CORRIGEO

Seconde Générale et Technologique

Maths | <u>Chapitre 5 :</u> Géométrie plane dans un repère

Enoncés des exercices

Les exercices sont classés en trois niveaux de difficulté :

- ★ Exercices d'application : comprendre les notions essentielles du cours
- ★★ Exercices d'entraînement : prendre les bons reflexes
- ★★★ Exercices d'approfondissement : aller plus loin

Exercices gratuits	Exercices sur abonnement*
★ 1 ★★ 7 ★★★ 13	★ 2 – 3 – 4 – 5 – 6 ★★ 8 – 9 – 10 – 11 – 12 ★★★ 14 – 15 – 16 – 17 – 18

Exercice 1 ★

<u>Géométrie plane dans un repère</u> : « Utiliser les coordonnées du milieu d'un segment et le calcul d'une longueur en repère orthonormé »

On donne les points suivants définis par leurs coordonnées dans un repère orthonormé (O, I, J)

Soit $A(-1\,;\,2)$, $B(3\,;3)$, $C(0\,;\,6)$, $D(-5\,;\,4)$ et $E(-3\,;\,-2)$.

a) Faire une figure
b) A est - il le milieu de $[CE]$? Justifier
c) Démontrer que le triangle ABC est isocèle en . Est-il équilatéral ?
d) Démontrer que le triangle ADE est isocèle en . Ce triangle est-il rectangle en A ?

Exercice 2 *★

<u>Déterminer la nature d'un triangle</u>

Soit $A(\,2\,;1\,)$, $B(\,-1\,;3\,)$ et $C(\,0\,;\,-2\,)$.

Quelle est la nature du triangle ABC ? Soyez le plus précis possible !

Exercice 3 *★

<u>**Théorème des milieux (1)**</u>

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on place les points $A(3;-9)$; $B(-1;5)$ et $C(-3;-1)$.

1. Calculer les coordonnées des milieux I et J respectivement de $[AB]$ et de $[BC]$.
2. Calculer les longueurs AC et IJ.
3. Montrer que $AC = 2IJ$.

CORRIGEO

Exercice 4 * ★

Parallélogramme et triangle particulier dans un repère

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$, on a : $E(-1\,;3)$, $F(-6\,;-2)$, $G(1\,;-1)\,;H(6\,;4)$

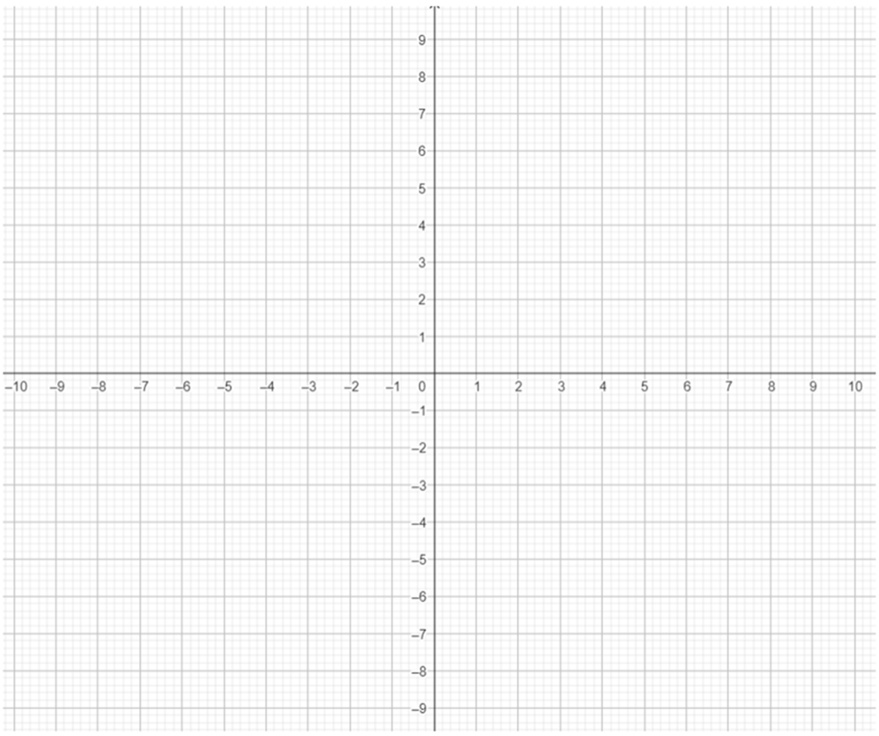
1. Démontrer que $EFGH$ est un parallélogramme.
2. a) Que peut-on conjecturer pour le triangle GFH ?

   b) Démontrer cette conjecture.
3. Que peut-on conjecturer pour le quadrilatère $EFGH$? On précisera son périmètre.

