CORRIGEO

Seconde Générale et Technologique

Maths | <u>Chapitre 7 :</u> Fonctions : fonctions de référence, équation, inéquation

Enoncés des exercices

Les exercices sont classés en trois niveaux de difficulté :

- ★ Exercices d'application : comprendre les notions essentielles du cours
- ★★ Exercices d'entraînement : prendre les bons reflexes
- ★★★ Exercices d'approfondissement : aller plus loin

Exercices gratuits	Exercices sur abonnement*
★ 1 ★★ 7 ★★★ 13	★ 2 – 3 – 4 – 5 – 6 ★★ 8 – 9 – 10 – 11 – 12 ★★★ 14 – 15 – 16 – 17 – 18

Exercice 1 ★

Déterminer le domaine de définition d'une fonction

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions f, g et h.

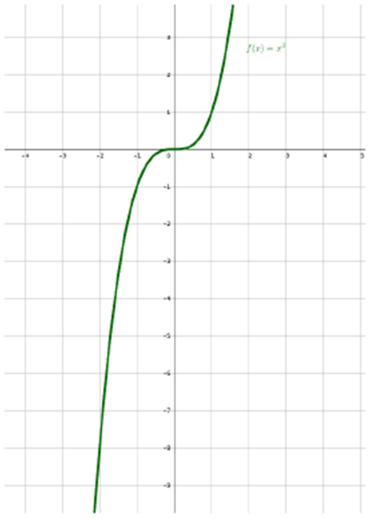
$f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$ $\qquad$ $g(x) = \sqrt{3x-2}$ $\qquad$ $h(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt{4-5x}}$

Exercice 2 *★

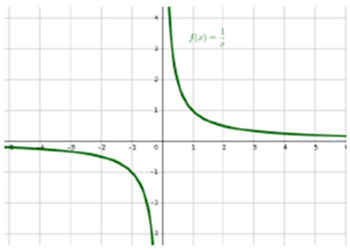
Variations de fonctions

A l'aide des graphiques donnés, résoudre les inéquations suivantes :

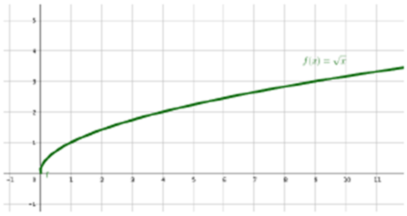
1. $-8 < x^3 < 1$



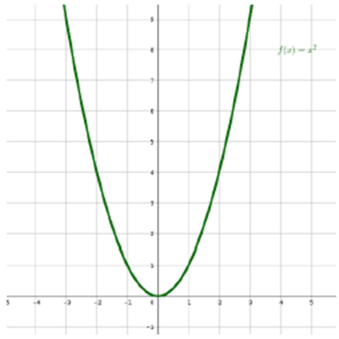
2. $1 < \dfrac{1}{x} < 3$



3. $2 < \sqrt{x} < 3$



4. $4 < x^2 < 9.$



Exercice 3 *★

<u>Résolution graphique et algébrique d'une équation et d'une inéquation pour comparer une fonction linéaire et la fonction « cube »</u>

On se propose d'étudier la position relative des courbes de la fonction cube $f : x \mapsto x^3$

et de la fonction linéaire $g : x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}$

Pour cela, on procède comme suit :

1/ Résolution de l'équation $x^3 = x$

a) Résolution graphique de cette équation.
b) Résolution algébrique de cette équation.

2/ Résolution de l'inéquation $x^3 > x$, puis de l'inéquation $x^3 \leq x$

a) Résolution graphique de ces inéquations.
b) Résolution algébrique de ces inéquations.

