

Seconde Générale et Technologique

Maths | Chapitre 7 : Fonctions : fonctions de référence, équation, inéquation

Enoncés des exercices

Les exercices sont classés en trois niveaux de difficulté :

- ★ Exercices d'application : comprendre les notions essentielles du cours
- ★★ Exercices d'entraînement : prendre les bons réflexes
- ★★★ Exercices d'approfondissement : aller plus loin

Exercices gratuits	Exercices sur abonnement*
★ 1 – 2 – 3	★ 4 – 5 – 6
★★ 7 – 8 – 9	★★ 10 – 11 – 12
★★★ 13 – 14 – 15	★★★ 16 – 17 – 18

Exercice 1 ★

Déterminer le domaine de définition d'une fonction

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions f , g et h .

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$$

$$g(x) = \sqrt{3x-2}$$

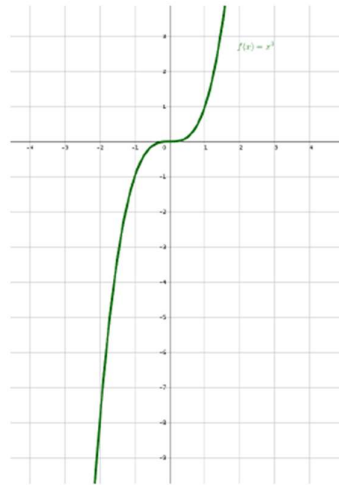
$$h(x) = \frac{x+2}{\sqrt{4-5x}}$$

Exercice 2 ★

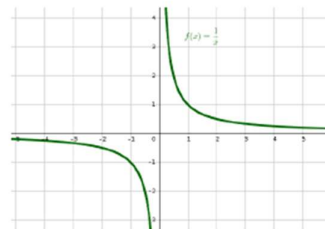
Variations de fonctions

A l'aide des graphiques donnés, résoudre les inéquations suivantes :

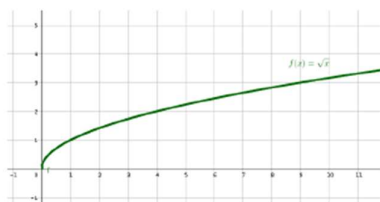
1. $-8 < x^3 < 1$



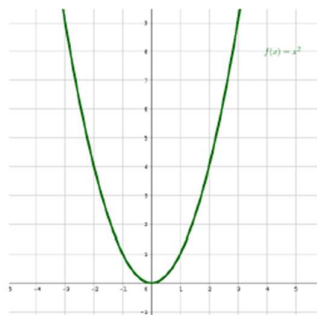
2. $1 < \frac{1}{x} < 3$



3. $2 < \sqrt{x} < 3$



4. $4 < x^2 < 9$.



Exercice 3 ★

Résolution graphique et algébrique d'une équation et d'une inéquation pour comparer une fonction linéaire et la fonction « cube »

On se propose d'étudier la position relative des courbes de la fonction cube $f : x \mapsto x^3$

et de la fonction linéaire $g : x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}$

Pour cela, on procède comme suit :

1/ Résolution de l'équation $x^3 = x$

- a) Résolution graphique de cette équation.
- b) Résolution algébrique de cette équation.

2/ Résolution de l'inéquation $x^3 > x$, puis de l'inéquation $x^3 \leq x$

- a) Résolution graphique de ces inéquations.
- b) Résolution algébrique de ces inéquations.

3/ Conclure sur la position relative des courbes des fonctions f et g sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 * ★

