

## Seconde Générale et Technologique

### Maths | Chapitre 2 : Calcul littéral et applications

#### Enoncés des exercices

Les exercices sont classés en trois niveaux de difficulté :

- ★ Exercices d'application : comprendre les notions essentielles du cours
- ★★ Exercices d'entraînement : prendre les bons réflexes
- ★★★ Exercices d'approfondissement : aller plus loin

Exercices gratuits	Exercices sur abonnement*
★ 1	★ 2 – 3 – 4 – 5 – 6
★★ 7	★★ 8 – 9 – 10 – 11 – 12
★★★ 13	★★★ 14 – 15 – 16 – 17 – 18

#### Exercice 1 ★

##### Calculs avec les fractions, Ensembles de nombres :

- Soit  $P = \frac{8}{3} - \frac{5}{3} + \frac{20}{21}$   
Calculer  $P$  en détaillant les étapes du calcul et écrire le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.
- Calculer  $C = \left(2 + \frac{2}{3}\right) \div \left(\frac{4}{5} - \frac{2}{3}\right)$ .
- Déterminer le plus petit ensemble de nombres qui contient  $P$ .
- Même question avec  $C$ .

#### Exercice 2 \*★

##### Développer une expression algébrique

Développer puis réduire chacune des expressions suivantes :

- $(x - 6)(x + 6)$
- $(y - 8)^2$
- $(5x + 2)^2$
- $3x(2x - 5) - 3(x^2 + 3x)$

## Exercice 3 \*★

Développement et factorisation avec les identités remarquables

1. Développer les expressions suivantes :

(a)  $(x + 2)^2$

(b)  $(x - 3)^2$

(c)  $(2x + 3)^2$

(d)  $(3x - 2)^2$

2. Factoriser les expressions suivantes :

(a)  $x^2 - 12x + 36$

(b)  $4x^2 + 28x + 49$

(c)  $9x^2 + 12x + 16$

## Exercice 4 \*★

**Calcul littéral: « Comment factoriser une expression polynômiale ? »**

1/ Factoriser les expressions suivantes en faisant apparaître un facteur commun

a.  $3x^2 - 4x$    b.  $6xy + y$    c.  $3(x - 2)^2 - 4(x - 2)$    d.  $(x - 1)^2 - x + 1$

2/ Factoriser les expressions suivantes en utilisant une identité remarquable

a.  $4x^2 - 4x + 1$    b.  $(4x - 3)^2 - x^2$    c.  $16x^2 + 8x + 1$    d.  $(3x - 2)^2 - (x + 2)^2$

3/ Factoriser les expressions suivantes en combinant les deux méthodes précédentes :

$A(x) = (4x^2 - 4x + 1) - 2x + 1.$

$B(x) = 3x + 1 - (9x^2 - 1) + 6(3x + 1)^2$

## Exercice 5 \* ★

**Factoriser une expression algébrique**

Factoriser chacune des expressions suivantes :

a)  $16x^2 - 1$

b)  $15a^2 + 3a$

c)  $(2x - 1)(x - 3) + 5(x - 3)$

d)  $(2x + 5)^2 - (x - 3)^2$

## Exercice 6 \* ★

**Inéquations et encadrements**

1. Résoudre les inéquations suivantes :

(a)  $2x - 3 \leq -3x + 4$

(b)  $-x + 4 \geq -2x + 3$

2. Soit  $x$  un nombre tel que  $-2 < x < 4$ , donner un encadrement de :

(a)  $3x - 7$

(b)  $-5x + 2$

## Exercice 7 ★★

**Simplification d'expressions fractionnaires**

Après avoir déterminer les valeurs interdites, écrire les quatre expressions suivantes sous la forme d'une fraction la plus simple possible :

a)  $\frac{1}{x} + \frac{4}{3x}$

b)  $\frac{3x}{x+5} + 2$

c)  $5 - \frac{x-1}{x+2}$

d)  $3 - \frac{x^2+3x-4}{(x-1)(x+2)}$

## Exercice 8 \* ★★

Comparaison de nombres

Comparer les nombres suivants :

1.  $\frac{10^{23} - 1}{10^{23} + 1}$  et 1

2.  $1 + \sqrt{2}$  et  $\frac{1}{1 - \sqrt{2}}$ .