Exercice 5 * ★

<u>Calculer les coordonnées du milieu d'un segment et la distance entre deux points</u>

Soit $(O; I, J)$ un repère orthonormé.



1. Placer dans le repère les points $A(2\,;6)$, $B(-7\,;\,-3)$, $C(5\,;\,-3)$ et $D(-1\,;0)$.
2. Montrer que D est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
3. Déterminer les coordonnées du point E symétrique de B par rapport à D.

Exercice 6 * ★

Théorème des milieux (2)

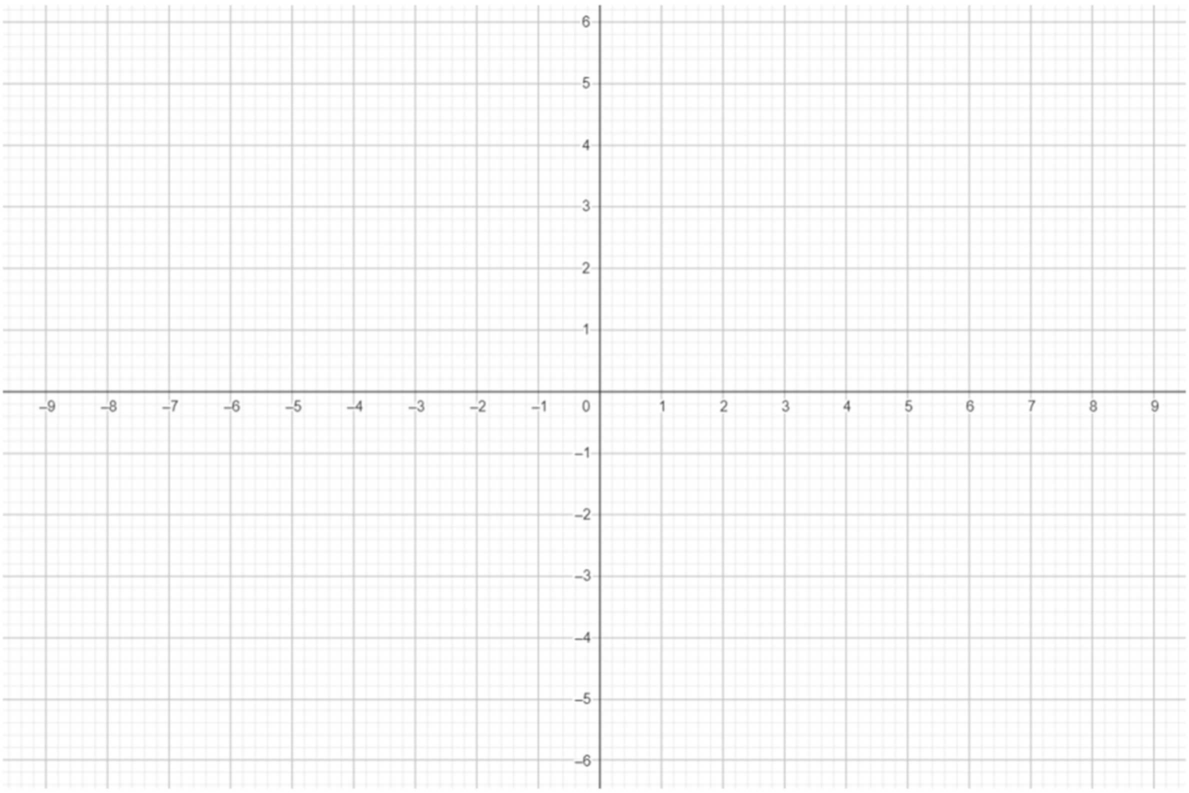
Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on place les points $A(3;-9)$; $B(-1;5)$ et $C(-3;-1)$.

1. Calculer les coordonnées des milieux I, J et K respectivement de $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$.
2. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3. En calculant le déterminant de $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AC}$, montrer que (IJ) et (AC) sont parallèles.

Exercice 7 ★★

Autour des triangles…

Dans un repère orthonormé (O ; I ; J), on donne les points $A(4\,;\,-2)$, $B(-7\,;\,-4)$ et $C(3\,;1)$.



