CORRIGEO

Seconde Générale et Technologique

Maths | Chapitre 4 : Vecteurs du plan

Enoncés des exercices

Les exercices sont classés en trois niveaux de difficulté :

- ★ Exercices d'application : comprendre les notions essentielles du cours
- ★★ Exercices d'entraînement : prendre les bons reflexes
- ★★★ Exercices d'approfondissement : aller plus loin

Exercices gratuits	Exercices sur abonnement*
★ 1 ★★ 7 ★★★ 13	★ 2 – 3 – 4 – 5 – 6 ★★ 8 – 9 – 10 – 11 – 12 ★★★ 14 – 15 – 16 – 17 – 18

Exercice 1 ★

Sommes de vecteurs

Donner un vecteur correspondant à chacune des sommes de vecteurs suivantes en sachant que ABCDEF est un hexagone régulier :

a) $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} =$

b) $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EB} =$

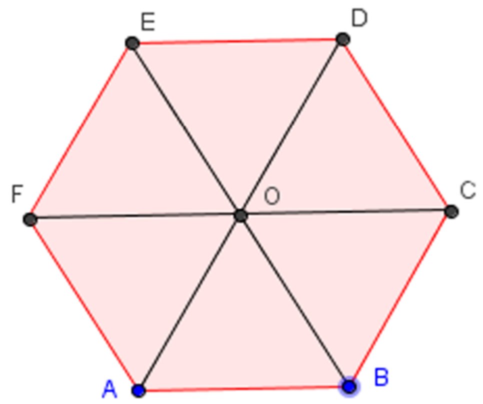
c) $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AB} =$

d) $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EO} =$

e) $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{ED} =$

f) $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OF} =$

g) $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{DE} =$



Exercice 2 *★

Parallélogrammes

Dans les deux cas suivants, $ABCD$ est-il un parallélogramme ?

- $A(-2; -3)$; $B(1; 2)$; $C(-1; 3)$ et $D(-4; -2)$.
- $A(-3; 1)$; $B(-2; 3)$; $C(1; 1)$ et $D(2; 3)$.

Exercice 3 *★

Parallélogramme ; vecteurs et milieu d'un segment

Dans le repère orthonormé $(O;\vec{i}\,;\vec{j})$, on donne les quatre points du plan suivants :

$A(5;-2)$, $B(4\,;1)$, $C(-1\,;-2)$ et $D(1\,;4)$.

1. Faire une figure.
2. Calculer les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.
3. Montrer que M est le milieu du segment $[CD]$
4. a) Déterminer les coordonnées de N tel que $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

   b) Déterminer les coordonnées du point P du symétrique du point N par rapport à M.
5. Montrer que $NDPC$ est au moins un parallélogramme.
6. a) Calculer CN^2 ; ND^2 et CD^2.

   b) En déduire la nature du triangle CND

   b) Conclure alors sur la nature du quadrilatère $NDPC$.

Exercice 4 *★

Egalité de vecteurs

Soit $ABCD$ un trapèze tel que $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB}$.

1. Construire le point I tel que $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{IC}$
   Que représente I pour le segment $[CD]$?
2. Citer trois vecteurs égaux.
3. Donner la nature des quadrilatères $ABID$ et $ABCI$. Justifier.

Exercice 5 *★

Coordonnées de vecteurs

On considère le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

Déterminer les coordonnées de $2\vec{u}+\vec{v}$ puis celles de $-\vec{u}+2\vec{v}$