3.  $\frac{n - 1}{n + 3}$  et  $\frac{n - 2}{n + 3}$  pour  $n \in \mathbb{N}$

## Exercice 9 \* ★★

**Factorisation d'une expression polynômiale du 2<sup>nd</sup> degré sans utiliser les formules générales**

On se propose de factoriser l'expression polynômiale  $24x^2 + 14x + 1$  pour pouvoir ensuite résoudre l'équation  $24x^2 + 14x + 1 = 0$ . *Bien sûr sans utiliser la technique générale de résolution de l'équation du 2<sup>nd</sup> degré vue en classe de première.*

Pour cela, on procède comme suit.

Soit les expressions  $A(x)$  et  $B(x)$  suivantes :

$$A(x) = (5x + 1)^2 - 9x^2 \text{ et } B(x) = (2x + 1)(2x - 1) + (2x + 1)^2$$

1/ Développer les expressions  $A(x)$  et  $B(x)$ .

2/ Factoriser les expressions  $A(x)$  et  $B(x)$ .

3/ Déterminer la forme développée de  $A(x) + B(x)$ .

4/ En déduire la forme factorisée de  $24x^2 + 14x + 1$ .

5/ En déduire la résolution de l'équation  $24x^2 + 14x + 1 = 0$

## Exercice 10 \* ★★

**Résolution algébrique d'équations et d'inéquations**1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

a)  $(x + 3)(2x - 5) = 0$

b)  $(x - 5)(3x - 7) - (9x - 4)(x - 5) = 0$

c)  $36x^2 - 12x + 22 = 21$

d)  $(3x + 4)^2 = (5x - 6)^2$

e)  $\frac{1-3x}{5x+2} = 0$

f)  $\frac{3}{6x+9} = 4$

g)  $\frac{2}{3x+4} - \frac{9}{7x-1} = 0$

2. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes :

a)  $5x + 1 < 3x$

b)  $-5x \leq 1$

c)  $(x - 1)(2x + 3) - 2(x^2 + 1) > 0$

## Exercice 11 \* ★★

**Équations produits.**

Résoudre les équations suivantes :

1. Sans factorisation :

(a)  $(4x + 3)(3x - 7) = 0$

(b)  $x(2x - 13) = 0$

2. Avec factorisation :

(a)  $(2x - 3)(x + 4) + (2x - 3)(x + 1) = 0$

(b)  $(x - 1)^2 - (3x - 2)^2 = 0$

## Exercice 12 \* ★★

**Comment comparer deux fractions rationnelles ?**

Soit  $x$  et  $y$  deux réels de l'intervalle  $]2; +\infty[$ , on considère les deux fractions rationnelles  $A$  et  $B$  suivantes :

$$A = \frac{x-2}{y-2} \quad \text{et} \quad B = \frac{x+2}{y+2}.$$

1. Montrer que  $A - B = \frac{4(x-y)}{(y-2)(y+2)}$
2. Comparer alors  $A$  et  $B$  selon les valeurs de  $x$  et de  $y$
3. Sans calculatrice, comparer alors les nombres suivants :
  - a)  $\frac{119\,999\,998}{899\,999\,998}$  et  $\frac{120\,000\,002}{9\,000\,000\,002}$
  - b)  $\frac{9\,999\,998}{8\,999\,998}$  et  $\frac{10\,000\,002}{9\,000\,002}$
4. Que se passe-t-il pour  $A$  et  $B$  si  $x = y$  ?

## Exercice 13 ★★★

**équation produit et identité remarquable**

1. factoriser

$$(2x - 3)^2 - (3x + 2)^2$$

2. résoudre

$$(2x - 3)^2 - (3x + 2)^2 = 0$$

## Exercice 14 \*★★★★

### Résoudre des problèmes d'âge avec des systèmes et des équations spécifiques ?

1. On souhaite déterminer l'âge de trois personnes de deux façons différentes :

A/ On veut déterminer l'âge de Pierre et de Paul avec les données suivantes.

