

Bebr[a]s

**'23**

2023. gada 1. kārtas
uzdevumi ar atbildēm



11.-12. klase

INFORMATĪVIE ATBALSTĪTĀJI



Izglītības un zinātnes
ministrija

start(it)

www.startit.lv

SATURS

Kļūdas labojums	2
Pārgājienu maršruti.....	4
Istabas un durvis.....	5
Tuvāk vai tālāk.....	6
Elektroniskā slēdzene.....	8
Seifa atvēršana.....	9
Tiltu būve	12
Bebru māju krāsa	14
Stāvvietas atļaujas	15
Kanālu izbūves plāns.....	16
Baļķi uz noliktavu	18
Dažādie maršruti	20
Došanās uz citu salu.....	22
Groza pieskatīšana.....	24
Palindroma paroles	25

Kļūdas labojums

Bebru valstī ir vienpadsmit ciparu tālrunu numuri. Diemžēl, pierakstot tos, cilvēki mēdz kļūdīties, tādēļ, lai būtu iespējams numuros izlabot VIENA cipara kļūdu, visi telefona numuri atbilst šādām īpašībām:



- 8. cipars ir pirmo septiņu ciparu summas pēdējais cipars;
- 9. cipars ir pirmo četrus ciparu summas pēdējais cipars;
- 10. cipars ir 1., 2., 5. un 6. cipara summas pēdējais cipars;
- 11. cipars ir 1., 3., 5. un 7. cipara summas pēdējais cipars.

Piemēram, 12345678046 var būt tālruna numurs, jo:

- 8. cipars ir 8 ($1+2+3+4+5+6+7 = 28$)
- 9. cipars ir 0 ($1+2+3+4 = 10$)
- 10. cipars ir 4 ($1+2+5+6 = 14$)
- 11. cipars ir 6 ($1+3+5+7 = 16$)

Jautājums

Kāds kļūdījās VIENĀ ciparā un kā numuru pierakstīja 12312316710. Kāds bija pareizais tālruna numurs?

Ievadi vienpadsmit ciparu virkni [00000000000-99999999999]

Atbildes izskaidrojums

Pareizā atbilde: 1231**5**316710
(5. pozīcijā 2 jāaizstāj ar 5).

Sākotnējais numurs ir 12312316710.

1. Vispirms aplūkosim pēdējos četrus ciparus (8.–11.), kas ir 6, 7, 1, 0:
 8. cipars (6) ir **nepareizs** (jo $1+2+3+1+2+3+1 = 13$)
 9. cipars (7) ir **pareizs** (jo $1+2+3+1 = 7$)
 10. cipars (1) ir **nepareizs** (jo $1+2+2+3 = 8$)
 11. cipars (0) ir **nepareizs** (jo $1+3+2+1 = 7$)

Kā parādīts iepriekš, no pēdējiem četriem cipariem (8.–11.) trīs ir nepareizi, tāpēc vienīgā kļūda nevar būt tur. Tā kā pēdējie četri cipari (8.–11.) faktiski ir balstīti uz pirmajiem septiņiem cipariem, kļūdai jābūt vienā no pirmajiem septiņiem cipariem (1.–7.).

2. Pēc tam mēs pārbaudām pirmos septiņus ciparus (1.–7.), kas ir 1, 2, 3, 1, 2, 3, 3. Mēs jau zinām, ka 9. cipars (kas ir vienāds ar 1.–4. ciparu summu) ir pareizs, tāpēc pirmajiem četriem cipariem (1.–4.) ir jābūt pareiziem.

Apskatīsim pārējos trīs ciparus (5.–7.). Saskaņā ar noteikumiem:

5. cipars nosaka 8., 9. un 11. ciparu

6. cipars nosaka 8. un 10. ciparu

7. cipars nosaka 8. un 11. ciparu

Tā kā 8., 10. un 11. cipars ir nepareizi, kļūdai jābūt 5. ciparā.

3. Tagad noskaidrosim, kādam jābūt 5. ciparam:

Mēs zinām, ka 5. cipars var būt tikai skaitlis no 0 līdz 9.

Ir divi veidi, kā atrast pareizo 5. ciparu:

Ar mēģinājumu un kļūdu metodi: ja mēs cenšamies izmantot skaitļus no 0 līdz 9 pa vienam kā 5. ciparu, tikai skaitlis 5 atbilst noteikumam un padara pareizus 8., 10. un 11. ciparu. Tāpēc 5. ciparam jābūt 5 (nevis 2).

Matemātiski salīdzinot: Ja salīdzinām 8., 10. un 11. ciparu un to summas:

Pozīcija	Cipars	Orģinālā summa	Izlabotā summa, lai nodrošinātu atbilstību	Starpība
8. cipars	6	13	16	+3
10. cipars	1	8	11	+3
11. cipars	0	7	10	+3

Kā redzams, visos pāros atšķirība starp oriģinālo un izlaboto summu ir +3. Tas nozīmē, ka 5. cipara vērtība no sākotnējās (2) jāpalielina par 3, lai tā kļūtu 5 ($2+3=5$).

Pārbaudīsim šo izlaboto numuru: 1231**5**316710.

8. cipars (6) tagad ir **pareizs** (jo $1+2+3+1+5+3+1 = 16$)

9. cipars (7) ir **pareizs** (jo $1+2+3+1 = 7$)

10. cipars (1) tagad ir **pareizs** (jo $1+2+5+3 = 11$)

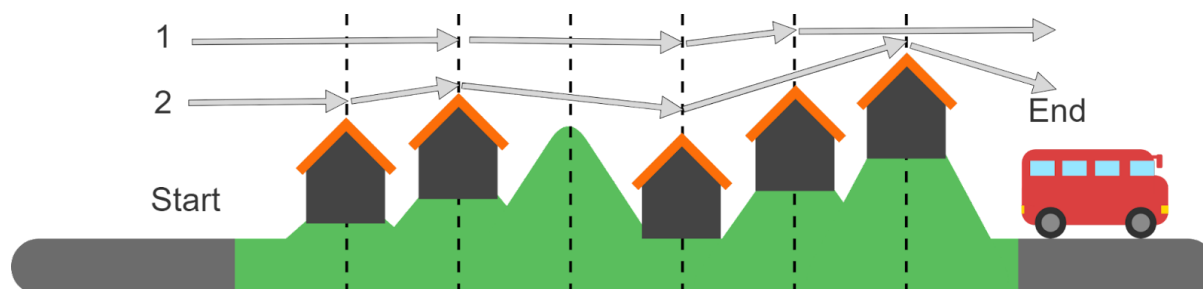
11. cipars (0) tagad ir **pareizs** (jo $1+3+5+1 = 10$)

Pārgājienu maršruti

Mijai patīk doties pārgājienos un nakšņot katru reizi citā vietā. Attēlā parādīta Mijas iepļānotā pārgājiena shēma. Mija katru dienu var veikt tikai vienu vai divus posmus (iezīmēti ar raustītām līnijām). Attēlā parādītas pārgājiena sākuma un beigu, kā arī naktsmītņu atrašanās vietas.

Ar bultiņu virkni parādīti divi iespējamie pārgājiena maršruti:

pirmajā maršrutā būtu trīs nakšņošanas, bet otrajā - četras.



