Seconde Générale et Technologique

Maths | <u>Chapitre 8 :</u> Variations et extremums

Enoncés des exercices

Les exercices sont classés en trois niveaux de difficulté :

- ★ Exercices d'application : comprendre les notions essentielles du cours
- ★★ Exercices d'entraînement : prendre les bons reflexes
- ★★★ Exercices d'approfondissement : aller plus loin

Exercices gratuits	Exercices sur abonnement*
★ 1 – 2 – 3 ★★ 7 – 8 – 9 ★★★ 13 – 14 – 15	★ 4 – 5 – 6 ★★ 10 – 11 – 12 ★★★ 16 – 17 – 18

Exercice 1 ★

Variations et extremums d'une fonction

C_f est la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2(x-3)^2$

1/ Montrez que f est strictement croissante sur $]-\infty; 3]$et strictement décroissante sur $[3; +\infty[$

2/ Montrez que f admet un maximum pour une valeur réelle x_0 que l'on précisera.

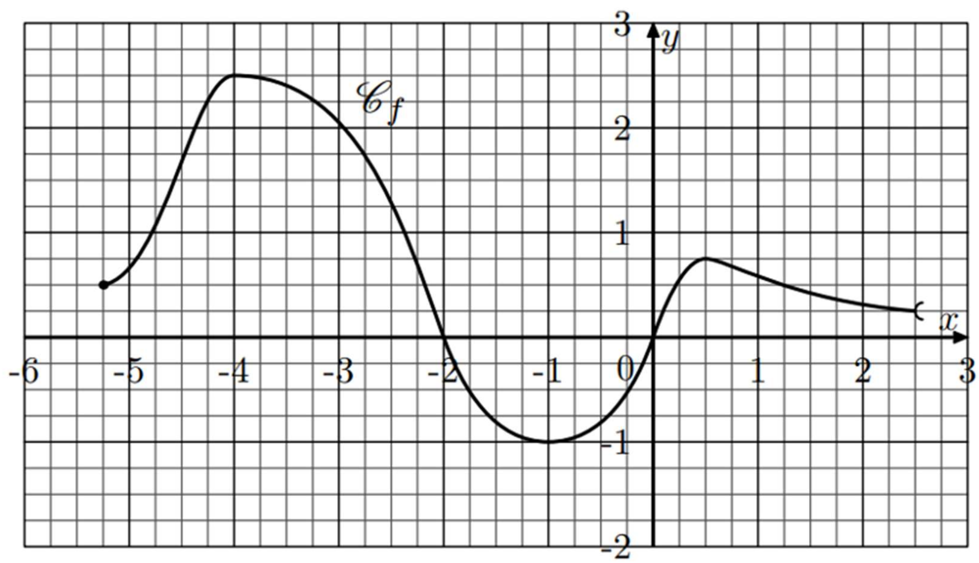
3/ Déterminer maintenant ce maximum de f sans utiliser les variations précédentes.

4/ Tracer la courbe C_f.

Exercice 2 ★

Déterminer graphiquement les variations et extremums d'une fonction

Soit f la fonction représentée ci-dessous par sa courbe représentative C_f.



1. Sur quel(s) intervalle(s) la fonction f est-elle croissante ? Décroissante ?

2. La fonction f admet-elle un minimum ? Si oui, pour quelle(s) valeur(s) de x est-il atteint et quelle est sa valeur ?

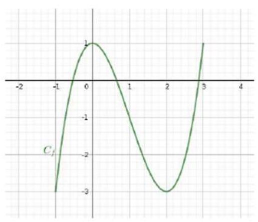
3. La fonction f admet-elle un maximum ? Si oui, pour quelle(s) valeur(s) de x est-il atteint et quelle est sa valeur ?

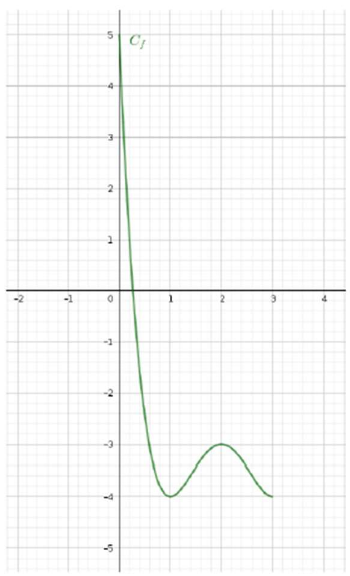
4. Dresse le tableau de variations de la fonction f.

