a pascalina, criada por Blaise Pascal (1623 – 1662), conseguia, efetuava também multiplicações e divisões, Leibniz foi capaz de tal criação sem precedentes.

Ocasionalmente, surgia uma curva não algébrica, como a ciclóide (*roulette*) investigada por Descartes e Blaise Pascal: o *Traité général de la roulette* (1658), de Pascal, parte dum folheto publicado com o nome de A. Dettonville, teve grande influência no jovem Leibniz. Neste período, vários aspectos característicos do cálculo infinitesimal começaram a aparecer. (STRUICK, 1992, p. 168)

Leibniz sempre procurou criar uma linguagem simbólica universal que pudesse expressar conceitos da ciência, matemática e metafísica, com uma metodologia profícua, designando assim uma lógica de cálculo universal.

As pesquisas de Leibniz em torno de sua *characteristica generalis* levaram-no a conceber planos de uma teoria da lógica matemática, estruturada em regras formais, que obviaria as necessidades do raciocínio. embora seu sonho somente agora tenha atingido um nível de realização perceptível, Leibniz conseguiu, em terminologia corrente, formular as principais propriedades da adição, multiplicação e negação lógicas, considerou a classe vazia e a inclusão de classes e notou a semelhança entre algumas propriedades da inclusão de classes e a implicação de proposições. (EVES, 2011, p.443)

Leibniz se dedicou a matemática tarde, apenas a partir de 1672 sob a tutela de Christiaan Huygens e não teve um estudo formal de matemática assim como teve em filosofia e ao direito, nesse último obtendo grau de doutor em 1666, e seu viés filosófico e a vontade de descrever uma simbologia universal podem ter contribuído para um olhar mais a frente em relação ao cálculo, e uma metodologia menos presa aos procedimentos dos matemáticos anteriores, permitindo a Leibniz, por exemplo, ter um tratamento menos tenso sobre os infinitesimais, mas que por outro lado pode tê-lo levado a erros pelo mesmo motivo, como relata Bardi:

Ele tinha uma incrível tendência para a matemática, e sua falta de treinamento formal nessa matéria provavelmente o ajudou no longo prazo por contribuir para a originalidade do seu trabalho {embora possa tê-lo prejudicado, também no longo prazo, visto que a falta de treinamento também o predispôs a cometer deslizos}. (BARDI, 2008, p.89)

Leibniz logo mostrou uma aptidão enorme para a Matemática e logo obteve diversos resultados importantes, como cerca de um ano após os seus estudos iniciais na matemática, como vemos por Bardi (2008):

Erros à parte, pelo final de 1673 Leibniz havia desenvolvido um método para usar uma série de números racionais para achar a solução de um problema que havia incomodado seus contemporâneos por anos a fio — a

quadratura do círculo, isto é, um quadrado com área igual à de um círculo. Huygens comentou a solução de Leibniz como sendo “muito bela e bem-sucedida”. (BARDI, 2008, p. 89).

Ele tornou-se também membro da Real Academia das Ciências de Londres, onde se dedicou a estudar matemática, e principalmente geometria, ele é um precursor de uma linguagem simbólica, e é autor de diversas simbologias na matemática, na geometria, Eves (2011, p. 388) “As palavras coordenadas, abscissa e ordenada, no sentido técnico que têm hoje, foram contribuições de Leibniz em 1692” e também no cálculo diferencial e integral:

Leibniz inventou o seu cálculo entre 1673 e 1676. usou pela primeira vez o símbolo de integral, um S alongado, derivado da primeira letra da palavra latina *summa* (soma) em 29 de outubro de 1675. O objetivo era indicar uma soma de indivisíveis. Algumas semanas depois ele já escrevia diferenciais e derivadas como o fazemos hoje, assim como escrevia $\int y dx$ e $\int x dy$ para integrais. (EVES, 2011, p. 443).

O contato com trabalhos de diversos matemáticos nesse curto período de tempo fez com que Leibniz pudesse fazer associações e generalizações que são a base do seu cálculo e da admiração de todos pela sua genialidade, e percebeu que o problema das tangentes e das quadraturas estavam intimamente ligados pelas diferenças infinitamente pequenas, os infinitesimais, como confirma (BARDI, 2008, p. 89) “Isso não era tudo. Leibniz percebeu que o trabalho de Pascal (sobre os indivisíveis) podia ser combinado com a regra para a tangente de Sluse⁹⁷ e aplicado a qualquer curva geométrica, e não apenas ao círculo. Foi isso o que o levou ao cálculo.”.

Nessa época Leibniz teve contato com vários estudos de vários matemáticos, como o trabalho acima citado de Pascal⁹⁸ como vemos por Boyer, (1974, p. 294) “De seus estudos sobre séries infinitas e o triângulo harmônico Leibniz se voltou para a leitura das obras de Pascal sobre a cicloide e outros aspectos da análise infinitesimal (termo moderno usado por Boyer).”.

Muito da controvérsia sobre o verdadeiro criador do Cálculo, Newton ou Leibniz, de deu pelo fato de que Newton não publicou alguns de seus trabalhos sobre o tema, e que Leibniz que começou a estudar matemática tardiamente, teve contato com alguns escritos sobre o assunto, inclusive de Newton, embora provavelmente não tenha influenciado seus

⁹⁷ René de Sluse, (1622 – 1685), criou um método mais sofisticado do que seus predecessores, para obter retas tangentes a curvas, porém assim como eles, o limite deve ter sido usado numa etapa crítica. Mas nenhum deles percebeu a necessidade de formular uma teoria sobre os limites, e utilizaram apenas alguma técnica perspicaz para chegar aos resultados.

⁹⁸ Pascal foi tão longe ao comparar os indivisíveis da Geometria com o zero da Aritmética, que tal ideia só foi completamente concebida e compreendida por Leonhard Euler (1707-1783), décadas mais tarde. Nessa ideia, a área abaixo de uma curva era concebida como a soma de um número indefinido de retângulos infinitamente finos, diferindo da área original por uma quantidade que poderia ser tornada menor que qualquer outra quantidade dada.(BUENO, 2021, p. 15).

escritos, já que pelo seu pouco conhecimento do tema, não deva ter percebido a relação entre os tais escritos e as suas descobertas, como vemos em Bueno (2021):

Na sua viagem de Paris a Hannover, Leibniz passou por Londres. Em sua breve estada na capital inglesa, o jovem alemão visitou novamente a Royal Society e, com o assentimento de John Collins, teve acesso a dois documentos da biblioteca da instituição: *De analysi*, de Newton, e *Historiola*, do próprio Collins, que continha um resumo da Matemática britânica da época. Todavia, Leibniz provavelmente não percebeu que as séries infinitas, sobre as quais se debruçava o método de Newton, eram, de certa forma, equivalentes ao seu método diferencial, que acabou surgindo no mesmo período. (BUENO, 2021, p.26-27).

Boyer continua relatando, o que há mais de 2000 anos os matemáticos não perceberam, a relação entre o problema das tangentes e da quadratura(área), estão relacionados e pela primeira vez isso é notado, e na figura de Leibniz, tal como vemos hoje nos livros didáticos, o primeiro um problema de derivação e o segundo o seu inverso, um problema de integração:

Em particular, foi ao ler a carta de Amos Dettonville sobre *Traité des sinus du quart de cercle* que Leibniz diz ter uma luz jorrado sobre ele. Percebeu então, em 1673, que a determinação da tangente a uma curva dependia da razão das *diferenças* das ordenadas e das abscissas, quando essas se tornavam infinitamente pequenas, e que as quadraturas dependiam da soma das ordenadas dos retângulos infinitamente finos que formam a área. [...]na geometria os problemas de quadratura e tangentes, dependendo de somas e diferenças respectivamente, são inversos um do outro. (BOYER, 1974, p. 295).

Leibniz contribuiu não só na criação do cálculo mas também com diversos algoritmos que sustentam as técnicas matemáticas e cálculos necessários para resolver os problemas como equações, diferenciações e integrais no Cálculo Infinitesimal, como Eves(2011, p. 444) Também se deve a Leibniz a generalização do teorema binomial para o teorema multinomial, consistindo em fazer a expansão de $(a + b + \dots + n)^f$, tendo Newton mostrado o caso da expansão binomial antes, e ainda na regra de derivação ou diferenciação de produto de funções, conhecida até hoje como regra de Leibniz e utilizada ainda na forma que ele construiu: "A fórmula da derivada enésima do produto de duas funções (ver Exercício 11.6) é conhecida em geral por *regra de Leibniz*." (EVES, 2011, p. 443)

Exercícios 11.6: Se $y = uv$, onde u e v são funções de x , mostre que a derivada de ordem n de y em relação a x é dada por

Essa é a conhecida *regra de Leibniz*. (EVES, 2011, p. 449)

$$y^{(n)} = uv^{(n)} + nu'v^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2!}u''v^{(n-2)} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}u'''v^{(n-3)} + \dots + u^{(n)}v.$$

A busca de Leibniz por uma lógica universal simbólica, (EVES, 2011, p. 450)" Considera-se que Leibniz tenha sido o primeiro a cogitar seriamente dos benefícios de uma lógica simbólica. Num de seus primeiros trabalhos, *A Dissertatio de arte combinatoria* ("Dissertação sobre a Arte das Combinações" ou "Sobre a Arte

Combinatória")⁹⁹, publicado em 1666, ele manifestou sua crença na possibilidade de uma linguagem científica universal, expressa num simbolismo reduzido e prático que guiaria o processo do raciocínio".

Leibniz em *Essay d'une nouvelle Science des nombres* (Ensaio sobre uma nova ciência dos números) cria uma nova ciência dos números, denominada "matemática binária", que cria já em 1679, onde todos os números poderiam ser representados por dois dígitos, zero e um, que como sabemos é a base da álgebra booleana¹⁰⁰, dos sistemas de circuitos eletrônicos por Claude Shannon, da eletrônica digital e computação moderna, o que enaltece o brilhantismo desse incrível matemático.

Isto que certamente influenciou os seus trabalhos sobre o cálculo, já que quando tivera contato com tais estudos já tivera construído uma base matemática e lógica, além da filosófica que já possuía, e embora houvesse estudado Aristóteles, não compactuava com a totalidade dos seus pensamentos, já que procurava encontrar a ordem canônicas sobre as verdades lógicas, e que o levou a investigar o rigor das demonstrações matemáticas.

Se a demonstração é o silogismo que prova a causa e o porquê, o universal é mais causa (o que possui um predicado por si mesmo é por si mesmo a causa da predicação; ora, o universal é um sujeito primeiro; a causa é, portanto, universal). Por conseguinte, a demonstração universal é superior, por demonstrar melhor a causa e o porquê. (ARISTÓTELES, 1987, p. 87)

Em 1684, Leibniz publica o trabalho *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus*¹⁰¹, Conforme Eves (2011) "Seu primeiro artigo sobre o cálculo diferencial só apareceu em 1684. Nele se define dx como um intervalo finito arbitrário e dy pela proporção $dy: dx = y : \text{subtangente}$ ". Essa publicação inicia o processo de criação do cálculo no mundo, e todas as suas aplicações, onde ele cria técnicas matemática, totalmente original sobre os números muito pequenos e muito grandes, no que conhecemos como cálculo diferencial, e as "quantidade infinitamente pequena", associada a uma variável x .

⁹⁹ É uma versão estendida de sua primeira dissertação de doutorado, escrita antes de o autor ter empreendido seriamente o estudo da matemática. EJ Aiton, *Leibniz: uma biografia*. Hilger, Bristol, 1985.

¹⁰⁰ Uma álgebra Booleana pode ser definida com um conjunto de operadores e um conjunto de axiomas, que são assumidos verdadeiros sem necessidade de prova. Em 1854, George Boole introduziu o formalismo que até hoje se usa para o tratamento sistemático da lógica, que é a chamada Álgebra Booleana. Diferentemente da álgebra ordinária dos reais, onde as variáveis podem assumir valores no intervalo $(-\infty, +\infty)$, as variáveis Booleanas só podem assumir um número finito de valores. Em particular, na álgebra Booleana de dois valores, cada variável pode assumir um dentre dois valores possíveis, os quais podem ser denotados por $[F, V]$ (falso ou verdadeiro). Na álgebra Booleana, existem três operações ou funções básicas. São elas, operação OU, operação E e complementação. Todas as funções Booleanas podem ser representadas em termos destas operações básicas.

$$dxy = xdy + ydx$$

¹⁰¹ Nesse trabalho, Leibniz descreve as fórmulas, $d(x/y) = (ydx - dy)/y^2$.

$$dx^n = nx^{n-1}$$

De acordo com Leibniz (2011, p. 388), “As palavras *coordenadas*, *abscissa* e *ordenada*, no sentido técnico que têm hoje, foram contribuições de Leibniz em 1692.”, outra contribuição de Leibniz à matemática se dá por ter sido o primeiro a utilizar a palavra *função*, embora inicialmente com o objetivo de trabalhar a questão da curva, e suas quantidades, mas que evolui nas mãos de outros matemáticos até o que conhecemos hoje como o conceito geral de função, como podemos ver em Eves

A palavra *função*, na sua forma latina equivalente, parece ter sido introduzida por Leibniz em 1694, inicialmente para expressar qualquer quantidade associada a uma curva, como, por exemplo, as coordenadas de um ponto da curva, a inclinação de uma curva e o raio da curvatura de uma curva. Por volta de 1718, Johann Bernoulli havia chegado a considerar uma função como uma expressão qualquer formada de uma variável e algumas constantes; pouco tempo depois Euler considerou uma função como uma equação ou fórmula qualquer envolvendo variáveis e constantes. (EVES, 2011, p. 661)

Em relação ao problema das tangentes à uma curva dada em um ponto dessa curva, já discorreremos sobre soluções com metodologias pouco práticas e presas a casos específicos, com Newton e Leibniz isso se torna extremamente prático e generalista, e suas técnicas são bem similares, rendendo à Leibniz, a acusação por parte de Newton de que ele teria roubado tal descoberta, Bradi apud Newton “Leibniz viu, com o apoio de Colins, uma carta escrita por Newton que trazia uma explicação detalhada de sua regra para achar tangentes — a inclinação de uma curva em qualquer ponto dado —, uma coisa que Newton viria mais tarde a afirmar que Leibniz havia roubado dele¹⁰²”, mas como podemos ver em trechos de uma carta enviada a Newton intermediada por Oldenburg¹⁰³, Newton já mostra admiração pela qualidade dos trabalhos matemáticos de Leibniz, e interesse pelos seus escritos, aqui em apud por Bardi

O método de Leibniz para obter séries convergentes é sem dúvida extremamente elegante e demonstraria suficientemente o gênio do escritor mesmo se ele nada mais escrevesse.” Newton também expressava agora interesse em ver os resultados de Leibniz. Escreveu ele: “A carta do excelentíssimo Leibniz plenamente merecia, é claro, que eu lhe dessa esta resposta mais extensa. E desta vez eu quis escrever com maior detalhe porque não acreditava que suas ocupações mais absorventes devessem ser interrompidas muitas vezes por mim com esta espécie de escrita um tanto austera. (BARDI, 2008, p. 113)

Newton, por meio dessas cartas intermediadas Oldenburg, defendia que ele teria criado o cálculo muitos anos antes de Leibniz, por meio de seu conhecimento antigo sobre

¹⁰² Acusações contrárias também foram feitas, já que Newton publica o seu cálculo depois da publicação de Leibniz, com uma notação diferente, mas com a mesma essência. Causas xenofóbicas foram apontadas, na época, para essas acusações de parte a parte, visto que Leibniz era alemão enquanto Newton inglês, como vemos em uma carta de Bernoulli a Leibniz “E uma característica dos ingleses invejar tudo de outras [nações] e atribuir tudo a eles ou à sua nação (...) eu duvido que se possa esperar deles [mesmo] apenas isto, que eles irão reconhecer que Newton seja capaz de erro, ou sequer que ele tenha se enganado em qualquer pormenor.”(BARDI, 2008, p. 228).

¹⁰³ Henry Oldenburg (Bremen, ca. 1618 — 1677) foi um diplomata, teólogo e filósofo natural alemão que se destacou em Inglaterra como o primeiro secretário da Royal Society.

séries infinitas e outras descobertas, e lhe enviou duas cartas conhecidas como Epístola prior (Carta anterior) e Epístola posterior (Carta posterior), com 11 e 19 páginas respectivamente, onde mesmo que de forma, muitas vezes, codificadas, mostrava ter o conhecimento, e dando embasamento técnico para comprovar que era o verdadeiro criador do cálculo, como vemos por Bueno, (2021):

Ainda assim, com receio de que outros acessassem suas ideias precursoras, Newton não fez qualquer menção explícita ao Cálculo, mas acrescentou uma referência codificada sobre o seu estudo: “preferi ocultá-lo assim 6accdae13eff7i319n404qrr4s8t12vx”. Essas frases secretas eram compostas por caracteres codificados e ordenados. Após serem apropriadamente traduzidos, esses símbolos resultam na seguinte sentença: “dadas em uma equação as fluentes de qualquer número de quantidades, encontrar as fluxões e vice-versa”. Contudo, é provável que Leibniz não tenha conseguido ler essas linhas. (BUENO, 2021, p. 30)

Sobre a acusação de que Leibniz teria tido contato com o cálculo de Newton, e publicado, tomando para si a posição de criador, não seria a primeira vez que matemáticos chegam a mesmos resultados de forma independente, e devemos lembrar que as diferenças tanto no âmbito filosófico quanto matemático são imensas, e o ponto quente da inconsistência do cálculo de Newton se dá pelo não formalismo do mesmo, ato que Leibniz fora muito mais feliz, desenvolvendo uma lógica simbólica e não apenas argumentos geométricos, o auge dessas diferenças mora no fato de que Leibniz nunca pensou na derivada como um limite, e sim como chamamos hoje nos infinitesimais, que é a base da formalização de Weierstrass, e recentemente por Robinson.

A subtangente de Leibniz, em alguns casos, gera o que chamamos hoje de uma indeterminação $0/0$ e aprendemos a aplicar uma regra utilizando derivação, chamada regra de L'Hospital:

[...] foi com material fornecido por ele [Johann Bernoulli], num acordo financeiro no mínimo curioso, que o marquês de l'Hospital (1661-1704) compôs o primeiro texto de cálculo a ser publicado. Foi assim que o conhecido método de determinação da forma indeterminada $0/0$ tornou-se incorretamente conhecido, em textos posteriores de cálculo, como *regra de l'Hospital*¹⁰⁴. (EVES, 2011, p. 465).

Embora Leibniz seja conhecido principalmente nos bancos universitários por ser um dos criadores do cálculo diferencial e integral, e a ideia dos infinitesimais, a sua obra é por si mesma uma obra interdisciplinar de extrema importância, já que o rompimento com a física de Descartes, e a instauração da metafísica leibnizeana gerou reflexões em diversas áreas

¹⁰⁴ O primeiro texto de cálculo foi publicado em 1696; seu autor, o marquês de L'Hospital (1661-1704), por um acordo singular, publicou as lições que recebera de seu professor particular, Johann Bernoulli. Nesse livro encontra-se a chamada *regra de L'Hospital*, para determinar o limite de uma fração cujo numerador e cujo denominador tendem simultaneamente para zero.

da atividade humana, levou à criação de uma nova análise matemática, e conseguinte uma nova lógica matemática.

Leibniz foi acusado de ter tido contato com os escritos de Newton sobre o cálculo, em sua visita à Londres, e que de algum modo teria plagiado seu trabalho já que embora tenha algumas diferenças de cunho filosófico e de linguagem, ambas possuem fundamentos muito semelhantes, visto que há analogias já que “quociente diferencial” de Leibniz assemelha-se bastante com a “fluxão” de Newton, mas podemos dizer que isso só proporcionou mais um tempero nessa discussão, já que o que realmente nos interessa são os desdobramentos dessas criações para a humanidade.

A grande dificuldade que se apresenta há mais de dois milênios sobre os infinitésimos e os infinitos baseia-se no fato de que não podem ser fisicamente medidos, o que nos leva mais uma vez às discussões sobre a metamatemática e a metafísica, já que assim como na crise dos incomensuráveis ditos irracionais, a solução foi epistemológica, e nos levou à lógica aristotélica mais uma vez com o princípio do terceiro excluído e a prática matemática na qual provamos que se supomos A e encontramos uma contradição então é B e não abrimos a possibilidade de ser C.

A dificuldade em criar um tratado consistente sobre os infinitésimos pode estar no fato de que a natureza deles é geométrica, mas é sabido que a simbologia criada para interpretar as ideias podem levarnos a um conhecimento errôneo, uma aritmetização se faz necessária, a fim de se ter um método matemático, e identificar os limites que o método geométrico possui:

Leibniz aponta para as diferenças entre os métodos matemático e geométrico, buscando demonstrar os limites deste último. Apesar de sua evidência lógica e sua utilidade, a geometria não é suficiente para enquadrar ou dar as diretrizes para o pensamento claro. As figuras apresentadas pelo geômetra possuem um limite intransponível para Leibniz, que em última instância não conduzem as demonstrações com um rigor necessário. Tal limitação, segundo Leibniz, seria dada pelo próprio traço do geômetra. (BONNEAU, 2016, p. 94).

Ainda em Bonneau, podemos ver a lógica de Leibniz, e o seu sistema lógico simbólico, e toda a preocupação em limitar o método geométrico, mas reafirmar a figura do matemático e sua epistemologia confiável, em uma metodologia lógico-geométrica-dedutiva.

Por isso, figuras e esquemas são aceitos por Leibniz, desde que não representem o resultado final de um saber. São meios que podem vir auxiliar o encadeamento de ideias no seu propósito de formular proposições. É muito claro que o modelo que Leibniz utiliza, tanto para criticar e aperfeiçoar o procedimento geométrico, quanto para afirmar o seu modo de raciocinar, é o matemático. BONNEAU, 2016, p. 96).

Os números irracionais causaram uma inquietação enorme entre os matemáticos, tanto quanto os infinitesimais de Leibniz, o que ainda ocorre embora em menor escala hoje, e isso se dá por uma razão análoga aos infinitésimos, não se pode medir, e algo que não se

pode medir só pode ser algo fora da razão, fora do racional e daí o termo irracional, ou ainda que nas palavras de Mlodinow (2010, p. 37): Os pitagóricos chamaram tais comprimentos de alogon, “não racionais”, que hoje traduzimos como “irracional”. Todavia a palavra alogon tinha duplo sentido: significava também “não deve ser falado”, algo que não se deve falar, já que além de não fazerem sentido físico, vão contra a filosofia utilizada por eles, Pitagóricos e seus seguidores. Eichenberger (2016) *“É atribuída ao próprio Pitágoras a frase: “Tudo é número”.”*.

Se um arquiteto projeta uma rampa que tenha uma base de 1 metro e um pé direito de 1 metro, a rampa em seu projeto deve referir-se à um comprimento de $\sqrt{2}$ m, mas como o construtor civil irá medir uma rampa de $\sqrt{2}$ m, se já fora provado tratar-se de um número irracional, então ele cria uma solução técnica, mede com 1,41 m e resolve o problema que se apresenta. Então assim como os infinitésimos, e os limites, “não deve ser falado”.

Pensamos que a análise de Leibniz se mostrou mais adequada, e mais aproximada com a realidade de um número próximo de zero, porém não nulo, seja no âmbito da matemática seja no âmbito da metafísica, embora ambos funcionem satisfatoriamente na física, contudo também não foi capaz esclarecer a que classe de números essas entidades matemáticas pertenciam como vemos em Morris

Mesmo Newton e Leibniz não completaram o cálculo. Na verdade, pode ser um conforto para os alunos apenas começando a trabalhar no cálculo saber que Newton e Leibniz, dois dos maiores matemáticos, não compreendiam completamente o que eles próprios haviam produzido. (MORRIS, 1908, tradução nossa).

Um dos pontos no trabalho de Leibniz que é visto como ponto de destaque em relação ao trabalho de Newton é a linguagem mais formal utilizada, o que demonstra uma preocupação maior com o rigor matemático e lógico, enquanto Newton se preocupava mais com os resultados na sua física.

“É desejável ter alguma notação curta para a afirmação de que avaliamos o limite de como os valores de Δt se aproximam de 0. Podemos expressá-lo

na forma abreviada por $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$

Aqui $\lim$ é uma abreviação de limite, a seta simboliza aproximação e toda a expressão significa o limite de $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ quando Δt se aproxima de 0.

Newton usou $\dot{S}$. Leibniz usou $\frac{ds}{dt}$. Ainda outra notação s' foi introduzida por Lagrange e se a notação de Euler $f(t)$ for usada então o limite é denotado por $f'(t)$. Por isso

As quatro notações, $\dot{S}$, $\frac{ds}{dt}$, s' e $f'(t)$, são idênticas em significado, mas todas ficam aquém da perfeição.

Segundo MORRIS, (1908, tradução nossa), “O simbolismo de Newton é conciso, mas pobre porque o ponto acima do s é muitas vezes esquecido; além disso não mostra qual é a variável independente.”

Leibniz, provavelmente pela sua crença em uma filosofia racionalista, trata a ideia de números infinitos ou infinitesimais com demasiado cuidado, mesmo porque para Leibniz números são “*ideae intellectuales innatae*” [ideias intelectuais inatas] procurando não cair em contradição em sua teoria os deixa em uma classe de ferramentas técnicas para uma obra maior, que parecia a princípio, o que realmente importava para ele

Entretanto, enganar-nos-íamos se imaginarmos um espaço absoluto que seja um todo infinito composto de partes; não existe nada disso, é uma noção que implica contradição, sendo que esses todos infinitos, bem como os seus opostos infinitamente pequenos, são de atualidade apenas nos cálculos geométricos, da mesma forma que as raízes imaginárias da álgebra. (LEIBNIZ, 1989, p.106)

O termo infinitesimais de Leibniz foi cunhado pelos leitores futuros dos seus trabalhos, visto que numa clara proximidade com o conceito, ele ainda se ocupava da preocupação em denominá-los sem defini-los formalmente, então vemos que ele os mostra mas não os demonstra, e num discurso dominado pela ideia da metafísica

Nesse meio tempo, se esse estado instantâneo de transição pode ser sustentado de uma qualidade fútil para a igualdade, do movimento para o repouso, da convergência para o paralelismo, ou similar em um sentido rigoroso e metafísico, ou se algumas extensões são infinitamente maiores que outras, ou infinitamente menores que outros, são reais. (LEIBNIZ, 1947, p. 43)(tradução nossa).

E nos demonstra o seu racionalismo por uma técnica hipotético-dedutiva notória, e defende que questionamentos poderiam ou até deveriam ser feitos, contudo o filósofo acredita não ser necessária uma maior discussão sobre o tema, mas mostra que a sua matemática é baseada na lógica e na razão, não apenas na geometria

Confesso que pode ser questionado: e quem quiser discutir essas coisas, cai em uma polêmica sobre os versos metafísicos da composição contínua, dos quais não é necessário depender de fatos geométricos. De fato, é certo que uma linha interminável pode ser de algum modo concebível, e se algo limitado por um lado pode ser adicionado a ela em ambos os lados. Mas se uma linha reta desse tipo pode ser referida como um todo em um computum(cálculo), ou se pode ser colocada entre as quantidades pelas quais é permitido usá-la para estimar, é outra questão, que não é necessário, discutir neste lugar. (LEIBNIZ, 1947, p. 43) (tradução nossa).

Tanto Newton quanto Leibniz, enquanto Filósofos Naturais, lidam com uma filosofia experimental, já que procuram sistematizar fenômenos da Natureza, por meio da ciência, e se utilizaram, cada um em uma medida e um método, técnicas matemáticas para alcançar

os seus objetivos, e isso se feito de forma imparcial pode nos levar a resultados confiáveis, mas respeitando a uma ordem epistemológica, como vemos no texto

O contato *experiência* e *matemáticas* desenvolve-se numa solidariedade que se propaga. Quando é a experimentação que traz a primeira mensagem de um fenômeno novo, o teórico tenta a todo o custo modificar a teoria reinante para que ela possa assimilar o fato novo. Com esta modificação – obviamente tardia – o matemático mostra que a teoria, com um pouco mais de flexibilidade, deveria ter previsto a novidade. (BACHELARD, 1971, p. 119)

Como os números infinitesimais de Leibniz, e porque não dizer de Newton, nunca foram abalados de forma aplicada, já que nunca fora provado que não funcionam na prática, amos os autores do cálculo não se sentiram derrotados pelo dilema desses números que foram causadores de tantas crises, sobretudo no que se refere ao rigor matemático, Leibniz concerne a noção de números bem pequenos, e não apenas os limites de Newton, o que faz dele um lógico melhor aos olhos do analistas, e bem próximo dos números hiper-reais de Robinson.

Feito incrível de Leibniz também se dá em *Em Novos Ensaios*, livro II, capítulo XIII, faz uma alusão ao conceito de distância e uma aproximação clara do conceito de Geometria Não-Euclidiana¹⁰⁵

Para falar mais corretamente, a distância de duas coisas situadas (sejam pontos ou extensões) é a grandeza da menor linha possível que se possa prolongar de um a outro. Esta distância pode ser considerada absolutamente ou em uma certa figura, que compreende as duas coisas distantes; por exemplo, a linha reta é absolutamente a distância entre dois pontos. Todavia, estando esses dois pontos em uma mesma superfície esférica, a distância desses dois pontos nesta superfície é o comprimento do menor grande arco do círculo que se pode prolongar de um ponto ao outro. (LEIBNIZ, 1989, p.92)

Embora não tenha dado uma formulação sistemática para tais números, como nas palavras de “Observe que Schubring [157, p. 170, 173, 187] atribui o primeiro uso sistemático de infinitesimais como um conceito fundamental, para Johann Bernoulli (em vez de Leibniz)” (KARIN USADI KATZ; MIKHAIL G. KATZ, 2011, p. 06) (Tradução nossa).

Na época de Leibniz não existia a lógica simbólica, e epistemologia que Robinson usara em sua análise não-standard, mas ele se aproxima muito disso quando entende o número como uma entidade separada do objeto, o que não era uma prática semântica ou sintática comum na época, visto que na filosofia dominante não o permitia, ainda, mas o seu conceito é o que usamos nos bancos universitários até os dias atuais, e que em um futuro próximo deverá ser substituído pelo seu análogo robinsiano

¹⁰⁵ Ora, as Geometrias não-euclidianas não são menos Geometrias do que a que começamos a estudar nos ginásios, embora não admitam o postulado acima enunciado, preferindo afirmar, como Riemann, que “por um ponto tomado fora duma reta não se pode fazer passar nenhuma paralela a esta reta”, ou então, como Lobatchewsky: “Por um ponto tomado fora duma reta, pode-se fazer passar uma infinidade de paralelas a esta reta”. Trata-se, por conseguinte, de Geometrias igualmente rigorosas, cada qual no sistema de suas referências. (REALE, 2002, p. 2).

Será suficiente, portanto, quando dissermos que infinitamente grande (ou mais estritamente em finito) e infinitamente pequeno (ou quantidades infinitesimais do conhecido por nós) são entendidos como infinitamente grandes e indefinidamente pequenos alguém atribui, é menor do que aquele que ele mesmo tem atribuído. E como geralmente parece que o erro, por menor e atribuído que seja, deve ser mostrado como sendo ainda menor, segue-se que o erro é absolutamente nulo; era possível que, do próprio fato de um erro ser assumido, fosse inferido que não houve erro. (LEIBNIZ, 1947, p. 43)(tradução nossa).

Leibniz é extremamente feliz ao distinguir a realidade das coisas extensas, do símbolo, ou do número, e se utiliza da gama de conhecimentos obtidos por outros números controversos na época, e quase que prevendo um futuro onde sem os números imaginários nós não teríamos evoluído tanto em diversos ramos da ciência como do eletromagnetismo, que sequer era conhecido pela humanidade na época, ele então cria um cálculo com números infinitos e infinitesimais, do mesmo modo que vira as benesses da inclusão de uma nova classe de números na álgebra, as raízes quadradas de números negativos.

Se alguém entende algum extremo, ou pelo menos rigorosamente o infinito, pode fazê-lo, mesmo que não decida a controvérsia sobre a realidade das coisas extensas, ou em geral, das coisas infinitas ou infinitamente pequenas, ou melhor, ainda que pensa que tais coisas são impossíveis; pois será suficiente para ser usado lucrativamente utilizado no cálculo, como as raízes imaginárias empregam com grande fruto para o Algebrista. Por conterem um compêndio de raciocínios, é bastante claro que o método já mencionado é sempre rigorosamente verificado por mim. (LEIBNIZ, 1947, p. 43) (tradução nossa).

A chamada ciência moderna, e a epistemologia que vemos hoje, com as demonstrações, metodologias, que vemos hoje como fundamentação teórica presente em todos os artigos científicos não era um pré-requisito na época, e embora Newton tenha utilizado muitas técnicas matemáticas e Leibniz técnicas lógicas, fato pelo qual ambos são muito reverenciados, a preocupação com a veracidade de resultados se mostrava em primeiro plano, como Eves (2011) relata que

O cálculo, apoiado pela geometria analítica, foi o maior instrumento matemático descoberto no século XVII. Ele se mostrou notavelmente poderoso e eficiente para atacar problemas inexpugnáveis em tempos anteriores. Foi sua ampla e surpreendente aplicabilidade que atraiu o grosso dos pesquisadores em matemática da época, resultando daí uma profusão de artigos pouco preocupados com o estado bastante insatisfatório dos fundamentos do assunto. Os processos empregados eram frequentemente justificados com o argumento de que eles funcionavam. (EVES, 2011, p. 462).

Logo que os trabalhos sobre o cálculo foram examinados por alguns pensadores, críticas a ambos foram proferidas, em grande parte na forma de questionamentos filosóficos inicialmente, contudo, no século seguinte problemas quanto à base matemática formalista dos trabalhos foram cada vez mais observados e atacados.

E só perto do fim do século XVIII, quando muitos absurdos e contradições tinham-se insinuado na matemática, sentiu-se que era essencial examinar

as bases da análise para dar-lhes uma fundamentação lógica rigorosa. (EVES, 2011, p. 462).