Jautājums

Cik dažādu maršrutu (ieskaitot divus jau parādītos) ir Mijas pārgājienam?
levadi naturālu skaitli - dažādo maršrutu skaitu.

Atbildes izskaidrojums

Pareizā atbilde: 6

Mēs varam atrisināt visu problēmu, izmantojot dekompozīciju: Vispirms mēs pamanām, ka Mijai ir jāpaliek B un C, jo attālums starp šīm divām vietām ir maksimālais attālums, ko viņa var noiet vienā dienā. Tas ļauj mums sadalīt uzdevumu divos mazākos uzdevumos. Var redzēt, ka ir divi veidi, kā nokļūt B no sākuma (tie, kas parādīti 1. maršrutā un 2. maršrutā). Tāpēc ir tikai divi iespējamie ceļi uz C. Tagad mēs varam apskatīt, cik daudz maršrutu ir, kā nokļūt no C līdz galam. Šajā uzdevumā vajadzētu noskaidrot, ka ir tikai trīs iespējas:

C → D → E → Beigas

C → E → Beigas

C → D → Beigas

Tas nozīmē, ka kopumā ir iespējami 2 x 3 maršruti.

Istabas un durvis

Noslēpumainā pilī ir astoņas istabas un sešu tipu durvis. Ja jūs izejat caur kādām durvīm, tad varat nokļūt citā istabā, kurā ir šī paša tipa durvis. Piemēram, istabai A ir zilās durvis, caur kurām izejot var nonākt vai nu istabā D, vai istabā E, kurām abām arī ir zilās durvis.



Jautājums

Jums nepieciešams nokļūt no istabas A uz istabu C, izejot cauri pēc iespējas maz citām istabām.

Caur cik durvīm šajā gadījumā būs jāiziet?

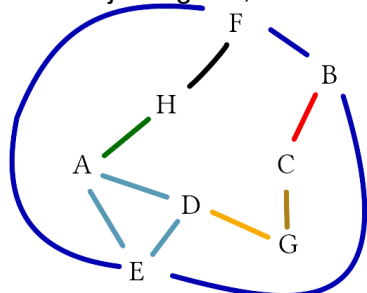
Ievadi naturālu skaitli.

Atbildes izskaidrojums

Pareizā atbilde: 3

Jāiziet caur trim durvīm.

Uzzīmējiet grafu, kurā virsotnes atbilst istabām, bet durvis - šķautnēm.



Ja vienu reizi atverat kādas no durvīm no A istabas un izejat caur tām, varat nonākt istabā D, E vai H. Ja atverat vēl otras durvis, varat nonākt no A istabā B (zilās durvis istabā E), F (zilās durvis istabā E vai melnās istabā H) vai G (oranžās durvis istabā D). Ja atverat trešās durvis - sarkanās durvis istabā B vai brūnās istabā G, varat sasniegt istabu C. Tādējādi no istabas A var sasniegt istabu C, kopumā izejot pa 3 durvīm.

Tuvāk vai tālāk

Daniels spēlē spēli, kurā rūtiņu laukumā jānosaka, kurā no rūtiņām ir apslēpti dārgumi. Daniels spēli sāk rūtiņā, kas apzīmēta ar **S** un katrā **solī** var pāriet uz blakus rūtiņu (kopīga mala) vertikālā vai horizontālā virzienā. Pēc katra soļa Daniels saņem signālu, vai viņš tuvojas (C no angļu "closer") vai attālinās (F no angļu "further away") no dārgumiem. **Attālumu** līdz dārgumiem nosaka kā soļu skaitu, kāds nepieciešams, lai no rūtiņas tiktu līdz rūtiņai, kurā apslēpti dārgumi.

Piemēram, zemāk parādītajā 3×3 rūtiņu laukumā rūtiņa, kurā apslēpti dārgumi, ir apzīmēta ar . Daniels veic divus soļus bultiņu virzienā. Attālums no katras rūtiņas līdz dārgumiem ir parādīts zīmējumā pa labi. Daniels pēc pirmā soļa saņem signālu "C", bet pēc otrā - "F".

		3			S
★		2	★		C
		3			F

Tagad Danielam ir iedots cits, 4×7 rūtiņās liels laukums un atzīmēts viņa veiktais maršruts un pēc katra soļa saņemtais signāls. Tad Daniels ir saņēmis papildu norādi, ka dārgumi atrodas kādā no piecām sanumurētajām rūtiņām.

1	2	3				S
4	C	5				C
	C			C	F	
	F	C	C	F		

Jautājums

Kurā no numurētajām rūtiņām atrodas dārgumi?
Ievadi naturālu skaitli.

Atbildes izskaidrojums

Pareizā atbilde: 5

Varam pārbaudīt, ka rūtiņai "5" atbilst dotā "C" un "F" virkne - ja attālums samazinās, tad tiek ziņots "C", bet, ja palielinās, tad "F".

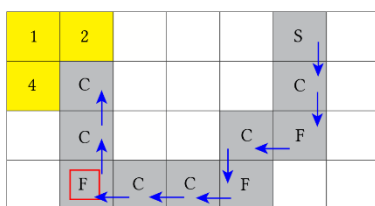
					4	
	1				3	
	2			3	4	
	3	2	3	4		

1	2	3				S
4	C	5				C
	C			C	F	
	F	C	C	F		

Citām numurētajām rūtiņām var norādīt kāda burta neatbilstību ziņojumu virknē.

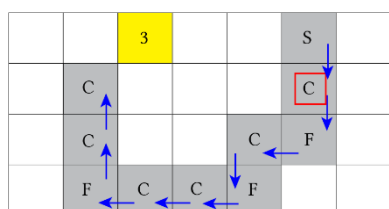
Rūtiņām 1, 2 vai 4:

Ja dārgumi būtu kādā no šīm rūtiņām, tad burta "F" vietā 4. rindas 2. kolonnā būtu "C", jo šī rūtiņa atrastos tuvāk dārgumiem nekā iepriekšējā (4. rindas 3. kolonnā).



Rūtiņai 3:

Ja dārgumi atrastos šajā rūtiņā, tad 2. rindas 6. kolonnā būtu jābūt "F", jo šī rūtiņa atrastos tālāk no dārgumiem nekā sākuma "S" rūtiņa.



Elektroniskā slēdzene

Bebri Bobs savas mājas ieejas durvīm ir uzstādījis elektroniska koda slēdzeni. Lai to atvērtu, nepieciešams nospiegt noteiktus taustiņus pareizā secībā. Sākotnējais kods bija šāds:

0	2	4	3	1
---	---	---	---	---

Lai šo kodu būtu grūtāk uzminēt, viņš to aizšifrēja šādi: **0>>0, 1>>3, 2>>0, 3>>1, 4>>0**

Pieraksts "**I>>K**" nozīmē, ka pa kreisi no skaitļa **I** tieši **K** skaitļi ir lielāki par **I**.

"**0>>0, 2>>0 un 4>>0**" nozīmē, ka parolē pa kreisi no skaitļiem **0, 2, 4** neviens nav par tiem lielāks.

"**1>>3**" nozīmē, ka pa kreisi no **1** tieši trīs skaitļi ir par to lielāki: **2, 3, 4**.

Un "**3>>1**" nozīmē, ka pa kreisi no **3** tieši viens skaitlis (**4**) ir par to lielāks.