Utiliser les propriétés de la fonction carré

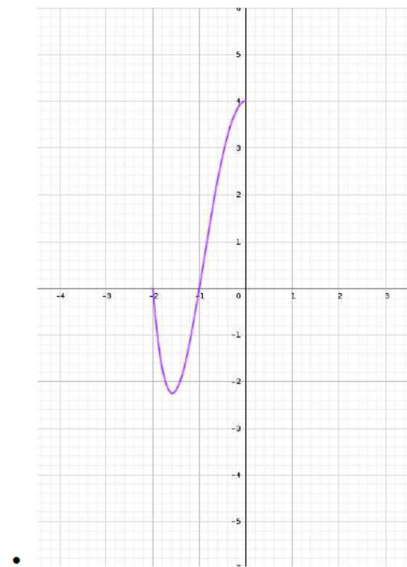
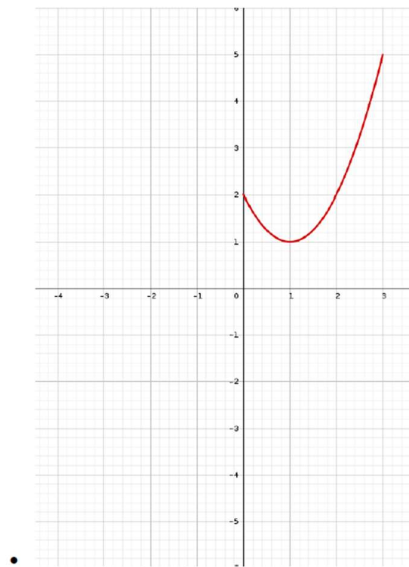
Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$.

1. $x^2 = 25$
2. $x^2 - 4 = 0$
3. $x^2 + 64 = 0$
4. $(x + 9)^2 = 16$

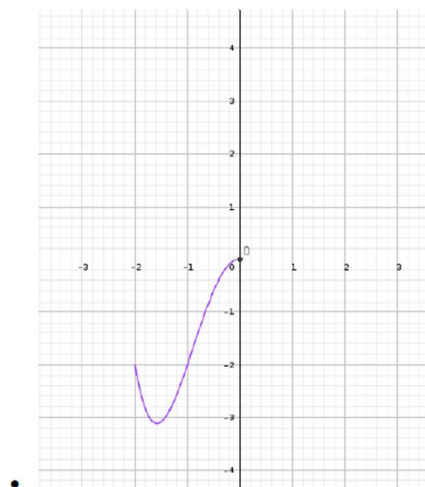
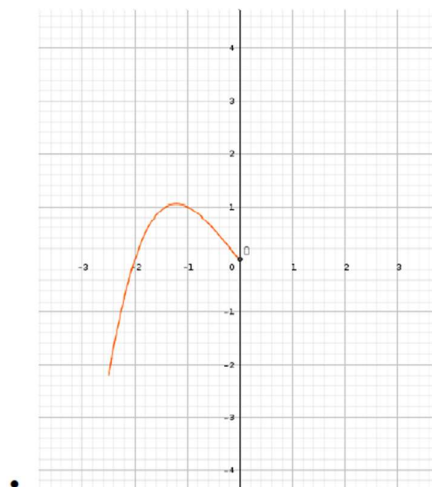
Exercice 5 * ★

Fonctions paires et impaires

1. Les courbes ci-dessous représentent des fonctions paires. Compléter les graphiques.



2. Les courbes ci-dessous représentent des fonctions paires.
Compléter les graphiques.



Exercice 6 * ★

Résolution graphique d'inéquations avec la fonction « carré »

1. À l'aide de la parabole de la fonction « carré », donner un encadrement de x^2 pour tout réel x tels que $1 \leq x \leq 2$.

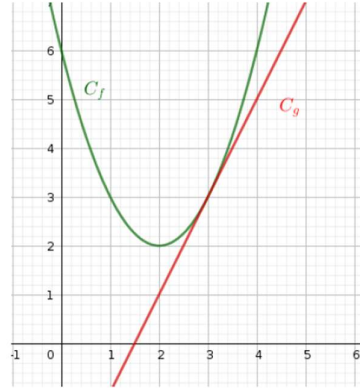
Comment peut-on justifier ce résultat graphiquement et algébriquement ensuite ?

2. De la même façon qu'à la question 1, donner un encadrement de x^2 :
- Pour tout réel x tel que $-2 \leq x \leq -0,5$
 - Pour tout réel x tel que $-3 \leq x \leq 1$

Exercice 7 ★★

Fonctions : fonctions de référence, équation, inéquation

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 4x + 6$ et $g(x) = 2x - 3$ dont les représentations graphiques sont ci-dessous :



1. Faire une conjecture sur la position de C_f et C_g .
(c.a.d : émettre une hypothèse sur les valeurs de x pour lesquelles C_f semble être au dessus de C_g).
2. Résoudre l'inéquation $x^2 - 4x + 6 \geq 2x - 3$.
3. La conjecture se vérifie t-elle ?

