

Seconde Générale et Technologique

Maths | Chapitre 2 : Calcul littéral et applications

Enoncés des exercices

Les exercices sont classés en trois niveaux de difficulté :

- ★ Exercices d'application : comprendre les notions essentielles du cours
- ★★ Exercices d'entraînement : prendre les bons réflexes
- ★★★ Exercices d'approfondissement : aller plus loin

Exercices gratuits	Exercices sur abonnement*
★ 1	★ 2 - 3 - 4 - 5 - 6
★★ 7	★★ 8 - 9 - 10 - 11 - 12
★★★	★★★ 13 - 14 - 15 - 16 - 17 - 18

EXERCICES GRATUITS

Exercice 1 ★

Calculs avec les fractions, Ensembles de nombres :

- Soit $P = \frac{8}{3} - \frac{5}{3} + \frac{20}{21}$
Calculer P en détaillant les étapes du calcul et écrire le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.
- Calculer $C = \left(2 + \frac{2}{3}\right) \div \left(\frac{4}{5} - \frac{2}{3}\right)$.
- Déterminer le plus petit ensemble de nombres qui contient P .
- Même question avec C .

Exercice 7 ★★

Simplification d'expressions fractionnaires

Après avoir déterminer les valeurs interdites, écrire les quatre expressions suivantes sous la forme d'une fraction la plus simple possible :

- $\frac{1}{x} + \frac{4}{3x}$
- $\frac{3x}{x+5} + 2$
- $5 - \frac{x-1}{x+2}$
- $3 - \frac{x^2+3x-4}{(x-1)(x+2)}$

Exercice 2 * ★

Développer une expression algébrique

Développer puis réduire chacune des expressions suivantes :

a) $(x - 6)(x + 6)$

b) $(y - 8)^2$

c) $(5x + 2)^2$

d) $3x(2x - 5) - 3(x^2 + 3x)$

Exercice 3 * ★

Développement et factorisation avec les identités remarquables

1. Développer les expressions suivantes :

(a) $(x + 2)^2$

(b) $(x - 3)^2$

(c) $(2x + 3)^2$

(d) $(3x - 2)^2$

2. Factoriser les expressions suivantes :

(a) $x^2 - 12x + 36$

(b) $4x^2 + 28x + 49$

(c) $9x^2 + 12x + 16$

Exercice 4 * ★

Calcul littéral: « Comment factoriser une expression polynômiale ? »

1/ Factoriser les expressions suivantes en faisant apparaître un facteur commun

a. $3x^2 - 4x$ b. $6xy + y$ c. $3(x - 2)^2 - 4(x - 2)$ d. $(x - 1)^2 - x + 1$

2/ Factoriser les expressions suivantes en utilisant une identité remarquable

a. $4x^2 - 4x + 1$ b. $(4x - 3)^2 - x^2$ c. $16x^2 + 8x + 1$ d. $(3x - 2)^2 - (x + 2)^2$

3/ Factoriser les expressions suivantes en combinant les deux méthodes précédentes :

$$A(x) = (4x^2 - 4x + 1) - 2x + 1.$$

$$B(x) = 3x + 1 - (9x^2 - 1) + 6(3x + 1)^2$$

Exercice 5 * ★

Factoriser une expression algébrique

Factoriser chacune des expressions suivantes :

a) $16x^2 - 1$

b) $15a^2 + 3a$

c) $(2x - 1)(x - 3) + 5(x - 3)$

d) $(2x + 5)^2 - (x - 3)^2$

Exercice 6 * ★

Inéquations et encadrements

1. Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $2x - 3 \leq -3x + 4$

(b) $-x + 4 \geq -2x + 3.$

2. Soit x un nombre tel que $-2 < x < 4$, donner un encadrement de :

(a) $3x - 7$

(b) $-5x + 2$

Exercice 8 * ★★

Comparaison de nombres

Comparer les nombres suivants :

1. $\frac{10^{23} - 1}{10^{23} + 1}$ et 1

2. $1 + \sqrt{2}$ et $\frac{1}{1 - \sqrt{2}}$.

3. $\frac{n - 1}{n + 3}$ et $\frac{n - 2}{n + 3}$ pour $n \in \mathbb{N}$

Exercice 9 * ★★

Factorisation d'une expression polynômiale du 2nd degré sans utiliser les formules générales

On se propose de factoriser l'expression polynômiale $24x^2 + 14x + 1$ pour pouvoir ensuite résoudre l'équation $24x^2 + 14x + 1 = 0$. *Bien sûr sans utiliser la technique générale de résolution de l'équation du 2nd degré vue en classe de première.*

Pour cela, on procède comme suit.

Soit les expressions $A(x)$ et $B(x)$ suivantes :

$$A(x) = (5x + 1)^2 - 9x^2 \text{ et } B(x) = (2x + 1)(2x - 1) + (2x + 1)^2$$

1/ Développer les expressions $A(x)$ et $B(x)$.

2/ Factoriser les expressions $A(x)$ et $B(x)$.

3/ Déterminer la forme développée de $A(x) + B(x)$.

4/ En déduire la forme factorisée de $24x^2 + 14x + 1$.