Bobs nomainīja durvju kodu uz sarežģītāku astoņu ciparu kodu, kurš aizšifrēts izskatās kā:

0>>3, 1>>2, 2>>4, 3>>4, 4>>1, 5>>1, 6>>1, 7>>0.

Jautājums

1. Kāds ir Boba jaunais durvju kods?
2. *Ievadi astoņu ciparu virkni.*

Atbildes izskaidrojums

Pareizā atbilde:

7	4	1	0	5	6	2	3
---	---	---	---	---	---	---	---

Nav iespējams manuāli iegūt pareizo kodu, pārļausot visus iespējamās n! variantus.

Ir vairākas risināšanas stratēģijas, bet vienkāršākās no tām ir sākot ar lielāko (7) vai mazāko ciparu (0). Aplūkosim variantu, kad sākam no mazākā (0).

1) No **0>>3** izriet, ka pa kreisi no 0 ir jābūt trim brīvām šūnām. Tas ir, 0 garantēti atrodas ceturtajā šūnā no kreisās puses.

2) No **1>>2** izriet, ka pa kreisi no 1 ir jābūt divām brīvām šūnām. Tas ir, 1 garantēti atrodas trešajā šūnā no kreisās puses.

3) No **2>>4** izriet, ka pa kreisi no 2 ir jābūt četrām brīvām šūnām. Tas ir, 2 garantēti atrodas sestajā šūnā no kreisās puses:

	1	0		2			
--	---	---	--	---	--	--	--

Turpinot šādus spriedumus, atradīsim vienīgo atrisinājumu.

Seifa atvēršana

Bebram nepieciešams atvērt seifu, izgaismojot pareizos ciparus. Vienā gājienā bebrs var pagriezt bultiņu pulksteņrādītāja virzienā par 3 vai 4 iedaļām. Pēc pagriešanas, gaisma zem cipara, uz kuru tagad norāda bulta, tiek pārslēgta uz pretējo: ja nebija ieslēgta, tad tiek ieslēgta, bet, ja bija, tad tiek izslēgta.

Ja bebrs izdara trīs gājienu, katrā bultiņu pagriežot par 4 iedaļām, tad situācija mainās tā, kā parādīts attēlā:

Sākuma stāvoklis	Pēc 1. gājiena (pagrieza par 4 iedaļām)	Pēc 2. gājiena (pagrieza par 4 iedaļām)	Pēc 3. gājiena (pagrieza par 4 iedaļām)

Jautājums

Seifa atvēršanai nepieciešams, lai gaisma būtu ieslēgta tikai zem cipariem 7 un 8 (zem citiem cipariem gaisma nedrīkst būt ieslēgta). Ar kādu mazāko gājienu skaitu bebrs to var panākt (sākuma stāvoklī bultiņa atrodas pret ciparu "1" kā parādīts attēlā augstāk)?

Atbilžu varianti

- A) ar 3 gājieniem
- B) ar 4 gājieniem
- C) ar 5 gājieniem
- D) ar 6 gājieniem
- E) ar 7 gājieniem

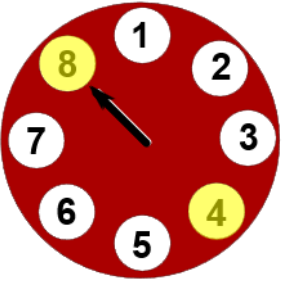
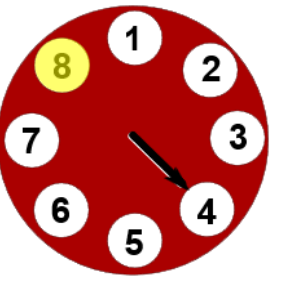
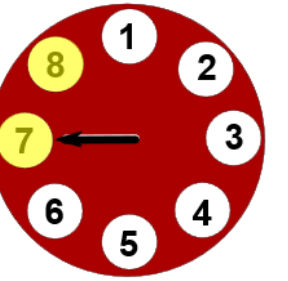
Atbildes izskaidrojums

Pareizā atbilde: B

Viens no veidiem, kā sākt risināt šo uzdevumu, ir saprast, ka skaitļus 8 un 7 var sasniegt, veicot divus gājienu no sākuma pozīcijas. Lai sasniegtu 7, bultiņa divreiz jāpagriež par 3 iedaļām. Lai sasniegtu 8, bultiņa jāpagriež par 4, pēc tam par 3 iedaļām.

Turklāt, ja esam uz 8, mēs varam sasniegt 7 ar diviem gājieniem, bet ne otrādi. Lai sasniegtu 8 no 7, būtu nepieciešams vairāk gājienu. Tāpēc mēģinājums sasniegt 8 un pēc tam 7 izskatās daudzsološs variants, ko varētu pabeigt tikai 4 gājienu. Bet, protams, ar 4 gājieniem mēs mainām arī to starpnieku numuru stāvokli, uz kuriem norāda bultiņa. Tātad, lai iedegtos tikai 7 un 8, un neviens cits cipars, mums ir jānodrošina, lai mēs norādītu uz vienu un to pašu starpnieka ciparu, gan vispirms dodoties uz 8, gan pēc tam, kad sasniegsim 7.

Tas darbojas, ja mēs pārvietojamies šādi: vispirms 3 iedaļas (iedegas 4), tad 4 iedaļas (iedegas 8), tad atkal 4 iedaļas (izslēdzam 4) un visbeidzot vēl 3 iedaļas, lai iedegtos 7.

1. gājiens	2. gājiens	3. gājiens	4. gājiens
3 iedaļas	4 iedaļas	4 iedaļas	3 iedaļas
			

Tālāk pierādīsim, ka 4 gājiens ir mazākais iespējamais skaits. **Pēc viena gājiena:**

1. gājiens	Izgaismotie cipari
3 iedaļas	4
4 iedaļas	5

Izmantojot vienu gājienu, var izgaismot tikai vienu ciparu.

Pēc diviem gājieniem:

1. gājiens	2. gājiens	Bultiņa norādīja uz cipariem	Beigās izgaismotie cipari
3 iedaļas	3 iedaļas	4, 7	4, 7
3 iedaļas	4 iedaļas	4, 8	4, 8
4 iedaļas	3 iedaļas	5, 8	5, 8
4 iedaļas	4 iedaļas	5, 1	5, 1

Pēc diviem gājieniem būs izgaismoti divi cipari, bet tie nebūs 7 un 8.

Pēc trim gājieniem:

1. gājiens	2. gājiens	3. gājiens	Bultiņa norādīja uz cipariem	Beigās izgaismotie cipari
3 iedaļas	3 iedaļas	3 iedaļas	4, 7, 2	4, 7, 2
3 iedaļas	3 iedaļas	4 iedaļas	4, 7, 3	4, 7, 3
3 iedaļas	4 iedaļas	3 iedaļas	4, 8, 3	4, 8, 3
3 iedaļas	4 iedaļas	4 iedaļas	4, 8, 4	8
4 iedaļas	3 iedaļas	3 iedaļas	5, 8, 3	5, 8, 3
4 iedaļas	3 iedaļas	4 iedaļas	5, 8, 4	5, 8, 4
4 iedaļas	4 iedaļas	3 iedaļas	5, 1, 4	5, 1, 4
4 iedaļas	4 iedaļas	4 iedaļas	5, 1, 5	1

Pēc trim gājieniem būs izgaismots viens vai trīs cipari, tāpēc tie nebūs 7 un 8.