Mesmo o cálculo de Leibniz sendo mais elegante e com uma simbologia e lógica mais apuradas do que de Newton, e a demonstração de que consegue trabalhar melhor com a ideia dos infinitesimais e não só se apoiar em uma teoria não comprovada de limites tal como Newton, Leibniz não foi capaz de definir tais infinitesimais, e que hoje pensamos que mesmo os seus sucessores, vistos por muitos como os que obtiveram sucesso nessa empreitada, como Cauchy e Weierstrass. É da opinião dos autores deste trabalho que isso só fora alcançado por Abraham Robinson, o que demonstra que foi necessário um amadurecimento muito grande sobre a análise matemática, por meio da matemática pura, que durante esses séculos mostraram-se detentora de tais formalizações tão aguardadas.

5 A FILOSOFIA E A CIÊNCIA EMERGENTE

Na História das Ciências encontramos diversas teorias que em algum momento estavam consideradas consolidadas, consistentes, verdadeiras e com o passar do tempo foram de algum modo refutadas, melhoradas, substituídas, estendidas, falsificadas, ou até aniquiladas, nas Ciências Humanas, Exatas, na Filosofia, Antropologia, Sociologia, Psicologia, e sem receio de errar diríamos que em todas as áreas de atuação humana.

Nosso trabalho teve até aqui, como um de seus objetivos, comparar algumas concepções sobre diversos temas, com especial atenção ao Cálculo Diferencial e Integral, e vemos nisso grande valia, já que estamos discutindo a possibilidade de que o cálculo criado há mais de três séculos esteja com bases instáveis, sofrendo ataques diretos e possivelmente se vendo em crise com a possibilidade de uma mudança radical em suas fundamentações, ainda que não nos resultados numéricos apresentados nestes séculos.

Obviamente é inegável a magnificência do que esses gigantes conseguiram criar, e o impacto que suas obras tiveram no mundo. Há um lugar especial no Hall da Fama da história humana, para todos esses célebres pensadores, que desde a Antiguidade até os tempos modernos de alguma forma contribuíram para a construção de conceitos tão complexos, de inimaginável solução até as suas épocas.

Mas uma coisa aprendemos com a história é que as coisas sempre mudam, e acreditamos que é a hora de algum tipo mudança na Análise Matemática dos números reais, dominante nos Institutos de Matemática, mudanças ontológicas e epistemológicas se fazem urgentes e não podemos nos prender à preconceitos científicos seja pela fé em tais conceitos estabelecidos e admiração aos seus ilustres criadores ou pelo receio de participar do processo de mudanças ou no sentido depreciativo do termo Revolução.

Os feitos desses pensadores é de grande admiração, dentre outros motivos, o fato de que foram capazes imaginar, intuir, sobre coisas a princípio nada inteligíveis, e repletas de paradoxos lógicos, já que transpuseram a fronteira do físico ao metafísico, do objeto real ao conceito ideal, o que só é possível em algum grau do que entendemos por inteligência, como Bergson (2001) descreve:

“...os objetos, no modelo dos quais foram criados, constituem, reunidos, um “mundo inteligível” que se assemelha, por suas características essenciais, ao mundo dos sólidos,[...], mais fáceis de manejar pela inteligência do que a imagem pura e simples das coisas concretas; já não são, com efeito, a própria percepção das coisas, mas a representação do ato pelo qual a inteligência se fixa sobre elas.(BERGSON, 2001, p. 174)

A Geometria é o pilar principal das descobertas no cálculo, visto que ele de certa forma cria modelos algébricos para a interpretação geométrica, e já antes com Descartes já havíamos iniciado o processo de algebrização da geometria, feito não testemunhado antes, mas a lógica e a geometria podem andar de mãos dadas, mesmo quando uma é uma

tradução simbólica da outra? Ser inteligível é suficiente para garantir a consistência, ou será que agora nos tornamos reféns dos nossos sentidos, e de uma inteligência sensitiva.

Acredita-se que a lógica e a geometria, assim como Newton e Leibniz utilizaram em seus métodos, podem gerar conceitos confiáveis, já que nos permitem uma tradução da natureza, do real, por uma linguagem simbólica sólida

Como esses símbolos derivam da consideração dos sólidos, como as regras da composição desses símbolos entre si não fazem muito mais que traduzir as relações mais gerais entre sólidos, nossa lógica triunfa na ciência que tem por objeto a solidez dos corpos, isto é, na geometria. Lógica e geometria engendram-se reciprocamente uma à outra, [...]. É da extensão de uma certa geometria natural, sugerida pelas propriedades gerais e imediatamente percebidas dos sólidos, que a lógica natural saiu. É dessa lógica natural, por sua vez, que saiu a geometria científica, que amplia indefinidamente o conhecimento das propriedades exteriores dos sólidos. (BERGSON, 2001, 174-175).

Uma crítica à aritmetização da geometria se dá em função do aparente enfraquecimento da base lógica da matemática, sobretudo em relação aos números, as magnitudes, a medida em relação ao objeto, visto que o número e a quantidade não têm uma distinção rigorosa nessa nova matemática, o que depõe contra o rigor do cálculo criado naquela ocasião, por Newton e Leibniz.

Quando Descartes e Vieta, pela introdução da Geometria por coordenadas, fizeram dessa aplicabilidade um postulado fundamental de seus sistemas, um novo método foi fundado, que, embora frutífero de resultados, envolveu, como a maioria dos avanços matemáticos do século XVII, uma diminuição da lógica precisão e uma perda na sutileza da distinção. (RUSSELL, 1997, p 157)(Tradução nossa).

A maior parte das críticas recebidas por Newton e Leibniz eram ataques às suas interpretações geométricas em seus cálculos, que para muitos pareciam não traduzir a realidade em símbolos, mas sim um jogo algébrico-aritmético com uma tentativa de ludibriar o leitor com uma interpretação geométrica aproximada, como o próprio Bergson alerta, “Geometria e lógica são rigorosamente aplicáveis à matéria. Nela, estão em casa, podem transitar por ela sem ajuda. Mas, fora desse território, o puro raciocínio precisa ser vigiado pelo bom senso, que é algo inteiramente diferente.” (BERGSON, 2001, p. 175).

Todo conhecimento científico para receber essa denominação precisa passar pelo teste do embasamento metodológico e não se pode aceitar algo como verdadeiro sem evidências claras disso, afinal como por Hessen (1980, p. 29) “O conceito de verdade relaciona-se intimamente com a essência do conhecimento. Verdadeiro conhecimento é somente o conhecimento verdadeiro. Um <conhecimento falso> não é propriamente conhecimento, mas sim erro e ilusão.”

Então é logicamente necessário que todo e qualquer conhecimento, mesmo nas ciências cujas práticas de validação são demonstrações técnicas, que passem pelo teste do conhecimento verdadeiro, como temos por Leibniz:

[...] todas as ciências que consistem em demonstrações lidam apenas com equivalências ou substituições de pensamentos, e assim mostram que em uma proposição necessária o predicado certamente substitui o sujeito e em qualquer proposição conversível o sujeito também pode substituir o predicado, e nas provas, uma premissa, chamada conclusão, pode substituir com segurança qualquer uma das verdades chamadas premissas. A partir disso, fica evidente que essas próprias verdades aparecerão em ordem no papel apenas por meio da análise dos personagens, ou seja, por meio de uma substituição ordenada e ininterrupta. (LEIBNIZ, 1982, p. 181)

Mas, afinal, o que é um a verdade do conhecimento? De acordo com Hessen (1980, p. 29)

Mas não basta que um conhecimento seja verdadeiro; há necessidade de poder alcançar a certeza de que é verdadeiro. Isto levanta a questão: em que é que podemos conhecer se um conhecimento é verdadeiro? É a questão do *critério de verdade*. Os dados fenomenológicos nada nos dizem sobre se existe um critério semelhante. O fenômeno do conhecimento implica apenas a sua pretensa existência; mas não a sua existência real. Hessen (1980, p. 29)

O autor supracitado destaca que as esferas psicológica e ontológica do sujeito devem ser observadas na construção do conhecimento científico, levando-se ainda em consideração o fato de que “o problema epistemológico se encontra igualmente fora dessa esfera lógica [psicológica]”, e a não atenção a esse fato pode nos levar a um tipo de logicismo¹⁰⁶.

As diversas “revoluções” que ocorreram nos séculos pós idade média propiciaram um ambiente perfeito para grandes inovações em todos os âmbitos da humanidade, a Revolução Industrial no século XVIII demonstra a soberania da ciência, de onde a ciência moderna, já introduzida no século anterior, se mostra profundamente eficaz, edificando estradas para a ascensão do conhecimento filosófico e científico dos tempos modernos.

Ciência e técnica tornam -se aliadas, provocando modificações no ambiente humanos jamais suspeitadas. De fato, basta lembrar que, antes do advento da máquina a vapor, usava-se a energia natural (força humana, das águas, dos ventos, dos animais) e, por mais que houvesse diferenças de técnicas adotadas pelos diversos povos através dos tempos, nunca houve alterações tão cruciais como as que decorreram da Revolução Industrial. A exaltação diante desse novo saber e novo poder leva à concepção do cientificismo, segundo o qual a ciência é considerada o único conhecimento possível e o método das ciências da natureza o único válido, devendo, portanto, ser estendido a todos os campos da indagação e atividade humanas. (ARANHA, 1993, p. 148)

¹⁰⁶ Tendência de privilegiar a lógica sobre os demais ramos da filosofia. doutrina que considera as formulações da lógica como sendo suficientes em si mesmas e isentas de qualquer interferência de ordem psicológica.

5.1 THOMAS KUHN

No primeiro parágrafo de sua obra *A Estrutura das Revoluções Científicas*, Thomas Kuhn nos traz a ideia de ciência normal:

Neste ensaio, “ciência normal” significa a pesquisa firmemente baseada em uma ou mais realizações científicas passadas. Essas realizações são reconhecidas durante algum tempo por alguma comunidade científica específica como proporcionando os fundamentos para sua prática posterior. (KUHN, 2013, p.54)

O autor observa que o tempo em que essas ciências estavam aceitas por uma comunidade científica específica foi capaz de possibilitar a criação de métodos autênticos gerando assim mais formação científica, porém com dois ângulos a serem ressaltados, levando à discussão a sua consistência por parte dos incrédulos, com isso se fazendo mais ciência, contudo cegando os seus partidários em uma fé *a priori*, como Kuhn exemplifica por meio de algumas ciências em algum momento da história, vistas como ciências normais:

A Física de Aristóteles, o *Almagesto* de Ptolomeu, os *Principia* e a Óptica de Newton, a Eletricidade de Franklin, a Química de Lavoisier e a Geologia de Lyell - esses e muitos outros trabalhos serviram, por algum tempo, para definir implicitamente os problemas e métodos legítimos de um campo de pesquisa para as gerações posteriores de praticantes da ciência. Puderam fazer isso porque partilhavam duas características essenciais. Suas realizações foram suficientemente sem precedentes para atrair um grupo duradouro de partidários, afastando-os de outras formas de atividade científica dissimilares. Simultaneamente, suas realizações eram suficientemente abertas para deixar que toda espécie de problemas fosse resolvida pelo grupo redefinido de praticantes da ciência. (KUHN, 2013, p.54)

O desafio maior na visão de Kuhn é que muitas vezes a nova ciência se mostra apenas e tão somente um método novo de fazer a mesma coisa, que são vistos como uma simples repetição de resultados, e “há uma rejeição dos cientistas” e um “fascínio exercido pelos problemas da pesquisa normal”, em uma clara tentativa de se manter o status quo¹⁰⁷:

Resolver um problema da pesquisa normal é alcançar o antecipado de uma nova maneira. Isso requer a solução de todo tipo de complexos quebra-cabeças instrumentais, conceituais e matemáticos. O indivíduo que é bem-sucedido nessa tarefa prova que é um perito na resolução de quebra-cabeças. O desafio apresentado pelo quebra-cabeça constitui uma parte importante da motivação do cientista para o trabalho. (KUHN, 2013, p.66)

Chalmers (1993, p. 125) nos traz uma relação de ordem de progressão da ciência para Kuhn, “O quadro de Kuhn da maneira como progride a ciência pode ser resumido no seguinte esquema aberto:

¹⁰⁷ *Statu quo* é um latinismo que significa “no estado das coisas”. Trata-se de uma redução da frase *in statu quo res erant ante bellu*, que significa “no estado em que as coisas se encontravam antes da guerra”. Essa redução passou a ser usada também na forma *status quo*, menos aceita pelos lexicógrafos, para significar “o [presente] estado das coisas.

pré-ciência – ciência normal – crise-revolução – nova ciência normal – nova crise

Como vimos até aqui, houve diversas críticas aos novos estudos sobre o cálculo na época de Newton e Leibniz, ambos em alguma escala sofrendo tais ataques, mas em grande parte tais críticas se davam no âmbito da filosofia ou da metafísica, a comunidade científica pareceu não ter objeções quanto à matemática, que é vista muitas vezes apenas como uma ferramenta, ou à física, já que os resultados pareciam descrever bem os fenômenos observados ou intuicionados, da Natureza. Em última instância notamos que a comunidade científica e suas especificidades é parcial quanto ao que ve como um problema ou uma inconsistência.

Já vimos que uma comunidade científica, ao adquirir um paradigma, adquire igualmente um critério para a escolha de problemas que, enquanto o paradigma for aceito podem ser considerados como dotados de uma solução possível. Numa larga medida, esses são os únicos problemas que a comunidade admitirá como científicos ou encorajará seus membros a resolver. Outros problemas, mesmo muitos dos que eram anteriormente aceitos, passam a ser rejeitados como metafísicos ou como parte de outra disciplina. (KUHN, 2013, p.67)

Enquanto um paradigma¹⁰⁸ não é atacado, a ciência normal está em segurança, e não há regras sobre quando um paradigma local ou global deve ser atacado, mesmo porque ele pode ser cercado/protegido por um conjunto de tecnicismos e assim sendo salvo. Se não há um evento dramático que coloque o paradigma em xeque, a Teoria da Relatividade de Einstein, que mesmo com as demonstrações matemática precisou esperar alguns anos, uma comprovação empírica mostrando que “a luz faz curva próximo a corpos com grande energia ou massa”, por meio da análise de um eclipse solar¹⁰⁹, a ciência normal se faz em si a ciência eterna.

Se a consciência da anomalia desempenha um papel na emergência de novos tipos de fenômenos, ninguém deveria surpreender-se com o fato de que uma consciência semelhante, embora mais profunda, seja um pré-requisito para todas as mudanças de teoria aceitáveis. Se a consciência da anomalia desempenha um papel na emergência de novos tipos de fenômenos, ninguém deveria surpreender-se com o fato de que uma consciência semelhante, embora mais profunda, seja um pré-requisito para todas as mudanças de teoria aceitáveis. (KUHN, 2013, p.94)

O processo de mudança do paradigma, a instauração de um novo paradigma e assim uma nova ciência normal é o caminho para a evolução científica amplamente vista, analisando a história da humanidade, de onde este filósofo pode fundamentar a sua teoria, que se baseia em três pontos:

¹⁰⁸ Para Kuhn, paradigma significa o modelo padrão a ser seguido, portanto é a base da ciência normal que possui o seu paradigma estabelecido.

¹⁰⁹ Fenômeno ocorrido na cidade de Sobral, no interior do Ceará, comprovou a relatividade geral e alçou o cientista Albert Einstein ao estrelato.

1. a ciência normal revela-se capaz de resolver o problema que provoca a crise;
2. o problema resiste a novas abordagens;
3. “uma crise pode terminar com a emergência de um novo candidato a paradigma e com uma subsequente batalha por sua aceitação” (KUHN, 1993, p.116).

Uma das passagens da histórica das ciências observadas por Kuhn, e subsequente mudança de paradigma, é vista na questão da astronomia do nosso sistema solar, que pôs aquela ciência normal e seu paradigma em estado de “emergência” em virtude de uma anomalia que atacara o paradigma dominante na época.

Penso que a esse respeito a evidência histórica é totalmente inequívoca. A astronomia ptolomaica estava numa situação escandalosa antes dos trabalhos de Copérnico. As contribuições de Galileu ao estudo do movimento estão estreitamente relacionadas com as dificuldades descobertas na teoria aristotélica pelos críticos escolásticos. (KUHN, 2013, p.94-95)

O filósofo nos passa de forma muito clara as dificuldades de se superar uma ciência tida como estabelecida, tanto no que se refere ao sentido dos departamentos científicos e suas parcialidades, bem como o sentido psicológico que rege o ser humano, onde as ditas revoluções muitas vezes são vistas não como algo bom, algo inovador, mas como um incômodo já que todo o conjunto de regras, postulados, axiomas da ciência normal e seu paradigma dominante passaria mais uma vez à posição de pré-paradigma, até que novamente a academia o coloque na posição de novo paradigma e mais uma vez um processo de aceitação e consolidação, se tornando a nova ciência normal, mas o questionamento que se faz é: Como se faz ciência senão pela necessidade do ser humano na obtenção da completude, o levando à um estado de plenitude, ainda que pelo preço da quietude científica.

As questões levantadas por Kuhn são de grande valia para que o processo de construção de conhecimento nunca se estagne, e que possamos cada vez mais discutir em todos os âmbitos a nossa existência como seres humanos e como cientistas, mas um questionamento levantado por ele próprio se refere ao momento da chegada da crise, em quando sabemos que uma crise é emergente. A resposta poderia ser em suma, no momento em que se prove que a ciência atual possui algum tipo de erro, que de algum modo deixe-a inconsistente. Mas se estamos aficcionados por ela, será que os nossos sentidos não nos fazer inertes à eminente revolução?

Uma generalização apressada e superficial pode nos levar à uma inércia científica imediata, já que uma abstração dinâmica e construtiva seria barrada por um pensamento global estabelecido, o que seria um grande obstáculo ao conhecimento científico, pois seríamos levados a concordar previamente com o paradigma atual, sem restrições, curiosidades, entraves ou qualquer tipo de debate:

Nada prejudicou tanto o progresso do conhecimento científico quanto a falsa doutrina do *geral*, que dominou de Aristóteles a Bacon, inclusive, e que continua sendo, para muitos, uma doutrina fundamental do Saber. (BACHELARD, 2000, p. 69).

5.2 FRANCIS BACON

Bacon defende a filosofia natural em detrimento da filosofia moral, defendendo o “engenho humano”, e é considerado o “fundador do empirismo moderno”:

E leve-se em conta que a filosofia natural deve ser considerada a grande mãe das ciências. Todas as artes e ciências, uma vez dela desvinculadas, podem ser brunidas e amoldadas para o uso, mas não podem crescer. (BACON, 2000, p. 40)

Bacon trata o conhecimento como um resultado da experiência prática, e em suas palavras “A *filosofia primeira*, tal como a entendia, repositório dos axiomas gerais da natureza, estabelecidos por via indutiva, era a responsável pela unidade do saber.” Bacon acreditava que o seu empirismo era diferente de Aristóteles no que diz respeito à metodologia, como sendo um método científico racional, que é capaz de criar novos conhecimentos científicos confiáveis e universais.

Ainda há outra causa grande e poderosa do pequeno progresso das ciências. E ei-la aqui: não é possível cumprir-se bem uma corrida quando não foi estabelecida e prefixada a meta a ser atingida. A verdadeira e legítima meta das ciências é a de dotar a vida humana de novos inventos e recursos. (BACON, 2000, p.41)

Bacon propõe um método para estudar a natureza, e acredita que a verdade dos fenômenos naturais só pode ser alcançada por meio da experimentação orientada e da observação, e só o raciocínio indutivo pode proporcionar o alcance às novas descobertas, por meio de axiomas gerais. Em relação ao método indutivo de Bacon, a crítica que muitas vezes são feitas, se dão em função de dois pontos.

O primeiro em relação à dependência do intelecto como prerrogativa do sucesso do método, já que a indução nos leva de algumas observações e experimentos à generalização de uma interpretação, sobretudo no que tratam os fenômenos da natureza, onde ele não valoriza a hipótese, como diz Bacon (2000), “*é necessário passar aos outros auxílios do intelecto na interpretação da natureza, bem como à indução verdadeira e perfeita.*” O esforço em tornar o método indutivo perfeito parece inalcançável visto que o número de variáveis envolvidas no processo é demasiado grande, o que torna, sobretudo na modelagem de eventos sem controle experimental bem difíceis portanto, pouco confiáveis.

Mas, para que essa indução ou demonstração possa ser oferecida como uma ciência boa e legítima, deve-se cuidar de um sem-número de coisas que nunca ocorreram a qualquer mortal. Vai mesmo ser exigido mais esforço que o até agora despendido com o silogismo. E o auxílio dessa indução deve ser invocado, não apenas para o descobrimento de axiomas, mas também para definir as noções. E é nessa indução que estão depositadas as maiores esperanças. (BACON, 2000, p. 63)

O segundo, que é continuação do primeiro, trata-se do método se basear na formulação de axiomas gerais apropriados, o que mais uma vez deixa uma brecha no que poderíamos chamar de método consistente, então se acredita que a indução pode nos levar a resultados além do que o silogismo lógico, Bacon muitas vezes demonstra uma metodologia quantitativa e não apenas observacional, o que pode indicar a ausência de rigor lógico que a epistemologia científica deseja, evidenciando o fato de não aceitar o poder do método dedutivo matemático para o avanço das ciências naturais

Repositório dos axiomas gerais da natureza, estabelecidos por via indutiva, era a responsável pela unidade do saber. [...] Para a constituição de axiomas deve-se cogitar de uma forma de indução diversa da usual até hoje e que deve servir para descobrir e demonstrar não apenas os princípios como são correntemente chamados como também os axiomas menores, médios e todos, em suma. (BACON, 2000, p. 62)

Para Bacon, o problema do silogismo e outras práticas metodológicas se dão em muitos casos pela falta da formulação desses axiomas¹¹⁰ gerais, e tece críticas às chamadas Matemáticas Puras, porque acredita que são em número reduzido as novas descobertas desde a Antiguidade, já que vê nelas a formulação apenas de axiomas intermediários, e nunca gerais(universais), como em suas palavras

O silogismo não é empregado para o descobrimento dos princípios das ciências; é baldada a sua aplicação a axiomas intermediários, pois se encontra muito distante das dificuldades da natureza. Assim é que envolve o nosso assentimento, não as coisas. (BACON, 2000, p. 8)

Para Bacon, o homem através de seu intelecto, e deve-se exaltar a ciência em benefício do homem, e alcançamos um mais alto grau de conhecimento por uma metodologia científica baseada no empirismo, em suas palavras, (BACON, 2000, p. 70) “Pretendemos deduzir das obras e experimentos as causas e os axiomas e depois, das causas e princípios, novas obras e experimentos, como cumpre aos legítimos intérpretes da natureza.”

Pensando como Kuhn ou Popper, o que seriam os axiomas gerais de Bacon senão um paradigma dominante ou uma proposição acima de qualquer refutação, então ainda que tenhamos a ciência natural e seus métodos empiristas indutivos, não podemos considerá-los acima de qualquer possibilidade de inconsistência.

Uma ciência só se estabelece, se torna uma ciência normal após passar pelo crivo acadêmico que pode refutá-la ainda no estágio de ciência extraordinária ou se confirmada, criação do novo paradigma. O “erro”, se existir, deve ser muito específico, já que até chegar a um momento de emergência tal erro já teria sido identificado, já que o estado de crise se dá apenas quando há realmente algo que possa abalar as estruturas da ciência vigente.

¹¹⁰ O termo “axioma” é usado por Bacon no sentido de proposição geral.

Então isso nos leva a pensar sobre quando, efetivamente, temos uma ciência extraordinária eminente.

Deve-se investigar possíveis erros pelas mãos dos artesãos, problemas ontológicos da ciência, discrepâncias fenomenológicas das aplicações do paradigma, se qualquer desses pontos não se mostrarem satisfatórios, devemos avaliar então a questão técnico-metodológica aplicada, e se mais uma vez nenhum problema é observado o paradigma emergente é abandonado e dominante se mantém na forma da ciência normal antes estabelecida, mas ainda nos resta uma verificação que se dá pelos argumentos filosóficos aplicados nas formulações de tais paradigmas.

Newton foi claramente um cientista empirista, para muitos o sucessor de Francis Bacon, enquanto Leibniz um racionalista, que influencia Immanuel Kant e sua filosofia empírica racionalista, ambos adeptos da Filosofia Natural, o que nos faz entender que ambos eram epistemologicamente empiristas, já que as observações e experimentos sustentam as investigações e a Lógica e a Matemática dão embasamento para a intuição e inferências baseadas na razão, epistemologias utilizadas pela maioria dos cientistas a partir do século XVII, mas inegavelmente empregam métodos indutivos, e esse último ponto para Popper, se instaura uma descrença metodológica no que se refere à pesquisa científica. Kant acredita que o raciocínio matemático não é estritamente formal, já que em alguma instância se utiliza de intuições, isto é, de conhecimento a priori de espaço e tempo.

O espaço é representado como uma grandeza infinita dada. Ora, não há dúvida que pensamos necessariamente qualquer conceito como uma representação contida numa multidão infinita de representações diferentes possíveis (como sua característica comum), por conseguinte, subsumindo-as; porém, nenhum conceito, enquanto tal, pode ser pensado como se encerrasse *em si* uma infinidade de representações. Todavia é assim que o espaço é pensado (pois todas as partes do espaço existem simultaneamente no espaço infinito). Portanto, a representação originária de espaço é *intuição a priori* e não conceito. (KANT, 2001, B40)

5.3 KARL POPPER

Segundo Popper essa afirmativa não deve ser considerada verdadeira de forma generalizada, já que ele pensa que as ciências empíricas em algum nível se utilizam de metodologias indutivistas e tais métodos não são confiáveis em suas palavras

De acordo com essa maneira de ver, a lógica da pesquisa científica se identificaria com a Lógica Indutiva, isto é, como a análise lógica desses métodos indutivos. É comum dizer-se “indutiva” uma inferência, caso ela conduza de *enunciados singulares* (por vezes denominados também enunciados “particulares”), tais como descrições dos resultados de observações ou experimentos, para *enunciados universais*, tais como hipóteses ou teorias.” (POPPER, 2013, p.27)

Se para o empirista o conhecimento se faz unicamente da experiência, este processo deveria ser metodologicamente indefinido, o filósofo decide até quando experimentar até

que possa formular conhecimentos confiáveis, e não como o matemático que o faz infinitamente, até possa desenvolver a sua ciência dos infinitos.

Então segundo o filósofo, poderíamos pôr em discussão a consistência dos estudos de Newton e de Leibniz, já que a indução e o empirismo teriam sido usados nas comprovações de seus paradigmas, mas obviamente, não se pode apenas considerá-las erradas, mas passíveis de refutação

Ora, está longe de ser óbvio, de um ponto de vista lógico, haver justificativa no inferir enunciados universais de enunciados singulares, independentemente de quão numerosos sejam estes; com efeito, qualquer conclusão colhida desse modo sempre pode revelar-se falsa: independentemente de quantos casos de cisnes brancos possamos observar, isso não justifica a conclusão de que *todos* os cisnes são brancos.” (POPPER, 2013, p.27-28)

Assim sendo, para Popper só é ciência se puder passar sempre pelo critério da falseabilidade, se sempre é passível de uma refutação, e mencionando Kuhn, podemos dizer que a ciência é a ciência normal enquanto não for falsificada, mas sempre está em possibilidade de crise, ainda que novas condições sejam convenientemente criadas, já que sempre será ainda falseável

[..](Essa é a espécie de atitude que o físico pode tomar, algumas vezes muito corretamente, em relação a supostos fenômenos ocultos). Como último recurso, é sempre possível lançar dúvida sobre a perspicácia do investigador (por exemplo, se ele não acredita, como Dingler, que dia virá em que a teoria da eletricidade seja deduzida da teoria gravitação de Newton).

Assim, de acordo com a concepção convencionalista, não é possível dividir os sistemas e teorias em falseáveis e não falseáveis; melhor dizendo, essa distinção será ambígua. Como consequência, o critério de falseabilidade por nós proposto tornar-se-á inútil como critério de demarcação. (POPPER, 2013, p.85-86).

Kuhn e Popper eram teóricos contemporâneos, e embora em alguns pontos divergissem enormemente, com visões diametralmente opostas, como quando Popper valoriza fatores internos da ciência enquanto Kuhn valoriza também fatores externos tal como questões históricas, sociais e culturais, e que portanto para Kuhn, uma revolução não ocorreria aos moldes de Popper, já que um apego ao paradigma científico se faz presente.

Kuhn e Popper faziam parte da epistemologia anglo-saxônica e eram pertencentes da corrente do empirismo lógico, e com base na lógica matemática como forma de pensamento, e concordavam em adequar a lógica da observação empírica e verificação lógica como forma de lógica de raciocínio abstrato, e que mais tarde Popper cria a ideia de falseamento e não mais de verificação empírica, contudo, Popper e Kuhn se assemelham no que se refere à questão discutida nesse trabalho, em que uma ciência precisa passar pela crítica de seus fundamentos estabelecidos.

Thomas Kuhn era contrário ao método de “falsificação”, visto que pensava ele, que o cientista se protegeria internamente contra isso, já que poderia colocar uma redoma que protegeria a sua teoria imune à qualquer crítica, e portanto mantendo a sua posição de “ciência normal”, mas reforçamos que no sentido de uma discussão sobre o que fora estabelecido cientificamente, ambos os pensadores contribuem para a discussão que esse estudo traz.

Acreditamos que o estudo de um método não-standard se aproxima de todos os pensadores aqui citados, já que completando lacunas ou substituindo uma teoria, filosoficamente só é permitido quando nos baseamos em métodos que discutem a veracidade e completude de uma teoria vigente.

5.4 BOAVENTURA DE SOUSA SANTOS

Na linha temporal que alegamos não nos preocuparmos nesse estudo, mas ainda importante em algum grau de profundidade, agora estamos no século XX, e temos uma visível mudança de paradigma no aspecto do conhecimento científico. A datação foi citada para que tenhamos agora o vislumbre de uma mudança na ciência, já que nesse século vários paradigmas foram, de alguma forma, alterados, em especial nas ciências naturais.

Temos um novo paradigma emergente, nos termos de Kuhn, e uma nova ciência ou quem sabe uma nova episteme tomará o posto de ciência normal, estamos saindo da era da ciência moderna da ciência natural, e entramos ou mesmo estamos na pós-modernidade. Esse estado de pós-modernismo que nos coloca Boaventura exige uma discussão em relação aos valores da ciência, visto que a sua base teórica foi abalada, principalmente com as descobertas científicas do início do século passado.

Tamanhas descobertas alcançadas nesse século nos remetem ao número estrondoso de descobertas nos séculos XVII e XVIII, que rendeu o título de revolução científica, e instauração da ciência moderna, e nos leva a pensar se não estamos na segunda onda, o que agora chamamos de ciência pós-moderna.

Com a relativização da física de Newton pela teoria da Relatividade bem como o poder de reflexão trazido para o homem pela mecânica quântica e a física atômica e o princípio da incerteza de Heisenberg, e porque não citar o maior golpe que a matemática tomara em séculos, com o teorema da incompletude de Gödel, e a impossibilidade de uma matemática completa e consistente, portanto a teoria que nos trouxe até os dias atuais, no que se refere ao conhecimento devem ser avaliadas, sem dizer sobre a prática metodológica de se fazer ciência, como alerta Boaventura de Sousa Santos

No domínio das ciências físico-naturais, o regresso do sujeito fora já anunciado pela mecânica quântica ao demonstrar que o ato de conhecimento e o produto do conhecimento eram inseparáveis. Os avanços

da microfísica, da astrofísica e da biologia das últimas décadas restituíram à natureza as propriedades de que a ciência moderna a expropriara. (SANTOS, 2008, p. 82)

O paradigma da ciência moderna se valia da obtenção de conhecimento verdadeiro por meio de um empirismo rigoroso, que dominou a teoria do conhecimento por alguns séculos, mas um paradigma emergente se faz agora, já que o senso comum não é mais visto como o calcanhar de Aquiles da ciência, mas uma parte formadora dela, e os filósofos adeptos dessa ideia, entendiam o cientista como sendo quem domina a natureza, com regras metodológicas claras, em um processo empírico indutivo que aniquilava a possibilidade de senso comum.

Ao contrário do que pensa Bacon, a experiência não dispensa a teoria prévia, o pensamento dedutivo ou mesmo a especulação, mas força qualquer deles a não dispensarem, enquanto instância de confirmação última, a observação dos factos. (SANTOS, 2008, p. 26)

Por Sousa, não devemos mais distinguir o sujeito e o objeto, o paradigma da ciência moderna confia que quantificar é conhecer, e que portanto existe uma espécie de ordem entre o conhecimento do objeto e do sujeito, paradigma a ser superado na pós-modernidade, visto que os exemplos citados nos mostram que quantificar, como na física quântica não necessariamente define o objeto, e mais, com Gödel entendemos que é até perigoso quantificar já que pode nos levar à uma ciência inconsistente ou incompleta

[...]podemos afirmar hoje que o objeto é a continuação do sujeito por outros meios. Por isso, todo o conhecimento científico é autoconhecimento. A ciência não descobre, cria, e o ato criativo protagonizado por cada cientista e pela comunidade científica no seu conjunto tem de se conhecer intimamente antes que conheça o que com ele se conhece do real. (SANTOS, 2008, p. 83)

Estudando a história das ciências vemos que esta está sempre em constante evolução, numa linha temporal crescente ou não, mas é bem claro que a instalação de uma ciência normal, e um paradigma dominante nos permite se aprofundar cada vez mais no próprio paradigma, e em algum momento se tem um paradigma urgente emergente, como Sousa nos traz

A primeira observação, que não é tão trivial quanto parece, é que a identificação dos limites, das insuficiências estruturais do paradigma científico moderno é o resultado do grande avanço no conhecimento que ele propiciou. O aprofundamento do conhecimento permitiu ver a fragilidade dos pilares em que se funda. (SANTOS, 2008, p. 41).