3/ Conclure sur la position relative des courbes des fonctions f et g sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 * ★

Utiliser les propriétés de la fonction carré

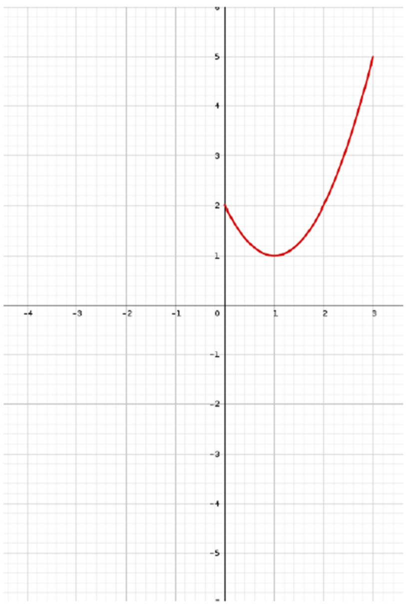
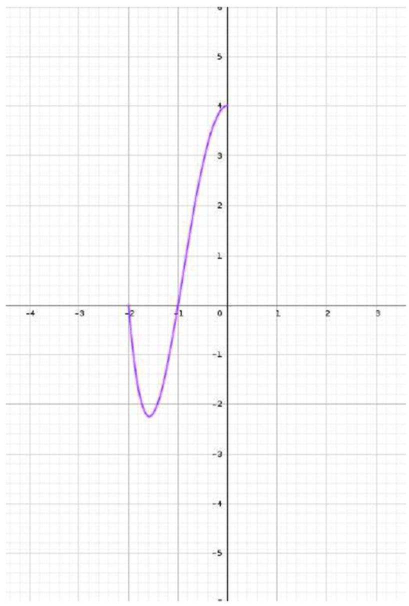
Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$.

1. $x^2 = 25$
2. $x^2 - 4 = 0$
3. $x^2 + 64 = 0$
4. $(x+9)^2 = 16$

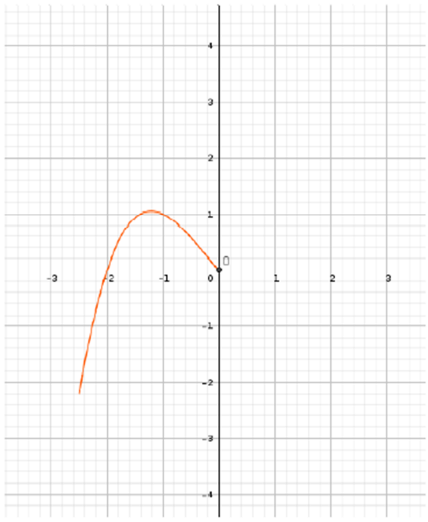
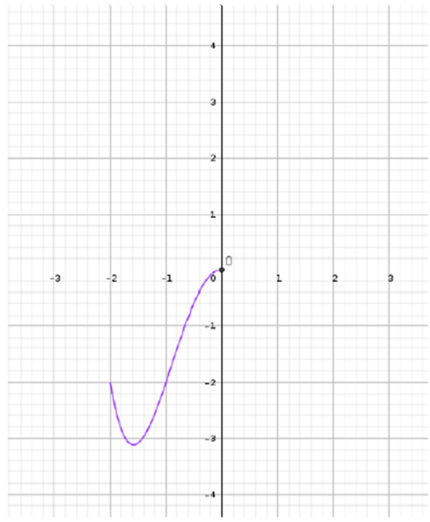
Exercice 5 * ★

Fonctions paires et impaires

1. Les courbes ci-dessous représentent des fonctions paires.
   Compléter les graphiques.

- 
- 

2. Les courbes ci-dessous représentent des fonctions paires.
Compléter les graphiques.

- 
- 

Exercice 6 * ★

Résolution graphique d'inéquations avec la fonction «carré»

1. À l'aide de la parabole de la fonction « carré », donner un encadrement de x^2 pour tout réel x tels que $1 \leq x \leq 2$.

   Comment peut-on justifier ce résultat graphiquement et algébriquement ensuite ?