Pēc četriem gājieniem:

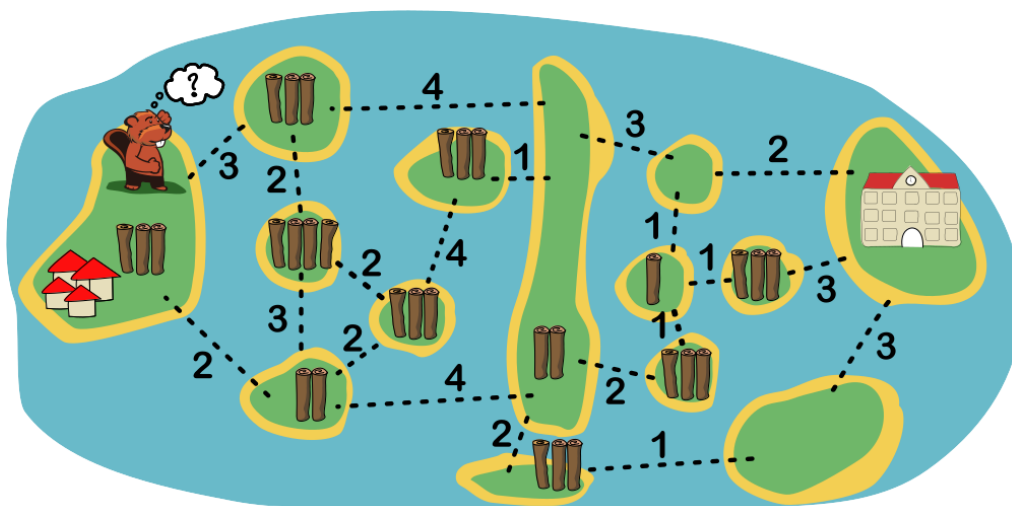
1. gāj.	2. gāj.	3. gāj.	4. gāj.	Bultiņa norādīja uz cipariem	Beigās izgaismotie cipari
3 iedaļas	3 iedaļas	3 iedaļas	3 iedaļas	4, 7, 2, 5	4, 7, 2, 5
3 iedaļas	3 iedaļas	3 iedaļas	4 iedaļas	4, 7, 2, 6	4, 7, 2, 6
3 iedaļas	3 iedaļas	4 iedaļas	3 iedaļas	4, 7, 3, 6	4, 7, 3, 6
3 iedaļas	3 iedaļas	4 iedaļas	4 iedaļas	4, 7, 3, 7	4, 3
3 iedaļas	4 iedaļas	3 iedaļas	3 iedaļas	4, 8, 3, 6	4, 8, 3, 6
3 iedaļas	4 iedaļas	3 iedaļas	4 iedaļas	4, 8, 3, 7	4, 8, 3, 7
3 iedaļas	4 iedaļas	4 iedaļas	3 iedaļas	4, 8, 4, 7	8, 7
3 iedaļas	4 iedaļas	4 iedaļas	4 iedaļas	4, 8, 4, 8	-
4 iedaļas	3 iedaļas	3 iedaļas	3 iedaļas	5, 8, 3, 6	5, 8, 3, 6
4 iedaļas	3 iedaļas	3 iedaļas	4 iedaļas	5, 8, 3, 7	5, 8, 3, 7
4 iedaļas	3 iedaļas	4 iedaļas	3 iedaļas	5, 8, 4, 7	5, 8, 4, 7
4 iedaļas	3 iedaļas	4 iedaļas	4 iedaļas	5, 8, 4, 8	5, 4
4 iedaļas	4 iedaļas	3 iedaļas	3 iedaļas	5, 1, 4, 7	5, 1, 4, 7
4 iedaļas	4 iedaļas	3 iedaļas	4 iedaļas	5, 1, 4, 8	5, 1, 4, 8
4 iedaļas	4 iedaļas	4 iedaļas	3 iedaļas	5, 1, 5, 8	1, 8
4 iedaļas	4 iedaļas	4 iedaļas	4 iedaļas	5, 1, 5, 1	-

Pēc četriem gājieniem ir iespējams izgaismot tikai 7 un 8. Esam aplūkojuši visus variantus, tāpēc 4 ir mazākais nepieciešamais gājienu skaits.

Tiltu būve

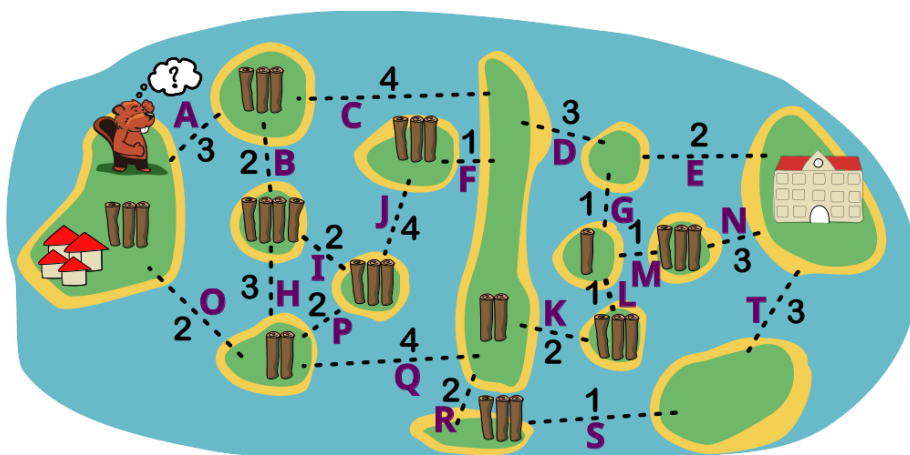
Braiens ir tiltu būvētājs. Viņa nākamais darbs ir uzbūvēt tiltus tā, lai skolēni no viņa ciema varētu nokļūt jaunajā skolā. Braiens nevēlas peldēt, tāpēc vispirms viņam ir jāuzbūvē tilts, ko var izmantot šķērsošanai tik reižu, cik nepieciešams.

Lai uzbūvētu tiltu, Braienam vajag pietiekami daudz balķu. Savā ciematā viņš var dabūt tikai 3 balķus, lai sāktu būvniecību. Viņš var arī ceļot starp jebkurām salām, kas jau savienotas ar tiltiem, lai savāktu tur vairāk balķu. Zemāk esošajā kartē ir parādīts, cik balķu ir nepieciešams, lai izveidotu tiltu katrā iespējamā ūdens šķērsojumā un cik balķu ir pieejami katrā salā. Katru balķi var izmantot tikai vienreiz, bet nav noteikti jāizmanto visi pieejamie balķi.