Em tempos de revolução precisamos tirar as amarras do pré-conceito epistemológico, se antes a especialização contribuiu para o crescimento científico, hoje vemos que o caminho é o inverso, o rigor departamental é um entrave na criação científica, se Einstein ficasse preso aos conhecimentos trazidos por Newton não teríamos a gama de conhecimentos advindos dele, e de acordo com Sousa, a ciência natural e social não se

distinguem, formam um complexo sistema interdisciplinar que só nos traz mais e mais conhecimentos.

Na ciência moderna o conhecimento avança pela especialização. O conhecimento é tanto mais rigoroso quanto mais restrito é o objeto sobre que incide. Nisso reside, aliás, o que hoje se reconhece ser o dilema básico da ciência moderna: o seu rigor aumenta na proporção direta da arbitrariedade com que espalha o real. (SANTOS, 2008, p. 74).

Não questionar um conhecimento firmado, um paradigma dominante, é um desserviço ao crescimento científico, sobretudo naqueles em que aparentemente funcionam, sejam como conhecimentos *ad hoc*, sejam por descrever fenômenos de forma satisfatória, ou porque os resultados das pesquisas parecem de acordo com as nossas pretensões, visto que em (Sousa, 2008) “Sendo um conhecimento disciplinar, tende a ser um conhecimento disciplinado, isto é, segrega uma organização do saber orientada para policiar as fronteiras entre as disciplinas e reprimir os que as quiserem transpor”, e ainda por Bachelard

O conhecimento adquirido pelo esforço científico pode declinar. A pergunta abstrata e franca se desgasta: a resposta concreta fica. A partir daí, a atividade espiritual se inverte e se bloqueia. Um obstáculo epistemológico se incrusta no conhecimento não questionado. Hábitos intelectuais que foram úteis e sadios podem, com o tempo, entravar a pesquisa. (BACHELARD, 1996, p. 18-19)

Interessante e perigoso o fato de que na pesquisa científica muitas vezes priorizamos a ideia, a intuição, a indução, visto que é nelas que conseguimos ir além do que os nossos sentidos alcançam, mas são as ideias um agente duplo, já que quando alcançamos uma ideia que se mostra vencedora ignoramos todas as outras, e deixamos de duvidar dessa ideia, como vemos ainda em Bachelard, 1996, “*A ideia ganha assim uma clareza intrínseca abusiva. Com o uso, as ideias se valorizam indevidamente. Um valor em si opõe-se à circulação dos valores. É fator de inércia para o espírito. Às vezes, uma ideia dominante polariza todo o espírito.*”

Uma crítica ao conhecimento regulado parece algo totalmente irresponsável da parte de um cientista, contudo em tempos de ciência pós-moderna esse é o meio pelo qual o cientista questiona e se questiona, portanto, podendo criar ciência, mas sempre de uma forma epistemologicamente “correta”. Einstein certa vez duvidou dos resultados que os seus cálculos mostravam no estudo sobre a luz, já que feria os paradigmas consolidados na época, e mais tarde resolveu confiar nesses resultados, e que puderam ser comprovados por experimentos reais físicos *a posteriori*, então ficou claro que a chamada ciência moderna já não responde aos anseios dos novos cientistas pós-modernos.

Podemos ver em Santos (2002), discorre sobre a prática moderna “*Ao negligenciar a crítica epistemológica da ciência moderna a teoria crítica apesar de pretender ser uma forma de conhecimento-emancipação acabou por se converter em conhecimento-regulação.*”, e agora sobre a pós-moderna:

Para a teoria crítica pós-moderna pelo contrário todo o conhecimento crítico tem de começar pela crítica do conhecimento. Na atual fase de transição paradigmática a teoria crítica pós-moderna constrói-se a partir de uma tradição epistemológica marginalizada e desacreditada da modernidade o conhecimento emancipação. (SANTOS, 2002, p. 29-39).

Trouxemos aqui diversos filósofos para fundamentar a questão principal deste estudo, que se instala no questionamento sobre uma ciência estabelecida, que já bastante proferido aqui, um conhecimento científico que há séculos funciona perfeitamente para os objetivos técnicos aplicados, permitindo ao homem fazer descobertas incríveis baseadas nos conceitos base do Cálculo Diferencial e Integral e da Análise Matemática vigente.

Nas palavras de Russell (1997) “os idealistas tendem cada vez mais a considerar toda a matemática como uma mera forma de lidar a aparência das coisas” e ainda nesse autor “enquanto os empiristas sustentaram que tudo na matemática nos serve para uma aproximação de alguma verdade exata sobre a qual eles ainda não tinham nada para nos dizer.”.

Então a filosofia anseia por saber o que a matemática efetivamente faz, ou fez, já que a Matemática já se mostrou dinâmica, ainda que pense ser exata, e a filosofia pode, talvez, ter as suas respostas entendendo que esse dinamismo se dá provavelmente pela ação da filosofia da matemática:

A matemática no passado era incapaz de responder, e a filosofia respondia introduzindo a noção totalmente irrelevante de mente. Mas agora a matemática é capaz de responder, pelo menos na medida em que reduz a totalidade de suas proposições a certas noções fundamentais da lógica. Nesse ponto, a discussão deve ser retomada pela Filosofia. (RUSSELL, 1997, p. 4)(tradução nossa).

A análise não-standard, bem como todas as formas não-standard, são formas de paradigmas emergentes, visto que rompem com um paradigma pré-estabelecido, e se faz necessário que possa emergir em novo paradigma dominante, para que em tempos futuros seja substituído por um novo paradigma e assim *ad infinitum*, e esse estudo tem a pretensão de levar o leitor a uma longa viagem desde os tempos longínquos, passando pela modernidade e chegando na pós-modernidade científica e matemática. Já percorremos grande parte dessa viagem até aqui, e agora só nos falta apresentar em detalhes o novo paradigma do cálculo, mas sempre procurando deixar claro o caráter urgente interdisciplinar que isto nos traz, já que o tema do estudo, Análise não-standard configura um tema e não uma disciplina de estudo.

A fragmentação pós-moderna não é disciplinar e sim temática. Os temas são galerias por onde os conhecimentos progridem ao encontro uns dos outros. Ao contrário do que sucede no paradigma atual, o conhecimento avança à medida que o seu objeto se amplia, ampliação que, como a da árvore, procede pela diferenciação e pelo alastramento das raízes em busca de novas e mais variadas interfaces. (SOUSA, 2008, p. 76).

Com este capítulo recorrido, podemos entrar no próximo com a convicção de que todas as teorias do cálculo diferencial e integral, da análise matemática, e modelos standards em geral podem em algum momento serem falsificados ou melhorados em algum grau, e entrando no processo de crise, abrindo caminho para um cálculo e uma análise não-standard, como a análise não-standard de Abraham Robinson, já que embora uma certa proximidade desta com a análise de Leibniz, entendemos que o cálculo de Newton e de Leibniz possuem paradigmas que já foram falsificados, ainda que talvez pela sua epistemologia ou pela filosofia da sua matemática, ainda assim emerge uma nova ciência na dita mãe das ciências exatas, a Matemática.

6 ANÁLISE NÃO-STANDARD DE ABRAHAM ROBINSON

Para a maioria dos Acadêmicos da chamada Matemática Pura, discutir sobre os infinitésimos e infinitos não passa de uma futilidade poética, e que os artigos sobre o tema são apenas floreios semânticos, e que não merecem lugar de destaque nos Institutos de Matemática, sobretudo porque não contrariam os resultados obtidos até então.

É interessante o fato de que o problema matemático, filosófico ou epistemológico, que por várias vezes tem nos levado a um pensamento metafísico, teve sua origem em um estudo de física, pelas mãos de Isaac Newton, que além da velocidade média de um móvel definida antes por Galileu, foi capaz de definir que a velocidade instantânea de um móvel como. Richard Morris em seu livro “Uma Breve História do Infinito” de 1998 discute essa relação da chamada física clássica e a física moderna, e quanto essa abordagem dos muito pequenos do século XVII, permitiram a Maxwell desenvolver a teoria clássica do eletromagnetismo, em 1865, que possibilitou a Einstein escrever a sua teoria da relatividade no início do século XX, ajudado pelas ideias de Planck em 1900, no qual o muito pequeno enquanto quantização da energia possui uma medida concebida, e assim nasce o conceito de efeito fotoelétrico, e agora se tem um modelo atômico quantizado por Niels Bohr.

O tempo “passa diferente” para quem está em movimento segundo a Relatividade de Einstein, então se hoje os nossos celulares nos indicam o caminho correto em nossa viagem, se podemos pedir um Uber e sabemos o tempo que levará para chegar até nós, ou até mesmo um carro que dirige sozinho, isso se dá porque os nossos aparelhos celulares foram “ensinados” a lidar com essas pequenas discrepâncias dos tempos bem pequenos, visto que as informações recebidas por eles vêm de satélites que giram na órbita da Terra e que ainda sofrem a ação do campo gravitacional da Terra que causa uma distorção no espaço tempo. Relógios atômicos, baseados em todas essas teorias muitas vezes ridicularizadas até por cientistas, nos permitem avanços tecnológicos incríveis.

Cada um desses modelos em sua época, eram considerados modelos não-standards, então vemos que um novo paradigma precisa sim ser estudado, verificado, mas não previamente ignorado ou recusado, e aqui temos a análise suave de Robinson como um possível novo paradigma da análise, e quem sabe a nova ciência normal como descrita por Thomas Kuhn visto que acreditamos que a análise matemática atual está em período de crise.

A trajetória da matemática, até os dias atuais demonstram inegável dificuldade de se lidar com o infinito, visto que há uma inconformidade desse conceito com a lógica matemática que é dependente da noção de quantidade ordinal. A discussão posta paira sobre a conceituação de número e quantidade, que pertencem à categorias epistemológicas diferentes, sobretudo em relação ao número real, como Kant alerta: “[...]o conceito de um *número* (que pertence à categoria da totalidade) nem sempre é possível a partir dos

conceitos de quantidade e de unidade (por exemplo, na representação do infinito);” (KANT, 2001, p. 111).

Então a única forma de resolver tal dilema é eliminar a ambiguidade entre essas questões, como a aritmética de Peano¹¹¹ o fez, e pensar no número apenas em seu sentido aritmético, mas obviamente, para isso, a filosofia matemática tem que ser alterada e a noção de um número externo ao real deve ser concebida, uma entidade aritmética sem pressupostos da realidade, ainda que possa modelar a realidade de forma satisfatória, e esses números são os que por Robinson, são conhecidos como hiper-reais.

Os indivisíveis, infinitésimos, os muito pequenos, muito grandes, infinitos, a continuidade, têm o mesmo problema epistemológico, porque filosoficamente criam um paradoxo de que se o número representa uma quantidade e essa quantidade é infinita ou infinitamente pequena, nunca será alcançada, ainda que usemos a intuição de que alcançaríamos. Isso posto acreditamos que a desvinculação do número e a quantidade, sem negar a existência do número como entidade aritmética põe fim à essa discussão que parecia ser infinita.

Entendemos que pode existir então uma coexistência entre número e quantidade, mas não uma relação de existência dependente, mas simbiótica. Como veremos, o conjunto dos números hiper-reais é uma extensão dos números reais, e não um exterminador dele, portanto, assim como em certo universo controlado a física de Newton continua funcionando bem, para outro tipo de universo não mais funciona, e a Relatividade de Einstein toma as rédeas da ciência, e soluciona qualquer problema técnico ou ontológico antes inalcançável.

O conceito de número em uma perspectiva de descrever a realidade, por meio da ideia de quantidade, mas ainda manter o caráter ontológico da matemática, se mostrou ineficaz quanto ao que se refere ao cálculo infinitesimal, evento que evidentemente ocorrera em outros momentos na história dos números na matemática, e que a única solução é pensar neles como entes exclusivos da matemática, no que chamamos hoje de Matemática Pura, em uma discussão Epistemológica sobre a nova matemática apresentada, e que aplicações externas podem ser concebidas a partir de tais resultados, como observado antes na forma dos números negativos e imaginários, como defende Roque (2012):

[...]as dificuldades encontradas na legitimação das operações com números negativos e na conceitualização dos imaginários, juntamente com as discussões epistemológicas sobre o cálculo infinitesimal, levaram ao desenvolvimento de uma matemática baseada em conceitos abstratos que passou a ser designada de “pura”. (ROQUE, 2012, p. 361)

¹¹¹ Os axiomas de Peano, também conhecidos como os axiomas de Dedekind-Peano ou postulados de Peano, são um conjunto de axiomas para os números naturais apresentado pelo matemático italiano do século XIX Giuseppe Peano. Esses axiomas vêm sendo utilizados praticamente sem modificações em diversas investigações metamatemáticas, incluindo pesquisas em questões fundamentais de consistência e completude da teoria dos números.

Agora levamos o leitor à uma reflexão, estamos há muitas páginas falando sobre os números reais, mas o que são os números reais? São os números que realmente existem? Então quais não realmente existem? Mas o que é real e para quem?

Um estudante de matemática diria, é a união do conjunto dos números racionais e o conjunto dos números irracionais. E continuaria dissertando. São os números que não são irrais, como os imaginários, que são raízes quadradas de números negativos, que certamente não existem.

Mas um filósofo certamente indagaria. Então o real é o se fez em oposição ao racional? $R - Q = Ir$ (Real menos Racional igual Irracional). Então o que completa o real é um conjunto acima da racionalidade, um irracional.

Interessante pensar que esse filósofo provavelmente entenderia melhor o irreal, já que $C - R = \text{imaginário}$ (Complexo menos Real igual Imaginário). Então o que completa um complexo é um conjunto acima do real, um imaginário.

O mundo das ideias já foi utilizado, e é ainda, por filósofos, mas o mundo do irracional não. E mais, Georg Cantor provou que a maioria esmagadora de números reais, são irracionais, portanto, sempre uma série convergente de racionais não possui um limite racional ou infinito, possui um irracional como limite.

Tanto Cantor quanto Dedekind, se utilizam do princípio do terceiro excluído em suas descobertas, portanto o filósofo se faz entender o que lhe fora apresentado, e talvez aí o problema de compreensão, à primeira vista, sobre os números irracionais, porque em poucas palavras tem-se algo simples.

Cantor mostrou que embora infinitos os números racionais são poucos, porque de uma forma construtiva se mostra que é possível enumerá-los, colocá-los em uma fila, enquanto Dedekind mostra que existem diversas formas de dividir os números racionais em dois grupos ordenados, sendo que cada número racional faça parte de um desses grupos e todos os outros no outro grupo, assim não restando qualquer número real para fazer a ligação(continuidade), entre tais conjuntos, sendo assim um número não racional faz essa ligação, portanto um número irracional.

Mas se torna óbvio que existe uma condição aqui para a continuidade, que viria em forma de um axioma, um grupo não possua o último número ou o outro não possua o primeiro número e assim este número faria a divisão dos grupos, que pensando como uma linha reta faz sentido, mas como números não. E de qualquer modo aqui supomos que existem tais números irracionais e que ele ocupa uma posição entre os grupos.

Se queremos aceitar que *Weierstrass*, Cantor e Dedekind resolveram a questão dos infinitésimos, ou limites ou números bem pequenos, devemos nos colocar apenas e tão somente como espectadores dos termos da própria matemática como indica Russell, que

acredita que *Weierstrass* resolvera o dilema dos infinitesimais, mas que em suas palavras nos levam a pensar sim como filósofos ou metafísicos devem ou deveriam questionar ainda:

As definições de continuidade que temos vindo a considerar, a saber, as de Dedekind e Cantor, não correspondem muito de perto à vaga ideia que está associada àquela palavra na mente do leigo ou do filósofo. Estes concebem a continuidade mais como uma ausência de separação, uma espécie de obliteração geral de distinções que caracteriza um nevoeiro cerrado. Uma névoa dá uma impressão de vastidão sem multiplicidade ou divisão definidas. É este tipo de coisa que um metafísico quer significar por «continuidade, declarando-a, muito honestamente, característica da sua vida mental e da vida mental das crianças e dos animais. (RUSSELL, 2006, nota p.111).

A noção de continuidade depende de que estejamos trabalhando com funções contínuas em uma variável contínua, e um círculo vicioso parece se instalar aqui, já que se supõe contínua para que existe um certo conjunto de números, mas tais números só existem se a continuidade for garantida, visto que todas as tentativas de se falar sobre os tais números bem pequenos se fazem pelo conceito de vizinhança, de seus próximos.

Tal fato é indicado por estudiosos como sendo o cerne da questão do Cálculo Infinitesimal, onde Newton, Leibniz e diversos outros cientistas partiram desse pressuposto, e esses dois como Filósofos Naturais certamente foram contaminados pela ideia de que o espaço e tempo são contínuos, e assim a natureza moldou o cálculo, mas simultaneamente foi moldada por ele, e por isso até *Weierstrass*, todos os matemáticos evitaram os infinitesimais, até Leibniz em alguns momentos, já que os limites, as derivadas e as integrais seriam calculadas, sempre que conveniente, próximas ao número δ em questão.

A análise não-standard como forma lógica de trabalho com os conjuntos numéricos e com a análise matemática é muito promissora não apenas em relação à uma correção histórica sobre as bases do cálculo infinitesimal, como vemos por Lindstrom (1998, p. 07):

Análise Não Padrão ou a Teoria dos Infinitesimais como alguns preferem chamar agora tem pouco mais de 25 anos (ver Robinson (1961)). Nos seus primórdios, era muitas vezes apresentada como uma solução para o antigo e que parecia impossível problema de fornecer métodos infinitesimais em análise com fundamento lógico (LINDSTROM 1998, p. 07), (tradução nossa).

Mas cada vez mais se mostra importante na construção de uma teoria mais intuitiva do cálculo, bem como nas diversas aplicações que a cada dia são descobertas sobre a análise não-padrão, como podemos ver novamente por Lindstrom (1998, p. 07)

[...], mas ficou claro, no entanto, que a teoria era muito mais do que apenas reformulação do cálculo, quando Bernstein e Robinson (1966) deram a primeira indicação de seus poderes como ferramenta de pesquisa, provando que todos operadores polinomialmente compactos em espaços de Hilbert têm invariantes não triviais subespaços. Desde então, técnicas não padronizadas têm sido usadas para obter novos resultados em campos tão diversos como espaços de Banach, equações diferenciais, teoria da probabilidade, teoria dos números algébrica, economia e física matemática, só para citar alguns. LINDSTROM (1998, p. 07, tradução nossa).

Embora ainda não aceita por muitos matemáticos, acreditamos que a Análise de Robinson basicamente faz algo semelhante, ligando os números reais por números hiper-reais, e agora resolvendo o problema metamatemático das magnitudes dos números, já que esta classe nova seria construída sem essa obrigação, o número é uma entidade aritmética, quando não puder ser um representativo de quantidade.

O filósofo Imre Lakatos apoiou as ideias de Robinson em um ensaio escrito em 1966 onde a impressão que tese era de algo altamente revolucionário e que marcaria época pois acreditava a visão sobre o cálculo mudaria a partir dessas discussões. Lakatos se mostrou altamente entusiasmado com a nova visão da análise já que acreditavam que a visão sobre os conceitos do cálculo, estava distorcida graças aos trabalhos modernos de Weierstrass, contudo Robinson e Lakatos ainda focavam em Cauchy, visto que como o historiador de matemática Boyer, supunham que Cauchy ainda se utilizava métodos infinitesimais em seus trabalhos.

Russell acreditava que não mais existia uma questão depois dos escritos de Weierstrass, e tecia duras críticas aos contrários a essa ideia, sobretudo após os trabalhos de Cantor e Dedekind, e alegava que as críticas que ainda eram proferidas, se davam apenas pelos filósofos(lógicos):

Pensou-se, desde o tempo de Leibniz, que o cálculo diferencial e integral exigisse quantidades infinitesimais. Os matemáticos (especialmente Weierstrass) provaram que isso era um erro; mas os erros como, por exemplo, os incorporados no que Hegel tem a dizer sobre matemática, resistem, e os filósofos tenderam a ignorar o trabalho de homens como Weierstrass.

A resposta à Russell dos autores desse trabalho se dá nas palavras dos tradutores do escrito de Russell de 1903

Mal podia Russell imaginar que os lógicos, nos anos 60 do séc. XX, haveriam de encontrar uma formulação rigorosa da análise dos infinitamente pequenos e grandes atuais, com a qual os matemáticos, desde Newton e Leibniz até meados do séc. podiam XX apenas sonhar. Esta formulação chama-se Análise Não-standard e é uma criação do lógico e matemático Abraham Robinson. Mas é claro que ela é tão logicamente necessária como o é a formulação weierstrassiana: nenhuma aniquila a outra, antes são alternativas, ou melhor, a análise não-standard estende e enriquece a «clássica». (RUSSELL, 2006, nota p.112).(nota dos tradutores).

Muitos estudos sobre a história do cálculo foram publicados nessas décadas, mas poucos viram a necessidade de investigar as contribuições históricas à luz da metafísica moderna apresentada pelos artigos de análise não-padronizadas apresentadas na década de 1950, que demonstravam o conhecimento bastante limitado sobre o tema no século XVIII.

Robinson e Lakatos trouxeram à tona reflexões sobre a história da análise e seus princípios, em comparação com as novas descobertas que remetem à análise fora do

padrão e outros estudos sobre o cálculo não-arquimediano, que surgiram recentemente, e que ainda tinham as suas definições matemáticas e filosóficas pouco difundidas, bem como a verificação das suas conexões com ideias antigas sobre a formulação do cálculo padrão.

Laugwitz¹¹² foi um dos mais ativos nas publicações de artigos, depois de alguns anos da publicação de Schmieden¹¹³ que defendia avidamente que a formulação não-arquimediana da análise se mostrava eficiente nas interpretações dos escritos de Cauchy em séries numéricas e integrais.

Um novo paradigma não necessariamente substitui o anterior, mas pode incorporá-lo ou estendê-lo, mesmo que não altere os resultados obtidos antes, mas se ainda que filosoficamente tem um novo tratamento, isto deve ser estudado e divulgado. No caso do cálculo sempre se procurou uma forma mais rigorosa de comprovar as descobertas alcançadas, e por isso muitos acadêmicos tendem a ignorar toda forma de análise não-padrão, já que estes estão presos aos padrões anteriores, seja por uma questão puramente matemática ou mesmo por uma questão filosófica ou política.

A intuição e a facilidade já nos levam a dedicar atenção ao estudo da análise não-standard, já que além disso se mostra mais generalista a aplicação da teoria dos conjuntos bem como a análise real matemática, em modelos teóricos novos, onde podemos trabalhar, por exemplo, com números infinitamente grandes, que é muito mais simples de trabalhar com números infinitos, como a análise padrão o faz, corroborado por

Muitas vezes, a prova não padronizada é intuitivamente mais atraente, simples e curta, o que é uma das razões para se interessar por análise não padronizada. Outra razão é que modelos matemáticos totalmente novos para todos os tipos de problemas podem ser (e nesse meio tempo foram) formulados quando infinitesimais ou outros números não padronizados ocorrem em tais modelos. (PONSTEIN, 2002, p. 17, tradução nossa).

Este estudo traz principalmente a Análise não-standard de Robinson, mas por acharmos que é a análise não-padrão mais promissora, contudo não ignoramos o fato de que toda análise dita fora dos padrões, sobretudo as que se negam a render-se a propriedade arquimediana ou aos seus equivalentes, têm a sua importância primitivamente declaradas, já que ainda que não se alterem os resultados obtidos há séculos, estaríamos inaugurando uma nova forma de se pensar a matemática o que indica um marco importante na história, visto que a mãe das disciplinas exatas é colocada em críticas no cerne da sua existência, que é na consistência de si própria.

Aqui defendemos que a comunidade matemática possa ter acesso às novas ideias, que poderiam mudar pedagogicamente, com alterações nas disciplinas de cálculo e análise, ou mesmo filosoficamente numa discussão entre o valor do empirismo e do intuicionismo,

¹¹² Detlef Laugwitz (Breslávia, 11 de maio de 1932 — 2000) foi um matemático alemão, trabalhou com geometria diferencial, história da matemática, análise funcional e análise não padronizada.

¹¹³ Na década de 1950 desenvolveu com Detlef Laugwitz um método de análise não padronizada.

mas que por exemplo para um físico ou um engenheiro os seus resultados não sofreriam alterações consideráveis, e isso pode ser uma bandeira contra ou a favor dos novos estudos em análise não padrão, já que a matemática aplicada não teria interesse nesses novos conceitos, porém um estudioso da matemática pura, tem a obrigação de apreciar e criticar tais recentes publicações, afinal o trabalho de Robinson vai muito além de uma mera teoria da matemática pura, como diz

Para um matemático oferece um cálculo elegante, sugerindo novas ideias, e aplicada a todos os ramos da matemática. Para um filósofo, ela fornece uma firme base para o uso de infinitesimais como entidades em cálculo. Nos 300 anos desde Leibniz e Newton isso não havia sido feito. Agora, pela teoria dos modelos, tem isso, e uma vasta generalização. (ANGUS, 1977, p. 657-658). (tradução nossa).

Desde os tempos antigos vemos que o modelo teórico e a lógica eram de certa forma periféricos aos estudos do cálculo infinitesimal, mais uma vez voltamos à expressão, os fins justificam os meios, e uma das principais contribuições das análise não-standards é justamente buscar essa conexão, sobretudo na figura da análise de Robinson, que se mostra um trabalho altamente interdisciplinar, já que discute a história, a filosofia, a filosofia da matemática e os fundamentos da matemática, já que remete aos infinitésimos como Leibniz pensara, mas ainda com as contribuições dos matemáticos posteriores a ele como Cauchy.

Além disso, Robinson abala os alicerces da matemática reestruturando a teoria dos conjuntos numéricos, propondo o cerne do problema sempre esteve na formação dos conjuntos numéricos, com a inclusão de uma nova classe de números, os hiper-reais, que não nos deveria ser tão impactante, já que estes já passaram por momentos de crises com os incomensuráveis (números irracionais) no século V a.C. e ainda com as raízes quadradas de números negativos no século XVI, mas que principalmente por uma questão filosófica fazem-se importantes ao extremo, visto que remonta à uma solução de um dilema que já dura mais de 2000 anos, e essa teoria se mostra muito promissora, com mudanças radicais no modo de pensar e de se criar ciência, como relata Kutateladze e ainda com palavras de Gödel também:

Assim não há dúvida de que a previsão de Gödel sobre o futuro da análise não padronizada se tornará profética, e alguma versão da análise não padronizada terá lugar o cálculo diferencial e integral clássico de hoje. Diferenciação como busca de tendências e integração como previsão de futuro das tendências são tecnologias imortais da mente. Novas tecnologias aguardam a humanidade que usará toda a matemática em porções incompreensíveis para todos em porções incompreensíveis hoje. **Esta será a análise do futuro Gödel tinha escrito.** (KUTATELADZE, 2013, p. 12-13, tradução nossa, grifo nosso).

Aqui temos um ponto importante e fundador das análises não-standards apresentadas no século XX, Leibniz defende a ideia dos seus infinitesimais, contudo os

aceita como componentes do conjunto dos números reais, e de algum modo se utiliza do método arquimediato para chegar até eles e os utilizou para minimizar o caminho que o levou até os seus resultados para a física, então temos sim uma proximidade de Robinson e Leibniz, mas mais em função de um afastamento do conceito de *momento* de um fluente e a teoria das fluxões que posteriormente se liga aos limites na mecânica de Newton.

6.1 A TRAJETÓRIA DE ROBINSON ATÉ A ANÁLISE NÃO-STANDARD

Robinson acredita que o beco agora tem saída, que os infinitésimos de Fermat, Leibniz, Euler, Cauchy e outros expoentes da matemática, mesmo os mais antigos, foram finalmente apresentados com o rigor e formalização necessários a partir dos modelos de conjuntos e análise não-standard apresentados ao mundo na década de 1960, tanto para a matemática, quanto para a lógica, divisão definida nos termos de Russell

Diferem entre si como rapaz e homem: a lógica é a juventude da matemática e a matemática é a maturidade da lógica. Este ponto de vista é mal aceite pelos lógicos que, por terem passado a vida a estudar os textos clássicos, são incapazes de acompanhar um trecho de raciocínio simbólico, e pelos matemáticos que aprenderam uma técnica sem se darem ao trabalho de indagar sobre o seu significado ou justificação. (RUSSELL, 2006, p. 191).

Russel que escreve o texto acima em sua obra *Introduction to Mathematical Philosophy*, publicada em 1919, cerca de 40 anos antes de Abraham Robinson publicar o seu artigo sobre a análise não-standard, podemos dizer que faz uma previsão de que um trabalho matemático e lógico, rigoroso em ambas as frentes, cada vez mais rara tal divisão

Felizmente, ambas as categorias estão agora a rarear cada vez mais. Muito do trabalho matemático moderno encontra-se obviamente na fronteira da lógica, e a lógica moderna é tão simbólica e formal, que a relação muito estreita entre lógica e matemática tornou-se óbvia para todo o estudante instruído. (RUSSELL, 2006, p. 191)

Iniciamos essa seção do trabalho com palavras de Bertrand Russell por ter sido ele um dos maiores expoentes da matemática, da lógica e filosofia que habitou a Terra no século XX, e difundiu muitas ideais sobre a necessidade do racional e da criatividade aliados como formas de se fazer conhecimento, ideia que aparentemente se alinham com os resultados e com a trajetória de Abraham Robinson, Russell simplificava os conceitos matemáticos através da lógica, e ainda por ela a compreensão dos conceitos da filosofia, o que fez dele um grande nome da chamada filosofia matemática.

Do livro *The Princeton Companion to Mathematics*, de *Joseph W. Dauben (2010)*, temos um breve resumo da trajetória de Robinson, em seu caminho pela vida e a sua dedicação pela matemática.

6.2 A FILOSOFIA DO TRABALHO DE ROBINSON

Em todo o corpo deste trabalho defendemos que as descobertas feitas pelos matemáticos sempre foram proporcionadas pelos pensamentos filosóficos que os acompanhavam nas empreitadas, visto que sem a filosofia, não teriam levantado certas questões, seja na busca por respostas, por levantar questionamentos, bem como na base epistemológica que utilizariam no embasamento dos novos conhecimentos construídos.

Abraham Robinson além de poder estudar com Abraham Fraenkel, Michael Fekete e Jacob Levitzki, matemáticos geniais, quando Robinson entrou na Universidade Hebraica em 1936, o Departamento de Matemática (adicionado ao corpo docente em 1927) tinha apenas uma década. Mas, dado o êxodo de judeus da Europa, vários matemáticos impressionantes se estabeleceram na Palestina, incluindo Abraham Fraenkel, Michael Fekete.

Essa universidade possuía um enorme acervo de livros de Felix Klein, que dentre outras coisas teve um amplo trabalho sobre a Geometria Não-euclidiana e nas interligações entre a teoria dos grupos e a geometria, e Robinson portanto teve acesso a discussões modernas sobre temas naturalmente não-standards, já que a Geometria Euclidiana se estabeleceu por muitos séculos como a única possível, além disso, teve um estudo profundo sobre a Análise Real, com um dos seus grandes expoentes, Fraenkel, que lhe ensinou muito, segundo Seligman (1979, p. xv), “Robinson estava entre os primeiros alunos de Fraenkel, mas dentro de dois anos Fraenkel disse que já havia ensinado a Robinson, seu aluno mais brilhante, tudo o que podia”. (apud DAUBEN, 2003, p. 246, tradução nossa).

Ele estudou sobre diversos assuntos, e pode assim conectá-los, e dessa forma desenvolveu uma matemática muito rica, visto que a vasta aplicação de seu trabalho já se mostra nos dias atuais, e mais uma vez acreditamos que o seu conhecimento sobre a filosofia, possivelmente, propiciou esse sucesso, que como vemos por Dauben (2002, p. 246, tradução nossa), “Além da matemática, Robinson também fez vários cursos de física teórica, um curso introdutório de grego, bem como leituras de filosofia antiga, especialmente os pré-socráticos e Platão. Ele também fez um curso dedicado especificamente a Leibniz.”

Temos aqui uma reflexão sobre Robinson, mas com palavras de Russell, e isso se explica pelo fato de que além de contemporâneos, embora Russell mais velho, em vários aspectos vemos semelhanças na filosofia, sobretudo na filosofia matemática dos dois pensadores.

A matemática é um assunto cujo estudo, quando iniciado nas suas partes mais familiares, pode ser conduzido em dois sentidos opostos. O mais comum é construtivo, no sentido da complexidade gradualmente crescente: dos inteiros para os fraccionários, [...]. O outro sentido, menos familiar, avança, pela análise, para a abstração e a simplicidade lógica sempre maiores; em vez de indagar o que pode ser definido e deduzido daquilo que se admite no começo, indaga-se que mais ideias e princípios gerais podem ser encontrados, em função dos quais o que fora o ponto de partida possa ser definido ou deduzido. (RUSSELL, 2006, p. 13)

Ele ainda reforça, Russel (2006) *“É o fato de seguir este sentido oposto que caracteriza a filosofia matemática, em contraste com a matemática comum.”*, o que mostra que o cientista lógico deve se preocupar com os resultados que podem ser obtidos a partir do que foi definido inicialmente, e que demonstra total concordância com a lógica não-standard defendida nesse trabalho, já que se para muitos matemáticos a mudança trazida por Robinson não se faz importante por não mudar os resultados numéricos obtidos, mas no que se refere a Epistemologia e a Filosofia, o seu trabalho é vital, já que pode mudar a forma de pensar do matemático, permitindo que alcance resultados nunca vistos, Dauben (2003, p. 252), *“Filosoficamente, neste ponto Robinson estava comprometido, como disse, com um “realismo filosófico bastante robusto”, o que significa que ele aceitava a “realidade” completa de qualquer estrutura matemática.”*

Além de uma forma da matemática construtiva onde se cria um novo conjunto hiper-reais a partir dos reais, demonstra uma incrível formalização, e simplificação dos métodos de obtenção de tais resultados, e se enquadra perfeitamente nas descobertas do século XX, como a Relatividade e a Física Quântica. Portanto uma construção não só importante para a Matemática, mas também para a Filosofia.