Exercice 8 ★★

Résolution graphique et algébrique d'une équation et d'une inéquation pour comparer une fonction linéaire et la fonction inverse

On se propose d'étudier la position relative des courbes de la fonction inverse $f : x \mapsto \frac{1}{x}$

et de la fonction linéaire $g : x \mapsto 2x$ sur $\mathbb{R}^*$

Pour cela, on procède comme suit :

1/ Résolution de l'équation $\frac{1}{x} = 2x$

- a) Résolution graphique de cette équation.
- b) Résolution algébrique de cette équation.

2/ Résolution de l'inéquation $\frac{1}{x} > 2x$, puis de l'inéquation $\frac{1}{x} \leq 2x$

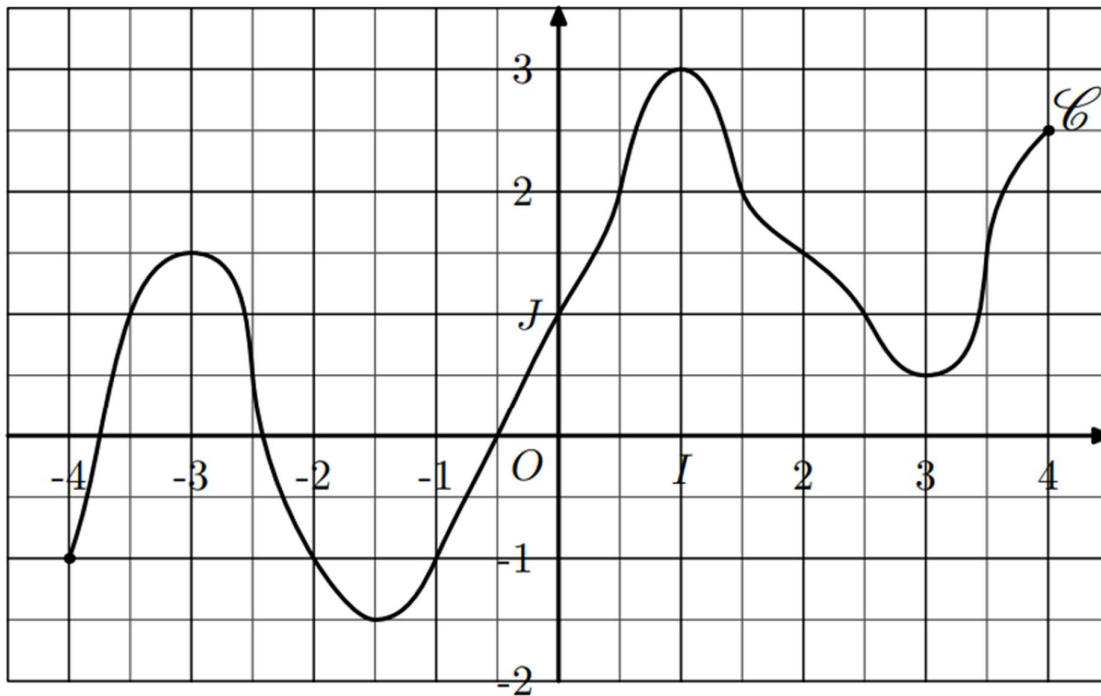
- a) Résolution graphique de ces inéquations.
- b) Résolution algébrique de ces inéquations.

3/ Conclure sur la position relative des courbes des fonction f et g sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9 ★★

Résolution graphique d'équations et d'inéquations

Voici la courbe C représentative de la fonction f définie sur $[-4 ; 4]$.



1. Estimer les solutions des équations et inéquations suivantes :

- a) $f(x) = 1$
- b) $f(x) \geq 1$
- c) $f(x) < 0$
- d) $f(x) > 3$

2. Répondre aux questions suivantes :

- a) Quelle est l'image de -2 par la fonction f ?
- b) Quels sont les antécédents de -1 par la fonction f ?
- c) Donner une valeur approchée des antécédents de 0 par la fonction f .