Exercice 3 ★

Construction d'un tableau de variations

Dans les deux cas suivants, construire le tableau de variation de la fonction f définie par son graphe :

1. 

2. 

Exercice 4 * ★

Etude des variations d'une fonction homographique

1. Donner un encadrement de $f(x) = \dfrac{3}{2-x}$ pour $4 \leq x \leq 7$.

2. Montrer que si $2 < a < b$, alors $f(a) < f(b)$.

   Que peut-on en déduire pour la fonction f ?

3. a) Donner la courbe représentative de la fonction f sur le domaine

   de définition suivant $D_f = [-5; 2[\cup]2; 7]$.

   b) Retrouver graphiquement *mais en justifiant* les résultats des questions 1.et 2.

   précédentes.

Exercice 5 * ★

Exploiter un tableau de variations

Voici le tableau de variation de la fonction f :

x	-3		-2		1		4
f	$+\infty$	↘	0	↗	2	↘	-1

1. Quel est le domaine de définition de la fonction f ?
2. La fonction admet-elle un maximum ? Un minimum ? Si oui, préciser.
3. Quelle est l'image de -2 par la fonction f ?
4. Encadrer $f(0)$ et $f(2)$.
5. Comparer, si c'est possible, les nombres suivants :

a) $f(-\frac{3}{2})$ et $f(0)$ b) $f(-1)$ et $f(0)$ c) $f(-1)$ et $f(4)$

Exercice 6 * ★

Tableaux de variations et courbes de fonctions

On donne les tableaux de variations de deux fonctions f et g, construire un graphique possible dans les deux cas.

- f :

x	-3		-1		0		2		3
$f(x)$	-2	↗	2	↘	-1	↗	1	↘	0

- g :

x	-4		0		2		4		7
$g(x)$	$-\frac{2}{3}$	↗	0	↘	‖	↘	2	↗	2.5

Exercice 7 ★★

Autour des fonctions affines

1. Etudier le sens de variation de chacune des fonctions affines suivantes à l'aide d'un tableau de variations.

a) $f(x) = 3x - 2$

b) $g(x) = -4x + 1$

c) $h(x) = 5 - x$

2. Représenter graphiquement les fonctions f, g et h précédentes.

Exercice 8 ★★

Variations de fonctions

Construire le tableau de variations d'une fonction f qui possède les propriétés suivantes :

- elle est définie sur $[-4; 7]$.
- elle est croissante sur $[-4; -1]$.
- elle est décroissante sur $[-1; 4]$.
- elle est croissante sur $[4; 7]$.
- $[-4; 4]$, son maximum est 5.
- $[-1; 7]$, son minimum est -2.
- l'image de -4 est 1.
- $f(7) = 5$

Exercice 9

Etude des variations d'une fonction polynôme du 2nd degré

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 12x + 14$

1. Montrez que $f(x) = 2(x-3)^2 - 4$.

2. Etude des variations de f sur $\mathbb{R}$.

   Soient a et b deux réels quelconques et distincts tels que $a < b$.

   a) Montrez que $f(b) - f(a) = 2(b-a)(b+a-6)$

   b) On suppose que $3 \leq a < b$.

      1) Justifier que $b - a > 0$ et que $b + a - 6 > 0$.

      2) En déduire le signe de $f(b) - f(a)$, puis le sens de variation de f sur $[3; +\infty[$.

      3) Etudiez le sens de variation de f sur $]-\infty; 3]$.

3. a) Donnez la représentation graphique C_f de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

   b) Quelle transformation du plan permet de passer de la parabole $\mathcal{P}$ de la fonction $x \longmapsto 2x^2$ à la courbe C_f ? Justifier graphiquement.

Exercice 10 *

Variation d'une fonction affine

Soit f la fonction affine définie pour tout réel x par $f(x) = -\frac{2}{3}x + b$ et $f(3) = -1$.