Abraham Robinson, um cientista notável cujas contribuições para a teoria da asa delta e a teoria dos modelos são as provas mais convincentes de unidade entre matemática pura e aplicada. Robinson criou uma análise não padronizada que é uma das mais controversas, aplicações maravilhosas e intrigantes da lógica para o núcleo da matemática. (KUTATELADZE, 2013, p. 1)

De uma nova teoria, na era do positivismo, espera-se que venha acompanhada de aplicações, ou mudanças radicais em relação à ciência ou ao ensino. E temos na análise de Robinson ambas as “exigências”, visto que várias aplicações foram descobertas pelos analistas, bem como a forma menos complexa de se trabalhar com os hiper-reais em contrapartida aos épsilons e deltas, mostra que essa nova teoria deve ser aplicada urgentemente nas academias e nos bancos universitários, como podemos ver por Angus:

Em 1960 apareceu seu [Abraham Robinson] primeiro artigo sobre análise não padronizada. [...] Ele foi rapidamente seguido para a nova área por um grupo de analistas, notadamente Luxemburg. Nos 16 anos desde que surgiu, o método interagiu com sucesso com análise, álgebra, teoria dos números, topologia, economia matemática, teoria do movimento browniano e da teoria quântica de campos. O método já é oferecido em algumas universidades (M.I.T., Wisconsin) como uma alternativa para o método (ε, δ) de Weierstrass. (ANGUS, 1977, p. 657) (tradução nossa)

Uma preocupação clara de Robinson se dá em relação à lógica da matemática que no século XX se mostra importante para o embasamento de toda teoria matemática, e os tais números bem pequenos e bem grandes sempre foram um incômodo para os logicistas, e os axiomas estabelecidos em uma forma de ciência padrão. Um dos maiores matemáticos

desse século mostra a sua admiração pelo trabalho desenvolvido por Robinson e sua análise não-standard, nas palavras de Dauben

Kurt Gödel, por exemplo, acreditava que Robinson mais do que ninguém mais tinha conseguido unir matemática e lógica, e ele elogiou a criação de Robinson de análise fora do padrão para alistar as técnicas da lógica moderna para fornecer fundamentos rigorosos para o cálculo usando infinitesimais reais. (DAUBEN, 1988, p. 178, tradução nossa).

A lógica e a filosofia sempre andaram juntas, em Robinson, seja na sua vida acadêmica, profissional e em seus escritos sobre a análise não-standard, e vemos nele a genialidade que pode dar o embasamento tão aguardado ao Cálculo Infinitesimal como uma consequência dessa Interdisciplinaridade de pensamentos

Na UCLA¹¹⁴ Robinson ministrou um seminário sobre lógica no Departamento de Matemática e uma introdução à filosofia da matemática no Departamento de Filosofia. Ele também ministrou um curso introdutório sobre lógica moderna no Departamento de Filosofia, e até mesmo um curso geral sobre filosofia da ciência. No Departamento de Matemática, ele também ministrou um curso de um ano sobre teoria axiomática dos conjuntos e outro sobre aplicações da lógica à análise. (DAUBEN, 2003, p. 261).

Em reforço a essa constatação temos a declaração: “ele alternava suas reuniões entre os departamentos de filosofia e matemática”. Robinson impressionou especialmente David Kaplan, um de seus colegas de filosofia, porque “ele falava de filosofia como os filósofos falavam” (David Kaplan, apud Dauben, 1995, p. 316).

6.3 A MATEMÁTICA DO TRABALHO DE ROBINSON

Muitos matemáticos foram contra a ideia da existência dos números irracionais e hoje aceitamos que é verdadeiro, muitos geômetras foram contra a formulação do V axioma¹¹⁵ de Euclides e hoje sabemos que é bem coerente negá-lo em algumas situações, muitos sequer poderiam conceber a ideia de um número imaginário e hoje a academia os aceita veementemente, a física de Newton “supera” a de Galileu e fora superada pela física de Einstein mas hoje várias de suas afirmações já foram comprovadas também empiricamente, então nos leva a pensar, e se estes cientistas ficassem presos aos modelos padrão em suas épocas, será que teríamos tantos conhecimentos e tantas tecnologias como contemplamos hoje, no século XXI.

Leibniz defendia, para o estudo do cálculo, a adoção de um sistema numérico mais amplo que os números reais que incluíssem, números “ideais” infinitos e infinitesimais e no qual continuassem a verificar-se as leis usuais dos números ordinários, portanto Leibniz é

¹¹⁴ Universidade da Califórnia em Los Angeles, onde Robinson trabalhou de 1962 a 1967).

¹¹⁵ Se uma reta, ao cortar outras duas, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então estas duas retas encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos. Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela a reta dada.

um precursor de um conjunto hiper-real, isto é, um precursor da análise não-standard, não apenas pela introdução dos infinitos e infinitesimais em seu cálculo, mas principalmente por ser um precursor da teoria dos modelos¹¹⁶ de Robinson.

Uma inconsistência prévia por uma parcialidade filosófica ou política, podem cegar um vidente, ou transformar um erudito em um ignorante, ainda que uma contribuição “apenas” epistemológica seja conseguida com um novo conhecimento científico, ele tem o seu valor e deve ser admirado. Os infinitesimais e os limites sempre pareceram ser um “beco sem saída evolutivo”.

Robinson alcançou sucesso na formalização do Cálculo com seus infinitésimos e infinitos, certamente pelo seu trabalho pautado na lógica da álgebra, já que assim com Leibniz, ele procurou se afastar do construtivismo geométrico, e assim fundamentar e generalizar a matemática por meio do rigor da álgebra, e assim foi capaz de criar uma nova análise, por meio de um estudo da teoria dos números e as técnicas aplicadas em busca de sua formalização.

Na sua biografia, escrita por Dauben, vemos claramente essa tendência por Robinson

Querendo aprofundar seus próprios estudos matemáticos, Robinson se matriculou como estudante de pós-graduação no Birkbeck College, Universidade de Londres, onde estudou com Richard Cooke e Paul Dienes. Ele originalmente pensou em dedicar uma tese de doutorado à sintaxe da álgebra, mas isso acabou se tornando “Sobre a Metamatemática da Álgebra”. Ele relatou alguns dos primeiros resultados de sua tese em um breve resumo que enviou ao Journal of Symbolic Logic em 1949: “Análise e Desenvolvimento da Álgebra pelos Métodos da Lógica Simbólica”. Mesmo a partir dessa nota muito concisa, ficou claro que seus interesses eram muito mais matemáticos em sentido estrito do que os de outros pioneiros do assunto, como Alfred Tarski e Leon Henkin. O principal interesse de Robinson era a álgebra, e ele considerava a lógica um meio de obter resultados novos e mais gerais — não um fim em si mesmo. (DAUBEN, 2003, p. 250).

No que tange a questão do Cálculo Diferencial e Integral e a Análise Matemática, a Análise Não-Standard de Robinson, indica que se faça uma extensão do corpo dos números Reais $\mathfrak{R}$ para um corpo ${}^*\mathfrak{R}$ ¹¹⁷, corpo este que conterá os números infinitamente pequenos e infinitamente grandes, que foram contestados desde a criação do cálculo com Newton e Leibniz, Robinson achava que Leibniz havia criado um cálculo mais lógico e formal, como (DAUBEN, 1988, p, 185) “Como Leibniz (e Kant depois dele), Robinson rejeitou qualquer

¹¹⁶ Abraham Robinson ficou conhecido por sua abordagem de usar os métodos da lógica matemática para atacar problemas de análise e álgebra abstrata. Ele introduziu muitas das noções fundamentais da teoria dos modelos. Usando esses métodos, ele encontrou uma maneira de usar a lógica formal para mostrar que existem modelos não padronizados autoconsistentes do sistema de números reais que incluem números infinitos e infinitesimais.

¹¹⁷ Robinson utiliza essa notação, ${}^*\mathfrak{R}$, para representar o conjunto dos números reais na forma não-standard.

base empírica para o conhecimento sobre o infinito, seja na forma de quantidades infinitamente grandes ou infinitamente pequenas, conjuntos, seja o que for.”

O método de Weierstrass nos trouxe definições de derivadas e integrais exclusivamente com números reais, bem como demonstrações de teoremas clássicos do cálculo, contudo, com uma diminuição do aspecto intuitivo e aumento da complexidade, e ainda não trazendo uma solução para os chamados lógicos, já que ele não tratou a questão dos infinitesimais de frente e sim por intermédio das derivadas e integrais, e assim como dito antes por Leibniz, ficções úteis, porém agora não chamados de infinitesimais, mas de épsilons e deltas.

Sabemos hoje, que o método de Weierstrass, e seus épsilons-deltas, que são vistos como salvadores da tal contestação lógico-histórica, na verdade criou um jogo epistemológico, onde os limites e as magnitudes infinitesimais não foram eliminados do cálculo como os críticos queriam, mas apenas os retiraram das demonstrações formais, em uma clara renomeação dos mesmos, ou seja, a técnica se baseia em épsilons e deltas para calcular limites e diferenciais, já que o quociente diferencial $\frac{dy}{dx}$ de uma função $y = f(x)$ é ainda um limite de um quociente da diferença, onde a definição encontrada hoje nos livros didáticos é dada por

A derivada de uma função f em um número a , denotada por $f'(a)$, é

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

se o limite existir. (STEWART, 2016, p. 124).

Portanto, continuamos tendo uma divisão por um número muito próximo de zero, e a diferencial ou derivada baseada em um limite de função, recorrendo na mesma inconsistência antes observada na criação do cálculo, já que h , é um número real maior do que zero e menor que todos os números reais positivos, então temos por exemplo, que h é positivo e menor do que o seu dobro $\frac{h}{2}$. Sendo assim, não vemos uma solução do problema por Weierstrass, e uma extensão dos números reais, de uma forma rigorosa, se faz necessária como concorda

Um infinitesimal é um “número” que é menor que cada número real positivo e é maior que cada número real negativo, de modo que no sistema de números reais é apenas um infinitesimal, ou seja, zero. Mas na maioria das vezes apenas infinitesimais diferentes de zero são de interesse. Isso está relacionado ao fato de que quando na definição de limite usual x tende a c , na maioria das vezes apenas os valores de x que são diferentes de c são de interesse. Portanto, o sistema de números reais deve ser estendido de alguma forma ou outra para incluir todos os infinitesimais. [...]espera-se que a teoria resultante seja matematicamente sólida e completa dentro de limites óbvios. (PONSTEIN, 2002, p. 17, prefácio, tradução nossa)

A análise não-standard de Robinson nos mostra que podemos trabalhar com os infinitesimais de forma rigorosa, definir os diferenciais dx e dy de Leibniz, a partir desse corpo estendido do conjunto dos números reais, já que ainda após os trabalhos de Weierstrass tenhamos a notação das derivadas dadas por $f'(x) = \frac{dy}{dx}$, a ideia de dx e dy , não são concebidos no cálculo weierstrassiano, visto que neste ainda só existem números reais.

A análise não-standard sinaliza que o conjunto dos números reais não responde à questão dos infinitesimais, visto que um número real tanto filosoficamente quanto matematicamente não consegue dar o embasamento aos conceitos de diferenciação e integração. Filosoficamente ou fisicamente teríamos que conceber um número real capaz de caracterizar magnitudes infinitamente pequenas e infinitamente grandes, e matematicamente, pois nesse modelo deveria existir um real infinitesimal positivo, $\delta > 0$, $\delta \in \mathbb{R}$, menor que todo número positivo, mas sendo assim temos que $2\delta < \delta$, já que δ é o menor dos números, mas se dividirmos a inequação por δ , temos que $2 < 1$, o que é um absurdo.

De forma heurística o que se tem feito na matemática, na física, etc, tem sido feito na análise matemática, como em épocas anteriores, um jogo de conveniência, onde consideramos esse infinitesimal diferente de zero e em outros momentos o mesmo número igual a zero, números representativos de quantidades, e quando necessário, considerados finitos, portanto para que se tenha consistência matemática é necessário que se um domínio maior para as funções, que inclua números que possam responder as tais inconsistências.

Uma aritmética não-standard já havia sido publicada, e Robinson já havia estudado sobre o assunto, e pode assim estender a ideia para uma Análise não-standard, e assim voltar a questão dos zeros, e infinitesimais de Leibniz, como vemos em Dauben

Ele vinha pensando sobre a abordagem de Skolem para aritmética não padronizada por algum tempo, quando um dia, ao entrar no Fine Hall em Princeton, a ideia de modelos não padronizados para análise de repente surgiu em sua mente. Uma palestra plenária que ele concordou em dar na reunião do aniversário de prata da Association for Symbolic Logic em janeiro de 1961 provou ser uma ocasião adequada para tornar pública sua nova ideia, e no curso sobre "Aritmética Não-Padrão e Análise Não-Padrão" ele delineou como era possível fornecer uma base rigorosa para o cálculo usando infinitesimais. Ele comunicou isso quase imediatamente a Arend Heyting, e logo o primeiro artigo de Robinson sobre o assunto foi publicado nos Proceedings of the Netherlands Royal Academy of Sciences. (DAUBEN, 2003, p. 259, tradução nossa).

A análise não-standard de Robinson foi capaz de incluir os números infinitesimais e infinitos aos números reais, mantendo a noção de Corpo Ordenado necessária à análise matemática padrão, fazendo desta a análise não-standard que melhor responde ao

problema dos infinitesimais, sem a necessidade de alterações nas premissas da Análise Clássica padrão, como dito pelo próprio Robinson

Nossa abordagem atual produz uma extensão adequada da Análise clássica. Ou seja, as propriedades padrão de determinadas funções (por exemplo, as funções trigonométricas, as funções de Bessel) e relações, em certo sentido tornadas mais precisas dentro da estrutura do cálculo de predicados mais restritos [corpo dos reais], ainda são válidas no sistema mais amplo. (ROBINSON, 1961, p. 433).(tradução nossa).

Com a extensão do domínio do corpo $\mathfrak{R}$ para um corpo $^*\mathfrak{R}$, teremos a inclusão dos infinitesimais e infinitos, nos moldes pensados por Leibniz com os seus dx e dy , mas agora com a experiência da lógica e análise moderna, que nos permite criar tal corpo com restrições com resolvem todos os problemas apontados anteriormente em relação à inconsistência apresentadas em todas as tentativas dos matemáticos anteriores, e como diz Robinson:

No entanto, o novo sistema contém também quantidades infinitamente pequenas e infinitamente grandes e, portanto, podemos reformular as definições clássicas do cálculo infinitesimal dentro de um cálculo de infinitesimais e ao mesmo tempo adicionar novas noções e resultados. (ROBINSON, 1961, p. 433).(tradução nossa).

Uma preocupação de Robinson é em manter o máximo que se possa da estrutura do Cálculo e da Análise padrão, e mesmo já existindo uma análise com os infinitésimos, ele pensa que a sua formulação leva vantagem nesse quesito, como cita:

Finalmente, um esforço recente e bastante bem-sucedido de desenvolvimento de um cálculo com infinitesimais é devido a SCHMIEDEN e LAUGWITZ¹¹⁸ cujo sistema numérico consiste em infinitas sequências de números racionais. A desvantagem deste sistema é que ele inclui divisores de zero e que é apenas parcialmente ordenado. Em consequência, muitos resultados clássicos do Cálculo Diferencial e Integral devem ser modificados para atender às mudanças circunstâncias. (ROBINSON, 1961, p. 433).(tradução nossa).

Dois anos depois, Robinson lançou o livro *Introduction to Model Theory and to the Metamathematics of Algebra*, a segunda metade era quase inteiramente nova e incluía uma seção substancial sobre análise não padronizada.

Nas aulas de cálculo aprendemos sobre os diferenciais dx e dy , e que são infinitesimais, números tão pequenos quanto queiramos, mas declaradamente, ou quando os utilizamos em técnicas de derivação, somos informados infinitesimais não existem, e algumas circunstâncias nos levam a contradições matemáticas, que embora escrevamos $\frac{dy}{dx}$, isso não é um quociente entre duas quantidades e que devemos pensar neles apenas

¹¹⁸ SKOJ,EM, T., Über die Nichtcharakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschliesslich Zahlenvariablen, Fundamenta Mathematicae 23, 150-161 (1934). SKOJ,EM, T., Sobre a não caracterização da série de números usando finitos ou infinitas declarações contáveis com variáveis exclusivamente numéricas, Fundamenta Mathematicae 23, 150-161 (1934).

como uma notação útil, ou seja, o limite do quociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, e tão somente uma abstração sobre alguns números infinitamente pequenos, e que o cálculo portanto se baseia em uma ideia abstrata e não real.

Um estudante de cálculo então se vê estudando uma matemática abstrata, ainda que em uma disciplina que promete trazer realidade para elementos da natureza, que nada têm de abstratos, já que se referem à física e não à metafísica, e nos faz pensar se estamos estudando matemática ou filosofia, ou provavelmente ambas.

A dúvida que paira então é sobre se, portanto, essas quantidades não existem, se suas magnitudes reais não existem, ou se o conjunto numérico relacionado ao cálculo e à análise matemática não são capazes de representá-los. Este último talvez o mais provável já que com exceção dos números naturais, todos os outros claramente são invenções da mente humana, portanto, passíveis de alguma inconsistência ou incompletude, como concorda Kronecker no texto de Eves

Kronecker especializou-se em teoria das equações, funções elípticas e teoria dos números algébricos. Como finitista, ele condenava o trabalho de Cantor, que considerava como teologia e não como matemática. Acreditando que toda a matemática deve se basear em métodos finitos desenvolvidos a partir dos números inteiros, era um pitagórico do século XIX. É sua a famosa frase: “Deus fez os números inteiros, todo o resto é criação do homem”. (EVES, 2011, p. 616).

Em outras palavras, o que diz Kronecker é que fisicamente entendemos os números inteiros positivos, como quando dizemos: “Eu tenho cinco canetas”, já que embora o cinco não exista, as canetas existem, e o cinco é um representante dessa quantidade, mas como faríamos no para quantificar o infinito? Você pode ter infinitas canetas? Existem infinitas gotas d’água no oceano? Mas e se retirássemos gota por gota, não teríamos a última gota? E o infinitésimo? Eu posso ter um infinitésimo de uma gota? Mas se subdividimos uma gota, ainda não é uma gota, só que menor, e que pode ser reduzida mais e mais?

Então a ideia de um número real, mas que ao mesmo tempo possa representar algo totalmente abstrato, quanto a ideia de menor dos números, mas ainda positivo, ou de uma quantidade que diminui indefinidamente, mas que nunca chega ao zero, não desaparece, parece matematicamente ou até filosoficamente contraditória.

Mas nesse estudo, algumas vezes ressaltamos que as técnicas, ainda que sob um ar de métodos úteis, nos levaram a resultados incontestavelmente satisfatórios, o que nos leva mais uma vez a pensar que o problema talvez não seja nas técnicas ou nos $\frac{dy}{dx}$, mas no domínio atribuído a esses problemas matemáticos, onde o conjunto dos reais não é capaz de dar consistência ao cálculo.

O conjunto dos reais foi criado para contrapor os números irrais(imaginários) das raízes quadradas de números negativos, que foi entendido como um conjunto que não

poderia representar a realidade, e portanto tivemos uma extensão do conjunto numérico na época, e nos perguntamos, se foi uma criação do homem, e mostrou o seu valor ao comprovar diversos teoremas algébricos, porque não poderíamos fazer o mesmo agora, estendendo mais uma vez o conjunto dos números reais, para um conjunto que pudesse responder a todos esses anseios, e ainda manter as técnicas, que conhecidamente funcionam, sem grandes mudanças?

Pensando dessa forma Abraham Robinson foi capaz de introduzir tais números em uma análise, que como contrapõe a análise padrão da época, fora chamada de análise não-padrão, ou não-standard, ou ainda non-standard, com tradução completa ou parcial da nomenclatura, e um conjunto de números de uma classe nova sendo criados, esse conjunto unido ao conjunto dos números reais, assim chamado de conjunto dos números hiper-reais ou hyperreais ou hiperreais, com agora números em uma parte standard e outra não-standard.

Além de extensões dos conjuntos numéricos, como o caso dos irracionais e imaginários, já terem sido vistas e aceitas pelos matemáticos, o cálculo de Leibniz, que mesmo sob críticas continua sendo usado satisfatoriamente, configura também, uma extensão do conjunto dos números, onde inclui-se o conjunto dos infinitesimais e infinitos, contudo, sem um aporte analítico como nos dias atuais, já que não existiam na época, mas o que Leibniz faz é criar um conjunto novo, no qual o conjunto dos números reais é subconjunto, a análise de Robinson traz os infinitesimais de Leibniz a volta, e com a simplicidade que temos hoje ao tratar os números complexos, como pensa Angus(1977), ao ter acesso à essa nova teoria *"Há, acredito, um sentimento geral de que devemos ter infinitesimais como entidades, assim como temos os números complexos."*

A busca por uma análise que pudesse novamente trabalhar com os infinitesimais e quantidades infinitamente grandes já era buscada há muito tempo, e em 1958, uma boa análise foi apresentada, mas que continha um problema para a análise padrão, já que a conhecida análise real tem sua base no fato de que o conjunto dos reais é um corpo ordenado completo, que é contemplado na análise de Robinson, e a análise de Schmieden e Laugwitz trouxe um anel apenas parcialmente ordenado, portanto a análise de Robinson se mostrou melhor nesse quesito, como vemos por Luxemburg

De fato, duas dessas teorias foram oferecidas, uma por Schmieden e Laugwitz em 1958 e outra por Robinson em 1961. Essas duas teorias são muito diferentes uma da outra. Schmieden e Laugwitz chegaram à sua teoria por meio de uma nova abordagem da teoria de Cantor definição do sistema dos números reais. O sistema generalizado de números que eles obtiveram é um anel ordenado (= parcialmente ordenado) com divisores de zero e que contém infinitesimais e números infinitamente grandes. (LUXEMBURG, 1962, p. 01)

Para os matemáticos, a análise de Robinson se mostrou muito eficaz e pode se mostrar uma importante ferramenta para a simplificação de métodos antes bastante complicados e trabalhosos, e pelo seu aspecto construtivo temos técnicas mais intuitivas, já que nos leva a procedimentos com tratamento finito, o que antes não era possível

Muitas provas e construções se tornam mais simples, no sentido de que processos limitantes complicados podem ser substituídos por processos finitos não padronizados mais intuitivos, processos discretos. Um bom exemplo é o recente trabalho de Loeb¹¹⁹ sobre teoria do potencial. Em alguns casos novos resultados foram encontrados, notadamente o teorema de Bernstein-Robinson sobre operadores polinomialmente compactos. (Neste caso, é claro, o resultado foi substituído por técnicas convencionais. (ANGUS, 1977, p. 657) (tradução nossa)

Dois problemas, que hoje sabemos serem equivalentes epistemologicamente, que foram a busca de diversos matemáticos, são a quadratura do círculo e o problema das tangentes as curvas em um ponto dado. Tanto Newton, quanto Leibniz conseguiu generalizar a solução do último, melhorando consideravelmente as soluções apresentadas antes, por outros matemáticos.

Então podemos dizer que esse problema foi a motivação para a criação do cálculo diferencial e integral, sobretudo porque Newton pensava nesse problema em termos da sua física, procurando encontrar a velocidade instantânea de um móvel, já que até então só se sabia, com precisão, calcular a velocidade média, então vamos ver no que consistiu esse problema em termos da análise padrão, mas não desprezando números não-nulos, que em técnicas úteis, consideram números positivos, ou negativos, sendo substituídos por zero, como $\frac{1}{m}$, claramente não é zero e sim só um número bem pequeno se m é grande, como podemos ver por Ponstein 2002, p. 19, tradução nossa).

Um infinitesimal é um número que é menor que todo número real positivo e é maior que todo número real negativo, ou, equivalentemente, em valor absoluto é menor que $1/m$ para todo $m \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Zero é o único número real que ao mesmo tempo é um infinitesimal, de modo que os infinitesimais diferentes de zero não existem na matemática clássica.

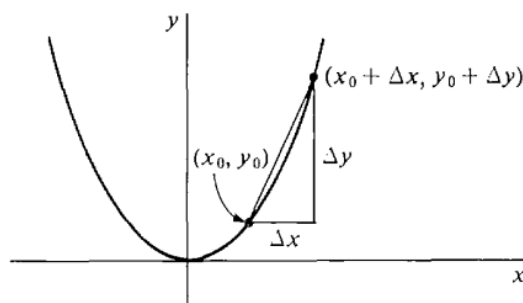
Para determinarmos a inclinação de uma curva, como $y = x^2$, devemos levar em consideração o fato de essa inclinação muda para diferentes valores de x , e isto caracteriza o problema dessa tarefa, e a solução intuitiva é pensarmos na inclinação de uma reta secante à curva, e fazemos uma “média” da inclinação da reta que passa por dois pontos da curva, que é dada pela razão da mudança de y em relação a mudança de x , nesse intervalo, isto é:

¹¹⁹ Peter A Loeb, matemático da Universidade de Illinois, cuja pesquisa está centrada em problemas de representação de medidas e limites ideais na teoria do potencial e também na aplicação de modelos não padronizados à análise matemática.

$$\text{Inclinação média} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Então devemos calcular essa inclinação média entre os pontos $P_0(x_0, y_0)$ e $P_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, que representa a tangente do ângulo no triângulo retângulo da figura 6:

Figura 6: Coeficiente angular da reta tangente a curva $y = x^2$



(KEISLER, 2012, p. 22)

Já que os pontos P_0 e P_1 estão sobre a curva, então satisfazem à equação cartesiana da curva, ou seja:

$$(I) y_0 = x_0^2 \quad \text{e} \quad (II) y_0 + \Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 \Rightarrow y_0 + \Delta y = x_0^2 + 2 \cdot x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$$

Subtraindo a equação (I) da equação (II), temos:

$$\Delta y = 2 \cdot x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$$

Dividindo ambos os membros por Δx , ficamos com:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \cdot x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

Simplificando por Δx temos que $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 \cdot x_0 + \Delta x$

O cálculo desenvolvido acima depende da condição $\Delta x \neq 0$, senão o quociente seria indeterminado, já que teríamos $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{0}$, sendo assim, portanto a inclinação da reta no ponto $P_0(x_0, y_0)$, devemos considerar Δx um número muito pequeno porém não nulo e assim teremos os pontos P_0 e P_1 , bem próximos, portanto a reta secante está bem próxima de ser a própria reta tangente, e assim a média das inclinações está bem próxima da inclinação da curva, portanto temos $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 \cdot x_0 + \Delta x$ será dado por $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 \cdot x_0$.

A solução do problema descrita acima é claramente inconsistente, já que em algum momento nós desprezamos Δx , isto é, o consideramos igual a zero, mas que antes impomos que seria diferente de zero, então vemos uma falta de rigor matemático no processo, mas um defensor desse método poderia alegar que Δx , não representa uma magnitude física, e por isso poderia garantir a consistência no âmbito da análise real.

A alegação então não é plausível quando associamos o processo à mecânica, pois podemos agora pensar em um móvel se movendo ao longo do eixo y de acordo com a equação $y = t^2$, portanto o processo descrito acima nos traria à uma conclusão semelhante, mas agora concluindo que a velocidade do móvel no intervalo de tempo Δt seria dada por:

$$v_{\text{média}} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = 2.t_0 + \Delta t$$

E conseqüentemente a velocidade instantânea em t_0 , considerando Δt desprezível:

$$v_{\text{inst}} = 2.t_0 \quad \text{então} \quad v_0 = 2.t_0$$

A questão posta então é sobre o quão pequeno um número ou uma magnitude deve ser pequena para que possa ser desprezada. Sabemos que em um pequeno intervalo de tempo, caso a velocidade do móvel não seja constante, a velocidade, portanto, pode alterar, e então temos um problema já que a velocidade foi calculada em um intervalo de tempo, mas considerada inalterada nesse intervalo, já que supomos um intervalo pequeno, mas não nulo, apenas desprezível.

O problema epistemológico trazido nos leva a pensar que o único número real que pode ser desprezado nessa situação seria o próprio zero, mas o problema se põe no início da técnica, já que precisamos supor ser não-nulo.

Um estudante de Cálculo padrão nesse momento deve pensar que utilizando o conceito de derivada de uma função polinomial poderia resolver o problema apresentado de forma rápida e eficiente, mas devemos nos lembrarmos que o problema se mantém, visto que a derivada nada mais é do que a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, com Δx e Δy bem pequenos, e portanto, a falta de rigor se mantém.

A solução, portanto, se dá na formação do conjunto numérico, pois precisamos de um número infinitamente pequeno, mas não-nulo, e essa solução então se concentra na extensão do conjunto dos números reais, como proposto por Robinson, e esse novo sistema numérico é denominado de números hiper-reais, e contém os números reais e os infinitesimais diferentes de zero.

Dedekind constrói o conjunto dos números reais enquanto um Corpo Ordenado Completa, a partir da incompletude do Anel dos números Racionais, e Robinson faz o mesmo, em uma forma construtiva de extensão numérica a partir dos números reais, e nesse conjunto um número ε denominado infinitamente pequeno ou infinitesimal se, e somente se

$$-a < \varepsilon < a$$

para todo número real $a > 0$.

Robinson tem como ponto de partida uma forma construtiva, semelhante ao que se fez com os números reais, não com a inclusão dos irracionais por uma questão de comodidade, mas agora como o objetivo de formalidade analítica, e com um modelo axiomático bem fundamentado, obviamente levando os axiomas ZFC¹²⁰ como corretos na base da análise padrão(clássica), estendendo a teoria dos conjuntos, mas mantendo a base da análise real portanto, como dito por Ponstein, 2002:

Robinson parte dos axiomas da teoria dos conjuntos devidos a Zermelo e Fraenkel, e o axioma de escolha (chamado de axiomas ZFC), deriva IR em uma forma clássica tipo de caminho, e então estende IR para *IR aplicando uma quantidade bastante considerável de lógica matemática, como indicado anteriormente. (PONSTEIN, 2002, p. 36) (tradução nossa).

6.3.1 NOÇÕES INICIAIS DA EXTENSÃO DOS REAIS (OS HIPER-REAIS)

De acordo com os escritos de Robinson, o conjunto dos números hiper-reais é denotado por $\mathfrak{R}^*$, e esse conjunto foi construído de maneira que $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{R}^*$, isto é, todo número real é um número hiper-real, mas em $\mathfrak{R}^*$ existem outros números, os antes conhecidos como infinitesimais, em uma forma semelhante a que Leibniz utilizava, e $\mathfrak{R}^*$ é um corpo ordenado, o que preserva as características do conjunto $\mathfrak{R}$, e Robinson trata os teoremas da Análise Real segundo os teoremas de ZFC e assim as técnicas aplicadas no que conhecemos como Análise Real, como garante LINDSTROM(1998, p. 07, tradução nossa). "Mas $\mathfrak{R}$ é muito mais do que uma estrutura algébrica sem divisores de zero: é um corpo ordenado com elemento zero $0 = \langle 0, 0, \dots \rangle$ e com unidade $1 = \langle 1, 1, \dots \rangle$."

Esses infinitesimais em $\mathfrak{R}^*$ se dividem em positivos, negativos e o número real zero. Se os números a e b são hiper-reais, então a diferença $a - b$ é um infinitesimal, e dizemos que a é infinitamente próximo de b .

No procedimento utilizado acima, teríamos agora na análise não-standard, que se Δx é um infinitesimal, então x_0 é infinitamente próximo de $x_0 + \Delta x$, e temos ainda que se ε é um infinitesimal positivo, então $-\varepsilon$ é um infinitesimal negativo e $\frac{1}{\varepsilon}$ é um número infinito positivo, isto é, $\frac{1}{\varepsilon}$ é maior do que qualquer número real e $-\frac{1}{\varepsilon}$ um número infinito negativo, isto é, $-\frac{1}{\varepsilon}$ é menor do que qualquer número real. Os números hiper-reais que não são

¹²⁰ Na matemática, a teoria dos conjuntos de Zermelo-Fraenkel com o axioma da escolha, nomeada em homenagem aos matemáticos Ernst Zermelo e Abraham Fraenkel e comumente abreviada como ZFC, é um dos muitos sistemas axiomáticos que foram propostos no início do século XX para promover uma teoria dos conjuntos sem os paradoxos da teoria ingênua dos conjuntos, como o paradoxo de Russel. Atualmente, a ZFC é a forma padrão da teoria axiomática dos conjuntos, sendo o fundamento matemático mais comum.

infinitos são denominados finitos. Por Lindstrom (1998, p. 07, tradução nossa), temos estas definições e exemplos ilustrativos:

Definição

(a) Um elemento $x \in {}^*\mathfrak{R}$ é *infinitesimal* se $-a < x < a$ para todos os números reais positivos a .

(b) Um elemento $x \in {}^*\mathfrak{R}$ é *finito* se $-a < x < a$ para algum número real positivo a .

E um elemento de ${}^*\mathfrak{R}$ não finito é chamado de *infinito*.

Três exemplos de infinitesimais são 0 , $\delta_1 = \left\langle \frac{1}{n} \right\rangle$ e $\delta_2 = \left\langle \frac{1}{\sqrt{n}} \right\rangle$. Para verificar isso,

digamos que δ_1 seja infinitesimal, note que para qualquer número positivo $a \in \mathfrak{R}$, o conjunto $\left\{ n : -a < \frac{1}{n} < a \right\}$ contém todos, mas um número finito de n 's e, portanto, tem cardinalidade um, ou seja, um único elemento. Observemos, também, que desde que $\delta_1 \neq \delta_2$, as duas sequências convergindo para zero em taxas diferentes, são representadas por diferentes infinitesimais.