Le produit de leurs âges est égal à 440 ;

La somme de leurs âges est égale à 42 ;

Paul est plus jeune que Pierre.

- 1) Pour cela, on procède comme suit :

Soit  $p$  le produit des âges  $n_1$  et  $n_2$  respectivement de Pierre et Paul, on écrit donc

$$p = n_1 \times n_2$$

Soit  $s$  la somme des âges  $n_1$  et  $n_2$  respectivement de Pierre et Paul, on écrit donc

$$s = n_1 + n_2.$$

a) Ecrire le système composé des deux conditions sur la somme et le produit des âges.

b) En déduire une équation du 2<sup>nd</sup> degré que l'on résoudra, avec pour inconnue  $n_1$  ou  $n_2$ , après avoir écrit **la forme canonique\*** du trinôme du 2<sup>nd</sup> degré correspondante que l'on factorisera ensuite. **NB : voir le paragraphe (6) des rappels de cours.**

- 2) Sachant que la somme des âges de Pierre, Paul et Jean est égale trois fois l'âge de Jean.

Déterminer l'âge de Jean.

- 3) Sachant que le quotient du produit des âges de Pierre, Paul et Jacques par la somme de leurs âges est égale à 70,4. Déterminer l'âge de Jacques.

**Aide :** On pourra poser  $n_3$  = âge de Jacques et on utilisera  $70,4 = \frac{352}{5}$ . pour ensuite écrire,

l'équation rationnelle avec pour inconnue  $n_3$  et la résoudre.

## Exercice 15 \*★★★★

### Résolution de problème : dans un triangle rectangle

Soit  $ABC$  un triangle rectangle en  $A$  tel que l'angle  $\widehat{ABC} = 60^\circ$  et l'hypoténuse soit 5 cm plus grand que la longueur  $AB$ .

Déterminer les valeurs exactes des trois côtés du triangle  $ABC$ .

## Exercice 16 \*★★★★

### Système d'inéquations

Résoudre le système d'inéquation suivant.

Représenter graphiquement l'ensemble des solutions et le donner sous forme d'intervalle.

$$\begin{cases} 2x - 3 \leq x + 5 \\ 3 - x < -1 + 3x \end{cases}$$

## Exercice 17 \* ★★★★★

**Comment utiliser le calcul littéral pour résoudre des équations du 2<sup>nd</sup> degré complètes et quelconques sans la méthode générale du 2<sup>nd</sup> degré vue en 1<sup>ère</sup> ?**

**Objectif :** Utiliser le développement et la factorisation de deux expressions littérales auxiliaires pour factoriser un trinôme du 2<sup>nd</sup> degré complet et pouvoir ensuite résoudre plusieurs équations du 2<sup>nd</sup> degré.

On donne  $A = (3x + 1)^2 - 2(x + 2)(3x + 1)$  et  $B = 9x^2 - 1 + (2x - 4)(3x + 1)$

- a) Factoriser  $A$  et  $B$ , puis  $A + B$ .
- b) Développer  $A$  et  $B$ , puis  $A + B$ .
- c) À l'aide de ce qui précède, indiquer la factorisation de  $18x^2 - 18x - 8$ .
- d) En déduire la résolution des équations suivantes :

1.  $18x^2 - 18x - 8 = 0$  ;

2.  $18x^2 - 18x - 8 = -8$  ;

3.  $18x^2 - 18x - 8 = 3x + 1$

## Exercice 18 \* ★★★★★

**Résolution de problème : mise en équation**

Un père lègue à ses trois enfants toute sa fortune. L'aîné reçoit un tiers de la somme. Le deuxième enfant reçoit la moitié de ce qu'a reçu l'aîné à laquelle s'ajoutent 15 000€. Enfin, le cadet reçoit la somme de 75 000€.

Déterminer la somme partagée et la part de chacun.