1. Retrouver la valeur de b.
2. La fonction f est-elle croissante ? Décroissante ?
3. Pour quelle valeur de x la fonction s'annule ?
4. Dresser le tableau de variation.

Exercice 11 * ★★

Comparaisons et tableau de variations

x	-3		-2		0		2		3
$f(x)$	4	↘	1	↗	2	↘	-3	↗	0

A l'aide du tableau de variations ci-dessus, comparer les nombres :

1. $f(-3)$ .... $f(-2,5)$
2. $f(-2)$ .... $f(-1)$
3. $f(0)$ .... $f(1)$
4. $f(0)$ .... $f(3)$
5. $f(-1)$ .... $f(2,5)$
6. $f(-1)$ .... -1

Exercice 12 * ★★

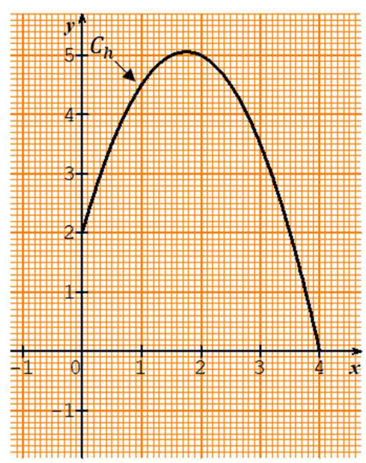
Etude du maximum d'une fonction du 2nd degré

Jules a effectué un saut à moto à l'aide d'une rampe. On note t la durée (en s) de ce saut.

La hauteur (en m) du saut est déterminée en fonction de la durée t par la relation

$h(t) = (-t - 0,5)(t - 4)$ définie sur l'intervalle $[0; 4]$

On donne la courbe représentative de cette fonction ci-dessous :



1. À l'aide de la courbe C_h, répondre aux questions suivantes :

a) Jules dépassera -t-il une hauteur de 5,5 m au cours de son saut ?

b) Quels sont les antécédents de 3 par la fonction h ?

interpréter physiquement ces résultats

c) Quelle hauteur maximale semble être atteinte par Jules ?

d) À quel instant t_0 est-elle atteinte ?

2. Etude algébrique :

a) Montrer que $h(t) = -t^2 + 3,5t + 2$ sur $[0; 4]$

b) Calculer $h(1,75)$, puis $h(t) - h(1,75)$

c) Etudier le signe de $h(t) - h(1,75)$ sur $[0; 4]$.

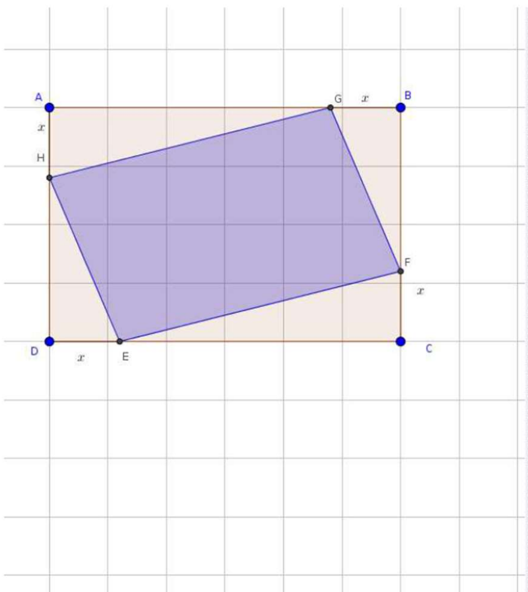
d) En déduire le maximum de $h(t)$ sur $[0; 4]$ et l'instant t_0 auquel il est atteint.