2. De la même façon qu'à la question 1, donner un encadrement de x^2 :

   a) Pour tout réel x tel que $-2 \leq x \leq -0{,}5$

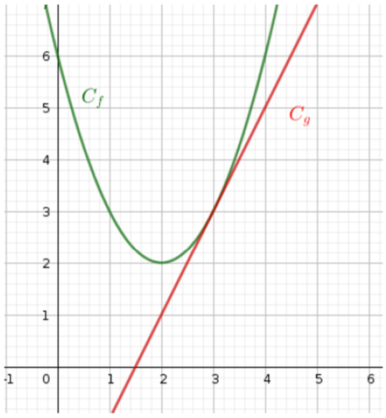
   b) Pour tout réel x tel que $-3 \leq x \leq 1$

CORRIGEO

Exercice 7 ★★

Fonctions : fonctions de référence, équation, inéquation

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : : $f(x) = x^2 - 4x + 6$ et $g(x) = 2x - 3$ dont les représentations graphiques sont ci-dessous :



1. Faire une conjecture sur la position de C_f et C_g.
   (c.a.d : emettre une hypothèse sur les valeurs de x pour lesquelles C_f semble être au dessus de C_g).
2. Résoudre l'inéquation $x^2 - 4x + 6 \geqslant 2x - 3$.
3. La conjecture se vérifie t-elle ?

Exercice 8 *★★

<u>Résolution graphique et algébrique d'une équation et d'une inéquation pour comparer une fonction linéaire et la fonction inverse</u>

On se propose d'étudier la position relative des courbes de la fonction inverse $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$

et de la fonction linéaire $g : x \mapsto 2x$ sur $\mathbb{R}^*$

Pour cela, on procède comme suit :

1/ Résolution de l'équation $\dfrac{1}{x} = 2x$

a) Résolution graphique de cette équation.

b) Résolution algébrique de cette équation.

2/ Résolution de l'inéquation $\dfrac{1}{x} > 2x$, puis de l'inéquation $\dfrac{1}{x} \leq 2x$

a) Résolution graphique de ces inéquations.

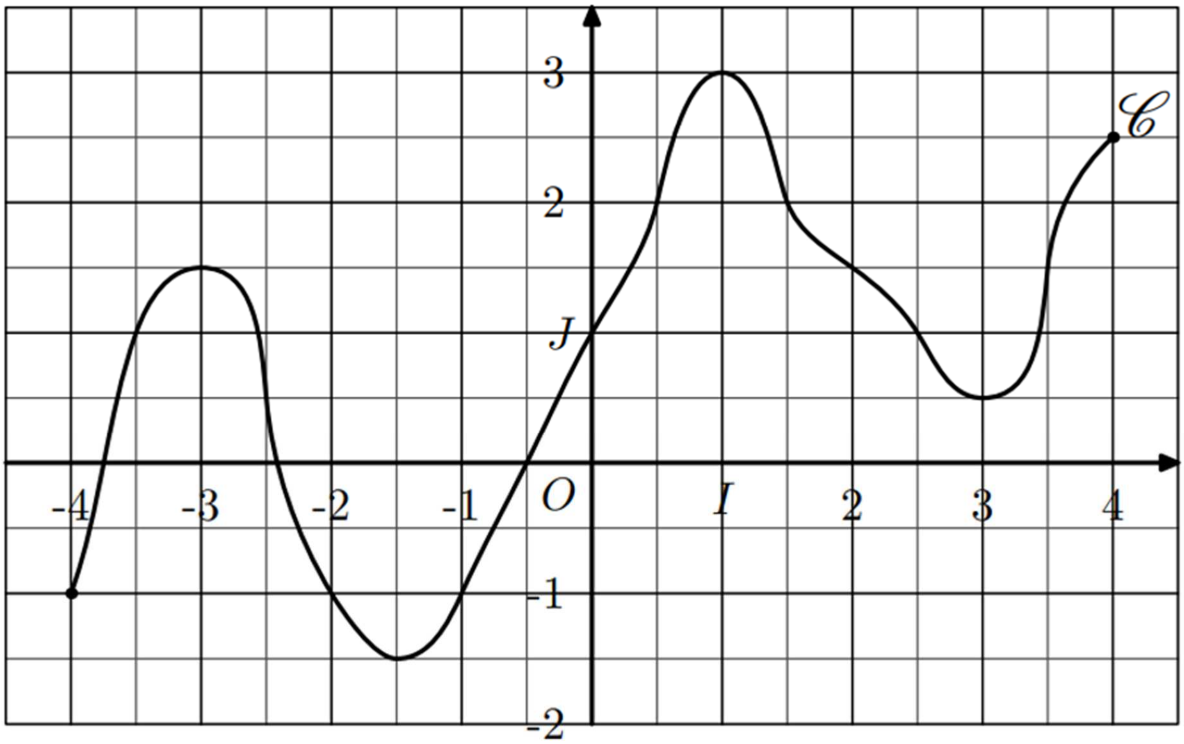
b) Résolution algébrique de ces inéquations.

