CORRIGEO

Seconde Générale et Technologique

Maths | Chapitre 1 : Nombres entiers, arithmétique

Enoncés des exercices

Les exercices sont classés en trois niveaux de difficulté :

- ★ Exercices d'application : comprendre les notions essentielles du cours
- ★★ Exercices d'entraînement : prendre les bons reflexes
- ★★★ Exercices d'approfondissement : aller plus loin

Exercices gratuits	Exercices sur abonnement*
★ 1 ★★ 7 ★★★ 13	★ 2 – 3 – 4 – 5 – 6 ★★ 8 – 9 – 10 – 11 – 12 ★★★ 14 – 15 – 16 – 17 – 18

Exercice 1 ★

Lister les diviseurs d'un nombre

1. Quels sont les nombres entiers naturels diviseurs de 180 ?
2. Quels sont les nombres entiers relatifs diviseurs de -275 ?

Exercice 2 *★

Multiple d'un nombre

1. Soit a et b deux multiples de 5. Montrer que que $a+b$ est aussi un multiple de 5.
2. Soit a un multiple de 7 et b un multiple de 21. Montrer que :
   - $a+b$ est un multiple de 7
   - $a \times b$ est un multiple de 49

Exercice 3 *★

« Résoudre des problèmes d'âge avec l'arithmétique »

1/ L'âge de Paul est le PPCM de 21 ; 7 et 6. Quel est son âge ?

2/ L'âge de Pierre est le PGCD de 56 ; 96 et 120 . Quel est son âge ?

3/ La somme des âges de Paul, Pierre et Jean est égal à 6 fois l'âge de Jean.

Quel est l'âge de Jean ?

4/ L'âge de Sabrina est le PGCD des âges de Paul, Pierre et Jean.

Quel est l'âge de Sabrina ?

Exercice 4 * ★

Déterminer la parité d'un nombre

1. Quelle est la parité des expressions suivantes ?

$$A = 2 \times (3^{101} + 7) + 1$$

$$B = 8 \times 99^{77} + 77 \times 2^{99}$$

$$C = 7^{363}$$

2. Lubin prétend que l'expression $D = (3n + 2)(2n - 4) - (4n - 1)$ est impaire pour tout entier naturel n. A-t-il raison ?

3. Démontrer que, pour tout entier naturel a, $a^2 + a$ est pair.

Exercice 5 * ★

Diviseur d'un nombre

a, b et m sont trois entiers tels que m soir un diviseur de a et de b .

1. m est-il un diviseur de $a \times b$?
2. m est-il un diviseur de $a + b$?

Exercice 6 * ★

Arithmétique : « Etude d'une fraction rationnelle »

On donne $G = \frac{n+21}{n-4}$ où n désigne un nombre entier strictement supérieur à 4.

1. Déterminer la forme irréductible de G lorsque $n = 14$.
2. L'écriture obtenue a-t-elle une forme décimale exacte ? Si oui, quelle est cette forme ?
3. a. Démontrer que $G = 1 + \frac{25}{n-4}$.

   b. En déduire toutes les valeurs de n pour lesquelles G est un nombre entier.

CORRIGEO

Exercice 7 ★★

Produit de deux entiers pairs ou impairs

1. Soient a et b deux nombres entiers pairs. Montrer que le produit de a par b est un nombre pairs.
2. Soient a et b deux nombres entiers impairs. Montrer que le produit de a par b est un nombre impairs

Exercice 8 * ★★

« Relation entre la parité d'un entier naturel a et celle de ses puissances 2, 3 et 4 »

Les Exercices suivants sont indépendants :

Exercice 1

1. 1) Soient les entiers naturels suivants : $2 ; 4 ; 6 ; 8$.
   a. Calculer le carré de chacun de ces entiers et étudier leur parité.
   b. Quelle conjecture peut-on faire ?

   2) Soient les entiers naturels suivants : $64 ; 100 ; 144 ; 196$.
   a. Calculer la racine carrée de chacun de ces entiers et étudier leur parité.
   b. Quelle conjecture peut-on faire ?
2. Démontrez les deux conjectures précédentes.
3. Enoncez la propriété démontrée.

Exercice 2

Soit a, b et c trois entiers naturels impairs.

Montrez que $a^2 + b^2 + c^2$ est un nombre impair.

Exercice 3

Soit a un entier naturel impair.

a) Démontrez que a^3 est impair.
b) Qu'en est-il pour a^4 ? Montrez-le.

Exercice 9 *★★

Utiliser la décomposition en produit de facteurs premiers

1. Combien de diviseurs positifs communs les nombres 1020 et 4830 ont-ils ?
2. Ecrire sous forme irréductible la fraction $\frac{1020}{4830}$
3. Ecrire les nombres $\sqrt{1350}$ et $\sqrt{2772}$ sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b dans $\mathbb{N}$ tel que b soit le plus petit possible
4. Ecrire sous forme irréductible la fraction $\frac{\sqrt{1350}\times\sqrt{1386}}{\sqrt{2772}}$

CORRIGEO

Exercice 10 * ★★

Diviseur d'un nombre

Soit n un entier divisible par 6.
Montrer que 6 divise aussi $(n-3)(n-2)$.

Exercice 11 * ★★

Résoudre un problème de logistique avec l'arithmétique

Deux bus quittent une station de la banlieue Parisienne à 8h.