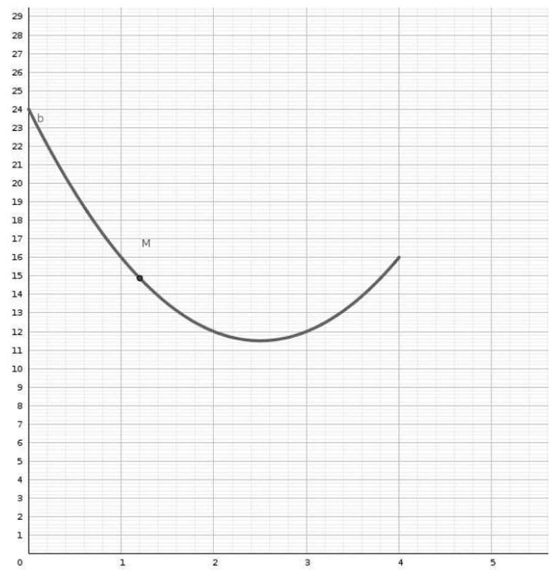
e) Calculer $h(1)$. Interpréter le résultat.

Exercice 13 ★★★

Variations de fonctions

Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB = 6cm$ et $AD = 4cm$.
Soit E un point de $[AB]$.
On pose $x = AE$. Soit F le point de $[BC]$ tel que $BF = x$.
Soit G le point de $[CD]$ tel que $CG = x$.
Soit H le point de $[AD]$ tel que $DH = x$.
Le but de l'exercice est de détermination la position du point E pour que l'aire $A(x)$ du quadrilatère $EFGH$ soit minimale. A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on a tracé la courbe représentative de la fonction A.





1. **A l'aide du graphique**
   Par lecture graphique :
   (a) Pour quelle valeur de x la fonction admet un minimum ?
   (b) Quelle est sa valeur ?
2. **Résolution algébrique**
   (a) Exprimer l'aire du triangle DEH en fonction de x.
   (b) Exprimer l'aire du triangle EFC en fonction de x.
   (c) Montrer que l'aire du quadrilatère $EFGH$ peut s'écrire : $A(x) = 24 - x(4-x) - x(6-x)$
   (d) Montrer que $A(x)$ peut s'écrire : $A(x) = 2x^2 - 10x + 24$.
   (e) Développer et réduire l'expression :$2(x - \frac{5}{2}) + \frac{23}{2}$. Comparer avec $A(x)$.
   (f) Pour quelle valeur de x $A(x) = 2(x - \frac{5}{2}) + \frac{23}{2}$ est minimale ?
   (g) En déduire la position du point E pour que l'aire $A(x)$ du quadrilatère $EFGH$ soit minimale.

Exercice 14 ★★★

Etude des variations d'une fonction rationnelle

1/ a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\frac{2x}{x^2+1} \leq 1$

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-1 \leq \frac{2x}{x^2+1}$

c) Que peut-on en déduire pour $\frac{2x}{x^2+1}$?

2/ Etude des variations de $f : x \longmapsto \frac{2x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$.

Soit u et v deux réels distincts quelconques tels que $u < v$.

a) Ecrire $f(u) - f(v)$ sous forme d'un quotient factorisé

b) Etudier le signe de $f(u) - f(v)$ sur $[-1; 1]$ et déduire le sens de variation de f sur $[-1; 1]$

c) Etudier le signe de $f(u) - f(v)$ sur $]-\infty; -1]$ et déduire le sens de variation de f sur $]-\infty; -1]$

d) Etudier le signe de $f(u) - f(v)$ sur $[1; +\infty[$ et déduire le sens de variation de f sur $[1; +\infty[$

e) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

3/ a) Dresser un tableau de valeurs de f au pas de 1 sur $[-5; 5]$ à l'aide de la calculatrice.

b) Représenter la courbe C_f sur $[-5; 5]$ dans un repère orthogonal (O, I, J).

c) Quels sont les extremums de f sur $\mathbb{R}$? Justifier

d) Quel résultat déduit-on pour l'encadrement de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$? vérifiez le graphiquement

Exercice 15 ★★★

Etudier les variations de la fonction inverse par le calcul

Soit $f(x) = \frac{1}{x}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$.

Le but de cet exercice sera de démontrer les variations de la fonction inverse en étudiant le signe de $f(a) - f(b)$.

Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$.

1. Démontrer l'égalité suivante :

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$$

2. Sur l'intervalle $\mathbb{R}^{*+}$:

   a) Etudier le signe de $f(a) - f(b)$.
   b) En déduire le sens de variation de f sur l'intervalle $\mathbb{R}^{*+}$.