3. Compléter :

- a) $f(1) = \dots$
- b) $f(\dots) = 3$
- c) $f(3) = \dots$
- d) $f(\dots) = -1$

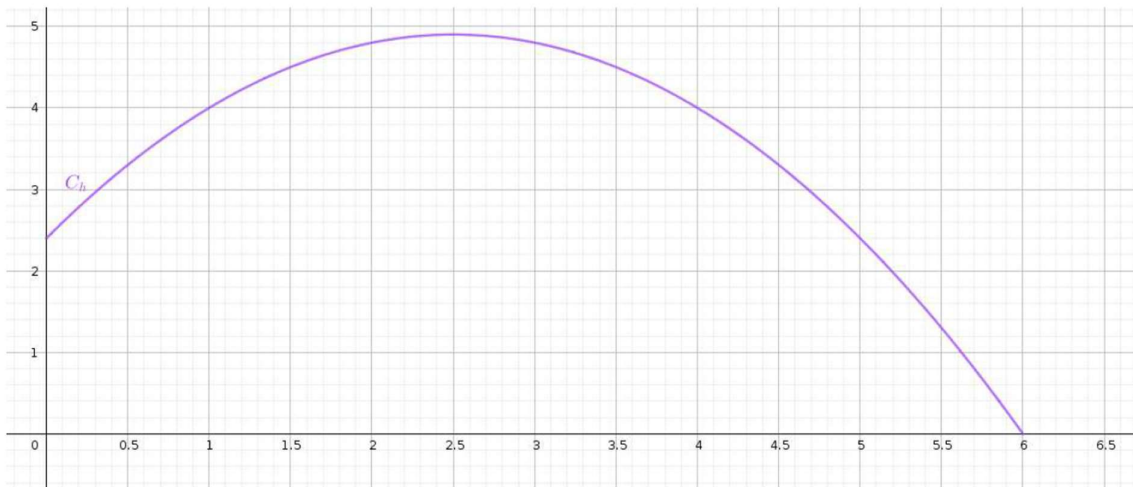
Exercice 10 * ★★équation de trajectoire.

On lance une balle en l'air. Cette balle suit une trajectoire qui peut être modélisée par la fonction :

$$h(t) = -0,4t^2 + 2,2t + 2,4$$

où t représente le temps exprimé en seconde et la hauteur en mètre.

Le graphique ci-dessous représente la courbe de h



1. D'après le graphique, quelle est la hauteur maximale du ballon.
2. Quelle est la hauteur initiale
3. Comment retrouver ce résultat par le calcul ?
4. Au bout de combien de temps la balle touche t'elle le sol ?
5. On admet que $h(t) = -0,4(t + 1)(t - 6)$. retrouver le résultat de la question précédente.

Exercice 11 * ★★

Résolution algébrique d'équations et d'inéquations : Utiliser la bonne forme littérale

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x - 4)^2 - 25$ (1)

1. Prouver que pour tout nombre réel x ,

a) $f(x) = x^2 - 8x - 9$ (2)

b) $f(x) = (x - 9)(x + 1)$ (3)

2. Résoudre chaque équation suivante en utilisant celle des formes (1), (2) ou (3) qui est la mieux adaptée.

a) $f(x) = -9$; b) $f(x) = 0$; c) $f(x) = -25$ d) $f(x) = -8x$

3. Résoudre chaque inéquation suivante en utilisant celle des formes (1), (2) ou (3) qui est la mieux adaptée.

a) $f(x) < -9$; b) $f(x) > -8x$.