1.
   a. Placer les points dans le repère.
   b. Conjecturer la nature du triangle ABC
   c. Démontrer la conjecture.

2.
   a. Calculer les coordonnées de D, milieu de [AC]
   b. En déduire l'aire du triangle ABC

3. Déterminer les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle ADB.

CORRIGEO

Exercice 8 *★★

Parallélisme

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on place les points $A(3;-1)$; $B(-1;5)$ et $C(-3;-1)$. Soit $D(x;-2)$ avec $x \in \mathbb{R}$. Pour quelle valeur de x les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

Exercice 9 *★★

Utiliser les coordonnées du milieu d'un segment et le calcul d'une longueur en repère orthonormé

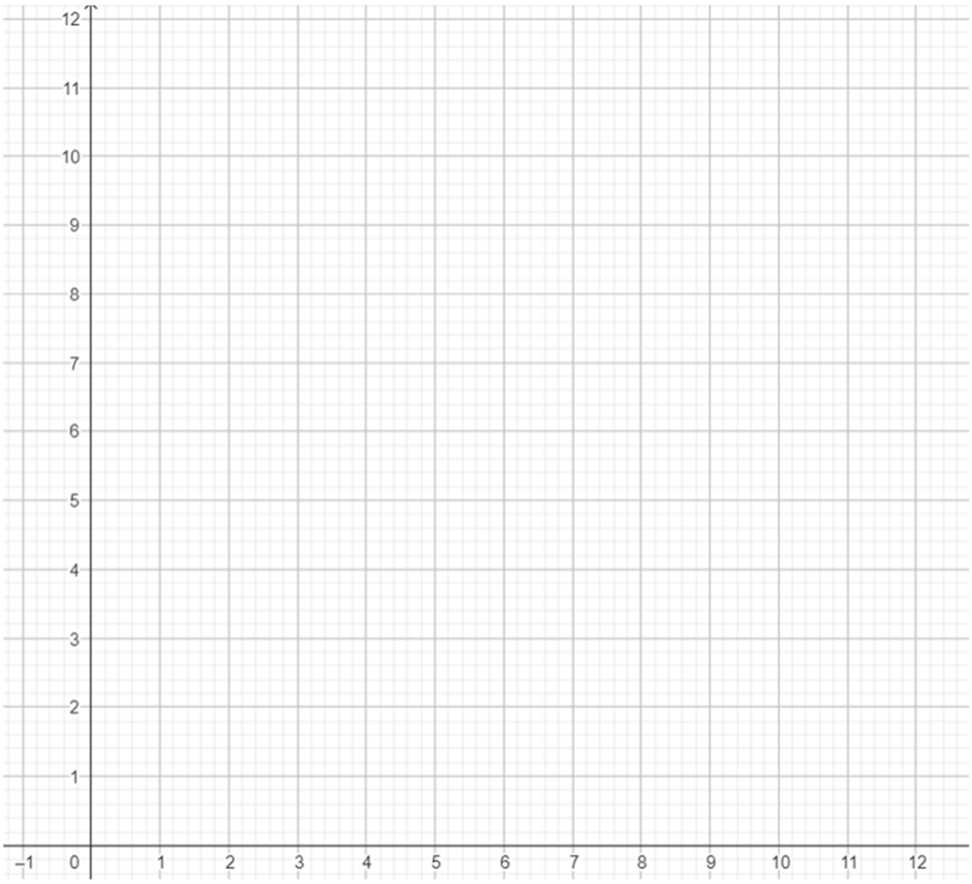
Soit les points A, B, C, D suivants définis par leurs coordonnées dans un repère orthonormé (O, I, J) : $A(3;-3)$; $B(2;-1)$; $C(-3;1)$; $D(-2;-1)$

1. a) Faire une figure.
   b) Quelle semble être la nature du quadrilatère $ABCD$? Montrez-le.
2. a) Construire le point P symétrique de A par rapport à D, le point Q symétrique de D par rapport à C, le point R symétrique de C par rapport à B, le point S symétrique de B par rapport à A.
   b) Ecrire un algorithme en langage naturel qui permet de calculer directement les coordonnées des points P, Q, R, S.
   c) Déterminer les coordonnées des points P, Q, R, S.
   d) Quelle semble être la nature du quadrilatère $PQRS$?
3. On se propose de démontrer quelle est la nature du quadrilatère $PQRS$.
   Pour cela, on demande d'utiliser deux méthodes.
   a) En utilisant les coordonnées des milieux des deux diagonales de $PQRS$.
   b) En utilisant les longueurs des côtés de $PQRS$.