3/ Conclure sur la position relative des courbes des fonction f et g sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9 *★★

Résolution graphique d'équations et d'inéquations

Voici la courbe C représentative de la fonction f définie sur $[-4\,;4\,]$.



1. Estimer les solutions des équations et inéquations suivantes :

   a) $f(x) = 1$

   b) $f(x) \geq 1$

   c) $f(x) < 0$

   d) $f(x) > 3$

2. Répondre aux questions suivantes :

   a) Quelle est l'image de -2 par la fonction f ?

   b) Quels sont les antécédents de -1 par la fonction f ?

   c) Donner une valeur approchée des antécédents de 0 par la fonction f.

3. Compléter :

   a) $f(1) = \ldots..$ b) $f(\ldots.) = 3$ c) $f(3) = \ldots.$ d) $f(\ldots.) = -1$

CORRIGEO

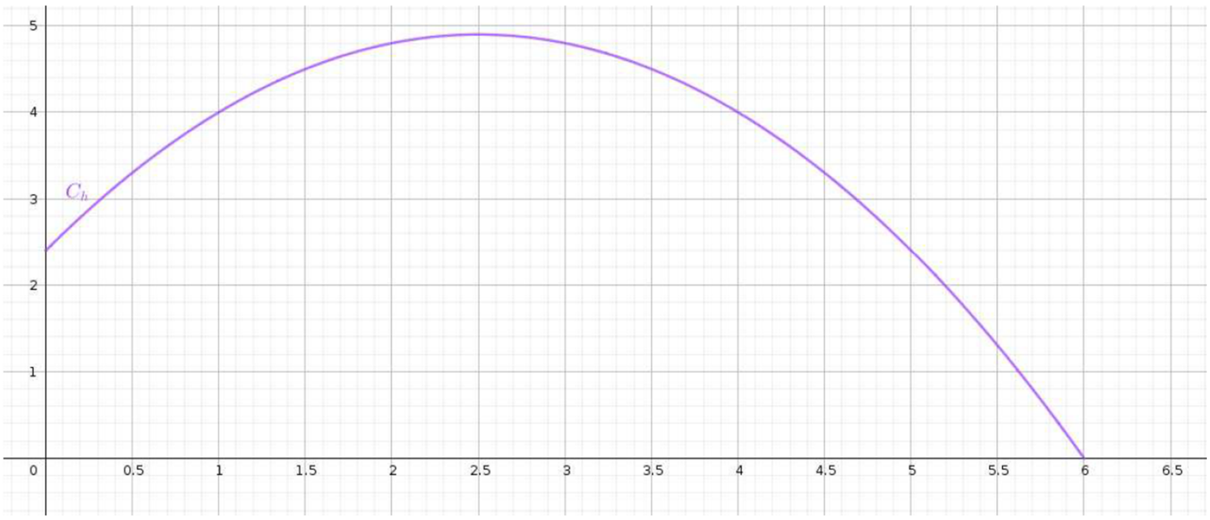
Exercice 10 * ★★

équation de trajectoire.

