Seconde Générale et Technologique

Maths | <u>Chapitre 3 :</u> Géométrie plane

Enoncés des exercices

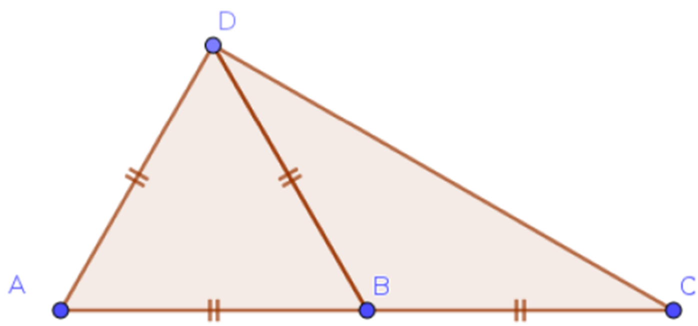
Les exercices sont classés en trois niveaux de difficulté :

- ★ Exercices d'application : comprendre les notions essentielles du cours
- ★★ Exercices d'entraînement : prendre les bons reflexes
- ★★★ Exercices d'approfondissement : aller plus loin

Exercices gratuits	Exercices sur abonnement*
★ 1 ★★ 7 ★★★ 13	★ 2 – 3 – 4 – 5 – 6 ★★ 8 – 9 – 10 – 11 – 12 ★★★ 14 – 15 – 16 – 17 – 18

Exercice 1 ★

Géométrie plane



ABD est un triangle équilatéral.
BCD est un triangle isocèle en B.
Démontrer que le triangle ADC est rectangle en D.

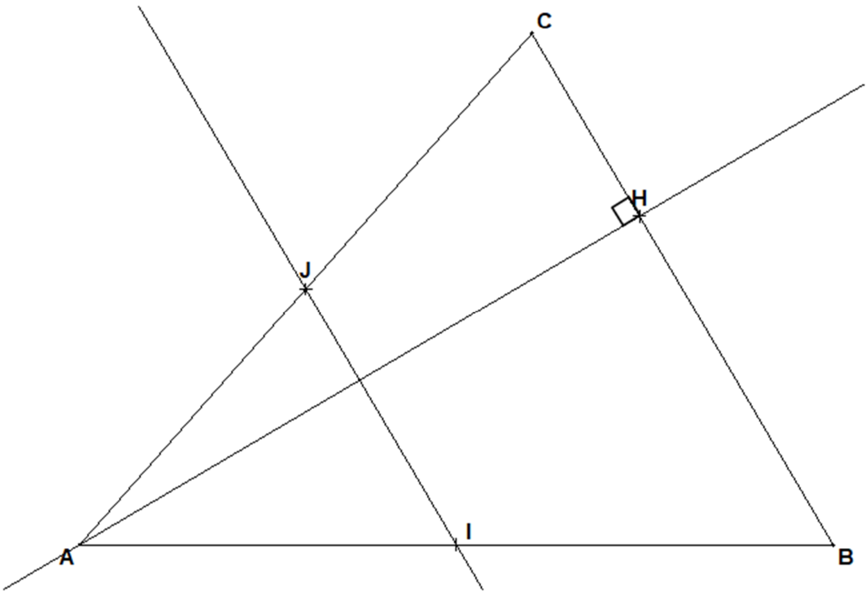
Exercice 2 *★

Triangles, droite des milieux et Aires

ABC est un triangle, I et J sont les milieux de $[AB]$ et $[AC]$.

La perpendiculaire à (BC) passant par A coupe $[BC]$ en H.

Voir la figure ci-dessous :



1. a) Quelle conjecture peut-on faire sur le rôle de la droite (IJ) pour $[AH]$?

   b) On se propose de démontrer cette conjecture. Pour cela on procède comme suit :

   1) Dans le triangle ABC , démontrer que (IJ) est parallèle à (BC).

   2) Dans le triangle ABH , soit K le point d'intersection entre les droites (IJ) et (AH) .

   Démontrer que K est le milieu du segment $[AH]$.

   3) Conclure sur le rôle de la droite (IJ) pour $[AH]$.

2. On donne $AH = 3$ cm et $BC = 4$ cm.

   a) Déterminer l'aire du triangle ABC.

   b) Déterminer directement en utilisant les résultats précédents IJ et AK.

   c) En déduire l'aire du triangle AIJ.