Exercice 10 * ★★

Déterminer les coordonnées d'un point d'un carré

Soit $(O; I, J)$ un repère orthonormé.



1. Placer les points $A(\,2\,;3\,)$, $B(\,8\,;5\,)$ et $C(\,0;9)$ dans le repère.
2. Donner la nature la plus précise du triangle ABC.
3. Soit $D(\,x\,;y\,)$ avec $(\,x\,;y\,) \in \mathbb{R}^2$.
   Calculer les coordonnées du point D de sorte que $ABDC$ soit un carré.

Exercice 11 * ★★

Alignement

Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB = 6cm$ et $AD = 3cm$.
I est le milieu de $[AB]$ et I est le point tel que : $\overrightarrow{IE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IC}$.

1. Compléter la figure ci-dessous *(on considère qu'un carreau a pour mesure 1cm)*.

2. On se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AI}; \overrightarrow{AD})$.
   Déterminer les coordonnées de tous les points de la figure dans ce repère.

3. Démontrer que E, B et D sont alignés.

Exercice 12 * ★★

<u>Parallélogramme et triangle particuliers dans un repère orthonormé</u>

Soit $M(1\,;1), N(6\,;6)$ et $P(7\,;-1)$ dans un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$.

1. Quelle semble être la nature du triangle MNP ? Montrez le.
2. Déterminer les coordonnées du point K milieu de $[MP]$
3. Déterminer les coordonnées du symétrique Q du point N par rapport à K .
4. Quelle est la nature du quadrilatère $MNPQ$?
5. En déduire quelle est la mesure de l'angle $\widehat{MKN}$ et l'aire de $MNPQ$.

CORRIGEO

Exercice 13 ★★★

Géométrie plane dans un repère

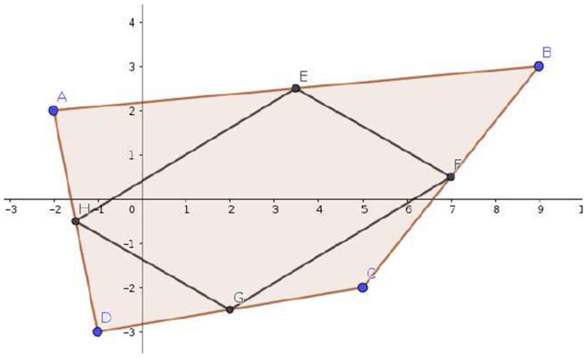
Théorème de Varignon

Soit $A(x_A; y_A)$;$B(x_B; y_B)$;$C(x_C, y_C)$ et $D(x_D; y_D)$ quatre points du plan muni d'un repère orthonormé.
Soit E ; F ; G et H les milieux de $[AB]$;$[BC]$;$[CD]$ et $[DA]$ comme l'illustre la figure.

1. Déterminer les coordonnées des points E ; F ; G et H en fonction de celles des points A ;B ;C et D.

2. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{HG}$.

3. En déduire la nature du quadrilatère $EFGH$



Exercice 14 *★★★

Parallélogramme et triangles particuliers, cercle circonscrit

Soit les points A, B et C définis par leurs coordonnées dans le repère othonormé $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$,

on a : $A(4\,;-3)$, $B(-2\,;5)$, $C(2\,;8)$.

1.a. Faire une figure

b. Quelle semble être la nature du triangle ABC. Montrez-le.

c. Quel est le centre L du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ABC ? Calculer ses coordonnées.

d. Tracer le cercle $\mathcal{C}$.

2. a. Construire le point D symétrique du point B par rapport à L .

b. Sans calcul, déterminer la nature du quadrilatère $ABCD$.

3 a. Déterminez les coordonnées du milieu K de $[AB]$.

b. Démontrez que (LK)est perpendiculaire à (AB) en précisant le rôle de (LK) pour$[AB]$.

c. Déterminer la mesure de chacun des angles des triangles LAB et LCD.

d. En déduire directement celle de chacun des angles des triangles LBC et LDA.

4. a. Calculer l'aire de chacun des triangles LAB et LCD.

b. Calculer l'aire du quadrilatère $ABCD$.