3. Sur l'intervalle $\mathbb{R}^{*-}$:

   a) Etudier le signe de $f(a) - f(b)$.
   b) En déduire le sens de variation de f sur l'intervalle $\mathbb{R}^{*-}$.

4. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

Exercice 16 * ★★★

Variations de fonctions

f est une fonction définie sur $[-4; 5]$ telle que :

- f est décroissante sur $[-4; -1]$,
- f est croissante sur $[-1; 0]$,
- f est décroissante sur $[0; 5]$,
- $f(-4) = f(0) = -1$ et $f(-1) = -3$.
- Le minimum de la fonction est -4.

1. Dresser le tableau de variations de f.
2. Quel est le maximum de la fonction f. Pour quelle(s) valeur(s) est-il atteint ?
3. Comparer $f(2)$ et $f(3)$.
4. Tracer une courbe possible pour la fonction f.

Exercice 17 * ★★★

Etude du maximum de fonctions géométriques du 2nd degré

Un point M se déplace sur un demi-cercle de centre O et de diamètre $[AB]$ tel que $AB = 4$.

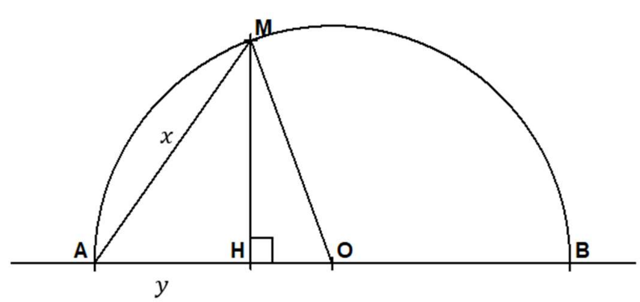
Le point M se projette orthogonalement en H sur $[AB]$.

On pose $AM = x$ et $AM = y$.

1. Montrez que $x \in [0; 4]$.
2. a) Calculez MH^2 de deux façons différentes
   - En considérant le triangle AMH ;
   - En considérant le triangle OMH.

   b) Déduisez-en que $y = \frac{1}{4}x^2$.
3. f est la fonction définie par sur $[0; 4]$ par :

   $f(x) = \frac{1}{4}x^2$.



a. Etudiez les variations de f sur $[0; 4]$.

b. Complétez le tableau de valeurs suivant :

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0				

c. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormal

4. g est la fonction définie sur $[0; 4]$ par : $g(x) = x$.

a) Tracer la courbe représentative de g dans le repère précédent.

b) Déduire du graphique que pour tout $\in [0; 4]$, $g(x) \geq f(x)$

c) *Etude algébrique* :

Soit la fonction h définie par $h(x) = g(x) - f(x)$.

Etudier le signe de $h(x)$ sur $[0; 4]$, conclure et interpréter ce résultat graphiquement.

Pouvait-on le prévoir ? Justifier.

5. Etude des variations de h sur $[0; 4]$.

a) Montrez que $h(x) = 1 - (\frac{1}{2}x - 1)^2$

b) Etude des variations sur de h sur $[0; 2]$.

c) Etude des variations sur de h sur $[2; 4]$.

d) En déduire que h admet un maximum et la valeur de x pour laquelle il est atteint.

e) Quelle est la valeur de l'angle $\widehat{BAM}$ correspondant à ce maximum ? Justifier.

Exercice 18 * ★★★

<u>Etude du signe de $f(a) - f(b)$</u>

Soit $f(x) = \frac{3}{x^2+1}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. Pour deux réels a et b, Montrer que $f(a) - f(b) = \frac{3(b+a)(b-a)}{(a^2+1)(b^2+1)}$

2. Etudier le signe de $f(a) - f(b)$ sur l'intervalle $[\ 0\ ;\ +\infty\ [$ pour $a < b$, puis en déduire le sens de variation de f sur cet intervalle.

3. Etudier le signe de $f(a) - f(b)$ sur l'intervalle $]-\infty\ ; 0\ ]$ pour $a < b$, puis en déduire le sens de variation de f sur cet intervalle.

4. Dresser le tableau de variation de f.