3. a) Pouvait-on obtenir directement l'aire du triangle AIJ en fonction de l'aire du triangle ABC ?

b) Si oui, justifier précisément, sans faire aucun calcul numérique, et en démontrant la relation entre les aires A_{AIJ}et A_{ABC} .

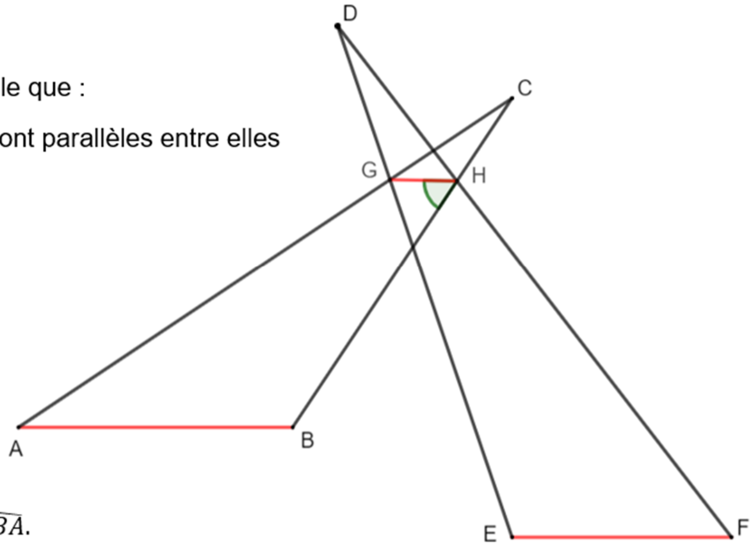
CORRIGEO

Exercice 3 *★

Calcul d'une longueur et d'un angle dans une figure

On a construit la figure ci-dessus telle que :

- Les droites $(AB), (EF)$ et (GH) sont parallèles entre elles
- $DH = 9$
- $DF = 18$
- $CG = 3$
- $AG = 10{,}5$
- $EF = 4{,}5$
- $\widehat{BHG} = 67°$

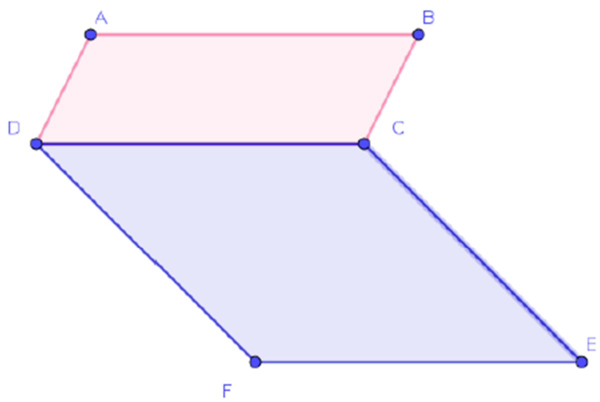


1. Déterminer la longueur AB.
2. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{HBA}$.

Exercice 4 *★

Parallélogrammes

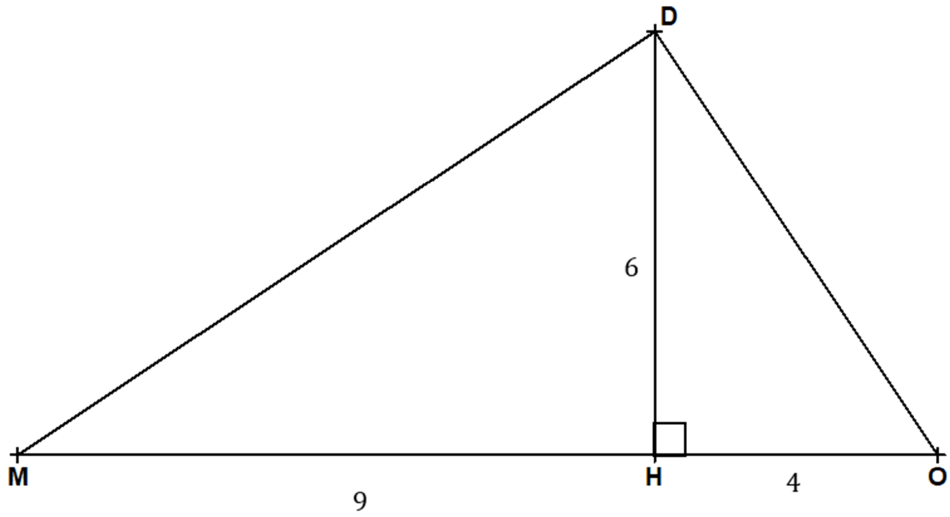
- $ABCD$ est un parallélogramme.
- $FECD$ est un parallélogramme.