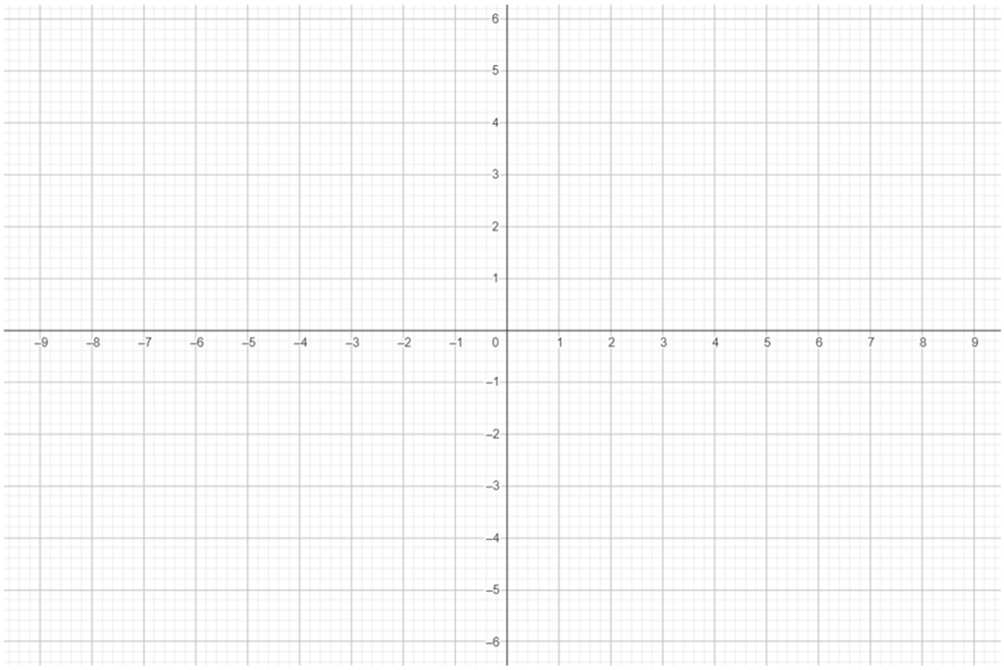
c. En déduire directement l'aire de chacun des triangles LBC et LDA.

5. Déterminez la valeur exacte quotient ρ de l'aire du disque $\mathfrak{D}$ délimité par le cercle $\mathcal{C}$ par l'aire du quadrilatère $ABCD$.

Exercice 15 *★★★

Construction d'un parallélogramme et calcul de coordonnées

Soit $(O; I, J)$ un repère orthonormé et $A(-2\ ;\ 4)$, $B(3{,}5\ ;\ -1)$ et $I(2\ ;3)$ trois points de ce repère.



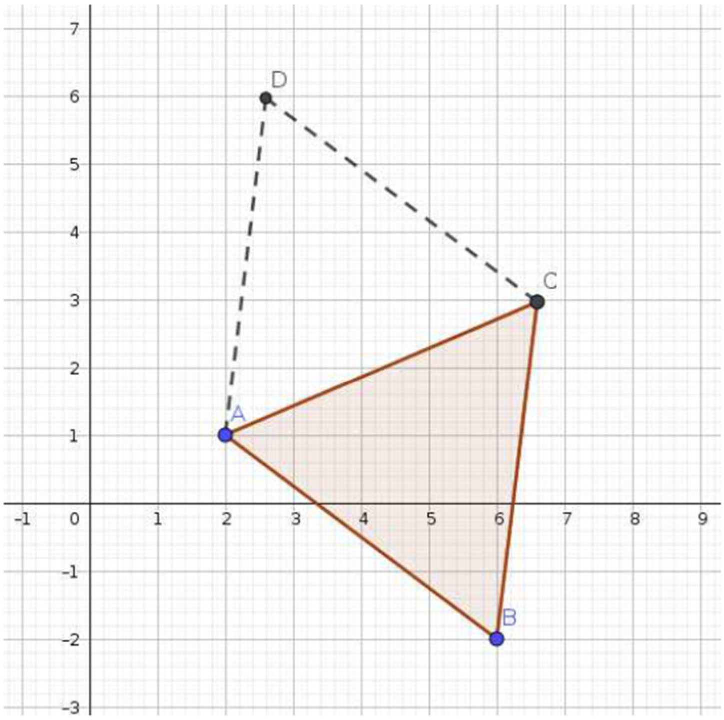
1. Placer les points A, B et I dans le repère.
2. Construire les points C et D de sorte que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme de centre I.
3. Retrouver analytiquement les coordonnées des points C et D.

Exercice 16 *★★★

Avec des racines carrées

Dans un repère orthonormé, on donne $A(2;1)$; $B(6;-2)$ et $C\left(\dfrac{8+3\sqrt{3}}{2};\dfrac{-1+4\sqrt{3}}{2}\right)$.