On lance une balle en l'air. Cette balle suit une trajectoire qui peut être modélisée par la fonction :

$$h(t) = -0,4t^2 + 2,2t + 2,4$$

où t représente le temps exprimé en seconde et la hauteur en mètre.
Le graphique ci-dessous représente la courbe de h



1. D'après le graphique, quelle est la hauteur maximale du ballon.
2. Quelle est la hauteur initiale
3. Comment retrouver ce résultat par le calcul ?
4. Au bout de combien de temps la balle touche t'elle le sol ?
5. On admet que $h(t) = -0,4(t+1)(t-6)$. retrouver le résultat de la question précédente.

CORRIGEO

Exercice 11 * ★★

Résolution algébrique d'équations et d'inéquations : Utiliser la bonne forme littérale

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-4)^2 - 25$ **(1)**

1. Prouver que pour tout nombre réel x,

   a) $f(x) = x^2 - 8x - 9$ **(2)**

   b) $f(x) = (x-9)(x+1)$ **(3)**

2. Résoudre chaque équation suivante en utilisant celle des formes **(1)**, **(2)** ou **(3)** qui est la mieux adaptée.

   a) $f(x) = -9$; b) $f(x) = 0$; c) $f(x) = -25$ d) $f(x) = -8x$

3. Résoudre chaque inéquation suivante en utilisant celle des formes **(1)**, **(2)** ou **(3)** qui est la mieux adaptée.

   $a)$ $f(x) < -9$; b) $f(x) > -8x$.