Démontrer que $ABEF$ est un parallélogramme.

Exercice 5 *★

Triangle rectangle et Calcul d'aire



On donne la figure ci-dessus donnant les longueurs et le codage nécessaires pour répondre au problème suivant : Le triangle OMD est il rectangle ?

Pour répondre à cette question, on donne la mode opératoire suivant :

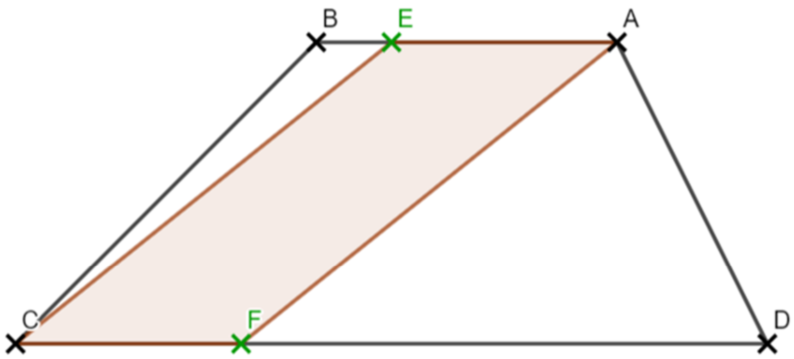
1. Déterminer la longueur OD.
2. Déterminer la longueur MD.
3. En déduire la nature du triangle OMD.
4. Calculer alors l'aire du triangle OMD de deux manières différentes.

Exercice 6 * ★

Déterminer la nature d'un quadrilatère

Soit $ABCD$ un trapèze tel que le segment $[CD]$ soit la base du trapèze.

On place le point E sur le segment $[AB]$ et le point F sur le segment $[CD]$ tel que $AE = CF$.



Quelle est la nature du quadrilatère $AECF$?

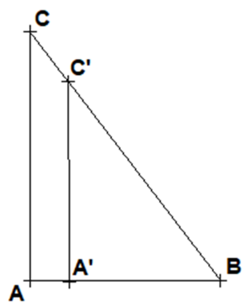
Exercice 7 ★★

Géométrie plane : « Utiliser un raisonnement par contraposée »

Le triangle ABC est tel que $AB = 3$, $BC = 5$ et $AC = 3{,}9$.

A' est le point de $[AB]$ tel que $BA' = 2{,}5$

C' est le point de $[BC]$ tel que $BC' = 4$

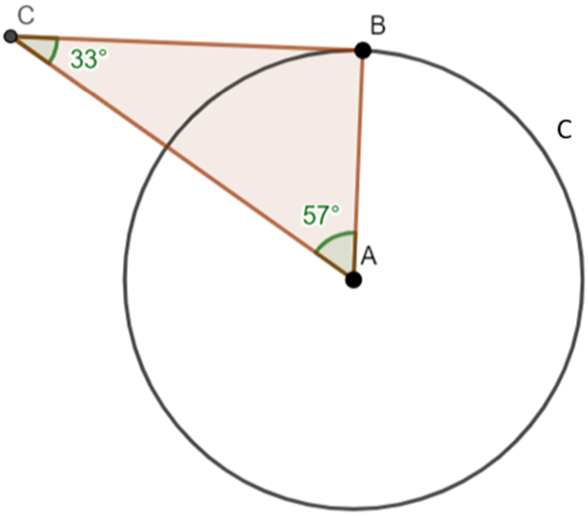


1. **Le triangle ABC est il rectangle ?**
2. **Les droites (AC) et $(A'C')$ sont-elles parallèles ?**