Exercice 6 * ★

Parallélogramme ; vecteurs et milieu d'un segment

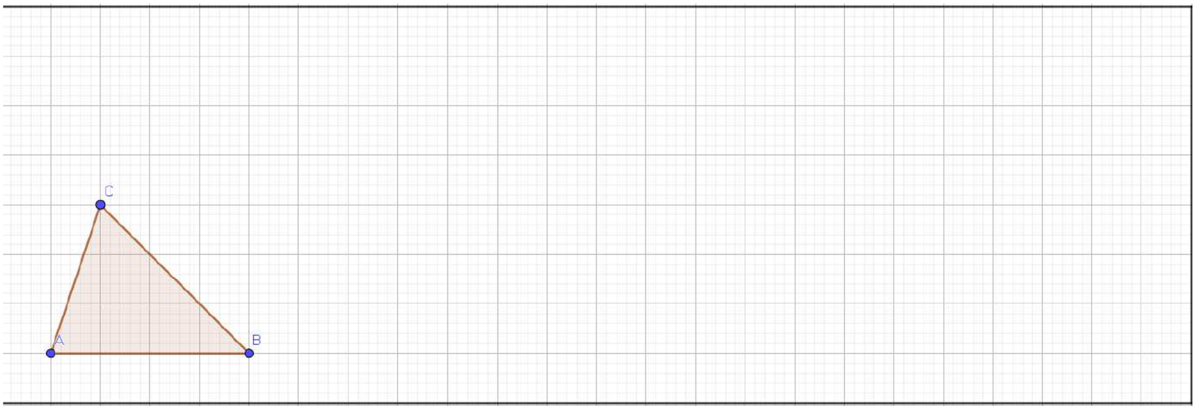
Dans le repère orthonormé $(O;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$, on considère les points suivants donnés par leurs coordonnées : $A(1;0)$, $B(3\,;0)$, $C(4\,;2)$, $D(2\,;2)$.

1. Faire une figure
2. Démontrer que $ABCD$ est un parallélogramme
3. Construire le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$
4. Déterminer **par le calcul** les coordonnées du point E dans le repère orthonormé $(O;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$.

Exercice 7 ★★

Vecteurs du plan

ABC est un triangle quelconque.
E est le point du plan tel que $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
F est le point du plan tel que $\overrightarrow{BF} = 4\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$.



1. Placer E et F sur la figure.
2. Démontrer que (AE) et (BF) sont parallèles.

Exercice 8 * ★★

Colinéarité de 2 vecteurs et calcul vectoriel ; milieu d'un segment et centre de gravité d'un triangle

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, On donne trois points définis par leurs coordonnées

$A(-2\,;4)$, $B(-1;1)$, $C(5\,;4)$

1. Faire une figure à compléter au fur et à mesure de l'énoncé.
2. On considère les trois points D, F et G définis par les relations vectorielles suivantes :

   $\overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

   Déterminer les coordonnées des points D, F et G.
3. a) Quelle conjecture sur la position relative des droites (FG) et (CD) peut-on faire ?

   b) Démontrer cette conjecture.
4. a) Calculer les coordonnées du milieu E de $[AD]$.

   b) Quelle conjecture sur la position relative des points F , G et E peut-on faire ?

   c) Démontrer par le calcul cette conjecture.
5. On se propose de démontrer cette dernière conjecture ***sans calcul avec les coordonnées***.

   Pour cela, on procède comme suit :

   a) Avec les données $\overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AB}$ et E milieu de $[AD]$, que peut-on déduire pour le rôle de B sur le segment $[AE]$? Montrer-le.

   b) Quel rôle joue G pour le triangle ACE ? Montrer-le.

   c) Montrer alors ***sans calcul*** que F , G et E sont alignés.

Exercice 9 *★★

Simplification d'expression : Relation de Chasles

Simplifier les expressions suivantes en utilisant la relation de Chasles. Détailler les étapes de calcul.

a) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB} =$

b) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC} =$

c) $\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} =$

d) $2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA} =$

Exercice 10 * ★★

Coordonnées et vecteurs

Dans un repère, on donne $A(-2;4)$, $B(-3;5)$ et $D(4;5)$.
Calculer les coordonnées du point C pour que $ABCD$ soit un parallélogramme.

CORRIGEO

Exercice 11 * ★★

Vecteurs : colinéarité et calcul vectoriel

C et D sont deux points donnés du plan.