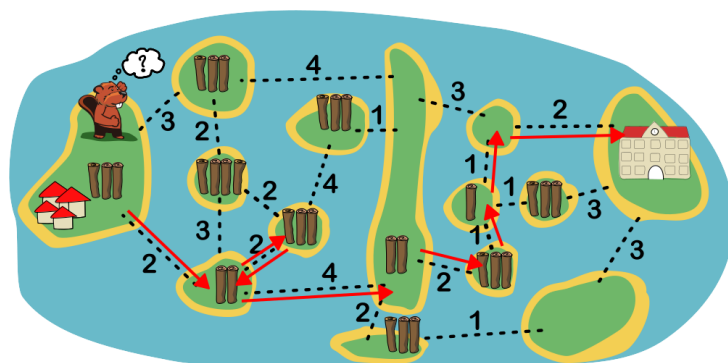
Jautājums

Kāds mazākais balķu skaits Braienam nepieciešams, lai uzbūvētu tiltus, kas ļautu skolēniem no viņa ciema, ejot tikai pa tiltiem un salām, nokļūt skolā? *Ievadi naturālu skaitli.*



Atbildes izskaidrojums

14 baļķi. Interaktīvajā versijā: {O,P,Q,K,L,G,E}



Mēs varam parādīt, ka derīgs ceļš ir iespējams (katrā solī ir spēkā sakarība savāktie baļķi $\geq$ izmantotie baļķi), katrā solī reģistrējot savākto un izlietoto baļķu kopskaitu: (3,2)(5,4)(8,4)(8,8)(10,10)(13,11)(14,12)(14,14).

Mēs varam pierādīt, ka izmantoto baļķu skaits ir mazākais iespējamais, atrodot visus ceļus, kas savieno ciemu ar skolu un kuros ir ≤ 14 izmantotie baļķi, un parāda, ka tikai atrastā atbilde ir iespējama. Pirmkārt, ņemiet vērā, ka visiem ceļiem ir jāiet caur lielo salu vidū, tāpēc uzdevumu varam sadalīt divās daļās. Otrkārt, ceļam no ciema uz centru ir nepieciešami vismaz 6 baļķi un ceļam no centra uz skolu ir nepieciešami vismaz 5 (mēs sauksim tās par apakšējām robežām).

Vispirms mēs atrisinām kreiso daļu, izmantojot labo apakšējo robežu. Tas nozīmē, ka mēs meklējam visus iespējamus ceļus, kuros tiek izmantoti ≤ 9 baļķi (jo jebkurš risinājums kreisajai daļai ≥ 10 kopā izmantotu vismaz 15 baļķus).

Kreisajā pusē ir šādi ceļi, kas savienojas ar centru un izmanto ≤ 9 baļķus (parādīts ar savāktajiem baļķiem, izmantotajiem baļķiem):

{A,C}=(6,7),{A,B,C}=(10,9),{O,Q}=(5,6),{O,H,Q}=(9,9)
,{O,P,Q}=(8,8),{O,P,J,F}=(11,9)

Noņemot neīstenojamus risinājumus (tos, kuros ir savāktie baļķi $<$ izmantotie baļķi), mums paliek:

{A,B,C}=(10,9),{O,H,Q}=(9,9),{O,P,Q}=(8,8),{O,P,J,F}=(11,9)

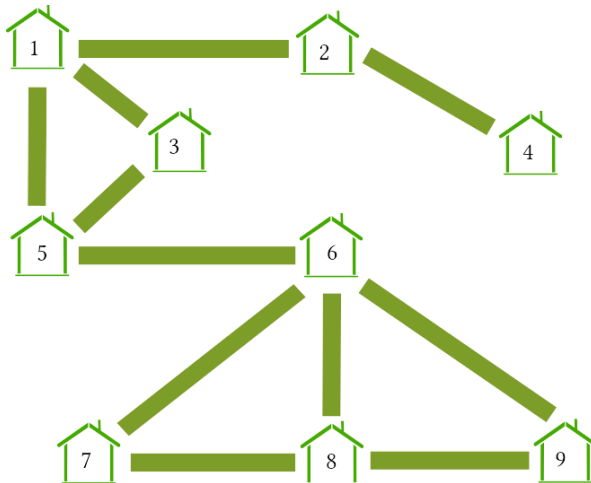
Pēc tam mēs atrisinām labo pusi, izmantojot 8 izmantoto baļķu apakšējo robežu kreisajā pusē, tāpēc mēs meklējam visus ceļus, kuros tiek izmantoti ≤ 6 baļķi:

{D,E}=(2,5),{D,G,E}=(3,6),{K,L,G,E}=(6,6),{R,S,T}=(5,6)

Tagad mēs apvienojam kreiso un labo daļu risinājumus, lai atrastu visus iespējamus pārus, kuros kopā būtu ≤ 14 izmantotie baļķi, un atrastu tikai {O,P,Q}=(8,8)+{K,L,G,E}=(6,6) $\rightarrow$ (14,14) tāpat kā visiem pārējiem pāriem savākto baļķu skaits ir mazāks par nepieciešamo baļķu skaitu.

Bebru māju krāsa

Trīs dažādu cilšu bebbriem ciematā ir uzceltas deviņas jaunas mājas. Katrā ciltī ir trīs ģimenes, un katrai ciltij būs trīs mājas - pa vienai katrai ģimenei. Visi vienas cilts bebbri dzīvos vienas krāsas mājās. Pilsētas dome mājām izmanto trīs krāsas: dzeltenu, zilu un sarkanu. Divas blakus esošās mājas, kas ir savienotas ar ielu, nevar būt vienā krāsā. Zemāk redzamajā attēlā ir parādīta māju atrašanās vieta un ielas, kas tās savieno. Nosakiet, kurām mājām noteikti jābūt vienā krāsā!



Jautājums

Kurām mājām noteikti jābūt vienā krāsā?

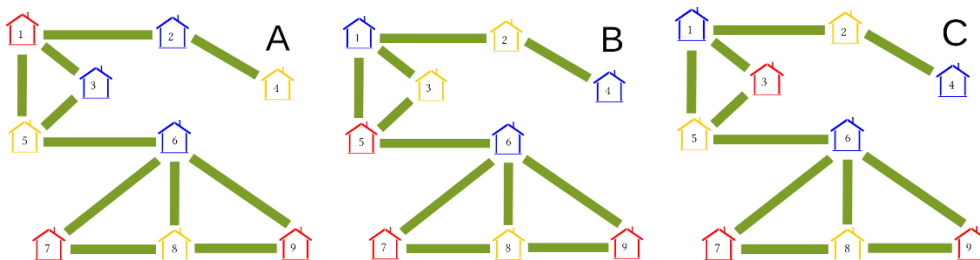
Atzīmējiet visas tās!

Atbildes izskaidrojums

Pareizā atbilde: mājas 7 un 9

Mājas 6 un 8 ir savienotas, tāpēc to krāsas atšķiras. Mājas 7 un 9 katra ir savienota ar abām šīm mājām, tāpēc to krāsai jābūt atlikušajai trešajai krāsai.

Parādīsim, ka atlikušajiem māju pāriem var būt atšķirīgs krāsojums. Aplūkosim trīs variantus:



Vispirms apsveriet māju pārus ar numuriem 1, 2, 3, 4 un 5. Variantā A vienīgie divi vienādas krāsas pāri ir {2; 3} un {4; 5}. Abi pāri ir nokrāsoti dažādās krāsās krāsojumā C. Tagad aplūkosim māju pārus ar numuriem 6, 7, 8 un 9. Visos 3 krāsojumos visi pāri, izņemot {7; 9} ir atšķirīgās krāsās.