Exercice 8 * ★★

Cercle et angles

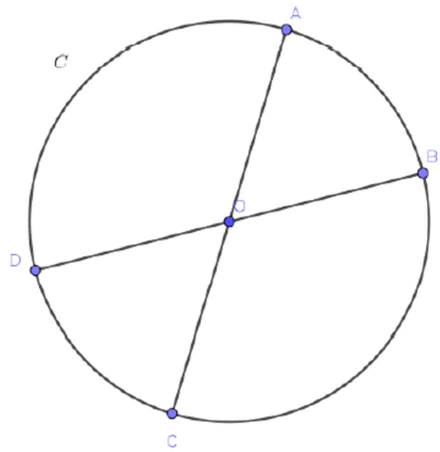
Soit C le cercle de centre A et de rayon 4 cm. On place un point B sur ce cercle et on construit le triangle ABC tels que $\widehat{ACB} = 33°$ et $\widehat{BAC} = 57°$.



1. Montrer que (BC) est la tangente au cercle C en B.
2. Calculer l'aire du triangle ABC
3. Le centre du cercle circonscrit au triangle ABC appartient-il au cercle C ?

Exercice 9 * ★★

Rectangle inscrit dans un cercle.

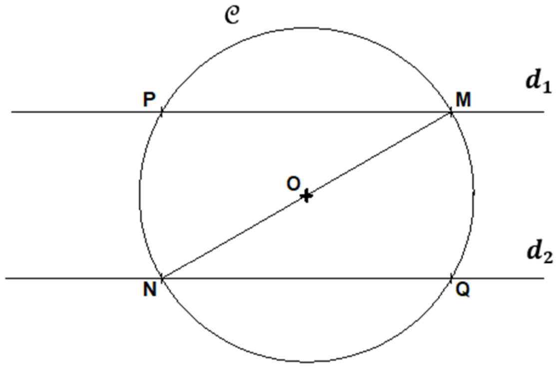


- C est un cercle de centre O.
- $[AC]$ et $[BD]$ sont des diamètres de C.

Démontrer que $ABCD$ est un rectangle.

Exercice 10 * ★★

Symétrie centrale, cercle et droites



Sur la figure ci-contre, nous savons que :

$[MN]$ est un diamètre du cercle $\mathcal{C}$ de centre O.

La droite d_1 passant par M recoupe $\mathcal{C}$ en P.

La droite d_2 parallèle à d_1 passant N recoupe $\mathcal{C}$ en Q.

1. Par la symétrie centrale s de centre O :
   a) Quel est le symétrique du point M ?
   b) Quelle est la symétrique de la droite d_1 ?
   c) Quel est le symétrique du cercle $\mathcal{C}$?
   d) En déduire le symétrique du point P ?
2. Déterminer alors la nature du quadrilatère $MPNQ$
3. a) Sachant que le rayon du cercle $\mathcal{C}$ est de 3 cm et que l'angle $\widehat{NMP}$ a pour mesure $30°$, déterminer les valeurs exacte des longueurs MN, MP, PN.
   b) Déduire de ces derniers résultats l'aire exacte du quadrilatère $MPNQ$.
   c) Calculer l'aire exacte du disque $\mathfrak{D}$ délimité par le cercle $\mathcal{C}$.
   d) Calculer le rapport $\boldsymbol{\rho}$ exact égal à l'aire du quadrilatère $MPNQ$ divisé par l'aire du disque $\mathfrak{D}$
   e) Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de ce rapport, puis l'écrire en pourcentage.

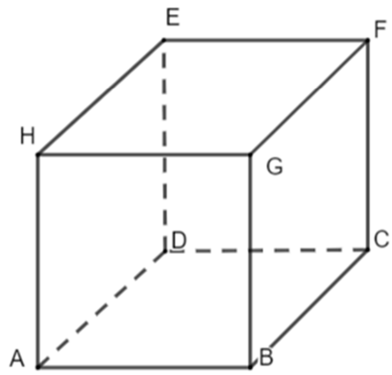
Exercice 11 * ★★

Calculer des longueurs et des angles dans un solide

Soit $ABCDEFGH$ un cube de côté 5 cm.

Le but de cet exercice sera de déterminer la mesure des angles $\widehat{AFH}$ et $\widehat{FAH}$.