M et N sont des points tels que :

$\overrightarrow{CM} + 2\overrightarrow{DM} = \vec{0}$ et $-\overrightarrow{CN} + 2\overrightarrow{DN} = \vec{0}$

1. Démontrer que $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires.
2. En déduire la nature du quadrilatère $CDNM$.
3. Sachant maintenant que dans le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}\,; \vec{\jmath})$ nous avons :

   $C(2;4)$, $D(4;5)$, $M(3;2)$

   Dans le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}\,; \vec{\jmath})$ ci-dessous, placer les points C ; D ; M
4. À l'aide de la relation de colinéarité précédente, déterminer les coordonnées du point N.
5. Construire le point N.
6. Déterminer les coordonnées du point P tel que $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{DN}$
7. Construire le point P.
8. Quelle est la nature du quadrilatère $DNPM$? Justifier.

Exercice 12 * ★★

Utilisation des critères de colinéarité

1) Les vecteurs $\overrightarrow{LM}\,(6\,;\,3)$ et $\overrightarrow{PQ}\,(4\,;\,2)$ sont-ils colinéaires ?

2) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\,(2\,;\,-\frac{1}{5})$ et $\overrightarrow{HJ}\,(-12\,;\,1)$ sont-ils colinéaires ?

3) Dans un repère d'origine O, on donne les points : $A(5\,;\,2)$, $B(6\,;\,-1)$, $C(-2\,;\,6)$ et $D(4\,;\,6)$.

   a) Les droites (AB) et (OC) sont-elles parallèles ?

   b) Les points A, B et D sont-ils alignés ?

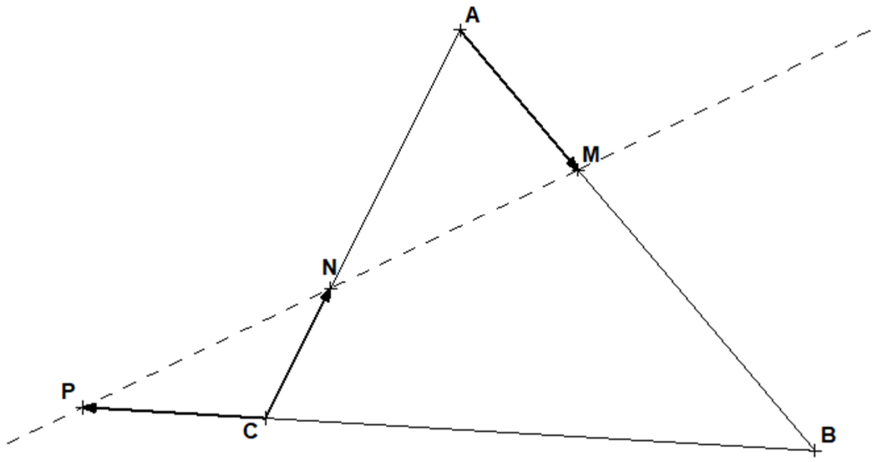
CORRIGEO

Exercice 13 ★★★

Vecteurs du plan : « Utiliser les vecteurs pour démontrer l'alignement de trois points du plan »

Sur la figure ci-dessous A , B et C sont trois points non alignés du plan.

On a construit les points M, N et P tels que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$



1/ Avec le calcul vectoriel

1. Exprimer $\overrightarrow{MN}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$ et de $\overrightarrow{AC}$.
2. Exprimer $\overrightarrow{MP}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$ et de $\overrightarrow{AC}$.
3. En déduire que les points M, N et P sont alignés.

2/ Dans un repère quelconque du plan

Dans le repère (A, C, B) ou encore $(A, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$ du plan,

1. Déterminer les coordonnées des points M, N et P.
2. En déduire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$.
3. Montrez alors que les points M, N et P sont alignés.

Exercice 14 *★★★

Résolution de problème

Soit ABC un triangle quelconque.