Finalmente de (a), observe que zero é o único número real infinitesimal:

Demonstração: Seja r um infinitesimal real com $r \neq 0$, então $|r| \neq 0$, e, como $\mathfrak{R}$ é um corpo ordenado completo(arquimediano), existe um número natural n tal que $1 < n|r|$, o que é um absurdo já que r é infinitesimal.

E ainda de (b), temos que se $x \in {}^*\mathfrak{R}$ é finito, então existirá um único número real r tal que $x \approx r$.

Demonstração: Como x é finito, o conjunto $A := \{y \in \mathfrak{R} / y < x\}$ é limitado superiormente em $\mathfrak{R}$. Façamos r o supremo de A em $\mathfrak{R}$. Para provarmos que $x \approx r$, basta que $|x - r| \leq \varepsilon$ para todo número real positivo ε . Seja ε um número do tipo, então, se $r < x - \varepsilon$, então $r + \varepsilon < x$, $r + \varepsilon \in A$, e $r + \varepsilon \leq r$ então temos que $\varepsilon \leq 0$, o que é um absurdo, visto que pela hipótese $\varepsilon > 0$.

Se $x + \varepsilon < r$, então $x < r - \varepsilon$ e $r - \varepsilon$ é uma cota superior de A em $\mathfrak{R}$, o que é um absurdo por $\varepsilon > 0$ e $r - \varepsilon < r = \sup_{\mathfrak{R}}(A)$. Assim temos que $r - \varepsilon \leq r \leq x + \varepsilon$, isto é, $|r - x| < \varepsilon$, portanto $x \approx r$. A unicidade vem do fato de que “zero é o único número real infinitesimal”, ou seja, suponha que existe um s tal que $x \approx s$, da transitividade da equivalência, temos que $r \approx s$, portanto r , existe e é único.

Importante salientar, que foi usado o argumento do número real menor que todos os números positivos os infinitesimais dos reais, que gerava o erro em que um número era maior do que o seu dobro, em função de tais infinitesimais, já que agora o seu único infinitesimal é o zero, que não é igual ao seu dobro, e sim igual, $0 = 2 \cdot 0$. ${}^*\mathbb{R}$ não possui a maior das cotas inferiores, o ínfimo, mas isso, através da análise não-standard foi resolvido, já que agora o conjunto de todos os infinitesimais são externos.

Exemplos de números infinitos(hiper-grandes), positivo e um negativo, são respectivamente $\langle n \rangle$ e $\langle -n^2 \rangle$, observe que isso não é no sentido de infinitos, já que não existe o infinito enquanto número, mas de infinitamente grandes,

Portanto, cada ε infinitesimal diferente de zero pode ser invertido e o resultado é o número $\omega = 1/\varepsilon$. Segue-se que $|w| > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então podemos dizer que ω (positivo ou negativo) é hiper-grande (ou infinitamente grande). Números hiper-grandes não aparecem na análise clássica, mas, no entanto, podem ser tratados como números clássicos.

É fácil verificar que as regras aritméticas que se esperariam realmente ocorrem; por exemplo, a soma de dois infinitesimais é infinitesimal, e ainda que o produto de um número finito por um infinitesimal é infinitesimal. Mais interessante é a seguinte observação que mostra que a parte finita de ${}^*\mathbb{R}$ tem uma estrutura muito simples.

A simplicidade metodológica dos hiper-reais surge também daí, já que mesmo um número hiper-grande não existindo na matemática padrão, podemos tratá-los como se fossem reais clássicos, como nos exemplos que nos traz Ponstein 2002, p.

Se, por exemplo, ω é positivo hiper-grande, podemos calcular $\sqrt{\omega}, \omega/2, \omega-1, \omega+1, 2\omega, \omega^2, etc.$, e temos que, $(\omega-1) + (\omega+1) = 2\omega$, $(\omega-1) \cdot (\omega+1) = \omega^2 - 1$, etc. Além disso, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$n < \sqrt{\omega} < \omega/2 < \omega-1 < \omega < \omega+1 < 2\omega < \omega^2,$$
 dando sete números hiper-grandes diferentes. Se ε é hiper-pequeno, se δ também é hiperpequeno mas diferente de zero, e se ω é hiper-grande positivo, de modo que $-\omega$ é hiper-grande negativo, escrevemos, $\varepsilon \cong 0, \delta \approx 0, \omega \approx \infty, -\omega \approx -\infty$, respectivamente.

Logo temos as seguintes definições na análise não-standard.

Seja x um hiper-número.

i) x é chamado hiper-grande positivo se $x > m$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Notação: $x \sim \infty$.

ii) x é chamado hiper-grande negativo se $-x > m$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Notação: $x \sim -\infty$.

Obs.: Em vez de hiper-grande, o termo infinitamente grande pode ser usado, mas isso não significa que x seria igual a ∞ , que não é considerado um número.

iii) x é chamado finito ou limitado se não for hiper-grande.

iv) x é chamado de hiper-pequeno, ou é chamado de infinitesimal se $|x| < \frac{1}{m}$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Notação: $x \cong 0$, ou no caso $x \neq 0$, $x \sim 0$.

x é considerado apreciável se x é limitado, mas não hiper-pequeno.

Proposição:

Qualquer número finito $x \in {}^*\mathfrak{R}$ pode ser escrito exclusivamente como um $x = a + \varepsilon$, onde $a \in \mathfrak{R}$ e ε é um infinitesimal ou hiper-pequeno, isto é, todo elemento finito $x \in {}^*\mathfrak{R}$ pode ser escrito na forma $st(x) + \varepsilon$, onde ε é um infinitesimal unicamente determinado por x .

Prova: A unicidade é óbvia, pois se $x = a_1 + \varepsilon_1 = a_2 + \varepsilon_2$, então $a_1 - a_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$; mas esta quantidade é real e infinitesimal, então isto deve ser nulo, portanto, $a_1 = a_2$ e $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, o que prova a unicidade.

Para provar a existência, seja $a = \sup\{b \in \mathfrak{R} : b < x\}$: suponhamos que existe x finito. Devemos mostrar que então que $x - a$ é infinitesimal. Suponhamos que não, então existe um número real r tal que $0 < r < |x - a|$: (valores absolutos em ${}^*\mathfrak{R}$ são definidos exatamente como valores absolutos em $\mathfrak{R}$). Se $x - a > 0$, isso implica que $a + r < x$, contrariando a escolha de a . Se $x - a < 0$, temos que $x < a - r$, o que também contradiz a escolha de a .

Vamos escrever $x \approx y$ para significar que x e y são infinitamente próximos, isto é, $x - y$ é um número infinitesimal.

Definição: A função **parte standard** associada a ${}^*\mathfrak{R}$, é a função que associa cada elemento finito $x \in {}^*\mathfrak{R}$, ao único número real $st_{{}^*\mathfrak{R}}(x)$ tal que $x \approx st_{{}^*\mathfrak{R}}(x)$ ou simplesmente $x \approx st(x)$. Usaremos essa função apenas como st , já que iremos trabalhar exclusivamente com o domínio ordenado ${}^*\mathfrak{R}$, isto é, $\text{Im}(st) = \mathfrak{R}$ e $\text{ker}(st) = \text{Inf}(\mathfrak{R})$.¹²¹

De outra forma, temos a definição de parte standard como:

Se x é um hiper-real limitado, então o hiper-real padrão (único) r que é infinitamente próximo de x é chamado de parte padrão de x , que é denotado por $st(x)$.

Este trabalho apresenta a teoria nonstandard, discutindo a questão filosófica, epistemológica, metodológica, matemática dessa nova matemática, e para isso são

¹²¹ Imagem da função st aqui sempre será subconjunto dos reais e o kernel(núcleo), da função, isto é, vetores que levam essa função ao zero são os infinitesimais dos reais, quem como vimos é o zero.

necessárias algumas explicações sobre a análise matemática, aritmética e algébrica desse novo conjunto numérico, contudo, não pretendemos fazer aqui as demonstrações dos resultados, que já existem em maioria em outras publicações, exceto em alguns casos em que poderá servir como exemplo ilustrativo ao leitor, demonstrando a simplicidade de certas demonstrações antes complexas.

Definição

Para cada finito $x \in {}^*\mathfrak{R}$, existe um único número real a tal que $x \approx a$ e será chamado de parte padrão(standard) de x e denotado por ${}^o x$ ou $st(x)$. Inversamente, para cada, $a \in \mathfrak{R}$, o conjunto de todos os $x \in {}^*\mathfrak{R}$, tal que $a = {}^o x$ será chamado de *mônada* de a . A próxima lema mostra que existe uma relação razoável entre o comportamento assintótico de $\{a_n\}$ e o valor de $\langle a_n \rangle$.

Lema:

Se a sequência $\{a_n\}$ tem limite a , então $a = \langle a_n \rangle$.

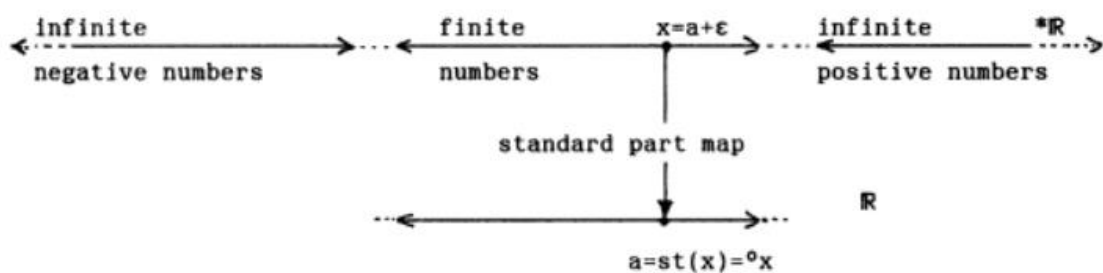
Prova. Tudo o que temos para mostrar é que $a - \varepsilon < \langle a_n \rangle < a + \varepsilon$ para qualquer $\varepsilon \in \mathfrak{R}_+$.

Mas como $\{a_n\}$ converge para a , o conjunto $\{n : a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon\}$ contém todos, mas um número finito de n's e, portanto, tem cardinalidade um, ou seja, um único elemento.

Assim, construímos um conjunto ${}^*\mathfrak{R}$ de reais não padronizados ou hiper-reais que é uma extensão do corpo ordenado de $\mathfrak{R}$ e contém os números infinitamente pequenos e infinitamente grandes. Conforme Ponstein, 2002, “ * reais ou hiper-reais. Um número $H(x_i)$ é chamado * real ou hiper-real se todos os x_i forem reais, isto é, se $H(x_i) \in {}^*\mathfrak{R}$. Obviamente, tal número não precisa ser real, mas pode ser tratado como um número real clássico.”

Lindstrom(1998, p. 09), nos traz uma ilustração da construção do conjunto dos hiper-reais, e a relação destes com os reais, os infinitesimais e infinitos.

Figura 7: Construção do conjunto dos números hiper-reais



LINDSTROM(1998, p. 09).

Então temos que ${}^*\mathbb{R}$ é uma estrutura ordenada composta por três partes disjuntas, os infinitos números negativos, os números finitos e os infinitos números positivos. A parte finita e ${}^*\mathbb{R}$ são os números reais $\mathbb{R}$, a menos que cada ponto em $\mathbb{R}$ seja ampliado para tornar-se uma cópia do conjunto dos infinitesimais, um isomorfismo¹²².

A extensão por tanto se deu de forma construtiva, onde tanto para a teoria dos conjuntos quanto para o estudo das sequências e funções, resolve-se o problema, já que agora as categorias de números reais que pareciam funcionar de um jeito estranho agora estão definidos na análise não-padrão, como define

I. O Princípio da Extensão

- (a) Os números reais formam um subconjunto dos números hiper-reais, e a ordem relação $x < y$ para os números reais é um subconjunto da relação de ordem para os números hiper-reais.
- (b) Há um número hiper-real que é maior que zero, mas menor que todos os números reais positivo.
- (c) Para cada função real de uma ou mais variáveis temos uma função correspondente hiper-real *f , do mesmo número de variáveis *f é chamada de extensão natural de f . (KEISLER, 2012, p. 27-28, tradução nossa).

Portanto entendemos que o problema que assolou os matemáticos por tanto tempo está resolvido, o conjunto dos números reais não possui infinitésimos ou infinitos, eles fazer parte da extensão desse conjunto, portanto o conjunto dos números reais podem tratar as magnitudes físicas como sempre o fizeram, mas agora obedecendo a formalidade e o rigor que a filosofia e a lógica exigem em tempos atuais, o conjunto ${}^*\mathbb{R}$ é uma extensão interessante de $\mathbb{R}$, e de uma forma já vista antes na análise real, como concorda (Wontner, 2019, p. 5, tradução nossa) "Seja $\mathbb{R}$ os números reais (ordinários) como uma ordem linear densa, com constantes e funções. Este sistema é expandido aos hiper-reais, da mesma forma que o conjunto dos reais expande o conjunto dos racionais."

Inicialmente, na análise real clássica, os números reais foram introduzidos por meio de sequências de Cauchy de números racionais, que sabemos representar o Corpo Ordenado Completo, e sabe-se ainda, que a menos de um isomorfismo existe um único Corpo Ordenado Completo, mas em geral pensamos apenas como um número, e essa simplicidade se dá também na análise não-standard, onde podemos introduzir os números

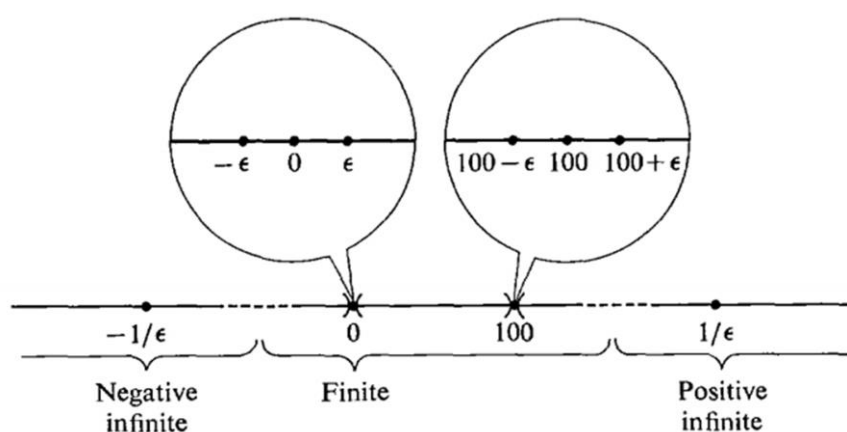
¹²² Na álgebra abstrata, um isomorfismo é um homomorfismo bijetivo. Duas estruturas matemáticas são ditas isomorfas se há um mapeamento bijetivo entre elas. Essencialmente, dois objetos são isomorfos se eles são indistinguíveis dado apenas pela seleção de sua característica, e isomorfismo é o mapeamento entre objetos que mostra um relacionamento entre duas propriedades ou operações.

hiper-reais como sequências infinitas (x_i) , de números reais x_i , e podemos de forma similar pensar em números e não sequências na análise não-standard, nos chamados hiper-números, em uma bijeção entre todas as noções clássicas e novas.

Outras ilustrações interessantes sobre esses números novos que foram introduzidas na análise clássica podem ser vistas na obra de (KEISLER, 2012, p. 25), e em suas palavras:

A Figura mostra um desenho da linha hiper-real. Os círculos representam "microscópios infinitesimais" que são poderosos o suficiente para mostrar uma pequena porção da linha hiper-real. O conjunto $\mathfrak{R}$ de números reais está espalhado entre os números finitos. Sobre cada número real c temos uma porção da linha hiper-real composta dos números infinitamente próximos de c (mostrados sob um microscópio infinitesimal para $c = 0$ e $c = 100$). Os números infinitamente próximos de 0 são os infinitesimais. Na Figura as partes finita e infinita da linha hiper-real foram separadas entre si por uma linha pontilhada. (KEISLER, 2012, p. 25, tradução nossa).

Figura 8: A linha dos números hiper-reais.

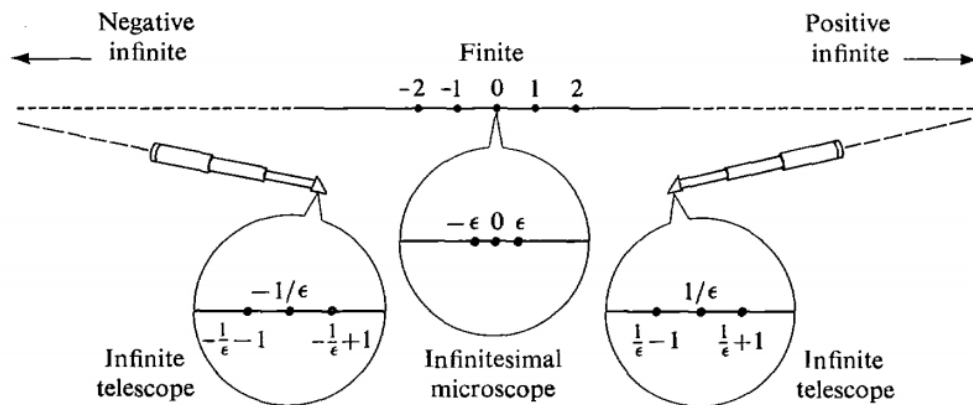


(KEISLER, 2012, p. 25)

Ele ainda mostra uma ilustração de como são concebidos os números infinitos na análise não-standard, e explica:

Outra maneira de representar as infinitas partes do linha hiper-real é com um telescópio infinito" como na Figura. O campo de visão de um telescópio infinito tem a mesma escala que a porção finita da linha hiper-real, enquanto o campo de visão de um microscópio infinitesimal contém uma porção infinitamente pequena. da linha hiper-real explodiu. (KEISLER, 2012, p. 25, tradução nossa)

Figura 9: Números infinitesimais e infinitos na linha hiper-real



(KEISLER, 2012, p. 25)

Como já dito antes, a teoria não-standard demonstra uma atividade construtiva e intuitiva na matemática, e que geralmente usamos o 0 (para separar os números negativos e positivos) e o ε como um infinitesimal, porque já foi usado de forma aproximada por exemplo por Weierstrass, mas a teoria não-padrão pode ser construída de diversas formas. Como relata (Wontner, 2019, p. 5, tradução nossa)

Existem várias maneiras de construir esses não-padrão reais, cada um exigindo o teorema da compacidade¹²³ ou alguma versão de uma construção de ultrapotência. A própria construção teórica de Robinson usava compacidade. Algumas abordagens da NSA (não-standard) mudam a teoria dos conjuntos subjacente, notadamente a de Nelson, mas a NSA pode ser implementada em várias teorias dos conjuntos. (WONTNER, 2019, p. 5, tradução nossa)

Wontner mostra uma exemplificação de uma construção de teoria não-standard que demonstra o aspecto construtivo e de nível simples de aplicação, como vemos a seguir:

Para fins de exposição, esboço apenas uma construção informal.

Considere o seguinte processo. Comece com T , a teoria completa de $\mathbb{R}$.

Em seguida, estipule que, de acordo com a nova teoria, há um valor fixo positivo infinitesimal, $*$. Chame este conjunto de $\mathfrak{R}_1 : \mathfrak{R} \cup \{*\}$. Então feche sob (por exemplo) a adição e a multiplicação por $\mathfrak{R}$, então o novo conjunto contém elementos como $5+*$ e

¹²³ O Teorema da Compacidade assegura que um conjunto Γ qualquer formado por fórmulas bem formadas de um cálculo de predicados de primeira ordem é satisfazível se, e somente se, todo subconjunto finito Γ_0 de Γ também é satisfazível. Ou seja, se $\Gamma \vdash \neg \alpha$, então, qualquer que seja $\Gamma_0 = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, com $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, tem-se que $\Gamma_0 \vdash \neg \alpha$; reciprocamente, se, qualquer que seja $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, tem-se que $\Gamma_0 \vdash \neg \alpha$, então $\Gamma \vdash \neg \alpha$. Este teorema denota uma importante propriedade para a lógica de predicados, pois garante que toda e qualquer fórmula é derivável (ou logicamente implicada, no caso semântico) a partir de um conjunto finito de premissas.

$\pi \times *$. Esses elementos se comportam 'como esperado', então $5 < 5 + * < 5 + \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Chame isso de $\mathfrak{R}_2$. Ele contém números infinitos, por exemplo, $\frac{1}{*}$. Mas, $\mathfrak{R}_2$ não é fechado por adição ou multiplicação (por elementos de $\mathfrak{R}_1$), pois contém $*$ mas não contém $* \times *$. Tão logo fechamos novamente sob adição e multiplicação, etc., por $\mathfrak{R}_2$. Chame isso de $\mathfrak{R}_3$. Mas o $\mathfrak{R}_3$ não está fechado. Então pegue o fechamento infinito $\overline{\mathfrak{R}} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{R}_n$. $\overline{\mathfrak{R}}$ agora é fechado sob adição e multiplicação (por um argumento de compacidade).

Os números padrão formam uma cópia de $\mathfrak{R}$ em $\overline{\mathfrak{R}}$, mas há muito além disso, por exemplo, $5 + (*)^{14}$, ou $\frac{4 + *}{e^{\pi} + (17.1 \times *)}$, são números finitos e estão próximos aos membros da cópia de $\mathfrak{R}$ em $\overline{\mathfrak{R}}$. (WONTNER, 2019, p. 5, tradução nossa)

Pensar em uma reta como um conjunto infinito de pontos, como vemos na análise real, também conhecida como análise da reta, nessa última forma conhecida porque os matemáticos acreditam que a linha reta é representativa do conjunto dos reais em uma relação biunívoca entre esses pontos e os números reais, na forma de estrutura densa e completa que Dedekind¹²⁴ nos trouxe, contudo, acreditamos que tal afirmação não pode ser feita, já que acreditamos que o problema acerca dos infinitesimais está ligada metafisicamente a questão dos números e suas magnitudes, então se ela é uma linha real, hiper-real ou mesmo outra forma não podemos garantir, contudo, para efeitos intuitivos podemos pensar nela como uma linha hiper-real, mesmo porque o tratamento algébrico utilizado com os hiper-reais é de igual ou até mais simples atuação, quanto aos números reais, como concorda Keiser, 2012, p. 25, tradução nossa)

Não temos como saber como é realmente uma linha no espaço físico. Pode ser como a linha hiper-real, a linha real ou nenhuma das duas. No entanto, em aplicações do cálculo é útil imaginar uma linha no espaço físico como uma linha hiper-real. A linha hiper-real é, como a linha real, um modelo matemático útil para uma linha em espaço físico. Os números hiper-reais podem ser manipulados algebricamente assim como os números reais. (KEISER, 2012, p. 25, tradução nossa)

Nos parece que o conceito da análise não-standard, nos permitem, mais intuitivamente, entender a questão da continuidade, já que acreditava-se que $\mathfrak{R}$ era contínuo pois em uma narrativa própria, os analistas mostraram existir infinitos números racionais, e estes não completavam a reta, ou seja, que existem lacunas, assim embora $\mathbb{Q}$ seja denso, pois se x e y pertencem a $\mathbb{Q}$ com $x < y$, sempre existe $z \in \mathbb{Q}$, tal que

¹²⁴ Aqui vamos pensar apenas na questão do contínuo mais intuitivo, o caso da linha, não na questão de espaços topológicos, etc.

$x < z = \frac{x+y}{2} < y$, $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado mas incompleto, e sabemos da existência de números não racionais, então por meio de algumas técnicas, imaginamos que os irracionais completam os racionais, tornando assim o conjunto $\mathbb{R}$ um corpo ordenado completo, e portanto em mais uma demonstração de fé, pensamos $\mathbb{R}$ uma linha reta.

A argumentação acima tem a sua base narrativa no fato de que temos em nossa defesa o Princípio do Terceiro Excluído, isto é, os números ou são racionais ou irracionais, e portanto preso ao conceito estabelecido da Teoria dos Conjuntos com Cantor e Dedekind, excluindo qualquer outra estrutura livre dessas lacunas, uma nova estrutura com tantas propriedades algébricas quanto as dos reais, e ainda ordenada e completa, os racionais e os irracionais são densos em $\mathbb{R}$, mas se foi possível estender $\mathbb{R}$, então talvez não fosse contínuo, ou não possa garantir a continuidade de uma função.

O problema posto pode ser maior do que apenas decidir se reais ou hiper-reais modelam o contínuo, afinal talvez nenhum deles ou ambos o façam, já que estes possuem propriedades de fechamento e densidade, ou completude, mas podemos pensar o problema por diversos prismas, veremos dois a seguir:

i) A questão Matemática: Matemáticos gostam de uma resposta exata, e adoram unicidade, então se quer determinar a certeza de que um deles e só ele modela a reta, e que não exista a possibilidade de que outra estrutura o faça, e temos a ideia de um axioma estabelecido, o axioma conhecido como de Cantor-Dedekind¹²⁵, mas que é um axioma, portanto não demonstrado.

ii) A questão Intuitiva(psicológica): A solução atingida nesse dilema se deu por Dedekind, que resolve o problema, digamos, geométrico a partir da Aritmética, já que propõe um isomorfismo entre pontos e números, e estuda os números concluindo assim sobre a geometria, mas nem mesmo sabemos se a reta é realmente formada exatamente por pontos, Newton por exemplo pensava no contínuo dinâmico, em que o contínuo, por exemplo, poderia ser formado por elementos com comprimento em movimento contínuo.

Sendo assim, postas as possibilidades atuais, acreditamos que os hiper-reais têm mais chances do que os reais, já que se partirmos do fato de que $\mathbb{R}$ é contínuo, não podemos negar que ${}^*\mathbb{R}$ também é, já que é mais elegante aritmeticamente, e é mais intuitivo que um número real não possa ser tão pequeno a ponto de não permitir buracos em sua vizinhança, enquanto ${}^*\mathbb{R}$, possui elementos (infinitesimais), que $\mathbb{R}$, não possui.

¹²⁵ Em lógica matemática, a frase axioma de Cantor-Dedekind tem sido usado para descrever a tese de que os números reais são ordenados isomorficamente ao contínuo linear da geometria. Em outras palavras, o axioma indica que existe uma correspondência um a um entre os números reais e os pontos de uma linha.

Àqueles que pensam na incontestabilidade do axioma de Dedekind, trazemos mais uma vez à discussão a base construtiva feita por ele. Em uma explanação informal, o que ele faz é dividir a linha em dois grupos disjuntos, onde nenhum ponto escape à essa partição. Sendo assim todo ponto da parte I está à esquerda de todo ponto da parte II, portanto, existe um e um só ponto que pode formar essa partição, já todos os pontos fazem parte de uma das partes e nenhuma foi deixado de fora, este único ponto então quando adicionado, faz com que a reta seja contínua.

O exemplo clássico, encontrado em todos os livros de análise real é o caso da inequação $y = f(x) = x^2 - 2$ com Q_+ , que portanto seria uma curva, que se supõe contínua em $\mathfrak{R}$, sendo assim dividida em duas partições $0 < x < \sqrt{2}$ e $x > \sqrt{2}$, e para que seja obedecida a continuidade devemos então acrescentar $\sqrt{2}$ ao conjunto e como é sabido $\sqrt{2} \notin Q$, e se esperava que fosse uma estrutura real fechada, então temos que $\overline{Q}$, algebricamente, fecha Q em $\mathfrak{R}$ e essa lacuna sempre pode ser fechada, já que $\overline{Q}$ é denso em $\mathfrak{R}$, assim nunca faltará um irracional para essa tarefa já que temos infinitos deles, e que aliás já que não são enumeráveis, temos infinitamente mais do que os próprios racionais que são enumeráveis, e dizemos que $Q \cup \overline{Q} = \mathfrak{R}$.

1) Mas o caso a ser analisado é, isso garante teríamos uma relação coordenada entre os pontos da linha e os números reais, e assim a própria representação da reta?

Tal fato nem mesmo Dedekind assumiu.

2) Esse seria o fechamento único? A ponto de não haver uma nova estrutura algébrica capaz de fazer o mesmo?

Poderíamos até propor o conjunto $C - \mathfrak{R}$, mas não vemos necessidade já que parece um exagero já que $\mathfrak{R} \subset C$, e estaria acima do necessário, além do fato de que C , conjunto dos números complexo, não goza de uma caracterização muito importante para a análise real padrão, e também para a não-padrão, C não é ordenado, e um domínio não ordenado não permite a utilização de diversos teoremas vitais, mesmo na Teoria dos Modelos de Robinson.

Então ainda achamos que o problema da continuidade geométrica não se faz necessária, mas uma solução algébrica/aritmética se põe bem mais intuitiva em $^*\mathfrak{R}$, que possui uma construção semelhante e que a magnitude exigida em $\mathfrak{R}$, o torna menos canônico do que em $^*\mathfrak{R}$, onde não exigimos.

Ainda no sentido lógico, e não mais geométrico, até aqui parecemos assumir que a continuidade tem um único pré-requisito, um corpo ordenado não deve ter lacunas de Dedekind, portanto um corpo ordenado é completo se, e somente se, satisfaz ao axioma de

Dedekind, e isso o torna um sistema numérico completo ainda que abandonemos a ideia da linha contínua geométrica.

Na análise standard, portanto em $\mathfrak{R}$ temos que seja um corpo K ordenado $(K, +, \cdot, 0, 1, <)$, são equivalentes as seguintes condições:

- i) K é arquimediano e *Cauchy-completo*¹²⁶;
- ii) K satisfaz à Propriedade do Supremo¹²⁷;
- iii) K é Dedekind-completo¹²⁸.

Temos ainda que $\mathfrak{R}$, o corpo ordenado dos números reais, é o único corpo ordenado que satisfaz às condições equivalentes acima, a menos de isomorfismos.

Em particular, os elementos de ${}^*\mathfrak{R}$ será gerado por meio de infinitas sequências de reais, e será necessário considerar todas essas sequências. (Lembre-se de que os elementos de $\mathbb{R}$ podem ser gerados por meio de sequências infinitas bastante especiais de racionais, ou seja, as sequências de Cauchy.) (PONSTEIN, 2002, p. 22, tradução nossa).

Após a introdução dos novos números, o mesmo com as funções, em geral não se faz necessário tratar com sequência infinitas, mas sim de forma análoga a introdução dos reais, onde geralmente basta tratar como número, e não mais como uma sequência de Cauchy, assim como se faz com os irracionais, por exemplo, $\sqrt{2}$ é visto como um número real e não uma sequência.

Um crítico da análise não-standard pode alegar que ${}^*\mathfrak{R}$ é não contínuo já que é não Dedekind completo, pois se retirarmos os infinitesimais na vizinhança de um número real de um subconjunto de $\mathfrak{R}$, este deixaria de ser Arquimediano, visto que ${}^*\mathfrak{R}$ é não arquimediano, como temos por (Wontner, 2019, p. 19) “*Proposition 18. ${}^*\mathfrak{R}$ is not Archimedean*” condição já provada para essa forma de completude. Isso é um fato como podemos ver no exemplo a seguir:

Seja um subconjunto de ${}^*\mathfrak{R}$, $[-1,1) \setminus \{t \in {}^*\mathfrak{R} : t \approx 1\}$, portanto esse conjunto não possui um supremo(a menor das cotas superiores ou o menor dos limites superiores), assim é um conjunto descontínuo nos hiper-reais, para algum infinitesimal $x < 1$.

A análise não-standard é não arquimediana, pois se tivermos um * infinitesimal positivo em ${}^*\mathfrak{R}$, isto é, $0 < {}^*x < 1$, então para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que ${}^*n < 1$. O que contraria a propriedade Arquimediana.

¹²⁶ Um corpo é Cauchy-completo se caracteriza uma uma sucessão de Cauchy ou sequência de Cauchy que é uma sucessão tal que a distância entre os termos vai se aproximando de zero. Deve o seu nome ao matemático francês Augustin Louis Cauchy. Intuitivamente é uma sequência onde seus termos vão ficando cada vez mais próximos.

¹²⁷ Seja $(A, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado. A é dito completo se para todo conjunto $B \subseteq A$, $B \neq \emptyset$, se B tem majorante, então tem supremo.

¹²⁸ Conjunto que satisfaz os cortes de Dedekind.

Observação: Podemos dizer que ${}^*\mathfrak{R}$, não tem uma ordem arquimediana, como vimos no parágrafo anterior e ainda que $\forall x \in {}^*\mathfrak{R} : \exists n \in N : n > x$, é falso, pois N não possui número hiper-grandes, mas ${}^*\mathfrak{R}$ tem uma ordem hiper-arquimediana, pois:

Se tomarmos qualquer $x \approx \infty$. Temos que a transferência¹²⁹ standard para não-standard, daria, $\forall x \in {}^*\mathfrak{R} : \exists n \in {}^*N : n > x$, o que é verdade.

O ponto aqui é que Robinson não vê a questão da continuidade como um se, e somente se, da propriedade Arquimediana, e do entendimento de Cantor-Dedekind, visto que a propriedade arquimediana não nos leva aos infinitesimais reais, e por Robinson esse infinitesimais não só são concebidos, como são concebidos fora do conjunto dos números reais, e conseqüentemente na construção de ${}^*\mathfrak{R}$, é garantida a continuidade pela inclusão destes no seu subconjunto $\mathfrak{R}$.