5/ En déduire la résolution de l'équation $24x^2 + 14x + 1 = 0$

Résolution algébrique d'équations et d'inéquations

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $(x + 3)(2x - 5) = 0$

b) $(x - 5)(3x - 7) - (9x - 4)(x - 5) = 0$

c) $36x^2 - 12x + 22 = 21$

d) $(3x + 4)^2 = (5x - 6)^2$

e) $\frac{1-3x}{5x+2} = 0$

f) $\frac{3}{6x+9} = 4$

g) $\frac{2}{3x+4} - \frac{9}{7x-1} = 0$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $5x + 1 < 3x$

b) $-5x \leq 1$

c) $(x - 1)(2x + 3) - 2(x^2 + 1) > 0$

Exercice 11 * ★★

Équations produits.

Résoudre les équations suivantes :

1. Sans factorisation :

(a) $(4x + 3)(3x - 7) = 0$

(b) $x(2x - 13) = 0$

2. Avec factorisation :

(a) $(2x - 3)(x + 4) + (2x - 3)(x + 1) = 0$

(b) $(x - 1)^2 - (3x - 2)^2 = 0$

Exercice 12 * ★★

Comment comparer deux fractions rationnelles ?

Soit x et y deux réels de l'intervalle $]2; +\infty[$, on considère les deux fractions rationnelles A et B suivantes :

$$A = \frac{x-2}{y-2} \text{ et } B = \frac{x+2}{y+2}.$$

1. Montrer que $A - B = \frac{4(x-y)}{(y-2)(y+2)}$
2. Comparer alors A et B selon les valeurs de x et de y
3. Sans calculatrice, comparer alors les nombres suivants :

a) $\frac{119\,999\,998}{899\,999\,998}$ et $\frac{120\,000\,002}{9\,000\,000\,002}$

b) $\frac{9\,999\,998}{8\,999\,998}$ et $\frac{10\,000\,002}{9\,000\,002}$

4. Que se passe-t-il pour A et B si $x = y$?

Exercice 13* ★★★

équation produit et identité remarquable

1. factoriser

$$(2x - 3)^2 - (3x + 2)^2$$

2. résoudre

$$(2x - 3)^2 - (3x + 2)^2 = 0$$

Exercice 14 * ★★★

Résoudre des problèmes d'âge avec des systèmes et des équations spécifiques ?

1. On souhaite déterminer l'âge de trois personnes de deux façons différentes :

A/ On veut déterminer l'âge de Pierre et de Paul avec les données suivantes.

Le produit de leurs âges est égal à 440 ;

La somme de leurs âges est égale à 42 ;

Paul est plus jeune que Pierre.

- 1) Pour cela, on procède comme suit :

Soit p le produit des âges n_1 et n_2 respectivement de Pierre et Paul, on écrit donc

$$p = n_1 \times n_2$$

Soit s la somme des âges n_1 et n_2 respectivement de Pierre et Paul, on écrit donc

$$s = n_1 + n_2.$$

a) Ecrire le système composé des deux conditions sur la somme et le produit des âges.

b) En déduire une équation du 2nd degré que l'on résoudra, avec pour inconnue n_1 ou n_2 , après avoir écrit **la forme canonique*** du trinôme du 2nd degré correspondante que l'on factorisera ensuite. **NB : voir le paragraphe (6) des rappels de cours.**

- 2) Sachant que la somme des âges de Pierre, Paul et Jean est égale trois fois l'âge de Jean. Déterminer l'âge de Jean.

- 3) Sachant que le quotient du produit des âges de Pierre, Paul et Jacques par la somme de leurs âges est égale à 70,4. Déterminer l'âge de Jacques.

Aide : On pourra poser n_3 = âge de Jacques et on utilisera $70,4 = \frac{352}{5}$ pour ensuite écrire,

l'équation rationnelle avec pour inconnue n_3 et la résoudre.

Exercice 15 *★★★★

Résolution de problème : dans un triangle rectangle

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que l'angle $\widehat{ABC} = 60^\circ$ et l'hypoténuse soit 5 cm plus grand que la longueur AB .

Déterminer les valeurs exactes des trois côtés du triangle ABC .

Exercice 16 *★★★★

Système d'inéquations

Résoudre le système d'inéquation suivant.

Représenter graphiquement l'ensemble des solutions et le donner sous forme d'intervalle.

$$\begin{cases} 2x - 3 \leq x + 5 \\ 3 - x < -1 + 3x \end{cases}$$

Exercice 17 * ★★★

Comment utiliser le calcul littéral pour résoudre des équations du 2nd degré complètes et quelconques sans la méthode générale du 2nd degré vue en 1^{ère} ?

Objectif : Utiliser le développement et la factorisation de deux expressions littérales auxiliaires pour factoriser un trinôme du 2nd degré complet et pouvoir ensuite résoudre plusieurs équations du 2nd degré.

On donne $A = (3x + 1)^2 - 2(x + 2)(3x + 1)$ et $B = 9x^2 - 1 + (2x - 4)(3x + 1)$

- Factoriser A et B , puis $A + B$.
- Développer A et B , puis $A + B$.
- À l'aide de ce qui précède, indiquer la factorisation de $18x^2 - 18x - 8$.
- En déduire la résolution des équations suivantes :
 - $18x^2 - 18x - 8 = 0$;
 - $18x^2 - 18x - 8 = -8$;
 - $18x^2 - 18x - 8 = 3x + 1$

Exercice 18 * ★★★

Résolution de problème : mise en équation

Un père lègue à ses trois enfants toute sa fortune. L'aîné reçoit un tiers de la somme. Le deuxième enfant reçoit la moitié de ce qu'a reçu l'aîné à laquelle s'ajoutent 15 000€. Enfin, le cadet reçoit la somme de 75 000€.

Déterminer la somme partagée et la part de chacun.