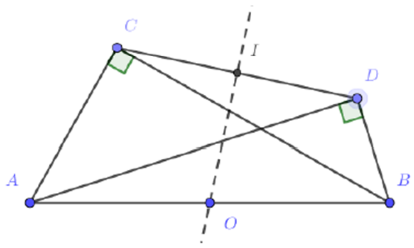
1. Dans le carré $EFGH$, déterminer la longueur FH.
2. On admettra que le quadrilatère $AHFC$ est un rectangle.
   Déterminer une valeur approchée de l'angle $\widehat{AFH}$.
3. En déduire une valeur approchée de l'angle $\widehat{FAH}$.



Exercice 12 * ★★

Deux triangles dans un demi-cercle.

- ABC et ABD sont deux triangles rectangles.
- O est le milieu de $[AB]$.
- I est le milieu de $[CD]$



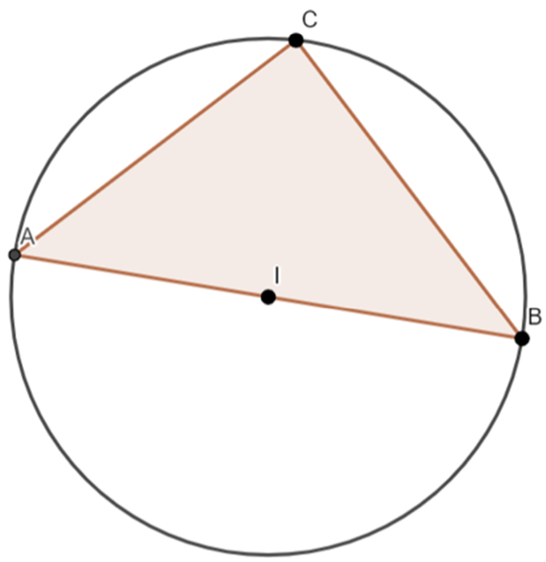
1. Démontrer que OCD est un triangle isocèle en O.
2. En déduire que OI est perpendiculaire à (CD).

Exercice 13 ★★★

Démonstration du théorème de l'angle inscrit

Le but de cet exercice sera de démontrer la propriété suivante :

« Si un triangle est inscrit dans un cercle et que l'un de ses côtés est un diamètre de ce cercle, alors ce triangle est rectangle »



Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle tel que [AB] est un diamètre de ce cercle.

On note I le milieu de [AB], α l'angle $\widehat{BAC}$ et β l'angle $\widehat{ABC}$.

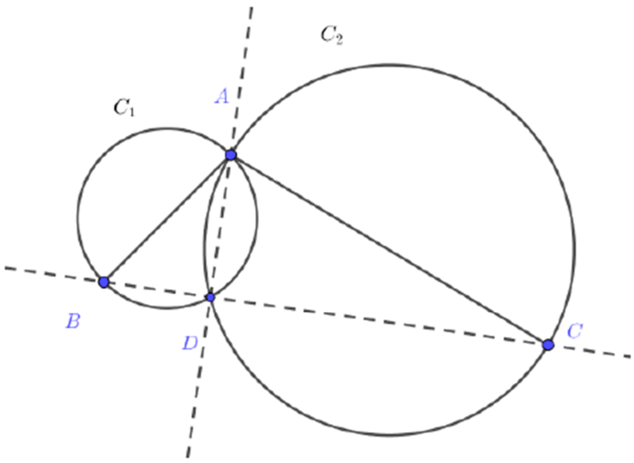
On justifiera le plus rigoureusement possible les questions suivantes.

1. Quelle est la nature des triangles AIC et BIC ?
2. Exprimer l'angle $\widehat{ACB}$ en fonction de α et β.
3. En déduire que $\alpha + \beta = 90°$.
4. Conclure sur la nature du triangle ABC.

Exercice 14 *★★★

Intersections de cercles.

- C_1 est un cercle de diamètre $[AB]$.
- C_2 est un cercle de diamètre $[AC]$.
- C_1 et C_2 se coupent également en D.



1. Démontrer que B, D et C sont alignés.
2. Démontrer que (AD) et (BC) sont perpendiculaires.

Exercice 15 *★★★

Symétrie centrale, parallélogramme et triangles

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O.

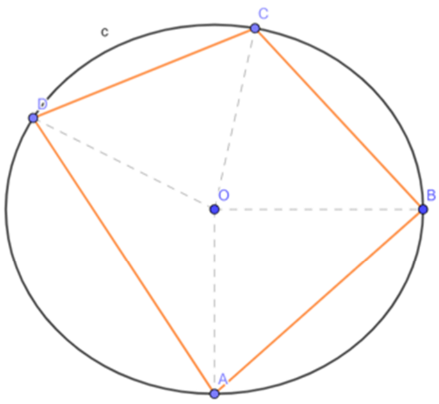
Le point F est le symétrique de D par rapport à B et Le point E est le symétrique de A par rapport à C.