Por Robinson, temos que a definição de continuidade de uma função em um ponto $c \in \mathfrak{R}$ é dada por:

Uma função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ é contínua em $c \in \mathbb{R}$ se a afirmação, a seguir, for válida,

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 : \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, |x - c| < \delta : |f(x) - f(c)| < \varepsilon.$$

Agora a f corresponde uma única função *F , chamada de * -transformada de f , que é uma função de ${}^*\mathbb{R}$ em ${}^*\mathbb{R}$, tal que ${}^*f(x) = f(x)$ se $x \in \mathbb{R}$, e é verdadeira se, e somente se, a definição de continuidade para números reais, que é a * -transformada da definição acima, é verdadeira se,

$$\forall \varepsilon \in {}^*\mathbb{R}, \varepsilon > 0 : \exists \delta \in {}^*\mathbb{R}, \delta > 0 : \forall x \in {}^*\mathbb{R}, |x - c| < \delta : |{}^*f(x) - {}^*f(c)| < \varepsilon.$$

Quando c é um número padrão e a função f é também padrão, podemos reescrever, de forma mais simplificada, essa definição por:

$$\forall \delta \in {}^*\mathbb{R}, \delta \approx 0 : [{}^*f(c + \delta) - {}^*f(c)] \approx 0.$$

Essencialmente, a definição de continuidade baseia-se em:

$$\delta \approx 0 \Rightarrow [{}^*f(c + \delta) - {}^*f(c)] \approx 0.$$

Em outras palavras, a definição de continuidade vem do fato de que se $x - c = \delta$ é infinitamente próximo de zero, então $f(x) - f(c)$ também é infinitamente próximo de zero, e daí temos o problema da análise padrão, não podemos definir um sentido para

¹²⁹ Teorema ou Princípio da Transferência. A construção deste * -transferência faz com que uma sentença ϕ seja verdadeira se e somente se ${}^*\phi$ for verdadeira. Esta ideia é chamada de princípio de transferência, e este é o principal resultado da análise não padronizada. Ela não apenas nos permite mostrar que ${}^*\mathbb{R}$ tem todas as propriedades de $\mathbb{R}$, mas nos permite provar teoremas sobre $\mathbb{R}$ provando-os primeiro em ${}^*\mathbb{R}$ (que geralmente é mais simples e mais intuitivamente claro) e depois transferi-los de volta para $\mathbb{R}$. (DAVIS, 2009, p. 13, tradução nossa).

“infinitamente próximo de”, mas na análise não-standard, basta substituímos “infinitamente próximo de” por ≈ 0 .

Um exemplo prático de continuidade de funções:

Seja a função real $f : R \rightarrow R$ definida por $f(x) = x^2$ que é contínua em todo R . A sua extensão (transferência) para os hiper-reais nos daria a função hiper-real $f : {}^*R \rightarrow {}^*R$ definida por ${}^*f(x) = x^2$.

Tomemos agora um número finito hiper-real $t \in T$ e seja um infinitesimal qualquer $\varepsilon \in \Omega$, temos que, $f(t + \varepsilon) = (t + \varepsilon)^2 = t^2 + 2t\varepsilon + \varepsilon^2$.

Da construção e definição dos infinitesimais, sabemos que:

Infinitesimal x infinitesimal = infinitesimal

Finito x infinitesimal = infinitesimal

Infinitesimal + infinitesimal = infinitesimal

Assim, ${}^*f(t + \varepsilon) = t^2 + 2t\varepsilon + \varepsilon^2 \approx t^2 = {}^*f(t)$

Então pela definição f é contínua em t finito.

Mas será que f é contínua em um infinito?

Seja agora então ω infinito e o infinitésimo $\frac{1}{\omega}$, assim:

${}^*f(\omega + \frac{1}{\omega}) = \omega^2 + 2 + \frac{1}{\omega^2} \approx \omega^2 + 2 \neq {}^*f(\omega)$ logo f não é contínua em ω , aliás em nenhum número infinito (hiper-grande). Observe que na análise standard, agora não existem número infinitos nos números reais, portanto o princípio da transferência continua válido, para continuidade, e deixamos o leitor ciente, embora não nos aprofundemos aqui nesse trabalho, que o mesmo acontece para outras partes do cálculo como no caso dos limites, da diferenciação e integração.

Um exemplo que ilustra bem a facilidade matemática que a nova análise propicia, é a demonstração do chamado teorema do valor intermediário,

Se $f : R \rightarrow R$ é contínua no intervalo fechado $[a, b]$, $a < b$, a e b ambos finitos, e $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, então $f(c) = 0$ para algum $c \in [a, b]$.

De forma bem menos complexa do que se faz na análise padrão, apresentamos uma demonstração não padronizada deste teorema da seguinte forma. Seja $m \in {}^*N$ hiper-grande. Divida $[a, b]$ em m subintervalos iguais, cada um de comprimento $\delta = \frac{b-a}{m}$.

Então $\delta \approx 0$. Seja n o menor elemento de *N tal que ${}^*f(a+(n-1)\delta) \leq 0$, então ${}^*f(a+n\delta) > 0$. Seja $c = st(a+n\delta)$, então, da continuidade,

$${}^*f(a+n\delta) - {}^*f(c) = \varepsilon_1 \text{ e } {}^*f(c) - {}^*f(a+(n-1)\delta) = \varepsilon_2,$$

para certos infinitesimais ε_1 e ε_2 . Portanto $-\varepsilon_1 < f(c) = {}^*f(c) \leq \varepsilon_2$. Mas $f(c) \in R$, então $f(c) = 0$.

Importante observar que embora $m \in {}^*N$, ou seja, é um hiper-natural (hiper-grande não-standard), portanto, não é finito, e n também, poderíamos pensar não ser possível fazer as subdivisões, contudo, como vimos anteriormente, o tratamento dado a esses números é análogo aos números padrões, por isso é possível desenvolver tais divisões, e algebrizar os intervalos normalmente, o que finaliza a prova do Teorema do Valor Intermediário.

Observe que conseguimos desenvolver uma demonstração bastante intuitiva, e puramente algébrica, enquanto a demonstração clássica deste teorema se utiliza de conceitos mais específicos da análise real, como o fato de que um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ é limitado superiormente, e possui uma menor das cotas superiores, conhecido como o supremo, através da Propriedade do Supremo.

O ponto vital na discussão sobre o rigor e a formalização da Análise Não-Standard de Robinson se dá ainda na questão sobre o infinitesimal e o infinito, então vamos retomar esse tema em uma construção mais rigorosa entre $\mathfrak{R}$ e ${}^*\mathfrak{R}$, ainda que ainda sem a preocupação de fazer demonstrações técnicas que já existem em outros trabalhos e não é o objetivo deste.

Os domínios dos números inteiros, números racionais e números reais, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, respectivamente, quando dotados das ordens usuais, caracterizam domínios ordenados, mas $\mathbb{Z}$ não é um corpo ordenado nem denso em $\mathbb{R}$, enquanto $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ são corpos ordenados e densos em $\mathbb{R}$.

Aqui assumimos que $(K, +, \bullet, 0, 1, <)$ é um corpo ordenado, que usamos K por simplificação de notação, em especial $(\mathfrak{R}, +, \bullet, 0, 1, <)$ é um corpo ordenado, e usamos $\mathfrak{R}$.

A operação de divisão é uma operação que nos interessa muito nessa questão, já que o cerne do problema se dá pela divisão “por zeros”, então vamos definir a operação

$$\div(x, y) := \frac{x}{y}, \text{ a divisão em } K(\text{ logo em } \mathfrak{R}), \text{ por } \div := K \times (K - \{0\}) \rightarrow K.$$

Os fundamentos de morfismo, imersão e isomorfismo entre corpos ordenados são definidos ainda como os seus equivalentes particularizados do estudo da Teoria dos Modelos antes citada, então tem-se que se $f: R \rightarrow L$ for um morfismo entre corpos ordenados, então $f(1)$ tem o elemento neutro multiplicativo de L como imagem, portanto,

$f(q) = q(\forall q \in Q)$. E ainda que a ordem em um corpo ordenado é densa, assim como consideramos em R .

Para chegarmos à questão dos infinitésimos e infinitos, vamos defini-los inicialmente em uma relação entre dois elementos de um domínio D ordenado, $(D, +, \cdot, 0, 1, <)$, a saber:

Definição: Sejam x e y dois elementos de D .

- i) x é infinitesimal em relação a y (ou y é infinito em relação a x) se $n|x| < |y| (\forall n \in N)$;
- ii) x é infinitesimal se x é infinitesimal em relação a 1 , isto é, se $n|x| < 1 (\forall n \in N)$. Se S é um subconjunto de D , então o conjunto de todos os elementos infinitesimais de S é denotado por $\text{Inf}(S)$;
- iii) x é finito se x não é infinito em relação a 1 , isto é, se $|x| \leq n (\exists n \in N)$. Se S é um subconjunto de D , então o conjunto de todos os elementos finitos de S é denotado por $\text{Fin}(S)$;
- iv) x é infinito se x não é finito, isto é, $n < |x| (\forall n \in N)$. Se S é um subconjunto de D , então o conjunto de todos os elementos infinitos de S é denotado por S_∞ .
- v) x é apreciável se x é finito e não é infinitesimal, isto é, se $|x| \leq n (\exists n \in N)$ e $1 \leq n|x| (\exists n \in N)$.

Três conjuntos de números não sobrepostos (antigos ou novos) agora podem ser apresentados:

- a) o conjunto de todos os infinitesimais, ao qual o zero pertence,
- b) o conjunto de todos os números apreciáveis, ao qual pertencem todos os reais diferentes de zero, e
- c) o conjunto de todos os números hiper-grandes, não contendo nenhum número clássico.

Obs.: Se um número não é hiper-grande, ele é chamado de finito ou limitado.

Juntos, esses três conjuntos constituem o conjunto de todos os números de “reais da análise não padronizada” ou “hiper-reais”. Este conjunto, que claramente é uma extensão de $\mathbb{R}$ é indicado por, ${}^*\mathbb{R}$. (PONSTEIN 2002, p. 20, tradução nossa).

O elemento neutro aditivo, 0 , é infinitesimal em relação a qualquer elemento não zero de D , portanto de R . Todo infinitesimal é finito, e todo número racional em D é apreciável, portanto, em R . Uma unidade x será infinitesimal se, e somente se, x^{-1} for infinito. (MACHADO, 2018, p. 11-12).

Teorema: Sejam $x, y \in D$. A Tabela a seguir sumariza a situação da soma $x + y$, do produto xy e do quociente $\frac{x}{y}$ (caso y for uma unidade) para diversas combinações de atributos de x e y descritos na Definição acima.

Figura 10: Operações aritméticas entre elementos infinitesimais, finitos, infinitos e apreciáveis.

x	y	$x + y$	xy	x/y
Infinitesimal	Infinitesimal	Infinitesimal	Infinitesimal	Indeterminado
Infinitesimal	Finito	Finito	Infinitesimal	Indeterminado
Infinitesimal	Infinito	Infinito	Indeterminado	Infinitesimal
Infinitesimal	Apreciável	Apreciável	Infinitesimal	Infinitesimal
Finito	Infinitesimal	Finito	Infinitesimal	Indeterminado
Finito	Finito	Finito	Finito	Indeterminado
Finito	Infinito	Infinito	Indeterminado	Infinitesimal
Finito	Apreciável	Apreciável	Finito	Finito
Infinito	Infinitesimal	Infinito	Indeterminado	Infinito
Infinito	Finito	Infinito	Indeterminado	Infinito
Infinito	Infinito	Infinito	Infinito	Indeterminado
Infinito	Apreciável	Infinito	Infinito	Infinito
Apreciável	Infinitesimal	Apreciável	Infinitesimal	Infinito
Apreciável	Finito	Apreciável	Finito	Indeterminado
Apreciável	Infinito	Infinito	Infinito	Infinitesimal
Apreciável	Apreciável	Apreciável	Apreciável	Apreciável

MACHADO, 2018, p. 11-12

A entrada “indeterminado” na Tabela acima representa que o resultado da operação indicada não será necessariamente infinitesimal, finito, infinito ou apreciável. (MACHADO, 2018, p. 11-12). Vejamos alguns exemplos dessa observação, sobre quocientes “indeterminados”.

a) Seja $\varepsilon \in {}^*R$, infinitesimal, então:

$$\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon} = \varepsilon, \text{ logo infinitesimal.}$$

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon} = 1, \text{ logo finito, mas não infinitesimal.}$$

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon}, \text{ logo infinito, no sentido de hiper-grande.}$$

Quociente de infinitesimais portanto é indeterminado em forma geral.

b) Seja $\varepsilon, \delta \in {}^*R$ infinitesimal e $a, b \in {}^*R$ finito, mas não infinitesimal.

$$\frac{2a - \varepsilon}{b + 5\delta}$$

ε é infinitesimal, $2a$ é finito não infinitesimal então $2a - \varepsilon$ é finito não infinitesimal.

δ é infinitesimal, 5δ é infinitesimal b é finito não infinitesimal então $b + 5\delta$ é finito não infinitesimal.

Portanto o quociente $\frac{2a-\varepsilon}{b+5\delta}$ é finito não infinitesimal.

c) Seja $S \in {}^*R$ infinito.

$$\frac{S^2}{S} = S \text{ infinito.}$$

$$\frac{S}{S} = 1 \text{ finito não infinitesimal.}$$

$$\frac{S}{S^2} = \frac{1}{S} \text{ infinitesimal.}$$

Quociente de infinitos portanto é indeterminado em forma geral.

d) Seja $S, K \in {}^*R$ infinito.

$$S + K = S + (-S) = 0 \text{ infinitesimal.}$$

$$S + K = S + (-S + 1) = 1 \text{ finito não infinitesimal.}$$

$$S + K = S + S = 2S \text{ infinito.}$$

e) Seja $\varepsilon \in {}^*R$, infinitesimal, então:

$$\frac{\varepsilon^3 + 2\varepsilon^2}{\varepsilon} = \varepsilon^2 + 2\varepsilon \text{ já que podemos tomar } \varepsilon \neq 0, \text{ como } \varepsilon^2, 2\varepsilon \text{ são infinitesimais, o quociente é infinitesimal.}$$

f) Seja $\varepsilon \in {}^*R$, infinitesimal diferente de zero, então: $\frac{\varepsilon^3 + 2\varepsilon^2 - 3\varepsilon}{\varepsilon^2 + \varepsilon}$

$$\frac{\varepsilon^3 + 2\varepsilon^2 - 3\varepsilon}{\varepsilon^2 + \varepsilon} = \frac{\varepsilon^2 + 2\varepsilon - 3}{\varepsilon + 1} \text{ como } \varepsilon^2 + 2\varepsilon - 3 \text{ é finito não infinitesimal e } \varepsilon + 1 \text{ também, então o quociente é finito não infinitesimal.}$$

g) Seja $\varepsilon \in {}^*R$, infinitesimal diferente de zero, então: $\frac{\varepsilon^5 + 2\varepsilon^4 - 3\varepsilon^2}{\varepsilon^5 + \varepsilon^3}$

Dividindo por ε^2 , temos $\frac{\varepsilon^3 + 2\varepsilon^2 - 3}{\varepsilon^3 + \varepsilon}$, ficamos com $\varepsilon^3 + 2\varepsilon^2 - 3$ finito não infinitesimal e $\varepsilon^3 + \varepsilon$ infinitesimal, então o quociente é infinito.

h) Seja $S \in {}^*R$ infinito. $\frac{3S^3 + S^2 - 3}{S^3 + S}$

Dividindo por S^3 , temos, $\frac{3 + \frac{1}{S} - \frac{3}{S}}{1 + \frac{1}{S^2}}$ como $\frac{1}{S}, \frac{1}{S^2}$ são infinitesimais, então temos um

quociente de finitos $\frac{3S^3 + S^2 - 3}{S^3 + S} = 3$, portanto um finito não infinitesimal.

Definição: D é um domínio arquimediano se não existem $x, y \in D$ não zero tais que x é infinitesimal em relação a y . Caso contrário, dizemos que D é um domínio não arquimediano. Essa condição é chamada de Propriedade Arquimediana, e como consequência desta temos que, $Inf(D) = \{0\}$ ¹³⁰, $Fin(D) = D$ ¹³¹ e $D_\infty = \emptyset$ ¹³², logo, $Inf(R) = \{0\}$, $Fin(R) = R$ e $R_\infty = \emptyset$.

Assim, Z ¹³³ é domínio arquimediano e Q ¹³⁴ é corpo arquimediano e já que Q é denso em R ¹³⁵, R é um corpo arquimediano.

Podemos dizer então que a solução esperada por quase 300 anos se deu por uma questão lógica e epistemológica, onde a inclusão de números antes “estranhos” agora são tratados com simplicidade, tornando o entendimento e as demonstrações bem mais simples, já que podemos finalmente trabalhar com tais números de forma clássica, mas agora sem os considerar números com magnitude, ou presos ao estigma de representantes da realidade, agora representantes da hiper-realidade, e a base de tudo se dá pelo teorema a seguir, e que podemos ilustrar de forma ingênua para o melhor entendimento da lógica pensada por Robinson:

Teorema Existem números infinitamente grandes e infinitesimais diferentes de zero!

Por exemplo:

$$H(1, 2, 3, \dots) \approx \infty, \quad H(-1, -2, -3, \dots) \approx -\infty,$$

$$H(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots) \approx 0, \quad H(-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots) \approx 0.$$

Temos uma discussão inicial, que consiste no fato de que $x = H(x_i) = H(+1, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots) \approx 0$, mas é positivo ou negativo? Isso depende: se $\{i : x_i > 0\} \in U$ então $x > 0$ e caso contrário $x < 0$. Muitas dicotomias desse tipo existem em análises não padronizadas, mas não geram problemas ou inconsistências, pois logo são geradas sequências e o operador H não precisa ser mais usado.

Temos ainda que como 0 é infinitesimal, e toda soma de infinitesimais é infinitesimal, a relação binária em D , $x \approx y$, caracteriza uma relação de proximidade infinita, e x e y são infinitamente próximos se $x - y$ é infinitesimal, então para cada $x \in D$, temos $\bar{x}$ uma classe de equivalência de x em relação a $\approx$, que Robinson chama de mônada de x , e observe que

¹³⁰ $Inf(D) = \{0\}$ conjuntos dos números infinitesimais pertencentes ao conjunto D .

¹³¹ $Fin(D) = D$ conjunto dos números finitos não infinitesimal pertencentes ao conjunto D .

¹³² $D_\infty = \emptyset$ conjunto dos números infinitos pertencentes ao conjunto D

¹³³ Conjunto dos números inteiros.

¹³⁴ Conjunto dos números racionais.

¹³⁵ Conjunto dos números reais.

como em $\mathbb{R}$, o único infinitesimal presente é o zero(0), segundo a Teoria dos Modelos(Não-standard) deste, temos que se $x \approx y$, então $x - y = 0$, e portanto $x = y$.

O parágrafo acima resolve o problema apontado nesse trabalho, algumas vezes, que seria o caso de um número real fazendo o papel de menor número positivo não nulo que existe, já que os infinitesimais são externos ao conjunto dos reais,

No conjunto dos hiper-reais é possível identificar a categoria de um certo número em determinados casos bastante úteis, a saber:

Teorema

- (i) Todo número hiper-real que está entre dois infinitesimais é infinitesimal.
- (ii) Todo número hiper-real que está entre dois números hiper-reais finitos é finito.
- (iii) Todo número hiperreal que é maior que algum infinito positivo número é positivo infinito
- (iv) Todo membro hiper-real que é menor que algum número infinito negativo é negativo infinito

Todas as provas são fáceis. Provamos (iii), que é especialmente útil. Suponha que H seja infinito positivo e $H < K$. Então, para qualquer número real r , $r < H < K$.

Portanto $r < K$, logo K é positivo infinito.(KEISLER, 2012, p. 33, tradução nossa).

Em ${}^*\mathbb{R}$ o conjunto de todos os infinitesimais, exceto o zero, é exterior a $\mathbb{R}$, isto é, todos os infinitesimais pertencem ao conjunto dos hiper-reais não-reais, ${}^*\mathbb{R} - \mathbb{R}$, então se esse conjunto de infinitesimais é limitado inferiormente em ${}^*\mathbb{R}$, supondo infinitesimal positivo, com limite inferior δ , então ainda que tomemos o número infinitesimal positivo 2δ , temos que 2δ não é maior que δ , pois na análise não-standard, dois infinitesimais infinitamente próximos, fazem parte da mesma classe de equivalência, como visto antes, portanto $2\delta \approx \delta$, e assim continuamos com um único infinitesimal, e não recaímos na questão do número positivo menor que o seu dobro.

Isto caracteriza o Teorema a seguir:

Teorema: Seja S um subconjunto interno de ${}^*\mathbb{Q}$ ou ${}^*\mathbb{R}$, tal que $\forall \varepsilon, \varepsilon \approx 0, \varepsilon > 0 : \exists s \in S : s \geq \varepsilon$, então $\exists s \in S : s$ não é um infinitesimal.

A solução acima funciona de forma análoga se supomos um infinitesimal negativo, e ainda, mostramos com isso, sem perda de generalidade, que os números hiper-grandes positivos(ou negativos), e hiper-pequenos, também são externos¹³⁶.

¹³⁶ De forma intuitiva, vamos em análise não-standard entender objetos internos àqueles que se comportam de forma similar ao que um objeto ou $\mathbb{R}$ -objeto se comportaria, enquanto objetos externos, os que se comportam de maneira diferente à sua categoria quando $\mathbb{R}$ -objetos, infringindo alguma lei da análise clássica, como alguns subconjuntos de ${}^*\mathbb{R}$, que têm cota superior mas não têm supremo.

Sendo assim em R , dois números são infinitamente próximos apenas se são iguais, então x nunca é um ponto de acumulação em R , ou seja, a ideia de um intervalo, em torno de x , bem pequeno e desprezível, porém de tamanho não-nulo, não é concebido em R nessa nova análise real, ainda que a ordem $\bar{z} \prec \bar{w}$ seja densa em $R/\approx$, já que:

Supondo z e w elemento de R tais que $\bar{z} \prec \bar{w}$, com $z \neq w$, então existe n natural, de modo que, $\frac{1}{2n} < \frac{1}{n} < w - z$, e que $z < z + \frac{1}{2n} < w$.

Como $z \neq z + \frac{1}{2n}$, e se $z + \frac{1}{2n} \approx w$, então $\frac{1}{2n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} < w - z - \frac{1}{2n} \approx 0$, o que é um absurdo, então, $\overline{z} < z + \frac{1}{2n} < \bar{w}$.

Já foi dito que um dos motivos de acreditarmos que é válido estudar e até introduzir a análise não-standard na análise matemática, até mesmo nas disciplinas universitárias se dá pela questão pedagógica, que como já mencionado além de bem mais agradável e intuitiva, simplifica definições e demonstrações do Cálculo Diferencial e Integral, então veremos alguns exemplos dessa simplificação clara do grau de complexidade visto na análise standard.

6.3.2 ALGUNS TEOREMAS E DEFINIÇÕES SOBRE FUNÇÕES E DEFINIÇÕES DE FUNÇÕES E SEQUÊNCIAS COMO FORMA NÃO-STANDARD

Como já dito antes, a análise não-standard propicia simplificar, ou pela intuição ou mesmo pela matemática, diversos teoremas e definições do cálculo e análise padrão(standard), e nessa seção iremos usar alguns importantes resultados do cálculo e da análise real, alguns com demonstrações, onde poderemos observar que o grau de complexidade em muitos casos se mostra bem menor do que chamamos de matemática clássica dessas disciplinas.

A) Teorema: O teorema do menor limite superior/Teorema do Supremo

Seja S um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ que é limitado superiormente por algum número real (clássico). Então S tem um limite superior mínimo em $\mathbb{R}$.

Este teorema nos dá uma nova interpretação, mais intuitiva, sobre o Teorema do Supremo, por meio de uma linguagem formal da análise não-standard, já que, cada elemento limitado de ${}^*\mathbb{R}$ (não ${}^*\mathbb{Q}$) tem uma parte standard, e qualquer sequência de Cauchy converge para algum elemento de $\mathbb{R}$ (não $\mathbb{Q}$), portanto uma construção baseada nos números reais clássicos e em conceitos clássicos da análise real padrão.

B) Teorema: Definição simplificada da continuidade de funções reais de valor real.

$f : R \rightarrow R$ é contínua em $c \in R$ se e somente se,

$$\forall \delta \in {}^*R, \delta \cong 0, : {}^*f(c + \delta) - {}^*f(c) \cong 0.$$

C) Teorema: Definição simplificada de continuidade uniforme.

$f : S \rightarrow R, S \subseteq R$ é uniformemente contínuo em S se e somente se,

$$\forall x, y \in {}^*S, x - y \cong 0, : {}^*f(x) - {}^*f(y) \cong 0.$$

D) Teorema: Se f é contínua em cada $x \in [a, b], a, b \in R, a < b$, então f é uniformemente contínua em $[a, b]$.

Este teorema, na análise não-standard, possui uma demonstração bem mais simples, a saber:

Seja x, y em ${}^*[a, b]$, então pelo teorema $st(x) \in [a, b]$ e $st(y) \in [a, b]$. Seja $x - y \cong 0$. Como $y - st(y) \cong 0$, segue que $x - st(y) \cong 0$. Por continuidade,

$${}^*f(y) - {}^*f(st(y)) \cong 0 \text{ e } {}^*f(x) - {}^*f(st(y)) \cong 0, \text{ então, } {}^*f(x) - {}^*f(y) \cong 0.$$

E) Teorema (Definição de limite simplificada.)

Seja $f : R \rightarrow R$, então $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = k$, com $c, k \in R$ se, e somente se,

$$\forall \delta \in {}^*R, \delta \approx 0 : {}^*f(c + \delta) - k \cong 0, \text{ de modo que } k = st[{}^*f(c + \delta)].$$

Esta demonstração, mais uma vez, se mostra bem simples, a saber:

Por definição, o limite existe se e somente se,

$$\forall \varepsilon \in R, \varepsilon > 0 : \exists \delta \in R, \delta > 0 : \forall x \in R, 0 < |x - c| < \delta : |f(x) - k| < \varepsilon.$$

ou, por transferência,

$$\forall \varepsilon \in {}^*R, \varepsilon > 0 : \exists \delta \in {}^*R, \delta > 0 : \forall x \in {}^*R, 0 < |x - c| < \delta : |{}^*f(x) - k| < \varepsilon.$$

que pode ser simplificado para,

$$\forall \delta \in {}^*R, \delta \approx 0 : {}^*f(c + \delta) - k \cong 0.$$

F) Teorema: Definição de limite simplificada para limite no infinito.

Seja $f : N \rightarrow R$ e $k \in R$, então $\lim_{x \rightarrow \infty} f(n) = k, k \in R$, se e somente se,

$$\forall n \in {}^*N, n \approx \infty : {}^*f(n) - k \cong 0, \text{ de modo que } k = st[{}^*f(n)].$$

Demonstração: Por definição, o limite existe se e somente se,

$$\forall \varepsilon \in R, \varepsilon > 0 : \exists n' \in N : \forall n \in N, n > n' : |f(n) - k| < \varepsilon.$$

ou, por transferência,

$$\forall \varepsilon \in {}^*R, \varepsilon > 0 : \exists n' \in {}^*N : \forall n \in {}^*N, n > n' : |{}^*f(n) - k| < \varepsilon.$$

que pode ser simplificado para,

$$\forall n \in {}^*N, n \approx \infty : {}^*f(n) - k \cong 0.$$

G) Teorema: Se f é uma sequência infinita não decrescente, que é limitada superiormente, então $f(n)$ tem um limite finito para n tendendo a ∞ ,

H) Teorema: O teorema do valor máximo e mínimo.

Seja $f : [a, b] \rightarrow R, a, b \in R, a < b$, e seja f contínua em cada ponto de $[a, b]$.

Então $f(x) \leq f(c)$ para algum $c \in [a, b]$ e todo $x \in [a, b]$, ou seja, f tem um máximo em algum ponto no intervalo fechado entre a e b . E da mesma forma para o mínimo.

Demonstração simplificada(não-standard): Seja $\forall \omega \in N, \omega \approx \infty$, arbitrário, e divida ${}^*[a, b]$

em ω subintervalos de iguais comprimentos $\delta = \frac{b-a}{\omega}$. Seja $n \in {}^*N$ tal que

${}^*f(a + n\delta) \geq {}^*f(a + ni)$ para todo $i = 0, 1, \dots, \omega$. A existência de n segue por transferência, pois qualquer conjunto finito tem um máximo, portanto, qualquer conjunto hiper-finito também tem. Obviamente, $a + n\delta$ é limitado, portanto $c = st(a + n\delta)$ é bem

definido e por continuidade, ${}^*f(a + n\delta) - f(c) = \varepsilon$ para algum $\varepsilon \cong 0$. Cada $x \in [a, b]$ está dentro da distância δ de algum $a + i\delta$ e $\delta \approx 0$, portanto, novamente por continuidade,

$$f(x) = {}^*f(a + i\delta) + \varepsilon' \quad \text{para} \quad \text{algum} \quad \varepsilon' \cong 0, \quad \text{portanto,}$$

$$f(x) \leq {}^*f(a + i\delta) + \varepsilon' = f(c) + \varepsilon + \varepsilon', \text{ isto é, } f(x) \leq f(c).$$

I) Teorema: O teorema da função composta.

Seja $g(\omega)$ definido para ω em uma vizinhança de $c \in R$, e seja $f(x)$ definido para x em uma vizinhança de $g(c)$. Então $f \circ g$ é contínua em c se g é contínua em c e f é contínua em $g(c)$.

Demonstração simplificada(não-standard): Seja $\delta \cong 0$, então ${}^*g(c + \delta) - g(c) \cong 0$, daí segue que ${}^*f({}^*g(c + \delta)) - f(g(c)) \cong 0$.

J) Teorema: Caracterização não padronizada da sequência de Cauchy.

$s(n)$ é uma sequência clássica de Cauchy se e somente se,

$$\forall n, p \in {}^*N, n, p \approx \infty : {}^*s(n) - {}^*s(p) \cong 0.$$

Demonstração: Por definição (Δ),

$$\forall m \in N, \exists k \in N : \forall n, p \in N, n, p > k : |s(n) - s(p)| < \frac{1}{m},$$

e por transferência, fixando $m \in N$ e $k \in N$, $\forall n, p \in N, n, p \approx \infty : s(n) - s(p) < \frac{1}{m}$

é equivalente a, $\forall n, p \in {}^*N, n, p \approx \infty : {}^*s(n) - {}^*s(p) < \frac{1}{m}$.

Agora seja $n, p \approx \infty$, de modo que automaticamente $n, p > k$, não importa o valor de $k \in {}^*N$, então pelo Teorema do Supremo, implica que,

$$\forall m \in N, \exists k \in N : n, p \in {}^*N, n, p \approx 0 : |{}^*s(n) - {}^*s(p)| < \frac{1}{m}.$$

Mas como k não desempenha mais nenhum papel, isso pode ser simplificado para,

$$\forall m \in N, \forall n, p \in {}^*N, n, p \approx 0 : |{}^*s(n) - {}^*s(p)| < \frac{1}{m},$$

daí para,

$$\forall n, p \in {}^*N, n, p \approx 0 : \forall m \in N : |{}^*s(n) - {}^*s(p)| < \frac{1}{m},$$

daí para,

$$\forall n, p \in {}^*N, n, p \approx 0 : {}^*s(n) - {}^*s(p) \cong 0,$$

que é o Teorema do Supremo.

Por outro lado, considere a negação da definição inicial (Δ), ou seja,

$$\exists m \in N, \forall k \in N : \exists n, p \in N, n, p > k : |s(n) - s(p)| \geq \frac{1}{m},$$

fixando $m \in N$ e aplique a transferência para,

$$\forall k \in N : \exists n, p \in N, n, p > k : |s(n) - s(p)| \geq \frac{1}{m}$$

de onde,

$$\forall k \in {}^*N : \exists n, p \in {}^*N, n, p > k : |{}^*s(n) - s(p)| \geq \frac{1}{m}$$

o que implica, fixando $k \approx \infty$ arbitrariamente, que $n, p \approx \infty$, portanto,

$$\exists n, p \in {}^*N, n, p \approx \infty : |{}^*s(n) - s(p)| \geq \frac{1}{m}$$

de modo que pelo Supremo implica que,

$$\exists m \in N : \exists n, p \in {}^*N, n, p \approx \infty : |{}^*s(n) - {}^*s(p)| \geq \frac{1}{m}$$

ou,

$$\exists n, p \in {}^*N, n, p \approx \infty : \exists m \in N : |{}^*s(n) - {}^*s(p)| \geq \frac{1}{m}$$

ou,

$$\exists n, p \in {}^*N, n, p \approx \infty : \neg[{}^*s(n) - {}^*s(p)] \cong 0,$$

que é a negação de $\forall n, p \in {}^*N, n, p \approx \infty : {}^*s(n) - {}^*s(p) \cong 0$, logo um absurdo.

K) Teorema: Caracterização não padronizada de conjunto limitado.

Seja L o conjunto de todos os elementos limitados de *R . Então $S \subseteq R$ é limitado se, e somente se ${}^*S \subseteq L$.

Prova: S é limitado se,

$$\exists m \in N : \forall s \in S : |s| \leq m,$$

portanto, por transferência, se,

$$\exists m \in N : \forall s \in {}^*S : |s| \leq m,$$

de modo que ${}^*S \subseteq L$.

Por outro lado, se S não é limitado então,

$$\forall m \in N : \exists s \in S : |s| > m,$$

portanto, por transferência,

$$\forall m \in {}^*N : \exists s \in {}^*S : |s| > m,$$

e tomando m hiper-grande segue que $|s|$ é hiper-grande para algum $s \in {}^*S$, então que é $s \notin L$.

L) Teorema: Caracterização não padronizada de conjunto aberto.

Seja $S \subseteq R$ e seja $h(S) = \{t \in {}^*R : t \cong s \text{ para algum } s \in S\}$. Então S é aberto se e somente se, $h(S) \subseteq {}^*S$.

Observação: $h(S)$ é chamado de halo, vizinhança (ou mônada) de S .

M) Teorema: Caracterização não padronizada de conjunto fechado.

O conjunto $S \subseteq R$ é fechado se e somente se,

$$h(S^c) \subseteq ({}^*S^c) = ({}^*S)^c.$$

N) Teorema: Caracterização não padronizada do ponto interior.

Seja $s \in R$ e seja $h(s) = \{t \in R : t \cong s\}$. Então s é um ponto interior de $S \subseteq R$ se, e somente se $h(s) \subseteq {}^*S$.

Observação: Aqui $h(s)$ é chamado de halo de pontos ou vizinhança do ponto s . Observe que $h(0)$ é o conjunto de todos os infinitesimais.

O) Teorema: Caracterização não padronizada do ponto limite.