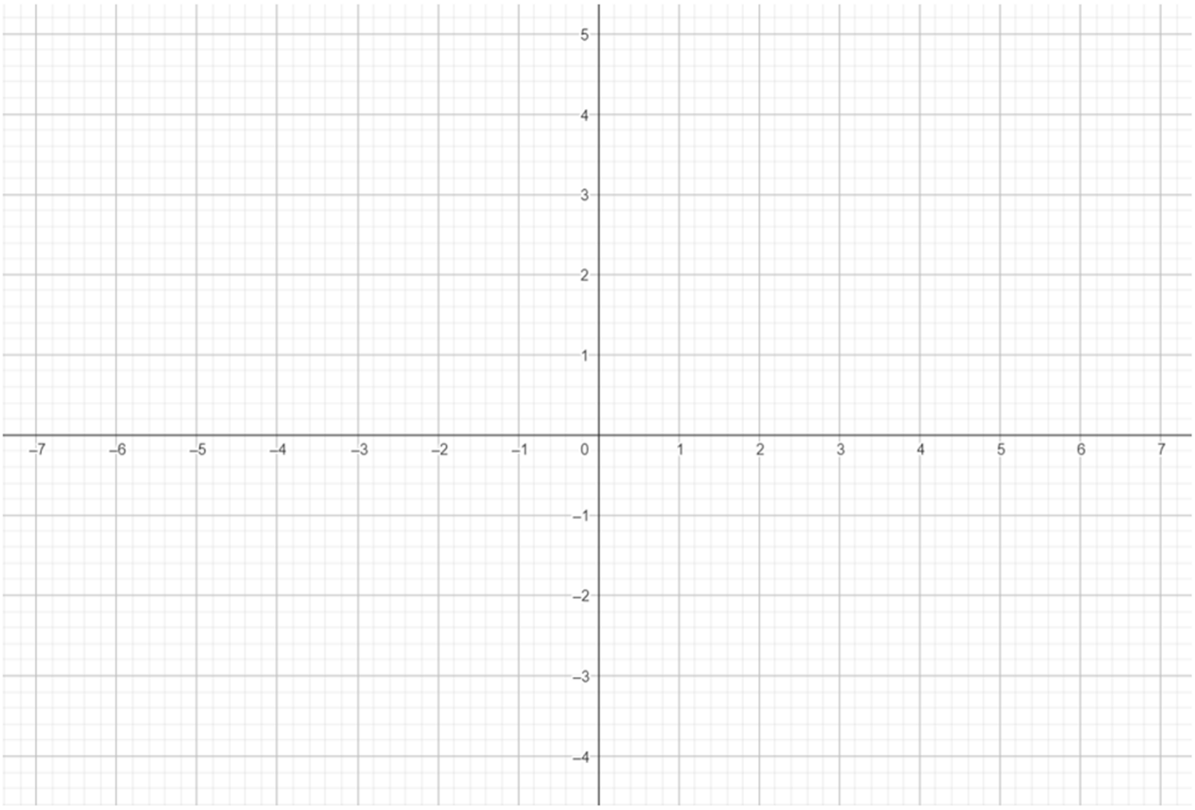
Exercice 12 * ★★

Tracer une courbe représentative d'une fonction à partir de données

Soit f une fonction dont les propriétés sont les suivantes :

- $D_f = [-5\,;3]$
- L'équation $f(x) = 2$ admet les deux solutions 1 et -4
- L'inéquation $f(x) \leq -1$ a pour ensemble de solutions $[-2\,;1]$
- $f(0) = -3$
- L'inéquation $f(x) > 3$ n'admet pas de solution
- L'équation $f(x) = 0$ admet au moins 3 solutions

Tracer dans le repère une courbe possible pour la fonction f.

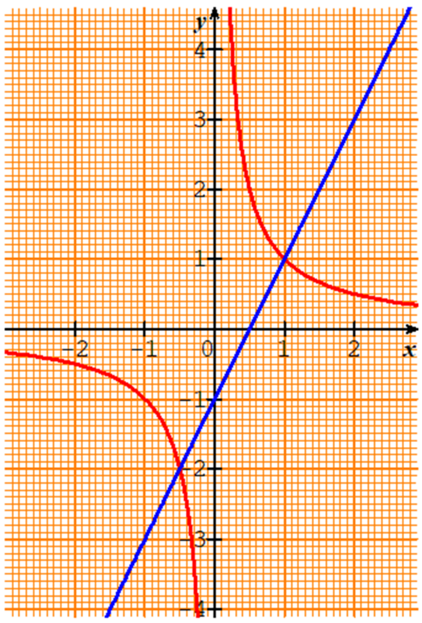


Exercice 13 ★★★

<u>Fonctions de référence, équation, inéquation</u> :

On considère les deux courbes représentatives de la fonction inverse, notée f, et de la fonction affine g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x - 1$

Elles sont représentées dans le repère ci-contre.



1. Repérer les courbes associées aux deux fonctions
2. a) Résoudre graphiquement l'équation :

$$\frac{1}{x} = 2x - 1$$

   b) Résoudre graphiquement l'inéquation :

$$\frac{1}{x} \leq 2x - 1$$

CORRIGEO

3.a) Développer l'expression $(2x+1)(x-1)$

b) Retrouver algébriquement le résultat obtenu à la question 2 a)

c) Retrouver algébriquement le résultat obtenu à la question 2 b)

4. Conclure sur les positions relatives des courbes des fonctions f et g.

Exercice 14 *★★★

Signe d'une fonction et tableau de signes

Après avoir étudier le domaine de définition, construire le tableau de signes de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = (2x+3)(-4x+1)$

b) $g(x) = \frac{5x+2}{-x+6}$

c) $h(x) = x^2 - 16 + (2x-3)(x-4)$

Exercice 15 *★★★

Parité de fonctions

En déterminant $f(-x)$, étudier la parité des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$
2. $f(x) = x+1$
3. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$
4. $f(x) = 3x^2 - 5$
5. $f(x) = 3x^3 - 5x$
6. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

CORRIGEO

Exercice 16 * ★★★

Comparaison de la moyenne arithmétique et de la moyenne géométrique de deux nombres positifs

a et b sonts deux nombres positifs tels que $a < b$.