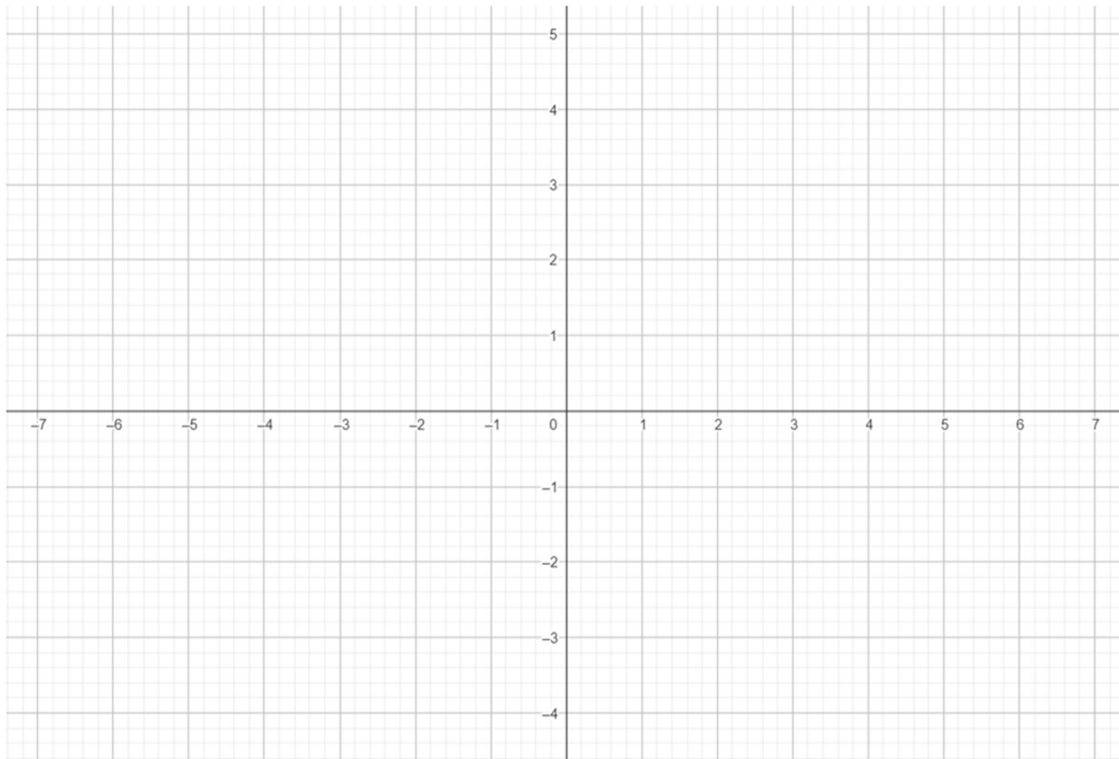
Exercice 12 * ★★

Tracer une courbe représentative d'une fonction à partir de données

Soit f une fonction dont les propriétés sont les suivantes :

- $D_f = [-5 ; 3]$
- L'équation $f(x) = 2$ admet les deux solutions 1 et -4
- L'inéquation $f(x) \leq -1$ a pour ensemble de solutions $[-2 ; 1]$
- $f(0) = -3$
- L'inéquation $f(x) > 3$ n'admet pas de solution
- L'équation $f(x) = 0$ admet au moins 3 solutions

Tracer dans le repère une courbe possible pour la fonction f .



Exercice 13 ★★★★★

Fonctions de référence, équation, inéquation :

On considère les deux courbes représentatives de la fonction inverse, notée f , et de la fonction affine g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x - 1$

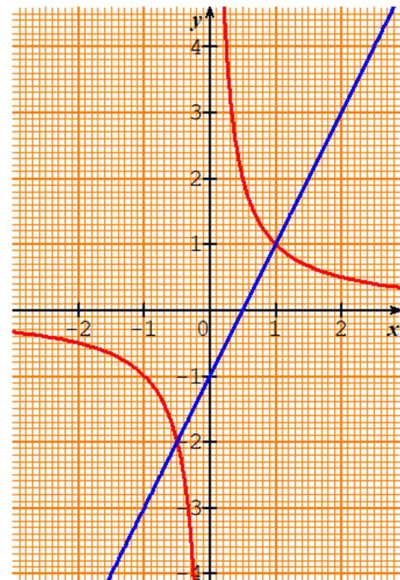
Elles sont représentées dans le repère ci-contre.