L'un des deux bus « ligne 120 » revient à cette station toutes les 48 min. et l'autre bus « ligne 110 » toutes les 54 min.

1/ À quelle heure les deux bus seront-ils à nouveau ensemble à cette même station pour la première fois, ceci afin que les deux chauffeurs, après avoir passé la relève aux deux suivants, puissent repartir ensemble pour rentrer chez eux ?

2/ Sachant que la longueur du trajet pour le bus « ligne 120 » est de 35 km et que celle du bus « ligne 110 » est de 42 km, déterminer la vitesse moyenne pour chaque bus en km/h ?

Exercice 12 * ★★

Problème de division

Ce problème consiste à trouver tous les entiers relatifs a tels que le rationnel $\frac{5a+3}{a+3}$ soit un entier.

1. Démontre que $\frac{5a+3}{a+3} = 5 - \frac{12}{a+3}$
2. Détermine toutes les valeurs de a qui répondent au problème.

Exercice 13 ★★★

Arithmétique : « Utiliser une décomposition en produit de facteurs premiers »

Soit $A = 1\,296$ et $B = 1\,764$.

1. Décomposer A et B en produit de facteurs premiers
2. En déduire sans calculatrice :
   a) $\sqrt{A}$
   b) $\sqrt{B}$
3. Ecrire, sans utiliser la calculatrice, sous forme de fractions irréductibles les quantités suivantes.
   a) $\sqrt{\frac{A}{B}}$
   b) $\frac{1}{\sqrt{A}} - \frac{1}{\sqrt{B}}$

CORRIGEO

Exercice 14 *★★★

Vrai ou Faux

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant :

1. Soit a un entier. Si a^2 est pair, alors a est pair.

2. Si n est impair, alors $n^2 - 1$ est un multiple de 3.

3. Soit ABC un triangle rectangle tel que $AB = a$, $BC = b$ et $AC = c$ avec a, b et c trois entiers relatifs. L'une de ces longueurs est forcément paire.
(aide : raisonne par l'absurde)

Exercice 15 *★★★

Propriété des diviseurs

Soient a et b deux nombres entiers.
soient n_1 et n_2 deux autres nombres entiers.

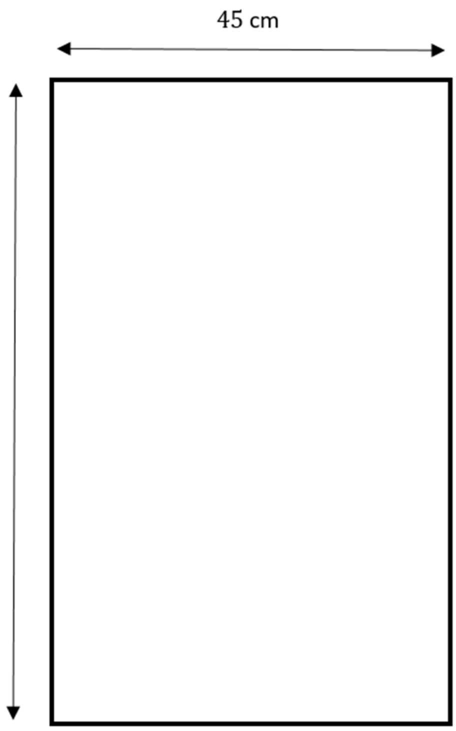
d est un diviseur commun à a et b.

1. Montrer que d est un diviseur de : $a - b$ et de $a + b$.
2. Montrer que d est un diviseur de : $n_1 \times a + n_2 \times b$.

Exercice 16 * ★★★

Résoudre le problème d'un carreleur avec l'arithmétique

Un artisan « carreleur » doit découper des carrés identiques dans la dalle rectangulaire représentée ci-dessous et ceci sans qu'il y ait de chutes.



1. a. Peut-il découper des carrés de 5 cm de côté ? de 3 cm de côté ? Justifier.
   b. Quelle contrainte doit vérifier le côté (en cm) du carré ?
   c. Décomposer 45 et 81 en produit de facteurs premiers.
   En déduire le plus grand côté possible du carré,
   Ainsi que le nombre de carrés.
2. Sur un autre chantier, l'artisan doit réaliser un carré en assemblant plusieurs de ces dalles rectangulaires sans les découper.
   a. Quelle contrainte doit vérifier la longueur (en cm) du côté de ce carré ?
   b. Quelle est la longueur du plus petit côté du carré que l'artisan peut former ?
   c. Combien de dalles utilisera-t-il pour cela ?
   d. Quelle sera alors l'aire carrée couverte en cm² ? en m² ?

Exercice 17 * ★★★

Problèmes de nombres premiers

1. Quels sont les entiers naturels admettant exactement trois diviseurs ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$.
   On définit $q = (n^2 + 3)(n - 3)$.
   Trouver pour quelle(s) valeur(s) de n, q est un nombre premier.

Exercice 18 * ★★★

Nombres pairs et impairs

1. Montrer que le produit de deux entiers consécutifs est toujours pair.
2. Montrer que le produit de deux nombres pairs est un multiple de 4.
3. Montrer que la somme de deux nombres impairs consécutifs est toujours un multiple de 4.
4. Montrer que le cube d'un nombre pair est un multiple de 8.