1. Démontrer que ABC est un triangle équilatéral.
2. Déterminer les coordonnées de D pour que $ABCD$ soit un parallélogramme.



Exercice 17 * ★★★

<u>**Triangle rectangle et cercle avec et sans repère orthonormé**</u>

1. Etude d'un cas particulier

Dans un repère orthonormé $(O\ ;\ I\ ; J)$, on considère les points $A(1\ ;1)$ et $D(11\ ;1)$.

a. Déterminer les coordonnées du centre Ω du cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AD]$ et son rayon.

b. Démontrez que $B(2\ ;4)$ appartient au cercle $\mathcal{C}$.

c. Soit $H(2;1)$.

Justifier que $H \in (AD)$ et que les droites (BH) et (AD)sont perpendiculaires

d. Démontrer que $AB^2 = AH \times AD$.

e. 1) Déterminer BH.

2) Calculer l'aire du triangle ABD de deux façons différentes.

2. Cas général

ABD est un triangle rectangle en B, et H est le projeté orthogonal de B sur (AD).

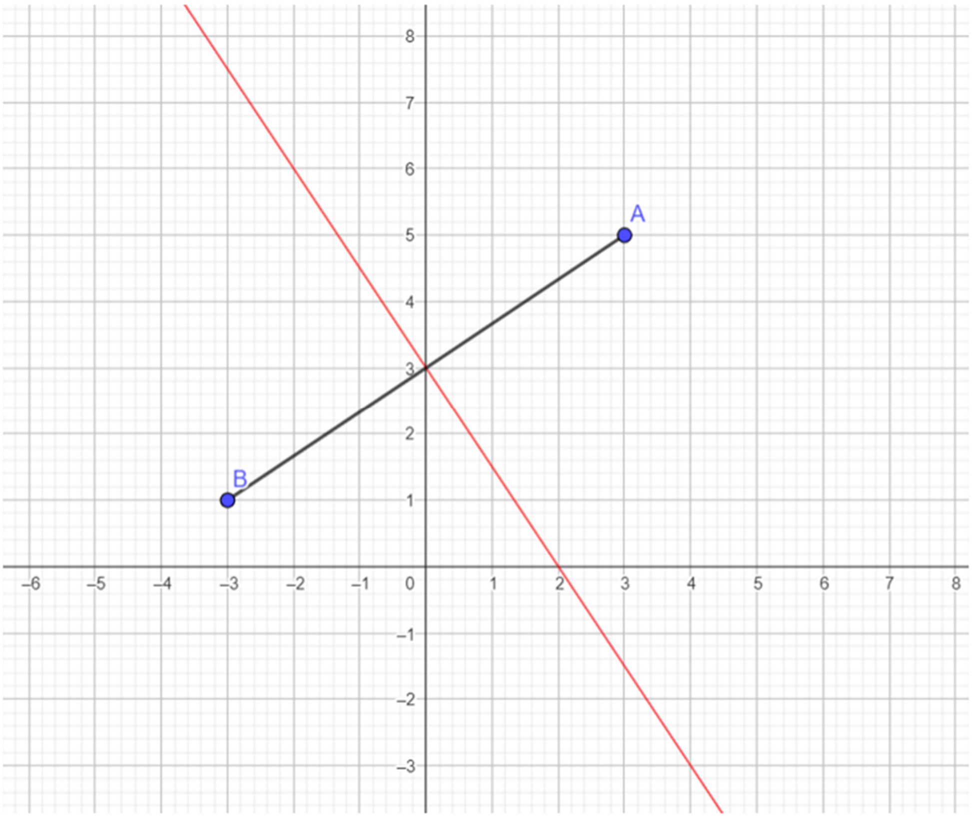
a. Démontrer que $\widehat{ABH} = \widehat{ADB}$

b. En utilisant des relations trigonométriques, démontrer que $AB^2 = AH \times AD$.

Exercice 18 * ★★★

Autour de la médiatrice

Soit $(O; I, J)$ un repère orthonormé.



1. Placer dans le repère les points $A(\,3\,;5)$ et $B(\,-3\,;1)$.
2. Tracer la médiatrice du segment $[AB]$.
   On notera C le point d'intersection de la médiatrice de $[AB]$ et de l'axe des abscisses, et D le point d'intersection de la médiatrice de $[AB]$ et de l'axe des ordonnées.
3. Déterminer analytiquement les coordonnées des points C et D.