1. Repérer les courbes associées aux deux fonctions
2. a) Résoudre graphiquement l'équation :

$$\frac{1}{x} = 2x - 1$$

- b) Résoudre graphiquement l'inéquation :

$$\frac{1}{x} \leq 2x - 1$$



3.a) Développer l'expression $(2x + 1)(x - 1)$

b) Retrouver algébriquement le résultat obtenu à la question 2 a)

c) Retrouver algébriquement le résultat obtenu à la question 2 b)

4. Conclure sur les positions relatives des courbes des fonctions f et g .

Exercice 14 ★★

Signe d'une fonction et tableau de signes

Après avoir étudié le domaine de définition, construire le tableau de signes de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = (2x + 3)(-4x + 1)$

b) $g(x) = \frac{5x+2}{-x+6}$

c) $h(x) = x^2 - 16 + (2x - 3)(x - 4)$

Exercice 15 ★★★

Parité de fonctions

En déterminant $f(-x)$, étudier la parité des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

2. $f(x) = x + 1$

3. $f(x) = x + \frac{1}{x}$

4. $f(x) = 3x^2 - 5$

5. $f(x) = 3x^3 - 5x$

6. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

Exercice 16 * ★★

Comparaison de la moyenne arithmétique et de la moyenne géométrique de deux nombres positifs

a et b sont deux nombres positifs tels que $a < b$.

On pose $M = \frac{a+b}{2}$ et $m = \sqrt{ab}$.

On dit que M est la moyenne arithmétique de a et b et que m est la moyenne géométrique de a et b .

On se propose de comparer a, b, M et m .

1. Conjecture

1. Dans chacun des cas suivants, calculez M et m , puis rangez, dans l'ordre croissant, les quatre nombres a, b, M, m .

a) $a = 1$ et $b = 2$; b) $a = 2$ et $b = 8$ c) $a = 3$ et $b = 12$ d) $a = \frac{1}{4}$ et $b = 1$.

2. D'après ces exemples, dans quel ordre semblent, en général, être rangés les quatre nombres a, b, M et m ?

2. Démonstration algébrique

1. On se propose de comparer M et m .

a) Expliquer pourquoi M et m sont rangés dans le même ordre que leurs carrés M^2 et m^2 .

b) Montrez que $M^2 - m^2$ est du signe de $(a+b)^2 - 4ab$.

c) Déduisez-en que $M > m$.

2. Montrez que $a < \sqrt{ab}$ et $\frac{a+b}{2} < b$.

3. Déduisez de ce qui précède que $a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b$.

3. Une application en géométrie

On considère un cercle de diamètre $[OB]$, un point C de ce cercle et son projeté orthogonal A sur $[OB]$. On note D le milieu de $[AB]$.

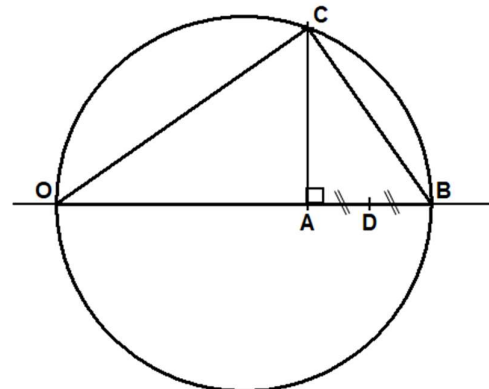
1. Expliquez pourquoi $OD = \frac{OA+OB}{2}$.

2. a) En calculant $\cos(\widehat{COA})$ dans deux

triangles rectangles, montrez que $\frac{OA}{OC} = \frac{OC}{OB}$.

b) Déduisez-en que $OC^2 = OA \times OB$

c) Montrez que $OC < OD$.



Exercice 17 * ★★★

Résolution algébrique d'inéquations à partir d'un tableau de signes

Après avoir étudié leur domaine de définition, résoudre les inéquations suivantes à l'aide d'un tableau de signes.