1. Placer les points D, E et F tels que $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{FC}$.
2. Justifier l'égalité $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{FE}$
3.
   a) Exprimer $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
   b) En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires et écrire une relation entre ces deux vecteurs.
   c) Que peut-on conclure ?
4. Placer les points M et G tels que $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{BM} = \vec{0}$ et G soit le symétrique de F par rapport à C.
5. Démontrer les égalités suivantes :

$$\overrightarrow{GA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CA}$$

$$\overrightarrow{GD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$$

6. En déduire la nature du quadrilatère $AMDG$.

Exercice 15 *★★★

Vecteurs colinéaires et droites parallèles.

Soit $A(2;1)$, $B(4;2)$, $C(1;2)$ et $D(x,4)$ quatre points du plan muni d'un repère orthonormé. $x \in \mathbb{R}$.

Pour quelle(s) valeur(s) de x les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

Exercice 16 *★★★

Vecteurs : Quadrilatère quelconque : relations vectorielles incluant milieux des diagonales et des côtés

Sur la figure 1 ci-dessous, $ABCD$ est un quadrilatère quelconque.

Les points I et J sont les milieux respectifs des côtés $[AB]$ et $[CD]$

1. Prouvez que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right)$
2. On suppose maintenant $ABCD$ est un trapèze tel que $\overrightarrow{BC} = x\overrightarrow{AD}$, où x est un réel non nul.

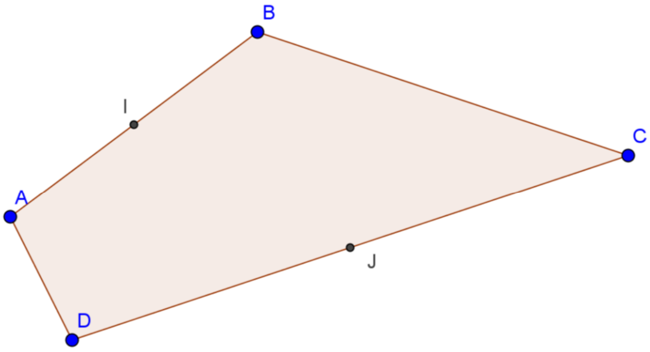
   K et L sont les milieux respectifs des diagonales $[AC]$ et $[BD]$. (***Cf fig.2***)

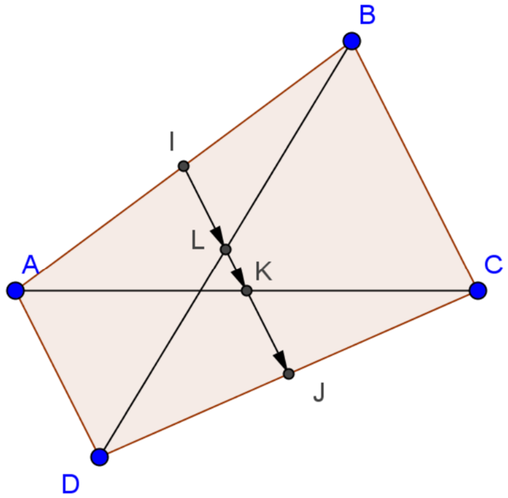
a) Prouvez que $\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{KJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

b) En utilisant le résultats du 1., prouvez que $\overrightarrow{IJ} = \frac{x+1}{2}\overrightarrow{AD}$

c) Déterminer x pour que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK} = \overrightarrow{KJ}$

d) Le trapèze obtenu est- il isocèle ?