$s \in R$ é um ponto limite de $h(S) \subseteq S$ se, e somente se $h(S) \cap {}^*S$ e $h(S) \cap ({}^*S)^c$ são não vazios.

P) Teorema: Caracterizações não padronizadas de ponto de acumulação e fechamento.

$s \in R$ é um ponto de acumulação (ou ponto limite) de $S \subseteq R$ se e somente se,

$$\exists t \in {}^*S, t \neq s : t \approx s.$$

Seja $\bar{S}$ o fecho de S . Então $s \in \bar{S}$ se e somente se,

$$\exists t \in {}^*S : t \cong s.$$

Até aqui o que vemos é que várias teorias sobre sequências e limites estão funcionando como esperado, sem anomalias seja por resultados, ou por propriedades e teoremas, o que mostra que aparentemente, o funcionamento da análise não-standard é similar ao da standard, e em muitos casos até mais simples nas definições e demonstrações, veremos agora um exemplo prático do cálculo de um limite, de função real, com a nova técnica:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(2 + \Delta x)^2 - 4}{\Delta x}$$

Seja $\Delta x \approx 0$, $\Delta x \neq 0$, então:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(2 + \Delta x)^2 - 4}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4 + 4\Delta x + (\Delta x)^2 - 4}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 4 + \Delta x$$

Tirando a parte standard, temos:

$$st\left[\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(2 + \Delta x)^2 - 4}{\Delta x}\right] = st[4 + \Delta x] = 4 \text{ então } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(2 + \Delta x)^2 - 4}{\Delta x} = 4, \text{ portanto quando } \Delta x$$

infinitesimal, se aproxima de zero, a imagem da função $f(\Delta x) = \frac{(2 + \Delta x)^2 - 4}{\Delta x}$ se aproxima de 4.

6.3.3 A DIFERENCIAÇÃO COMO FORMA NÃO-STANDARD

Ponto alto do nosso estudo, a diferencial ou derivada, poderá agora ser definida de forma rigorosa, e com uma lógica consistente, feito que os matemáticos aguardaram por cerca de 300 anos desde Newton e Leibniz, sem contar os vários séculos antes, quando o conceito mencionado já teria sido utilizado, em uma forma bem informal, por cientistas antigos.

A questão que nos trouxe aqui, o problema das tangentes, agora pode ser resolvida de maneira totalmente formal, seja no âmbito filosófico, lógico, matemática, epistemológico e técnico, onde o problema da “divisão por zero”, foi resolvida, já que os muito próximos de zero agora têm uma classe que os comporta.

Agora sim podemos encarar queixo erguido, os infinitesimais tão evitados por tanto tempo, e livres do problema ainda presente em Cauchy e Weierstrass, estes são infinitésimos não reais, os hiper-reais, que nos permitem trabalhar com a facilidade esperada por estes matemáticos, mas sem o problema de um número que hora é o menor de todos, mas hora não, quando parecia ser satisfatório, então vamos apresentar finalmente a verdadeira diferenciação de funções, e os “quocientes enigmáticos”, dentre outros.

Diferenciação: Definição

Seja $f : {}^*R \rightarrow {}^*R, c \in {}^*R$, então f é derivável em c se para algum $k \in {}^*R$, se o limite

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \text{ existe e é igual a } k.$$

Então esse limite, que obviamente é um * limite, é chamado de derivada de f em c , e geralmente k é substituído por $f'(c)$ ou por $\frac{df(c)}{dx}$.

Caso tudo seja padrão, esta definição torna-se a definição clássica de diferenciabilidade, de modo que $f'(c) = st\left[\frac{{}^*f(c + \delta) - f(c)}{\delta}\right], \forall \delta \approx 0$.

Isso significa que $f'(c)$ é infinitesimalmente próximo de um quociente, justificando até certo ponto chamar $f'(c)$ de quociente diferencial, mesmo que $f'(c)$ seja um limite de um quociente.(PONSTEIN, 2002)

O problema da reta tangente a curva que representa a função real $f : R \rightarrow R$ definida por $f(x) = x^2$, portanto, agora pode ser resolvido no cálculo não-standard derivando a função em um ponto x_0 da seguinte forma:

$$f'(x_0) = st\left[\frac{{}^*f(x_0 + \delta) - f(x_0)}{\delta}\right] = \frac{x_0^2 + 2x_0\delta + \delta^2 - x_0^2}{\delta} = \frac{2x_0\delta + \delta^2}{\delta} = 2x_0 + \delta \text{ e como } \delta \text{ é}$$

infinitesimal, e $\delta \in {}^*R$, podemos tomar $\delta \neq 0$, logo:

$$f'(x_0) = st[2x_0 + \delta] = st[2x_0] + st[\delta] = 2x_0 + 0 = 2x_0.$$

E temos assim, sem as inconsistências apresentadas antes, o valor da derivada da função, que representa o coeficiente angular da reta tangente à curva, e a taxa de variação instantânea da curva em x_0 .

Obs.: Assim como a derivada dessa função aconteceu conforme o esperado na análise padrão, todas as outras regras, teoremas ou fórmulas também, ocorrem, o que mostra um dos grandes pontos positivos dessa nova análise, a questão pedagógica, que além de mais intuitiva e lógica, permite a permanência dos conceitos apreendidos pelo estudante nos estudos do cálculo e da análise clássica.

Os teoremas e propriedades da diferenciação no Cálculo Diferencial, são agora comprovados pela definição não-standard da diferencial, e mantêm os seus resultados, o que demonstra novamente a simplicidade conceitual antes mencionada em defesa da aplicação dessa nova teoria até menos nos cursos Universitários, onde estuda-se o cálculo diferencial básico, e ainda na disciplina de Análise Real.

Como o objetivo deste estudo não é em ser um livro de matemática da Análise Não-standard, não iremos nos aprofundar nas demonstrações de cada teorema, fizemos demonstrações em alguns casos para servir de ilustração sobre a simplicidade dessa teoria, mas deixamos para o leitor pesquisar sobre tais fundamentos.

Na próxima seção iremos mostrar a análise não-padrão na Integração, terceiro e último pilar dessa disciplina conhecida como Cálculo Diferencial e Integral, onde morava outro problema antigo da matemática.

6.3.4 A INTEGRAÇÃO COMO FORMA NÃO-STANDARD

Os antigos matemáticos lutaram contra dois problemas clássicos que possuíam diversas aplicações no cotidiano, também por isso foram muito estudados, e por muitos e muitos séculos sem uma solução final, apenas com aproximações, ainda que muito boas na solução de certos problemas que se apresentavam em seus tempos.

Por muito tempo não se imaginava que tais problemas estariam ligados, o problema das Retas Tangentes a curvas e o Problema da Quadratura do Círculo. Mas com o passar do tempo e dos esforços muitos notaram uma conexão, já que embora problemas aparentemente diferentes, se colocavam no mesmo dilema matemático, a tão discutida “matemática com divisões por zero”.

O segundo problema consistia em calcular a área de uma figura plana curva, inicialmente o círculo, mas como fazer isso se a ideia de área em sua fundamentação, diz para recobrimos a superfície da figura com quadrados de lado 1. Quadrados por menores que sejam, deixariam espaços vazios entre estes e a curva, portanto no máximo teríamos, como foi muito usado antes, uma aproximação da área.

Uma ideia ótima foi, que tal, já que já sabemos calcular área de polígonos, vamos colocar um polígono com muitos lados inscrito em um círculo, e vamos calcular a área do círculo, assim estaremos calculando a área do círculo. EUREKA!

EUREKA? Mas um polígono, por mais lados que tenha não é um círculo. Mas se o construirmos com infinitos lados, aí o polígono será o círculo, agora sim EUREKA.

Mas sabemos trabalhar com números infinitos? Se tivermos infinitos lados no polígono, cada lado será muito pequeno, será infinitesimal. Sabemos trabalhar com número infinitesimais?

A área de um polígono regular, sem perda de generalidade, é dada por:

$$A_n = n \cdot \left(\frac{l_n \cdot a_n}{2} \right) \text{ onde:}$$

n = número de lados do polígono regular inscrito no círculo.

l_n = medido do lado do polígono regular de n lados.

$$a_n = \sqrt{R^2 - \frac{(l_n)^2}{4}} = \text{apótema do polígono regular.}$$

R = Raio do círculo circunscrito ao polígono. (MORGADO, 2002, p, 228)

De forma ingênua e intuitiva, se $n \rightarrow \infty$, isto é, se o polígono um número muito grande de lados, tendendo ao infinito, teríamos $l_n \rightarrow 0$, a medida do lado seria muito pequena, tendendo ao zero, portanto a área do polígono seria dada por uma indeterminação $A_\infty = \infty \cdot 0$.

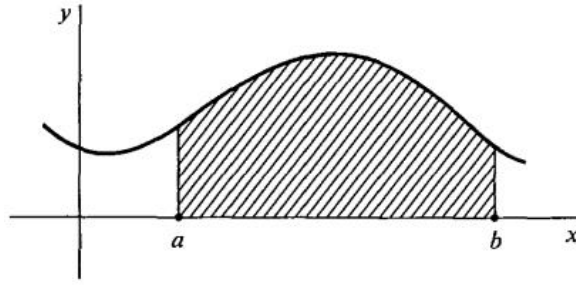
Estamos de frente com um problema muito semelhante a questão das retas tangentes, porque também tínhamos uma indeterminação, e que também tinha a ver com o zero, a saber, $m = \tan \theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow \frac{0}{0}$, o que prova que o problema que pensávamos serem dois, na verdade sempre foi apenas um, a matemática dos zeros.

Newton e Leibniz, já sabiam que a derivada e a integral eram operações matemática inversas, e que a integral representava uma soma, mas a questão sempre foi, uma soma de infinitésimos, sendo assim a análise de Robinson foi capaz de solucionar, também, esse problema, como veremos agora.

Integração

Iremos tratar aqui apenas a integração de Riemann de funções contínuas, embora a extensão para funções mais gerais não seja muito difícil, mas servirá como uma ótima ilustração para o problema discutido anteriormente.

Figura 11: Integração por meio da análise não-standard



(KEISLER, 2012, p. 176)

Seja $a, b \in {}^*R, a < b$ e seja $f : [a, b] \rightarrow {}^*R$ uma função contínua. Então, por definição, a integral de Riemann de f sobre $[a, b]$ é,

$$J = \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) \left(\frac{b-a}{n}\right).$$

Caso tudo seja padrão, então, dado qualquer $\omega \in {}^*N, \omega \approx \infty$,

$$J = st \left[\sum_{i=1}^{\omega} f\left(a + i \frac{b-a}{\omega}\right) \left(\frac{b-a}{\omega}\right) \right]$$

Note que neste caso $dx = \frac{b-a}{\omega} \approx 0$ e $dx > 0$. E a formulação usual é,

$$J = st \left[\sum_{i=1}^{\omega} f(a + i \cdot dx) dx \right]$$

Ao invés do ponto $a + i \cdot dx$ qualquer outro ponto $x_i \in [a + (i-1)dx, a + i \cdot dx]$ pode ser selecionado, $i = 1, 2, \dots, \omega$ e J torna-se $st(S)$, onde,

$$S = \sum_{i=1}^{\omega} f(x_i) dx,$$

a chamada soma de Riemann.

Segue daí, que muitos teoremas podem ser provados através da análise não-standard, enquanto outros continuam em sua forma original da análise standard, portanto mostrando ser uma teoria bem-vinda ao cálculo de integrais, já que ou facilita, ou torna mais intuitiva, ou não dificulta seus cálculos, e assim mostraremos alguns desses teoremas importantes, que seguem da análise não standard em sua forma inalterada.

Teorema: S é finito segue do teorema do valor extremo:

Existe $m, M \in R$ tal que, $\forall x \in [a, b]: m \leq f(x) \leq M$, de modo que $m(b-a) \leq S \leq M(b-a)$ e S é de fato finito.

Teorema: Se $a < b < c$, então, $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$.

A demonstração segue do fato de que a parte padrão de uma soma é igual à soma das peças padrão.

Teorema: Definindo por $F(x) = \int_a^x f(t)dt, a \leq x \leq b, a < b$ contínua. E ainda, a derivada de $F(x)$ existe e é igual a $f(x), a < x < b$.

Por outro lado, se F é tal que $G'(x) = f(x)$, então,

$$F(b) = \int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

Demonstração: A continuidade de F decorre do fato de que, se $\delta \cong 0$,

$$\int_a^{x+\delta} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\delta} f(t)dt,$$

não importa se δ é não negativo ou negativo, caso em que o lado direito também é um infinitesimal.

A segunda parte do teorema decorre do fato de que m e M existem como antes e tal que,

$$m.dx \leq F(x+dx) - F(x) = \int_x^{x+dx} f(t)dt \leq M.dx$$

Se $dx \approx 0, dx > 0, m$ e M podem ser tomados infinitesimalmente pequenos, de modo que para alguns $\delta \cong 0$,

$$F(x+dx) - F(x) = f(x)dx + \delta.dx,$$

que dá o resultado desejado.

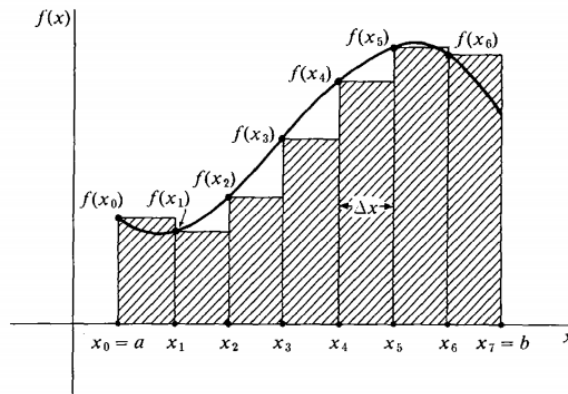
Para mostrar a última parte do teorema, observe que para alguma constante c ,

$$F(x) = G(x) + c, a \leq x \leq b. \text{ e que } F(a) = 0.$$

Mais uma vez pudemos ver que propriedade e teoremas funcionam como o esperado na análise não-standard de forma análoga ao que acontece na análise standard, mas vamos discutir um pouco mais o ponto principal da integração, quanto às suas aplicações, a tal soma de infinitas parcelas infinitesimais, de onde conseguimos calcular por exemplo a área sob uma curva em um intervalo $[a, b]$, ou área entre curvas. A técnica utilizada baseia-se na Integral de Riemann, e dividir a figura em retângulos de bases bem pequenas, como vimos no início de seção, cujos passos mais “perigosos” são vistos a seguir:

Ao tomar Δx pequeno, podemos obter a soma de Riemann o mais próximo da área como desejamos. Nosso próximo passo é tomar Δx como infinitamente pequeno e ter uma soma infinita de Riemann. Como podemos fazer isso?

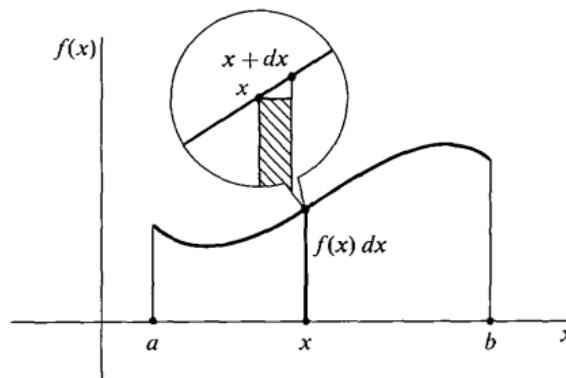
Figura 12: Soma de Riemann



(KEISLER, 2012, p. 177)

Observamos que se os números reais a e b forem mantidos fixos, então a soma de Riemann $\sum_a^b f(x)\Delta x = S(\Delta x)$ é uma soma que é uma função real da variável única Δx . O símbolo x que aparece na expressão é uma variável fictícia, já que a altura de cada retângulo é dada por $f(x_i)$ para algum $0 \leq i \leq n$ e o valor da soma é dado por $\sum_a^b f(x)\Delta x$, portanto, depende apenas de Δx e não de x .

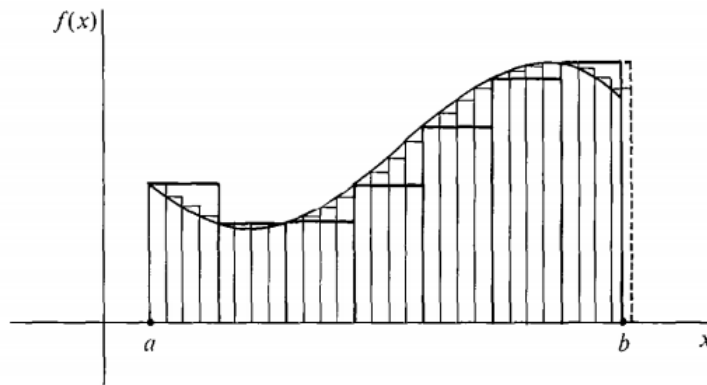
Além disso, o termo $\sum_a^b f(x)\Delta x = S(\Delta x)$ é definido para todo real $\Delta x > 0$. Portanto, pelo Princípio de Transferência, temos $\sum_a^b f(x)dx = S(dx)$ está definido para todo hiper-real $dx > 0$. Quando $dx > 0$ é infinitesimal, existem infinitos subintervalos de comprimento dx , e chamamos $\sum_a^b f(x)dx$ uma soma infinita de Riemann.

Figura 13: Representação de dx no gráfico

(KEISLER, 2012, p. 181)

De forma intuitiva, a soma de Riemann, $\sum_a^b f(x)dx$ representa uma soma infinita na forma $f(x_0)dx + f(x_1)dx + f(x_2)dx + \dots + f(x_{\omega-1})dx + f(x_\omega)(b - x_\omega)$ onde ω é o maior hiper-inteiro tal que $a + \omega \cdot dx \leq b$. O intervalo $[a, b]$ foi dividido por $\omega + 2$ pontos e ω é infinito positivo, sendo assim temos as partições $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_\omega < b$.

Figura 14: Partições de um intervalo $[a, b]$.



(KEISLER, 2012, p. 178)

Então cada retângulo somado (figura 15), representa uma área infinitamente pequena, $f(x_\mu)dx$, já que a área de um retângulo é dada pelo produto da medida da base pela medida da altura. Claramente temos que μ é um hiper-inteiro, onde $0 \leq \mu < \omega$, e $x_\omega = a + \mu \cdot dx$, então $a, b \in R$ mas, $\omega, \mu \in {}^*N \subset {}^*R$, portanto, a soma infinita de Riemann é um número hiper-real não-negativo, e a área portanto é representada pela parte standard desse número, mas resta saber se ele é finito.

Dessa forma, podemos reestruturar o cálculo de áreas no Cálculo Diferencial e Integral, por meio de um teorema a seguir:

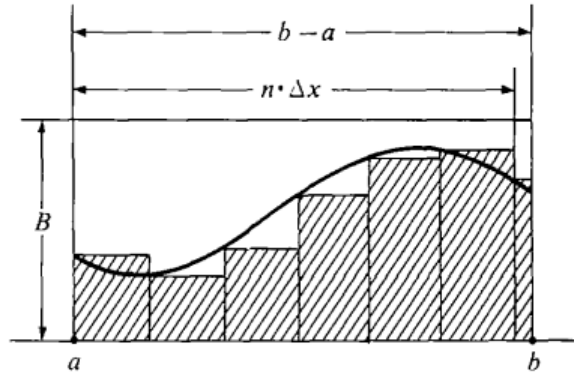
Teorema: Seja f uma função contínua em um intervalo I , sejam $a, b \in I$, com $a < b$, e seja dx um infinitesimal positivo. Então a soma infinita de Riemann $\sum_a^b f(x)dx$ é um número hiper-real finito.

Demonstração:

Seja B um número real maior que o valor máximo da função f no intervalo $[a, b]$.

Considere primeiro um número real $\Delta x > 0$, como descrito na Figura:

Figura 15: Soma de Riemann por análise não-standard



(KEISLER, 2012, p. 148)

A soma finita de Riemann é menor que a área do retângulo de área $B.(b-a)$,

$$\sum_a^b f(x)\Delta x < B.(b-a)$$

Portanto, pelo Princípio da Transferência, já que dx é um infinitesimal, temos:

$$\sum_a^b f(x)dx < B.(b-a)$$

De forma similar, seja C um número real menor que o valor mínimo da função f no intervalo $[a, b]$, sendo assim:

$$\sum_a^b f(x)dx > C.(b-a)$$

Portanto, a soma de Riemann é um hiper-real finito não negativo.

Só nos falta então definir, na forma não-standard, o conceito de Integral Definida.

Na seção anterior concluímos que a diferencial (derivada), é a parte standard do quociente

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ cuja notação usada foi $\frac{dy}{dx}$. De forma análoga, definiremos a Integral Definida como a

parte standard da soma de Riemann.

$$\sum_a^b f(x)dx,$$

e usaremos a notação $\int_a^b f(x)dx$, notação semelhante a que Leibniz usava em seus escritos, onde o símbolo $\int$ representa um S alongado, já que estamos fazendo uma soma, contudo agora, com a análise não-standard podemos, sem ressalvas, dizer que estamos somando infinitas parcelas, já que finalmente podemos trabalhar com números hiper-grandes.

Finalmente podemos fazer uma definição que une o método clássico e o novo, já que o leitor certamente percebeu que o que fazemos na análise não-standard se baseia no Princípio da Transferência, onde há uma bijeção entre os chamados R-objetos e ${}^*\mathbb{R}$ -objetos, e essa bijeção se dá em na ida trabalhar com os infinitésimos não-nulos(hiper-pequenos) e os infinitos(hiper-grandes), que em geral se comportam como esperado de um número real, e na volta tomamos a parte standard do número hiper-real obtido, e mais uma vez isso se aplica, como vemos agora.

Definição:

Seja f uma função contínua em um intervalo I , sejam $a, b \in I$, com $a < b$.

Seja dx um infinitesimal positivo, então a integral definida de a até b em relação a dx é definida como a parte padrão(standard) da soma infinita de Riemann com em relação a dx , e a notação utilizada:

$$\int_a^b f(x)dx = st\left(\sum_a^b f(x)dx\right)$$

Definimos ainda que

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

Todas as propriedades e teoremas de Integrais Indefinidas e Definidas são confirmados na Análise Não-standard, mesmo no cálculo de várias variáveis, mas como um dos principais teoremas dessa disciplina, iremos enunciar um dos principais teoremas se não o principal.

Teorema: Teorema Fundamental do Cálculo

Suponha que f seja contínua em seu domínio, um intervalo aberto I .

Parte (i) Para cada ponto a em I , a integral definida de a até x é dada pela função de x que representa uma antiderivada de f . Logo,

$$d\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x)dx$$

Parte (ii) Se F é qualquer antiderivada de f , então para quaisquer dois pontos (a, b) (a, b) em I a integral definida de f de a até b é igual à diferença $F(b) - F(a)$, isto é,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

(KEISLER, 2012, p. 145).

Nos encaminhando para o final deste estudo, nos lembramos, mais uma vez, dos dois problemas que assolaram, os matemáticos por milênios, o problema da reta tangente

(velocidade instantânea) e o problema da quadratura do círculo (área de figuras planas não poligonais), e este teorema é de vital importância nessa questão já que os relaciona em um só problema, afinal o primeiro rege sobre a Derivada e o segundo sobre a Integral, nos mostrando que estas configuram processos inversos, além portanto de servirem como técnicas alternativas uma à outra.

Agora, tanto no que se refere à teoria, quanto à prática, sabemos que o Cálculo além de funcionar satisfatoriamente, como já acontece desde a sua formulação por Newton e Leibniz, sabemos que não é mais um incômodo aos Lógicos e Filósofos, já que têm finalmente as suas bases teóricas bem formuladas rigorosamente, e ainda com uma satisfação aos que se apegam à intuição, já que os hiper-reais trazem essa formalidade e processos bastante intuitivos, assim agradando a Matemáticos chamados Puros e Aplicados.

Uma das grandes virtudes da lógica de Robinson aplicada a esse novo conjunto se dá pela simplicidade que muitas demonstrações e procedimentos matemáticos mostraram. Os números hiper-reais podem ser manipulados algebricamente assim como os números reais, e assim o novo Cálculo e a nova Análise, preservam as suas propriedades e ainda se tornam mais intuitivos e de menor complexidade, do que qualquer teoria sem definições formuladas como na época da sua “criação” ou mesmo com os épsilons-delta vistos depois.

7 O CÁLCULO NOS LIVROS DIDÁTICOS NOS ENSINOS MÉDIO E SUPERIOR

A questão intuitiva e pedagógica que a análise não-standard traz, configura, certamente, o maior potencial dessa nova teoria. Discutimos nesse trabalho a teoria do Cálculo no âmbito filosófico e matemático, fazendo para isso um estudo histórico dos tempos mais remotos até a atualidade de tais conceitos, e inevitavelmente isso perpassa a questão pedagógica, já que tal teoria é apresentada em forma de disciplinas em diversos cursos de Graduação e até mesmo em alguns cursos de Ensino Médio. E com tantas controvérsias, como é apresentado esse conteúdo a esses discentes?

Acreditamos que a análise não-standard pode resolver o problema da pouca compreensão sobre muitos temas do cálculo e da análise real, que provavelmente em função da não formalidade conceitual, faz com que os discentes tenham um entrave intuitivo, e que gera um problema cognitivo sobre tais temas da matemática pura e aplicada.

Um livro bastante utilizado hoje nos bancos universitários denominado Cálculo 1, cujo autor James Stewart traz inicialmente, no capítulo sobre Limites, uma apresentação de duas aplicações, que foram aliás, pontos de partida para Newton e Leibniz na criação do Cálculo, que são o problema da reta tangente a curvas e da velocidade instantânea¹³⁷, e em seguida traz a seguinte definição para os Limites.

Definição: Suponha que seja definido quando está próximo ao número a . (Isso significa que f é definido em algum intervalo aberto que contenha a , exceto possivelmente no próprio a .) Então escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

e dizemos “o limite de $f(x)$, quando x tende a a , é igual a L ”

se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L (tão próximos de L quanto quisermos), tornando x suficientemente próximo de a (por ambos os lados de a), mas não igual a a . (STEWART, 2013, p. 81)

O autor procura dar uma explicação de tal definição, em uma estratégia pedagógica, onde tenta levar o leitor a uma melhor compreensão, utilizando uma linguagem mais coloquial, porém alertando que em uma seção mais adiante trará uma definição “mais precisa”.

Grosso modo, isso significa que os valores de $f(x)$ tendem a L quando x tende a a . Em outras palavras, os valores de $f(x)$ tendem a ficar cada vez mais próximos do número L à medida que x tende ao número a (por qualquer lado de a), mas. (Uma definição mais precisa será dada na Seção 2.4.) (STEWART, 2013, p. 81)

Nota-se aqui que o autor percebe uma dificuldade em explicar o significado do limite, bem como a falta de rigor que se coloca na tentativa de tornar inteligível tal significado, na seção 2.4 A Definição Precisa de um Limite, escreve: “A definição intuitiva de limite dada na

¹³⁷ A velocidade instantânea identifica a velocidade de um corpo em um momento específico, enquanto a velocidade média é o resultado da razão entre o espaço percorrido e o tempo gasto.

Seção 2.2 é inadequada para alguns propósitos, pois frases como “x está próximo de 2” e “aproxima-se cada vez mais de L” são vagas.”

E finalmente nos apresenta a definição:

Definição: Seja f uma função definida em algum intervalo aberto que contenha o número a , exceto possivelmente no próprio a . Então dizemos que o **limite de quando x tende a a é L** , e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

se para todo número $\varepsilon > 0$ houver um número $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

O Cálculo Infinitesimal faz parte da Matemática do Contínuo em oposição à Matemática Discreta, mas acreditamos que a Análise Padrão não consegue explicar a continuidade de uma função, já que embora muito pequenos, os números reais não respondem ao questionamento intuitivo sobre que a reta real é densa e completa, ou seja, que não possui “buracos”, o que a análise não-standard de Robinson parece conseguir responder, como podemos ver na opinião de instrutores e discentes, que tiveram acesso ao estudo do Cálculo por meio da teoria trazida por essa teoria emergente.

Verificamos as ementas de Cálculo Diferencial e Integral I e Análise Real (Análise na Reta), em todas as Universidades Públicas da região sudeste do Brasil e em nenhuma delas a ementa ou bibliografias trazem a Análise Não-standard, ou qualquer menção aos número hiper-reais foram encontradas. Todos os livros indicados baseiam-se na Análise Padrão, e os únicos livros de Cálculo que utiliza a análise não-standard, *Foundations of Infinitesimal Calculus* publicado em 1976 e *Elementary Calculus An Infinitesimal Approach* (2012), ambos do mesmo autor, H. Jerome Keisler, e HENLE, J. and Kleinberg, E. (2014) *Infinitesimal Calculus*, não são citados, sequer como bibliografia complementar.

O quadro 1 a seguir traz os autores dos livros que aparecem em bibliografias básicas ou complementares das disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral I e Análise Real (Análise da Reta), dos cursos de Licenciatura ou Bacharelado em Matemática, nas universidades públicas da região Sudeste do Brasil. Analisamos também diversas outras universidades públicas e privadas no Brasil e outros países, verificando que os autores que se utilizam da Análise Não-standard também não são indicados. Verificamos ainda as ementas destes cursos, e nenhum dos conhecimentos trazidos por Robinson são citados, o que prova que ainda não se tem abertura para tal metodologia nos bancos universitários do país.

Quadro 1: Autores de Bibliografias de Cálculo e Análise

Cálculo Diferencial e Integral I	Análise Real
LEITHOLD, Louis.	LIMA, E. L.
STEWART, James.	FIGUEIREDO, D. G.
GUIDORIZZI, H. L.	ÁVILA, G.
SANTOS, A.R.; BIANCHINI, W.	Bartle, R. G.
THOMAS, G. B	Rudin, W.

Courant, R;	J.Doob,
Courant, R. and John,F	Halmos, P.R.
SIMMONS, Georgef.	DANTZIG, T
HOFFMANN, L e BRADLEY, G.L.	WHITE, A. J.
VILCHES, M. A. e CORRÊA, M. L.	P. M. Fitzpatrick
ANTON, H.	J. R. Munkres.
EDWARDS, C. H., PENNEY, D.E.	M. Spivak.
BOULOS, P.	BRAND, L.
SWOKOWSKI, E.W.	LANG, S.
TAYLOR, A.; MANN, W.R.	MACIEL, A. B.; LIMA, O. A.
PISKOUNOV, N.	NETO, A. C. M.
FLEMMING, D. M.	CASTRO. M. H.
LARSON, R.; EDWARDS, B.;	GOLDBERG, R.
APOSTOL, T.M.	FERREIRA, F. N.; DINIZ, A. C.; CUNHA,R.
LEWIS, K.	CUPERTINO, P. L.
PENNEY,E. D., EDWARDS, JR.C.H.	CRAVEIRO, I, M; KATO, L, A; DALTO, J, O..
FERREIRA, P. C. P.	GONÇALVES, M. B.; GONÇALVES, D.
ROGAWSKI, J.	APOSTOL, T. M.
OLIVEIRA, K. I. M., FERNANDEZ, A. J. C.	DOERING, Claus Ivo.
MUNEM, M. & FOULIS, D.J.	
LOPES, E. M. C.	
IEZZI, G., DOLCE, O., MURAKAMI, C.,	
MARTINS, João Luiz.	
POMBO Jr., D. P.; GUSMÃO, P. H. C.	
Da SILVA, M. O.; CARDIM, N. S.	
MORETTIN, P. A.; BUSSAB, W. O. & HAZZAN, S	

Fonte: Autores da Tese

No domínio do site Wikiversidade, onde se encontram conhecimentos de cunho livre e colaborativo encontra-se o livro *Elementary Calculus An Infinitesimal Approach* (2012) de Keisler, entre diversos outros livros, todos de Cálculo fundamentado na análise standard, e no mesmo domínio, os conceitos oferecidos para estudos estão totalmente alinhados com a análise não-standard, portanto, exceto por alguns artigos e produções destinadas ao estudo da análise não-standard, não encontramos a divulgação de tal conhecimento, fazendo assim com que os discentes universitários não tenham acesso a tais estudos.

Na página do professor Marco Aurélio Cabral, do Departamento de Matemática Aplicada, Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, único no Brasil a citar um dos livros de Keisler, até onde conseguimos apurar, contudo, o professor Marco Cabral indica outros livros de Cálculo e Análise, incluindo um livro de Cálculo e um de Análise de sua própria autoria, que estão baseados somente na Análise Não-standard, sem qualquer ponderamento sobre a Análise de Robinson.

Assim podemos concluir que já existe algum conhecimento sobre estes estudos, contudo ainda temos a academia presa ao modelo padrão, mesmo com a fundamentação

demonstrada em alguns trabalhos anteriores, tanto no que se refere ao rigor matemático e às vantagens pedagógicas da análise não-standard sobre a análise standard.

Em 1976 na revista *The American Mathematical Monthly*, Kathleen Sullivan publicou o artigo "*The Teaching of Elementary Calculus Using the Nonstandard Analysis Approach*" com tradução O Ensino de Cálculo Elementar Usando a Abordagem de Análise Não Padrão, onde Sullivan descreve uma pesquisa de campo que investiga se realmente a Análise não-standard tem o valor pedagógico esperado, já que aparentemente possui maior simplicidade conceitual e proximidade intuitiva em relação aos números muito pequenos.

Por tratar-se de uma abordagem diferente e contrária a conceitos estabelecidos pela Academia, tendo ela dada por fechada a questão dos infinitésimos por Cauchy e Weierstrass, diversas perguntas sobre a confiabilidade em possíveis resultados do experimento de campo são postas, Sullivan se faz alguns questionamentos, que espera considerá-los na formação da metodologia do experimento que são

Será que os alunos "comprarão" a ideia do infinitamente pequeno? Será que o instrutor precisa tem experiência em análise não padronizada? Os alunos adquirirão as habilidades básicas de cálculo? Vão eles realmente entender os conceitos fundamentais de forma diferente? Quão difícil será para eles fazer a transição para cursos de análise padrão se quiserem estudar mais matemática? É a abordagem fora do padrão adequada apenas para estudantes de matemática superdotados? (SULLIVAN, 1976, p.371).(tradução nossa).