1. Faire une figure.
2. Dans le triangle OEF, démontrer que les droites (CB) et (EF) sont parallèles.
3. La droite (CB) coupe la droite (AF) en K.
   Démontrer que K est le milieu de $[AF]$.
4. Démontrer que la droite (AB) coupe le segment $[CF]$ en son milieu L.

Exercice 16 *★★★

Démonstration : Le quadrilatère inscriptible

Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle C de centre O.
On place le point D sur le cercle C.



1. Montrer que dans le quadrilatère $ABCO$, on a :

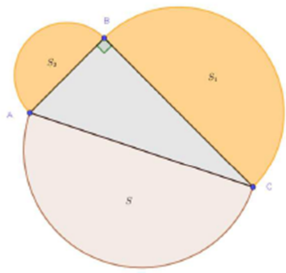
$$2\widehat{BAO} + 2\widehat{BCO} + \widehat{AOC} = 360°$$

2. Que vaut la somme des angles $2\widehat{DAO} + 2\widehat{DCO} + \widehat{AOC}$?
3. En déduire que $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180°$.
   Que remarque-t-on pour les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$?
4. On suppose maintenant que le point D n'appartienne pas au cercle C.
   Les angles $\widehat{BAD}$ et $\widehat{BCD}$ sont-ils supplémentaires ?
5. En déduire la propriété du quadrilatère inscriptible illustrée dans cet exercice.

Exercice 17 * ★★★

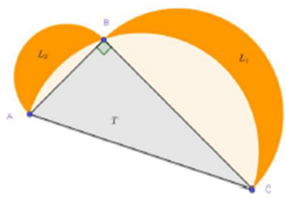
Lunules d'Hippocrate

1.
   - ABC est un triangle rectangle en B.
   - S_1, S_2 et S sont les aires délimitées des demi-cercles de diamètres $[BC]$, $[AB]$ et $[AC]$.



Démontrer que $S_1 + S_2 = S$

2.
   - Dans le même triangle ABC rectangle en B.
   - L_1 est la lunule délimitée par le demi-cercle de diamètre $[AB]$ et le demi-cercle de diamètre $[AC]$.
   - L_2 est la lunule délimitée par le demi-cercle de diamètre $[BC]$ et le demi-cercle de diamètre $[AC]$.
   - T est l'aire du triangle ABC.



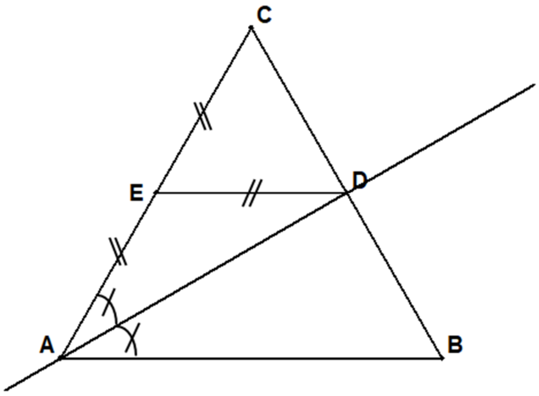
Démontrer que $T = L_1 + L_2$

Exercice 18 * ★★★

D'un triangle équilatéral à un quadrilatère particulier

Sur la figure ci-contre, le triangle ABC est équilatéral.

E est le milieu de $[AC]$ et $D \in [BC]$.



1. a) Quelle conjecture peut-on faire sur la position du point D sur le segment $[BC]$?

   b) Démontrer cette conjecture.

   Indication : On montrera d'abord que $\widehat{EDA} = \widehat{DAB}$

2. a) Construire A' symétrique de A par rapport à D

   b) Quelle conjecture peut-on faire sur la position des droites (ED) et (CA') ?

   c) Démontrer cette conjecture.

3. Soit E' le point d'intersection des droites (ED) et (BA').

   a) Quelle conjecture peut-on faire sur la position du point E' sur le segment $[BA']$?

   b) Démontrer cette conjecture.