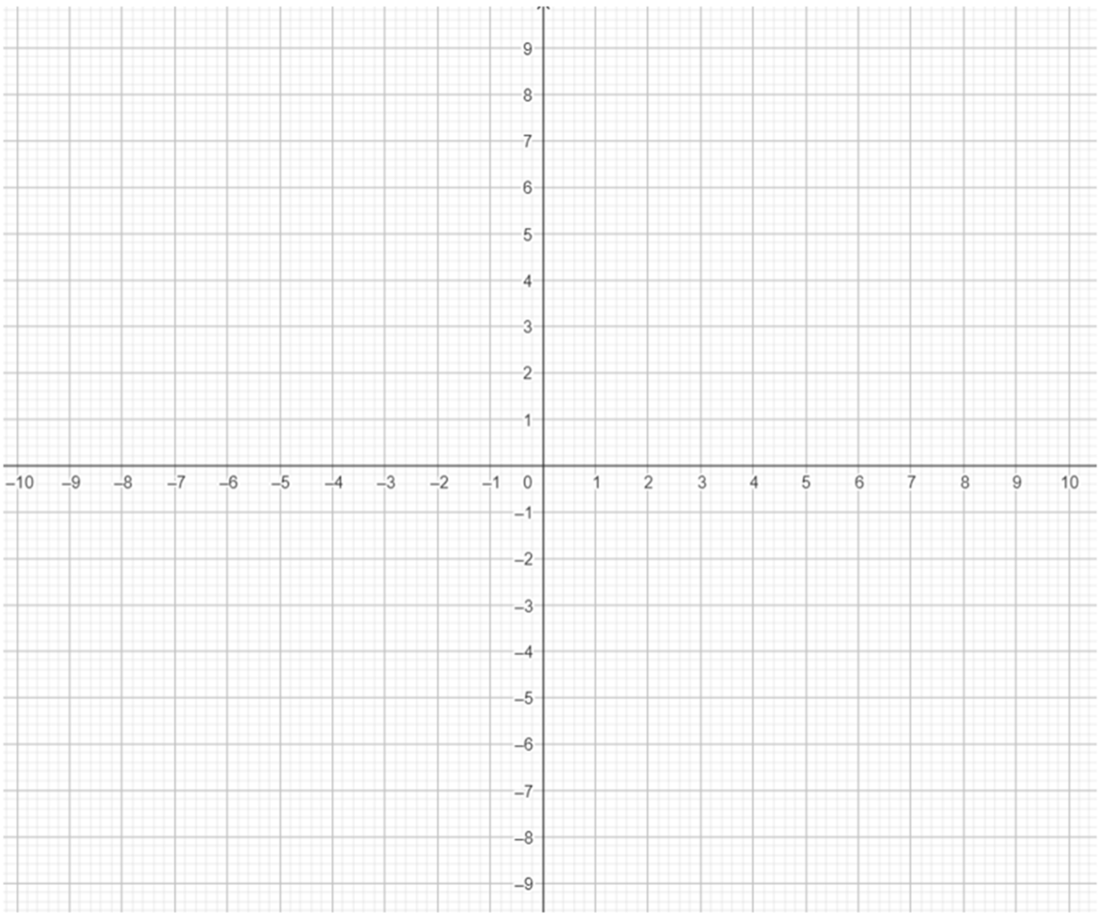

B
I
C
A
J
D


B
I
L
A
K
C
J
D

Exercice 17 * ★★★

Résolution de problème

Soit $(O; I, J)$ un repère orthonormé.



1. Placer sur le repère les points $A(-2\,;2\,)$, $B(-4\,;\,-2\,)$ et $C(4\,;4\,)$.
2. Déterminer les coordonnées de D symétrique de C par rapport à A.
3. Déterminer les coordonnées de E tel que $ABCE$ soit un parallélogramme.
4. Déterminer les coordonnées de F tel que $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BA}$.
5. Les points D, B et F sont-ils alignés ?
6. Placer le point $K(\,2\,;y)$ tel que ABK soit rectangle en A.
7. Déterminer les coordonnées de K par le calcul.

CORRIGEO

Exercice 18 * ★★★

Géométrie analytique

Soit $A(2;1)$, $B(4;2)$ et $C(1;2)$ trois points du plan muni d'un repère orthonormé.

1. Construire M, N et P définis par :
   - $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$
   - $\overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
   - $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$
2. On se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$.
   Dans ce repère, donner les coordonnées des points M, N et P.
3. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$
4. Démontrer que M, N et P sont alignés.