Cinco Instrutores que lecionavam o Cálculo tradicional nos anos de 1972-1973 em escolas na região de Chicago (EUA), voluntariaram-se para lecionar essa disciplina no ano letivo 1973-1974, por meio da análise não-standard, utilizando o livro *Elementary Calculus: An Approach Using Infinitesimals* (Cálculo Elementar: Uma Abordagem Usando Infinitesimais), primeiro, e único livro segundo apuramos, que se baseia na análise não-standard de Robinson, para embasar os conceitos do Cálculo Infinitesimal para os iniciantes nessa disciplina.

Os cinco instrutores eram igualmente experientes no ensino do cálculo, e assim um parâmetro confiável de comparação poderia estabelecer-se, já que não haveria grandes diferenças em relação à habilidade dos instrutores no Cálculo tradicional, ou mesmo em relação à confiabilidade dos mesmos em relação ao Cálculo e sua forma tradicional, já que os mesmos certamente confiavam em tais modelos, visto que lecionavam sobre os mesmo algumas vezes antes do experimento.

Outra questão metodológica utilizada se deu em relação às classes sociais dos discentes, bem como das Escolas a que pertenciam, e no experimento participaram quatro pequenas faculdades particulares de classes menos favorecidas, enquanto a quinta participante uma escola pública com mais de 2.000 alunos, em um subúrbio de classe média alta.

Sobre a questão posta, “Os estudantes precisam ser superdotados?”, um grupo de controle foi formado para meio de comparação com os alunos participantes do experimento não-standard, tais grupos são semelhantes, na Saint Xavier College os alunos pretendiam formar-se em Matemática, na Lake Forest College, os alunos participavam de um programa de honras, enquanto na Nicolet High School, Barat College oferece apenas um curso de cálculo, e o mesmo vale para o Mount Mary College.

Dois grupos de alunos foram formados, o primeiro grupo de controle, que estudaram sob os conceitos tradicionais enquanto o grupo experimental sob os conceitos da análise não-standard de Robinson, por meio do livro de Keisler. Ambos os grupos são muito próximos em relação ao aproveitamento dos alunos em suas notas em matemática, que previamente mostram que no primeiro grupo 58 dos 68 alunos, enquanto no segundo grupo, 55 dos 68 alunos, possuíam notas altas em Matemática, mostrando habilidades satisfatórias nessa disciplina, como mostra a figura 6 a seguir:

Figura 16: Notas de habilidades dos participantes da pesquisa de campo de Sullivan

TABLE 1: SAT Math Ability Scores

	Control Group	Experimental Group
700 +	13	13
600–699	29	29
500–599	14	11
400–499	2	2

(SULLIVAN, 1976, p. 372).

Um teste de cálculo é aplicado a ambos os grupos, bem como entrevistas foram feitas com os cinco instrutores, os que ministraram o cálculo tradicional e não tradicional e ainda um questionário foi respondido por diversas pessoas que utilizaram o livro de Keisler.

O teste não foi fornecido aos instrutores até que tenha sido aplicado aos alunos, e nesse foi pedido que os alunos definissem conceitos, calculassem alguns limites de funções, produzir demonstrações e aplicar conceitos básicos, tendo maiores diferenças entre os grupos a questão 3:

Define $f(x)$ by the rule $f(x) = x^2$ for $x \neq 2$,
 $f(x) = 0$ for $x = 2$.

Prove, using the definition of limit, that $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$.

(SULLIVAN, 1976, p.372).

Se $f(x)$ é definida pela regra $f(x) = x^2$ para $x \neq 2$,

$f(x) = 0$ para $x = 2$.

Prove, usando a definição o limite, dado por $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$. (tradução nossa).

As diferenças mais importantes se deram no fato de que 22 dos alunos do grupo de controle não tentaram resolver a questão, enquanto apenas 4 do grupo experimental não tentaram, e podemos interpretar como um padrão de melhor sensação de entendimento do conceito de limite que a análise não-standard permite. Outro ponto importante se deu no fato de que 29 alunos do grupo de controle fizeram argumentos incorretos, enquanto 23 do grupo experimental erraram os argumentos standards. E finalmente, apenas 2 alunos do grupo de controle fizeram uma prova satisfatória, corrigida de acordo com os livros de Cálculo tradicionais, enquanto que 25 alunos do grupo experimental foram capazes de fornecer uma prova satisfatória, corrigida de acordo com o livro de Keisler e a base não-standard.

Os resultados da questão 3 mostram claramente o melhor desempenho na compreensão de um dos conceitos principais do Cálculo que é o conceito sobre os limites de funções, que é a base do entendimento da Continuidade, Derivadas e Integrais, que formam essa disciplina.

Na análise do teste, chegou-se aos números discrepantes quanto aos alunos que tentaram resolver limites, apenas 49 do grupo de controle, contra todos os 68 do grupo experimental, e quanto à tentativa de produzir demonstrações, 18 do grupo de controle e 45 do grupo experimental, assegurando a tese de que a análise não-standard se mostra mais intuitiva, passando a ideia de um entendimento mais satisfatório sobre os tais número muito pequenos.

A pergunta número 6 buscava verificar o entendimento dos alunos sobre o conceito de Integral, onde apenas 9 alunos do grupo de controle contra 16 do grupo experimental responderam, corretamente, que a Integral esta associada com uma soma, mas ainda mais relevante o fato de que apenas 3 dos 9 alunos do grupo de controle, contra 10 dos 16 do grupo experimental foram capazes de corretamente, ver a Integral nessa questão, como soma de pequenos volumes e não pequenas áreas.

O símbolo dx presente na integral descrita por $\int f(x) dx$, de acordo com um dos instrutores, era bem misterioso para os alunos do grupo de controle, enquanto que entendimento satisfatório por parte do grupo experimental, e podemos interpretar essa afirmação, mais uma vez, pela facilidade que a análise não-standard traz sobre os número infinitesimais, já que dx caracteriza as diferenças entre os valores de x muito próximos, ou seja, números muito pequenos, nos quais dividimos em infinitos intervalos, o domínio de uma área ou volume em estudo.

Mensurar apenas as respostas dos alunos não deve ser a única base de resultados, já que são inexperientes, e muitas vezes outros fatores podem interferir na atuação dos mesmos, então ouvir os instrutores, e suas impressões serve de grande valor para esta

análise, e a idealizadora do experimento fez questão de ouvir os 12 instrutores que lecionaram sob os conceitos trazidos pelo livro de Keisler.

Um número considerável de respostas conta que os instrutores concordam que há vantagens intuitivas e simplicidade maior na compreensão dos conceitos básicos do cálculo, bem como quase que na totalidade, os instrutores acreditam que se tornou mais fácil explicar as demonstrações no cálculo, e bem mais intuitivas. O que mostra que o âmbito pedagógico não é motivo para a não aplicação da análise não-standard, mesmo nos anos iniciais do estudo do Cálculo Infinitesimal. Um dos instrutores alegou que os alunos achavam bastante obscura a definição de limites por ϵ -delta, e que se tornou bem mais inteligível com o novo conceito dos números hiper-reais.

Três dos cinco instrutores que trabalharam com o grupo de controle, ao final do experimento, alegaram sentir que os alunos da aula experimental “tiveram uma sensação muito melhor para limites”, o que permitiu a esses alunos avançar mais no entendimento dos conceitos básicos e assim facilitou o entendimento conceitual de Continuidade, Derivadas e Integrais.

Dentre as perguntas feitas aos instrutores, vemos resultados muito satisfatórios em todos os questionamentos, e destacamos a pergunta:

2. “Os alunos pareciam achar “infinitamente pequeno” um conceito natural.”, que apenas um dos doze instrutores discordou dessa naturalidade.

5. “Acho que um aluno que teve dois semestres de cálculo fora do padrão estará em desvantagem em um curso de cálculo padrão do 3º semestre.”, onde mais uma vez apenas um instrutor acredita que um estudo nos períodos iniciais do cálculo pode atrapalhar de alguma forma a continuidade dos estudos padrões do cálculo, o que demonstra que uma possível solução pode ser a de oferecer aos discentes o estudo não-standard para a compreensão dos conceitos básicos e seguir os estudos ainda que da forma padrão tradicional, embora os autores deste estudo não vejam porque seria conduzida dessa forma a aplicação desse estudo emergente.

De acordo com o questionário, temos que a maioria dos instrutores gostaram de ensinar o cálculo usando essa nova abordagem, que a experiência enriquecerá suas futuras aulas no ensino do cálculo, que preferem usar a abordagem não-standard em suas próximas aulas como docente de cálculo e que acreditam que não tornou confusa a compreensão sobre os números reais, por parte dos alunos, e esse último ponto podemos crer que ocorre no fato de que a análise não-standard não interfere no conceito relativo aos números reais como a análise padrão os define, e sim que os estende incorporando os infinitesimais a esse conjunto, e assim temos uma parte standard e uma parte não-standard de todo número, e assim torna bem mais inteligível a ideia da existência de número muito pequenos, os infinitesimais hiper-reais.

Para reforçar a comparação entre as abordagens, os doze instrutores responderam a perguntas que colocaram em cheque as vantagens de cada uma e destacamos que em todos os questionamentos a abordagem standard não venceu a disputa e na verdade fora citada apenas uma vez na pergunta 3. “As provas são mais fáceis de explicar e mais próximas à intuição.”, porém com apenas 1 voto contra 10 da não-standard e 1 que alegou não fazer diferença.

Henle (1999, p. 70) corrobora essa ideia ao escrever “O poder extraordinário da análise não padronizada de Robinson é evidente na prova não-standard de teoremas, como o Teorema do Valor Intermediário, e a integrabilidade de funções contínuas.”

Um dos grandes destaques nessa parte do experimento se deu em relação ao aprendizado dos conceitos básicos do Cálculo onde 8 instrutores alegaram que a abordagem não-standard se mostrou melhor para os alunos, contra 4 que acreditam não fazer diferença e 0 acreditam que a análise standard se saía melhor nesse quesito.

Aqui concluímos que minimamente a análise não-standard, pedagogicamente prova o seu valor, visto que em maioria os alunos compreenderam melhor tais conceitos antes obscuros, nas palavras de um dos instrutores, e na experiência desse autor que vos fala, e para alguns instrutores não faria diferença, entretanto, nenhum instrutor viu na análise standard uma melhor atuação da análise standard utilizada em todas as aulas de Cálculo Infinitesimal observadas nos bancos universitários.

A ideia de tratar os números infinitesimais a princípio, parecem mais fáceis para estudantes de Física e Engenharia, visto que sempre encontraram nesses números ferramentas bastante úteis para as suas aplicações e um possível problema dar-se-ia em relação aos estudantes de Matemática e seu interesse maior pela Lógica e Análise, mas essa pesquisa de campo descrita mostra que a utilização de tal abordagem, bem como o livro de Keisler só não se deu provavelmente por uma questão política e/ou de aversão às revoluções e ao novo.

O experimento de grande porte desenvolvido na década de 1970 demonstrou que em termos pedagógicos e didáticos foi de grande valia e que não diminuiu a formalidade do Cálculo enquanto disciplina, e tudo que a Análise demonstrara em relação à Teoria dos Números, e a construção do Corpo dos Números Reais, sendo assim entendemos que nenhuma prejuízo teria o discente que recebeu aulas de Cálculo com a abordagem não-standard de Robinson, e que portanto poderia ser mininrada em todos os cursos universitários que possuem o Cálculo Infinitesimal em suas grades curriculares.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os fins justificam os meios, a famosa e infame frase conhecida por meio da obra “O Príncipe” de Nicolau Maquiavel, tão proferida para além do seu objetivo pensado inicialmente, parece encaixar-se perfeitamente nesse momento. Diversos cientistas parecem ter usado meios injustificados, como Isaac Newton e seus limites, Gottfried Leibniz e seus infinitésimos, ou mesmo Augustin Cauchy e suas séries convergentes e Karl Weierstrass e seus épsilons e deltas.

Os infinitamente pequenos e infinitamente grandes já haviam sido rejeitados por mentes incríveis no passado, como Arquimedes, e os estudiosos acima apenas chegaram aos fins mais generalizados, como é o caso de Newton e Leibniz, ou chegaram a eles por meio de uma roupagem bonita e atraente aos matemáticos, mas todos com uma fraqueza lógica e filosófica notória.

É importante salientar que o feito de Robinson, embora vital para várias áreas do conhecimento como vimos nas páginas deste trabalho, é indubitavelmente simples e intuitivo, e com o rigor esperado na Análise Matemática e na Teoria dos Números, o que não traz por Robinson, uma aniquilação da prática na denominada tradicional aritmetização da Análise, advinda por Richard Dedekind e George Cantor, mas apenas permite que uma solução mais simples possa ser posta, que o alargamento do escopo dos números, a extensão de um conjunto já existente, o conjunto dos números reais.

Espanta a aversão dos acadêmicos sobre esse alargamento de conjuntos numéricos, visto que o homem faz isso desde que começou o seu avanço tecnológico, como na criação da moeda monetária e os números negativos, e mais ainda quando o que denomina o tal conjunto, Números Reais, se vale da aceitação da existência de números irrais, conhecido como conjunto dos Números Imaginários.

O que Robinson propõe é apenas e tão somente a inclusão de números que possam comportar-se como entidades fixas e não variáveis, que se transformam em zero quando conveniente, e deixam de ser quando permitido para os fins a serem alcançados. Números muito grandes, infinitos, diferentes infinitos, até pode-se dizer que a intuição os aceita como reais, afinal podemos imaginar que existem infinitas estrelas, ou átomos no universo, embora me passe a dúvida sobre se não haveria a última das estrelas do Universo ou o último dos átomos que formam um ser.

Mas quanto aos números muito pequenos, infinitamente pequenos, o tamanho da menor coisa que existe seria um valor específico ou uma variável ao gosto do cientista, que possa justificar os seus fins? Ou será que a resposta é mais simples como vimos na leitura dessa Tese? Apenas uma questão de rigor semântico, a existência de novos números que

caracterizam essas entidades infinitas, mas não deixando de lado a questão sintática, já que se baseia em procedimento dedutivos, no que se refere a questão lógica e matemática.

Portanto, como considerações finais, entendemos que este trabalho possibilita reflexões e possui resultado suscetível de revisão, visto que algumas conclusões específicas, sobretudo no âmbito da chamada Matemática Pura e Aplicada já é de conhecimento de muitos agentes da Matemática Universitária, e dos autores de livros didáticos, mas aqui podemos ousar que esse trabalho chega à conclusão esperada pelos autores, após uma verificação histórica, epistemológica, pedagógica, matemática, de que a única razão para a não implantação da análise não-standard nos bancos Universitários é o apego ao tradicional, ainda que de forma infundada.

Certa vez levei este tema para uma possível defesa do mesmo, no Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, e como parte do processo de entrada no programa, pedi à minha orientadora acadêmica da minha graduação, cursada na mesma instituição, uma carta de recomendação. Recebi a resposta de que se levasse um tema realmente relevante, de matemática verdadeiramente, em suas palavras, “algo sobre a Conjectura de Poincaré, por exemplo, eu assino a recomendação”.

Isto mostra que a academia ainda está presa as questões da Matemática Pura, e que embora tenha ficado por 100 anos sem uma demonstração já vinha sendo utilizada como se tal fato já houvesse ocorrido, já que há tanto tempo fora formulada sem indícios de que não fosse verdadeira, e mais importante do que uma alteração epistemológica e filosófica, de uma disciplina tão utilizada e estudada que é o Cálculo Diferencial e Integral.

Entendemos que isso só reforça a importância do tema abordado nessa tese, já que além da divulgação do tema, contribuiu para mostrar que a Interdisciplinaridade ainda possui inúmeros obstáculos no ensino, já que com a especialização científica, nos tornamos cientistas com uma visão limitada, e isso só faz com que tenhamos uma perda significativa, tanto em relação a formação de conhecimentos, como na assimilação dos mesmos por parte dos estudantes, e programas de pós-graduação como o de Humanidades, Culturas e Artes da Universidade do Grande Rio, são de vital importância no processo de mudança de tais práticas ineficazes.

Concluimos que a ausência da análise não-standard nos currículos universitários se dá por uma questão política, e pela mesma razão, a pouca divulgação do tema, como vimos já existem artigos e livros sobre o tema, e um livro didático de Cálculo com análise não-standard, bem como uma pesquisa de campo bem-sucedida, o que comprova a sua aplicabilidade. Essa conclusão mostra que existe um longo e árduo caminho de trabalho difícil de convencimento do valor dessa metodologia. Engenheiros e físicos lidam bem com os números muito pequenos, já que os veem como ferramentas úteis, mas mesmo eles

notam intuitivamente uma discrepância lógica nas suas concepções, e desse modo, uma base intuitiva mais sólida se faz necessária.

Propomos uma nova abordagem das disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral e nas disciplinas de Análise Real, oferecidas nos cursos superiores de Matemática e áreas afins, indicando ainda, futuros estudos para a verificação das consequências desse novo entendimento sobre os números, sobre a matemática, sobre a Lógica, nas mais diversas áreas das Ciências da Natureza, da Cultura humana, da Filosofia, visto que ao longo da vida humana na terra, podemos observar que o pensamento Matemático muitas vezes norteou o pensamento humano na compreensão de Mundo, bem como nos avanços intelectuais e tecnológicos.

Os atores principais na formulação dessa nova análise possuem currículos acadêmicos que constam de estudos de Matemática, de Lógica, mas percebemos que profundos conhecimentos em Filosofia, fato ao qual depositamos a razão do sucesso destes em vencer os questionamentos políticos, e a quebra da hegemonia do tradicional, permitindo a evolução de temas que o homem estuda há pelo menos 25 séculos, e que acreditamos que possa evoluir infinitamente em tempo infinito.

Acreditamos que diversos objetivos foram alcançados nessa Tese, assim como respondemos à pergunta de pesquisa proposta, “O conjunto dos números reais como tradicionalmente conhecemos é capaz de dar a base técnica que o Cálculo Infinitesimal precisa?”, visto que de forma Interdisciplinar, podemos mostrar o poder que a Análise não-standard possui, tanto na Matemática quanto fora dela, e que pedagogicamente os discentes teriam muitas vantagens em estudar o Cálculo por essa abordagem, e ao longo do estudo podemos entender o porquê dessa discussão perdurar por tantos séculos, visto que o tema caracteriza-se por um conjunto intrincado e complexo de disciplinas, onde um tratamento disciplinar do tema seria incapaz de alcançar os fins esperados, que é a substituição, da base teórica em que o Cálculo Diferencial e Integral se sustenta nos dias atuais.

REFERÊNCIAS

- ANGUS, J. Macintyre. **"Abraham Robinson, 1918–1974."** Bulletin of the American Mathematical Society, 83(4) 646-666 July 1977. <https://doi.org/bams/1183538895>
- ARANHA, Maria Lúcia Arruda; MARTINS, Maria Helena Pires. **Filosofando – Introdução à Filosofia.** São Paulo: Moderna, 1993.
- ARISTÓTELES. **Organon.** Lisboa: Guimarães Editores, 1985.
- BACHELARD, G. **A epistemologia.** São Paulo: Martins Fontes, 1971.
- _____, 1884-1962. **A filosofia do não** / Gaston Bachelard ; seleção de textos de José Américo Motta Pessanha ; traduções de Joaquim José Moura Ramos . . . (et al.). — São Paulo : Abril Cultural, 1978.
- _____, 1884-1962 **A formação do espírito científico : contribuição para uma psicanálise do conhecimento** / Gaston Bachelard; tradução Esteia dos Santos Abreu. - Rio de Janeiro : Contraponto, 1996.
- BACON, Francis. **Novum Organum ou Verdadeiras Indicações acerca da Interpretação da Natureza (1620).** Versão eletrônica. Trad. de José Aluysio Reis Andrade. 2000. Disponível em <http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/cv000047.pdf>. Acesso em 20 de maio de 2022.
- BARBOSA, J. L. M. (1985) **Geometria Euclidiana Plana.** Rio de Janeiro: SBM
- BARDI, Jason Sócrates. **A guerra do cálculo** / Jason Sócrates Bardi; [tradução Aluizio Pestana da Costa]. - Rio de Janeiro: Record, 2008.
- BARONI, Rosa Lúcia Sverzut. **Aspectos da história da análise matemática de Cauchy a Lebesgue** [recurso eletrônico]/Rosa Lúcia Sverzut Baroni, Sílvio César Otero-Garcia. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2014.
- BERGSON, H. (2001). **A evolução criadora Lisboa,** Portugal: Edições 70.
- BONNEAU, Cristiano. . A Questão da Invenção- uma reflexão sobre o conhecimento em Leibniz. **Cadernos Espinoseanos** , v. I, p. 89-104, 2016.
- BOYER; tradução: Elza F. Gomide. **História da Matemática.** São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1974.
- BRADLEY, R. E., Sandifer, C.E. **Cauchy's cours d'analyses: An annotated translation.** Springer, New Yourk. 2009.
- BUENO, Rafael Winícius da Silva: **A construção histórica do conceito de integral** / Rafael Winícius da Silva Bueno. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2021.
- BULHÕES, **Natureza e metafísica** [Recurso eletrônico] : atas do IV Colóquio Internacional de Metafísica / organizadores Fernanda Bulhões, Cinara Nahra Leite, Markus Figueira da Silva. – Natal, RN : EDUFRN, 2015. 4,8 Mb ; PDF.). Modo de acesso: ISBN 978-85-425-0406-4
- CASTAÑON, Gustavo. **Introdução à epistemologia/Gustavo Castrañon.** São Paulo: EPU, 2007.

CAUCHY, A. L. **Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique: premier partie, Analyse algébrique.** Paris: Chez Debure frères, 1821.

CAUCHY, A.-L., 1821. **Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique; 1^{re} Partie. Analyse Algébrique.** Debure. Paris. Reprint Éditions Jacques Gabay, Sceaux, 1989.

CHALMERS, Alan F. **O que é ciência afinal?** Tradução: Raul Filker: 1^a. Ed. – São Paulo: Brasiliense, 1993.

COHEN, I. (1981). Matéria de frente. **Em A Revolução Newtoniana** (The Wiles Lectures, pp. I-Vi). Cambridge: Cambridge University Press.

DAUBEN, Joseph W.. "VI.95 Abraham Robinson". **The Princeton Companion to Mathematics**, edited by Timothy Gowers, June Barrow-Green and Imre Leader, Princeton: Princeton University Press, 2010, pp. 822-823. <https://doi.org/10.1515/9781400830398.822>

DAUBEN, Joseph W. **Abraham Robinson and nonstandard analysis: history, philosophy, and foundations of mathematics.** University of Minnesota Press, Minneapolis. Retrieved from the University of Minnesota Digital Conservancy, 1988. <https://hdl.handle.net/11299/185659>.

DAUBEN, J. W.. **ABRAHAM ROBINSON** October 6, 1918–April 11, 1974. *Biographical Memoirs: Volume 82*, 82. (2003)

DAVIS, I. **An introduction to nonstandard analysis.** Web page, 2009. URL <https://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2009/REUPapers/Davis.pdf>. Accessed 10/06/2022.

DESCARTES, R. **La geometria.** Trad. E intr.. P. O. Soler. Buenos Aires: Espasa-Calpe, 1947.

EICHENBERGER Neto, João **História da Matemática/** João Eichenberger Neto Londrina: Editora e Distribuidora Educacional S.A., 2016.

EINSTEIN, Albert, 1879-1955. **Como vejo o mundo** / Albert Einstein; tradução de H. P. de Andrade. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1981. Tradução de: Mein Weltbild 1. Einstein, Albert, 1879-1955 1. Título

EVES, H. **Introdução à história da matemática** / Howard Eves; tradução Hygino H. Domingues. 5a ed. – Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

FEYERABEND, P. **Contra o Método: esboço de uma teoria anárquica do conhecimento.** Trad. Octanny S. da Mata. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1977.

FUNAN, Pedro Paulo **Grécia e Roma** / Pedro Paulo A. Funari. - 2 cd - São Paulo : Contexto. 2002 - (Repensando a História). Bibliografia. ISBN 85-72-44-160-3 1. Grécia – Civilização, 2. Grécia - História 3. Roma – Civilização, 4. Roma – História. I, Título. II, Série

GALILEO, Galilei, **Discourse Concerning Two New Sciences.** Translated with a new introduction and notes, by Stillman Drake, Wall & Thomson (Toronto), 1989.

GUIDORIZZI, H. L., **Um curso de Cálculo**, V. 1, Livros Técnicos e Científicos Ed. Ltda, 5^a edição (2001).

HENLE, J. M. **Análise não padrão**: infinitesimais reais . Math Intelligencer 21 , 67-73 (1999). <https://doi.org/10.1007/BF03024834>.

HENLE, J. and Kleinberg, E. (2014) Infinitesimal Calculus. [edition unavailable]. Dover Publications. Available at: <https://www.perlego.com/book/1444005/infinitesimal-calculus-pdf> (Accessado em 14 de outubro de 2022).

HESSEN. Johannes, **Teoria do Conhecimento**. Universidade de Colônia. Coimbra Portugal 1980.

HUENEMANN, Charlie. **Racionalismo**; tradução de Jacques A. Wainberg. – Petrópolis, RJ: Vozes, 2012.—(Série Pensamento Moderno).

KEISLER, H. Jerome: **An Infinitesimal Approach to Stochastic Analysis**, vol. 297 of Memoirs of the American Mathematical Society, 1984.

KEISLER H. Jerome: **Elementary Calculus: An Approach Using Infinitesimals**. First edition 1976; 2nd edition 1986. Revised 2012.

KOYRÉ, Alexandre. **Estudos Galilaicos**. Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1992.

KLINE, Morris, 1908– **Calculus : an intuitive and physical approach**, second edition / Morris Kline. p. cm

KUHN, Thomas S. **A estrutura das revoluções científicas**/Thomas S. Kuhn; tradução Beatriz Vianna Boeira e Nelson Boeira. — 12. ed. São Paulo: Perspectiva, 2013.

KUTATELADZE, Semen. (2013). **Nonstandard Analysis: Its Creator and Place**. Journal of Applied and Industrial Mathematics.

KUTATELADZE S. S. **Nonstandard analysis: its creator and place**. 2013. Article in Journal of Applied and Industrial Mathematics · June 2013 DOI: 10.1134/S1990478913030010 · Source: arXiv

LEIBNIZ, G. W. **Discurso de metafísica**. Tradução de João Amado. Lisboa: Edições 70, 1985.

_____. Escritos Filosóficos. Org. Ezequiel Olaso. Buenos Aires: Ed. Charcas, 1982.
MONTENEGRO, Gonzalo: **“Deleuze em diálogo com Frémont: tentativas de ler Leibniz”**

_____. **“Novos ensaios sobre o entendimento humano”**. In: NOVA CULTURAL (org.) Os Pensadores: Leibniz I. São Paulo: nova Cultural, 1989.

_____. **Monadologia**, tradução e apresentação de Adelino Cardoso, 2016.

LIMA, Elon Lages. **Análise Real**. IMPA, CNPq, 1997.

LIMA, Elon Lages. **Análise real volume 1. Funções de uma variável** / Elon Lages Lima. 10.ed. Rio de Janeiro : IMPA, 2009. 189 p. : il. ; 23 cm. (Coleção Matemática Universitária)

LINDSTROM, Tom - **An Invitation to Nonstandard Analysis. In Nonstandard Analysis and its Applications**. Nigel Cutland Ed. London Math. Society, Student Texts nº 10, 1988.

LINTZ, R.G. (2007). **História da Matemática**, v. 1. Coleção CLE, v. 45. 2a ed. Campinas: Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, Unicamp.

LÚCIO, Lourenço Prado :**Monadologia e espaço relativo: o jovem Kant recepcionando de Leibniz** / – 1 ed. – Guarapuava: Apolodoro Virtual Edições, 2018.

LUXEMBURG, W. A. J. **Nonstandard analysis. Lectures on A. Robinson's theory of infinitesimals and infinitely large numbers**, Caltech, 1962.

MACHADO, Geovani Pereira. **Introdução à análise não standard**. 2018. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2018. doi:10.11606/D.45.2019.tde-18022019-171451. Acesso em 2022-06-13.

MAGALHÃES, Charles Lisboa Tenório de. **Astronomia prática**: site com roteiros experimentais para o ensino de astronomia no Ensino Médio/Charles Lisboa Tenório de Magalhães. – 2019.

MANCOSU, Paolo., **The metaphysics of the calculus: a foundational debate in the Paris Academy of Sciences**, 1989. 1700-1706, in *Historia Mathematica* 16, pp. 224-248.

MARCONDES, Danilo. **Iniciação à História da Filosofia: Dos Pré-Socráticos a Wittgenstein**. - 13.ed. - Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 2010.

MLODINOW, L. **A Janela de Euclides: a história da geometria: das linhas paralelas ao hiperespaço**. (2010). Tradução de Enézio E. de Almeida Filho. São Paulo: Geração Editorial.

MOREIRA, V. C. . **Leibniz: a certeza cartesiana e a Caracteristica**. **Cadernos de História e Filosofia da Ciência** (UNICAMP) , Campinas / SP - Unicamp, v. 13, n.01, p. 45-79, 2003.

MORGADO, A. C.; WAGNER, E.; JORGE, M. **Geometria II**. RJ Brasil: FC & Z Livros, 2002.

MORRIS, Richard. **Uma breve história do infinito: dos paradoxos de Zenão ao universo quântico**: Tradução: Maria Luiza X. Borges. Rio de Janeiro: Zahar, 1998.

NEWTON, I. **Treatise of the Quadrature of Curves**, in *Sir Isaac Newton's Two Treatises of The Quadrature of Curves, and Analysis by Equations of an infinite Number of Terms*, by John Stewart, James Bettenham, London, 1745.

_____, Isaac. **Mathematical Principles of Natural Philosophy**. Trad. Motte, A./Cajori, F. Chicago, 1952.

_____, Isaac **Quaestiones Quaedam Philosophicae** (1664-1665), Manuscrito MS Add. 3996, Cambridge University Library. Disponível em <http://cudl.lib.cam.ac.uk/view/MS-ADD-03996/>, acesso em 21 de maio de 2022.

POMBO, Olga. **Leibniz e o problema de uma língua universal**. Lisboa. Editora: Junta Portuguesa de Investigação Científica e Tecnológica, 1997.

OSADA, N., **Area and moment in De Analysisi by Isaac Newton** RIMS Kôkyûroku Bessatsu B85, 15-34, 2021.

POLISELI, Luana (ed.) (2021). **Série Investigações Filosóficas: Textos Seleccionados de Filosofia da Ciência II** [*Philosophical Investigation Series: Selected Texts on Philosophy of Science II*]. Pelotas: Editora da Universidade Federal de Pelotas.

POMBO, O. **Epistemologia da interdisciplinaridade**. Ideação, [S. l.], v. 10, n. 1, p. p.9–40, 2010. DOI: 10.48075/ri.v10i1.4141. Disponível em: <https://e-revista.unioeste.br/index.php/ideacao/article/view/4141>. Acesso em: 15 ago. 2022.

PONSTEIN, J, **Nonstandard Analysis**, ISBN/ASIN: 9036716721, Number of pages: 147, 2002.

POPPER, Karl Raimund. **A lógica da pesquisa científica**. Tradução de: The logic of scientific Discovery, por Leonidas Hegenberg. Octanny Silveira da Mota. 2. ed. São Paulo: Cultrix, 2013.

REALE, Miguel, 1910- **Introdução à filosofia** / Miguel Reale. — 4. ed. — São Paulo : Saraiva, 2002. 1. Filosofia - Introduções I. Título

ROSA, Carlos Augusto de Proença. **História da ciência : a ciência moderna** / Carlos Augusto de Proença. — 2. ed. — Brasília : FUNAG, 2012.

ROQUE, Tatiana **História da Matemática – Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas** Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2012

RUSSELL, Bertrand. **The Principles of Mathematics**. (1919). 2. Ed. Londres: Routledge, 1992. Reimpressão: 1997.

RUSSEL, Bertrand. **Introdução à Filosofia Matemática**. Traduzido do original de Bertrand Russell *Introduction to Mathematical Philosophy*, Londres: George Allen & Unwin, 1919, por Augusto J. Franco de Oliveira. 2006.

SANTOS, Boaventura de Sousa. **A crítica da razão indolente contra o desperdício da experiência**. Cortez editora - São Paulo, 2002.

SANTOS, Boaventura de Sousa **Um discurso sobre as ciências** / Boaventura de Sousa Santos. —5. ed. - São Paulo : Cortez, 2008.

STEWART, James **Cálculo, volume I** / James Stewart ; [tradução EZ2 Translate]. -- São Paulo : Cengage Learning, 2013.

STRUICK, Dirk J. **História concisa das matemáticas**. 2. ed., Lisboa: Gradiva, 1992.

SULLIVAN, Kathleen. “**The Teaching of Elementary Calculus Using the Nonstandard Analysis Approach.**” *The American Mathematical Monthly*, vol. 83, no. 5, 1976, pp. 370–75. JSTOR, <https://doi.org/10.2307/2318657>. Accessed 24 Oct. 2022.

VICKERS, Peter (2013). **_Understanding Inconsistent Science_**. Oxford University Press.

WITTGENSTEIN, Ludwig, 1889-1951. **Tractatus Logico-Philosophicus** / Ludwig Wittgenstein ; Tradução, apresentação e estudo introdutório de Luiz Henrique Lopes dos Santos ; [Introdução de Bertrand Russell]. - 3. ed. - São Paulo : Editora da Universidade de São Paulo, 2001.

WILKINS, David R. (Ed.). **Account of the commercium Epistolicum**. 2002. Disponível em: . Acesso em: 01 jun. 2022.

WONTNER N. J. H. **Non-Standard Analysis** (dissertação mestrado), University of Cambridge 17th June 2019.