a) $\frac{(9x^2-16)(-x+2)}{x+1} < 0$

b) $(3x-2)(x+1) < x(x+1)$

c) $\frac{3x}{2-x} \geq 2$

Exercice 18 * ★★★

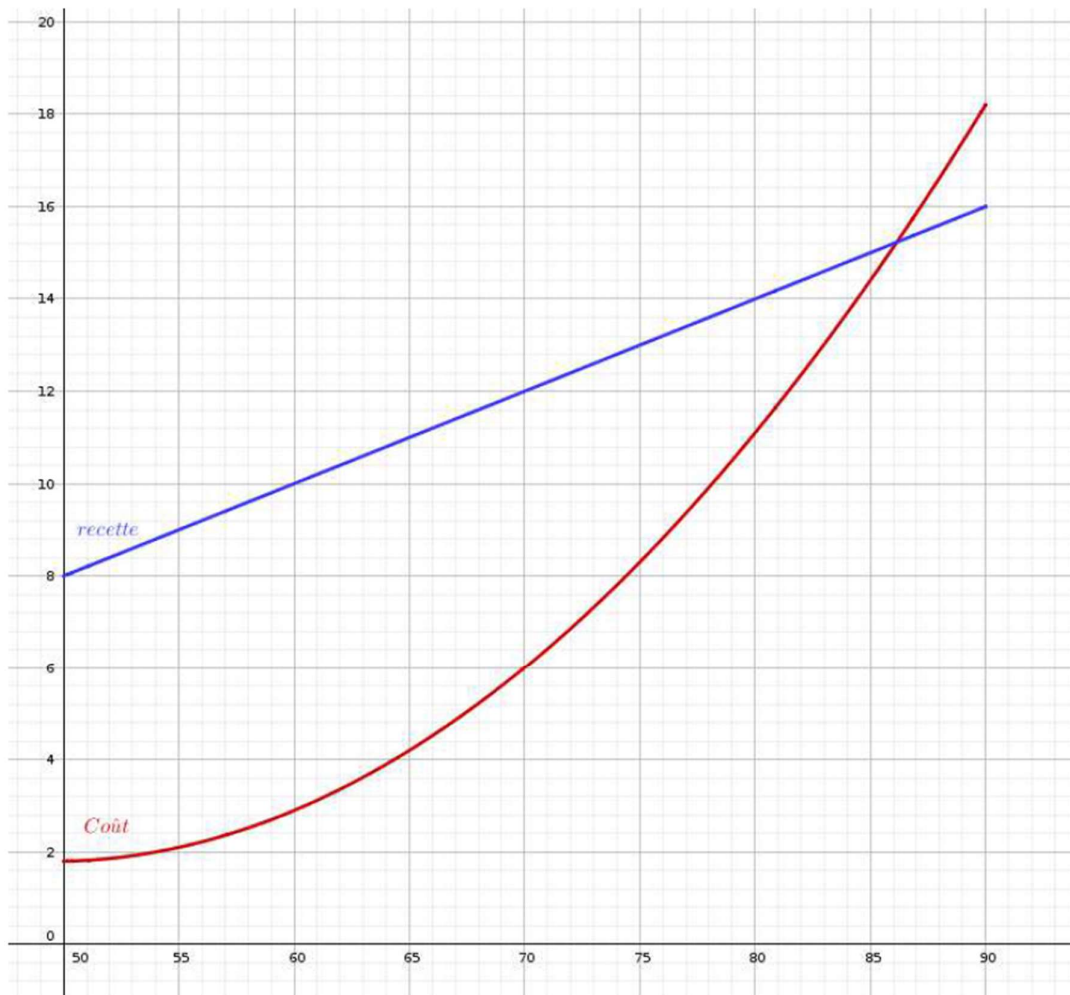
Coût et bénéfice.

Une entreprise fabrique des pièces pour l'industrie.

On note x le nombre de pièces fabriquées quotidiennement.

Le coût de production, en centaines d'euros en fonction de x est noté $C(x)$.

La courbe de $C(x)$ est représentée ci-dessous sur l'intervalle $[50; 90]$.



A l'aide du graphique :

1. Quel est le nombre de pièces minimal produit chaque jour ?
2. Quel est le nombre de pièces maximal produit chaque jour ?
3. Quel est le coût de production pour 60 pièces ?
4. Pour un coût de production de 1000 euros, combien l'entreprise peut-elle produire de pièces ?
5. Le bénéfice réalisé est la différence entre la recette et le coût pour x pièces vendues. La courbe représentant la recette est représentée sur le graphique.
Déterminer le nombre de pièces que l'entreprise doit vendre pour réaliser un bénéfice positif.