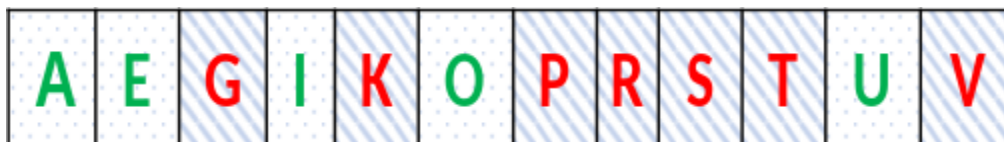
Tagad mums ir palikuši pāri, kas sastāv no vienas mājas ar numuru 1-5 un otru - no 6-9. Visām mājām 1-5 ir atšķirīgas krāsas variantā B, salīdzinot ar A, un visas mājas 6-9 ir vienādas krāsās gan variantā A, gan B. Tātad šiem pāriem ir vai nu dažādas krāsas variantā A vai variantā B.

Stāvvietas atļaujas

Bebru pilsētas transporta departaments izsniedz ierobežotu skaitu stāvvietu atļauju. Katrai atļaujai ir unikāls identifikators, kas atbilst šādiem noteikumiem:

- tas sastāv no trim burtiem, kam seko viens cipars,
- pirmais burts ir līdzskanis,
- trešais burts ir patskanis.

Bīversitijā beбри lieto Rotokas alfabētu, kas sastāv no šādiem burtiem:



Šeit

- patskaņi ir zaļā krāsā uz punktota fona, bet
- līdzskani ir sarkanā krāsā uz svītraina fona.

Lai gan alfabētā ir gan lielie, gan mazie burti, atļauju identifikatoros tiek lietoti tikai lielie burti. Veidojot identifikatorus, vienu un to pašu burtu drīkst izmantot vairākkārt.

Jautājums

Kādu lielāko skaitu stāvvietu atļauju var izsniegt transporta departaments?

levadi veselu nenegatīvu skaitli.

Atbildes izskaidrojums

Pirmajam burtam jābūt līdzskanim. Rotokas alfabētā ir 7 līdzskaņi. Tādējādi identifikatora pirmais burts var būt viens no 7 līdzskaņiem.

Otrais burts var būt līdzskanis vai patskanis. Tas nozīmē, ka mēs varam izvēlēties jebkuru no alfabēta burtiem. Tādējādi identifikatora otrais burts var būt viens no 12 burtiem.

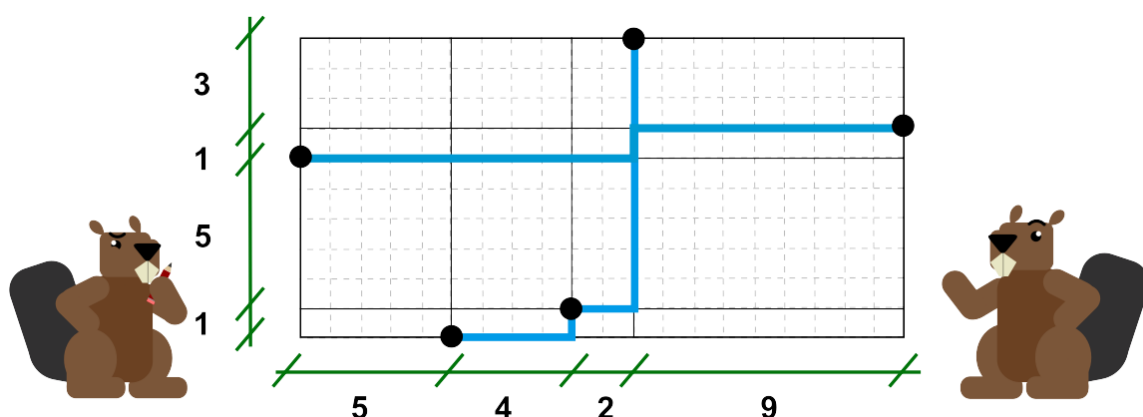
Trešajam burtam jābūt patskanim. Alfabētā ir 5 patskaņi. Tādējādi identifikatora trešais burts var būt viens no 5 patskaņiem.

Identifikators beidzas ar ciparu, kura vērtība var būt no 0 līdz 9. Tādējādi identifikatora vienīgais cipars var būt viens no 10 cipariem.

Lai iegūtu autostāvvietas atļauju skaitu, vajag sareizināt variantu skaitu katrā no pozīcijām: $7 \times 12 \times 5 \times 10 = 4200$ atļaujas.

Kanālu izbūves plāns

Bebars-arhitekts Moriss iepazīstina ar savu ūdens kanālu izbūves plānu. Kanāliem jāsavieno pieci ciemata mājokļi, kas kartē apzīmēti ar melniem aplīšiem. Moriss uzskata, ka, izbūvējot kanālus, nepieciešams turēties pie horizontālajām un vertikālajām līnijām, kas kartē šķērso katru mājokli, un savā 20x10 rūtiņas lielajā zīmējumā viņš ir norādījis attālumus starp šīm līnijām un ar zilu krāsu iezīmējis iespējamo kanāla shēmu.



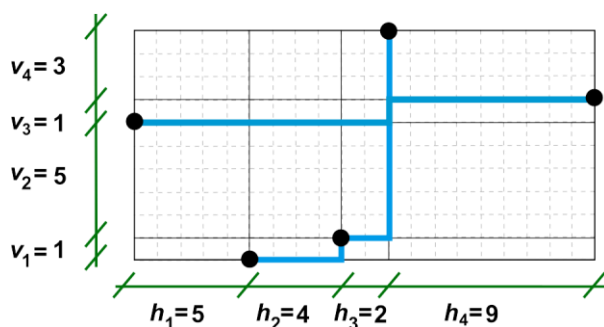
Bebars Jēkabs ir aprēķinājis, ka kopējais plānotais kanālu kopgarums ir 36 garuma vienības (garuma vienība ir rūtiņu mala). Bet, shēmu pārplānojot, iespējams kanālu kopējo garumu samazināt!

Jautājums

Kāds ir īsākais iespējamais kanālu kopgarums, to joprojām veidojot no horizontāliem un vertikāliem segmentiem, izteikts garuma vienībās? Ievadi naturālu skaitli.

Atbildes izskaidrojums

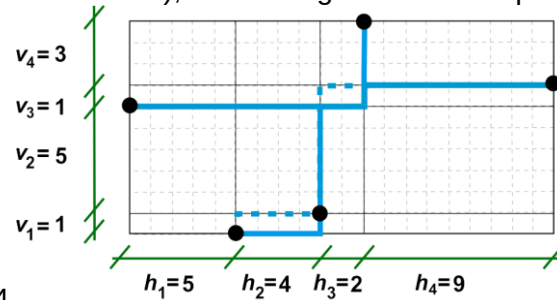
Pareizā atbilde: 34



Aplūkosim attālumus starp kaimiņu taisnēm horizontālā ($h_1 = 5, h_2 = 4, h_3 = 2, h_4 = 9$) un vertikālā ($v_1 = 1, v_2 = 5, v_3 = 1, v_4 = 3$) virzienā, katrs no kuriem ir jānosedz ar vismaz vienu kanāla posmu, kas nozīmē, ka kanālu kopgarums nevar būt mazāks par 30. Morisa plānā (skat. zīmējumu augstāk) posmi h_2 un h_3 ir noklāti divreiz, kas arī veido kopējo kanālu garumu $30 + 4 + 2 = 36$.