On pose $M = \frac{a+b}{2}$ et $m = \sqrt{ab}$.

On dit que M est la moyenne arithmétique de a et b et que m est la moyenne géométrique de a et b.

On se propose de comparer a, b , M et m.

1. Conjecture

1. Dans chacun des cas suivants, calculez M et , puis rangez, dans l'ordre croissant, les quatre nombres a, b, M, m.

a) $a = 1$ et $b = 2$; b) $a = 2$ et $b = 8$ c) $a = 3$ et $b = 12$ d) $a = \frac{1}{4}$ et $= 1$.

2. D'après ces exemples, dans quel ordre semblent, en général, être rangés les quatre nombres a, b, Met m ?

2. Démonstration algébrique

1. On se propose de comparer M et m.

a) Expliquer pourquoi M et m sont rangés dans le même ordre que leurs carrés M^2 et m^2.

b) Montrez que $M^2 - m^2$ est du signe de $(a+b)^2 - 4ab$.

c) Déduisez en que $M > m$.

2. Montrez que $a < \sqrt{ab}$ et $\frac{a+b}{2} < b$.

3. Déduisez de ce qui précède que $a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b$.

3. Une application en géométrie

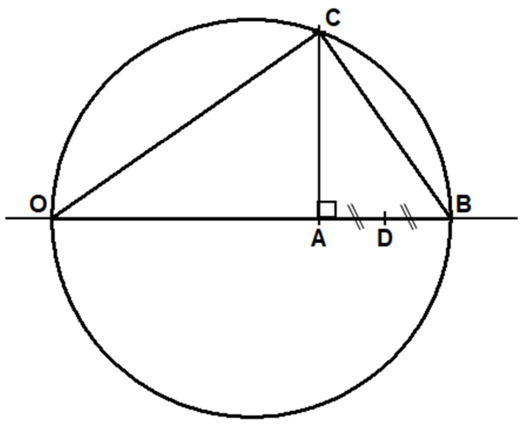
On considère un cercle de diamètre $[OB]$, un point C de ce cercle et son projeté orthogonal A sur $[OB]$. On note D le milieu de $[AB]$.

1. Expliquez pourquoi $OD = \frac{OA+OB}{2}$.

2. a) En calculant $\cos(\widehat{COA})$ dans deux triangles rectangles, montrez que $\frac{OA}{OC} = \frac{OC}{OB}$.

b) Déduisez-en que $OC^2 = OA \times OB$

c) Montrez que $OC < OD$.



Exercice 17 * ★★★

Résolution algébrique d'inéquations à partir d'un tableau de signes

Après avoir étudier leur domaine de définition, résoudre les inéquations suivantes à l'aide d'un tableau de signes.

a) $\frac{(9x^2-16)(-x+2)}{x+1} < 0$

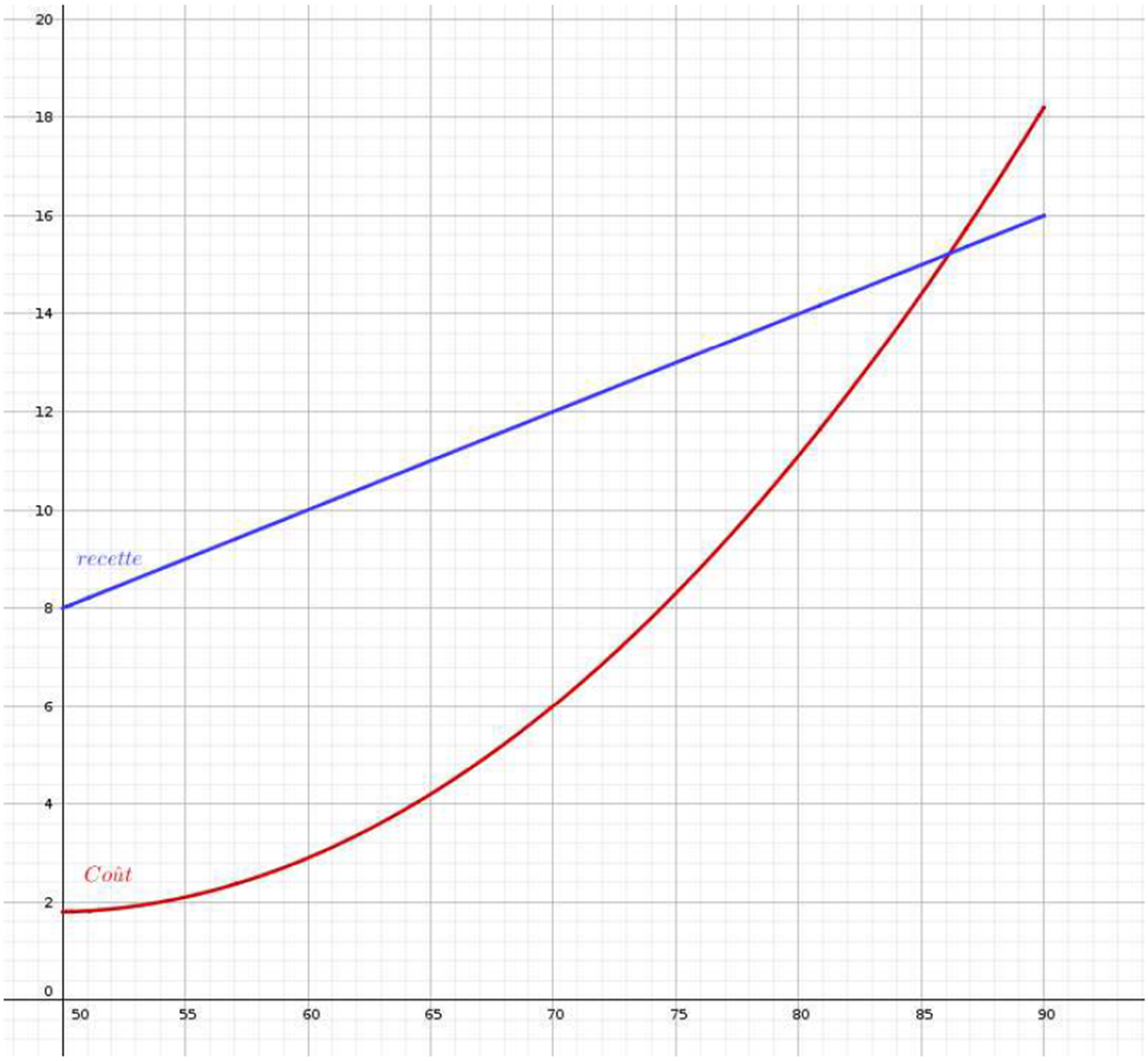
b) $(3x-2)(x+1) < x(x+1)$

c) $\frac{3x}{2-x} \geq 2$

Exercice 18 * ★★★

Coût et bénéfice.

Une entreprise fabrique des pièces pour l'industrie.
On note x le nombre de pièces fabriquées quotidiennement.
Le coût de production, en centaines d'euros en fonction de x est noté $C(x)$.
La courbe de $C(x)$ est représentée ci-dessous sur l'intervalle $[50;90]$.



A l'aide du graphique :

1. Quel est le nombre de pièces minimal produit chaque jour ?
2. Quel est le nombre de pièces maximal produit chaque jour ?
3. Quel est le coût de production pour 60 pièces ?
4. Pour un coût de production de 1000 euros, combien l'entreprise peut-elle produire de pièces ?
5. Le bénéfice réalisé est la différence entre la recette et le coût pour x pièces vendues. La courbe représentant la recette est représentée sur le graphique.
   Déterminer le nombre de pièces que l'entreprise doit vendre pour réaliser un bénéfice positif.