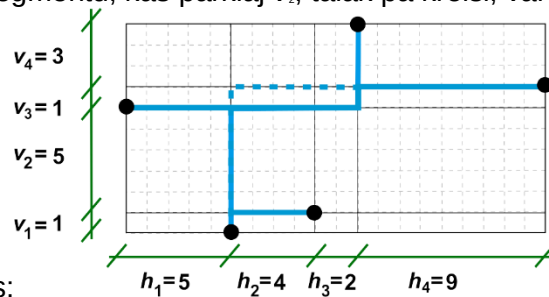
Lai iegūtu optimālu risinājumu, pārvietosim kanāla fragmentu, kas pārklāj v_2 , kā parādīts nākamajā attēlā (kur punktoti segmenti parāda līdzvērtīgas alternatīvas, kas

ietver divas taisnstūra malas), lai tikai segments h_2 būtu pārklāts divreiz un kopgarums



būtu $30 + 4 = 34$.

Pārvietojot segmentu, kas pārklāj v_2 , tālāk pa kreisi, var iegūt vēl divus optimālus



atrisinājumus:

Skaidrs, ka divreiz noseģ posmu v_2 nav izdevīgi, jo $v_2 > h_2$. Atlikušās iespējamās vietas vienīgajam (vertikālajam) posmam, kas nosedz posmu v_2 , ir kartes kreisajā un labajā pusē. Šajos gadījumos vismaz posms h_1 vai h_4 (abi lielāki par h_2) tiktu noseģti divreiz. Tas parāda, ka minimālais kanālu kopgarums ir 34, kur h_2 pārklāts divreiz.

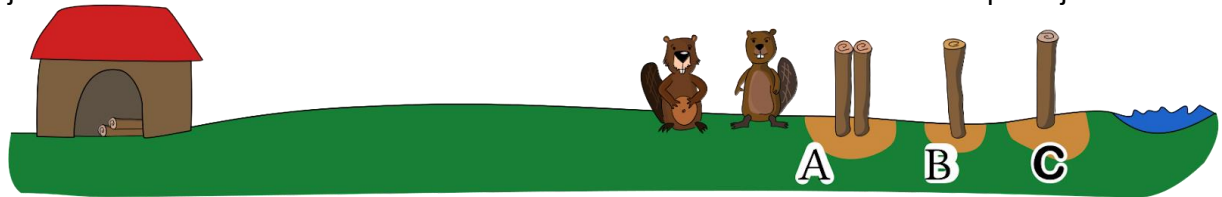
Baļķi uz noliktavu

Bebriem Alfam un Bobam jāpārnes baļķi – pa vienam! – no upes krasta (attēla labajā pusē) līdz noliktavai (attēla kreisajā pusē). Lai padarītu savu darbu patīkamāku, viņi nolemj strādāt pārmaiņus. Vispirms viens izvēlas baļķi un nes to pa kreisi, līdz tiek līdz tuvākajam laukumam, kur jau atrodas cits baļķis vai nonāk noliktavā. Tad tāpat baļķi nes otrs. Tad atkal pirmais, utt.

Kurš no bebbiem ir spiests nest pēdējo atlikušo baļķi uz noliktavu, zaudē spēli.

Teiksim, ka bebram ir uzvaroša stratēģija, ja viņam ir veids, kā spēlēt un vienmēr uzvarēt, neatkarīgi no tā, kā spēlē pretinieks.

Šodien viņiem jāpārnes četri baļķi, kas izvietoti kā redzams attēlā, un Alfam baļķis jānes pirmajam.



Jautājums

Tikai viens no nākamajiem četriem apgalvojumiem ir patiess. Kurš?

Atbilžu varianti

- 1) Alfam ir uzvaroša stratēģija, un jāsāk ar vienu no diviem A baļķiem aiznešanu uz noliktavu.
- 2) Alfam ir uzvaroša stratēģija, un jāsāk ar baļķa no B aiznešanu blakus diviem A baļķiem.
- 3) Alfam ir uzvaroša stratēģija, un jāsāk ar baļķa no C aiznešanu blakus B baļķim.
- 4) Neviena no iepriekšējos atbilžu variantos aprakstītajām Alfa stratēģijām nav uzvaroša.

Atbildes izskaidrojums

Pareizā atbilde ir 2).

Par “pozīciju” sauksim skaitļu virkni, kas no kreisās puses uz labo norāda, cik baļķu ir katrā grupā ārpus noliktavas, sākot no noliktavai tuvākās un beidzot ar vistālāko. Spēle pāriet no vienas pozīcijas uz otru, un nav iespējams atgriezties iepriekšējā pozīcijā (baļķi nekad netiek nesti no kreisās puses uz labo). Mūsu gadījumā sākotnējo pozīciju attēlo virkne 211 (vienkāršības labad mēs varam izlaist atdalītājus starp skaitļiem, jo mums būs tikai viencipara skaitļi).

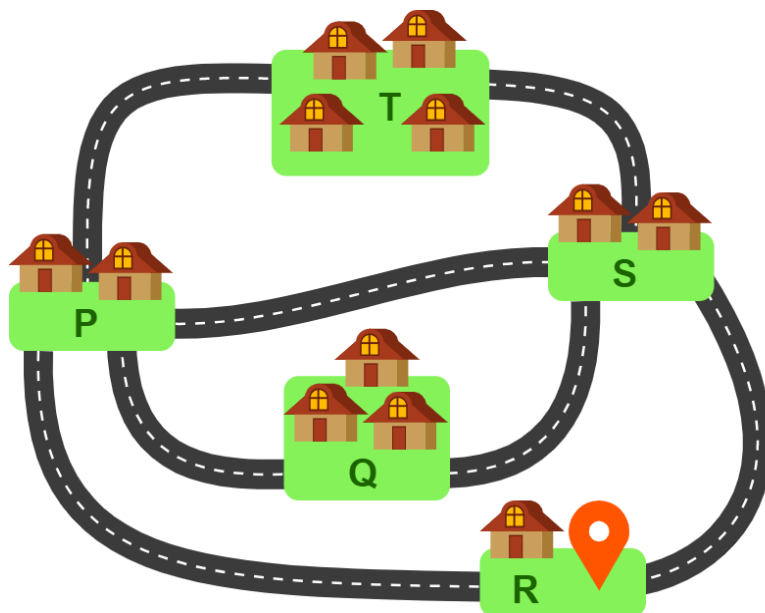
Ja Alfs aiznes baļķi no B blakus diviem baļķiem A, tad jaunā pozīcija ir 31, un spēle var turpināties divos veidos:

a) Bobs aiznes vienu baļķi no A uz noliktavu (tātad tiek sasniegta pozīcija 21), Alfs aiznes baļķi C blakus diviem A baļķiem (tātad tiek sasniegta pozīcija 3), Bobam neatliek nekas cits kā aiznest vienu no trim baļķiem uz noliktavu, Alfs aiznes vienu no atlikušajiem diviem, un pēdējais baļķis ir jānes Bobam!

b) Bobs aiznes baļķi C blakus trim A baļķiem (tātad tiek sasniegta pozīcija 4), Alfs aiznes vienu baļķi uz noliktavu (tātad tiek sasniegta pozīcija 3), un turpinājums ir kā iepriekš.

Dažādie maršruti

Uzņēmums, kas digitalizē kartes, apkopo visus nepieciešamos attēlus, lai attēlotu visus zemāk parādītajā kartē ciematus savienošos ceļus. Laika ierobežojumu dēļ ir tikai septiņas stundas, lai šos attēlus uzņemtu. Viņi var izvēlēties jebkuru maršrutu, kas ļauj veikt šo uzdevumu, paturot prātā, ka ir nepieciešama tieši viena stunda, lai uzņemtu attēlus no katra divus ciematus savienošā ceļa.



Jautājums / izaicinājums

Sākot no ciemata R, cik dažādi maršruti ļauj uzņemt visu ceļu attēlus tieši septiņās stundās?

Atbilžu varianti

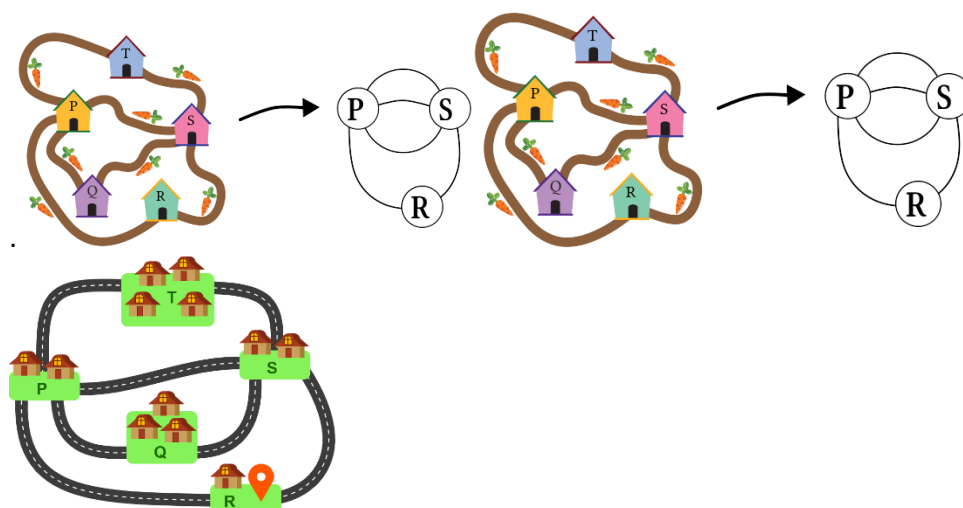
- A. 6
- B. 8
- C. 10
- D. 12

Atbildes izskaidrojums

Pareizā atbilde ir D: ir 12 dažādi maršruti.

Automašīnai katrs ceļš jāveic tieši vienreiz, lai septiņu stundu laikā uzņemtu visus attēlus.

Rezultātā vienīgās vietas, kur var izvēlēties, pa kuru ceļu iet, ir sākuma ciemats (R) un ciemati (P un S), kas savienoti ar vairāk nekā diviem ceļiem. Mēs varam vienkāršot uzdevuma formulējumu, izveidojot abstraktu modeli, kas ignorē ciematus Q un T, jo tajos nav nākamā ceļa izvēles. Zemāk ir parādīts šāds abstrakts ceļu modelis



Ja jāsāk no ciemata R, un pa katru ceļu jābrauc tieši vienu reizi, tas nozīmē, ka mums maršruts arī jābeidz ir ciematā R.

Vispirms apsvēam iespēju pārvietoties pa labi no R. Vienīgās maršrutu izvēles ir, cik dažādos veidos nokļūt no S uz P, ja jāapmeklē katrs no trim ceļiem starp S un P. Atbilde ir seši.

Lai to saprastu, piešķirsim nosaukumus trim ceļiem: augšējais, vidējais, apakšējais. Mēs varam sākt ar jebkuru no trim, bet pēc viena izvēles mums paliek tikai viena no divām citām, un pēc šīs izvēles nav izvēles par trešo ceļu. Tātad izvēļu skaits ir $3 \times 2 \times 1 = 6$:

1. augšējais, vidējais, apakšējais;
2. vidējais, augšējais, apakšējais;
3. apakšējais, augšējais, vidējais;
4. augšējais, apakšējais, vidējais;
5. vidējais, apakšējais, augšējais;
6. apakšējais, vidējais, augšējais.

Tātad, sākot no R un virzoties pa labi, ir seši veidi, kā atgriezties R, braucot pa katru ceļu tieši vienu reizi. Kā būtu ar startu no R un virzīšanās pa kreisi? Arī atbilde ir seši, un patiesībā katrs no iespējamajiem maršrutiem ir tikai kāds no pirmajiem sešiem maršrutiem veikts pretējā virzienā.

Tas kopā veido 12 iespējamus maršrutus, kas apmeklē katru no septiņiem ceļiem tieši vienu reizi. Uzskaitot tos visus, šeit ir 12 dažādi maršruti, kurus var izmantot:

$R \rightarrow S \rightarrow T \rightarrow P \rightarrow S \rightarrow Q \rightarrow P \rightarrow R$
 $R \rightarrow S \rightarrow T \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow S \rightarrow P \rightarrow R$
 $R \rightarrow S \rightarrow P \rightarrow T \rightarrow S \rightarrow Q \rightarrow P \rightarrow R$
 $R \rightarrow S \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow S \rightarrow T \rightarrow P \rightarrow R$
 $R \rightarrow S \rightarrow Q \rightarrow P \rightarrow S \rightarrow T \rightarrow P \rightarrow R$
 $R \rightarrow S \rightarrow Q \rightarrow P \rightarrow T \rightarrow S \rightarrow P \rightarrow R$

Došanās uz citu salu

Salā A atrodas 15 bebri, kuri vēlas apmeklēt ballīti salā B. Attēlā redzams salu savstarpējais novietojums.

Pārējās salas ir tukšas. Bebri ir ģērbušies savās labākajās drēbēs un pa ceļam nevēlas tās saslapināt, tāpēc no salas uz salu iet tikai pāri baļķiem vadoties pēc šādiem noteikumiem:

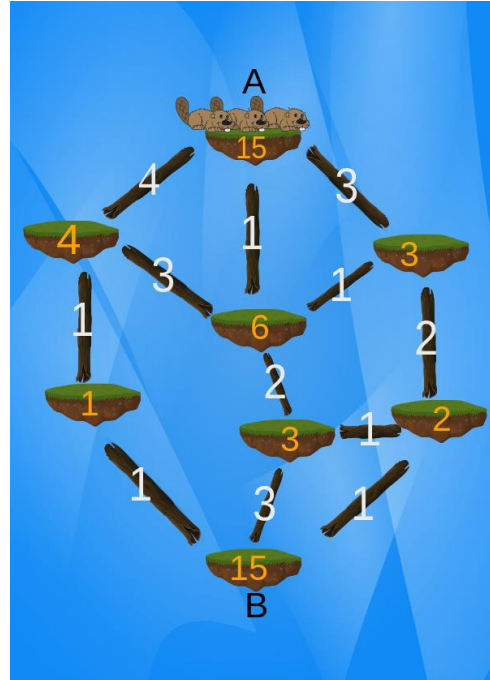
Skaitlis uz katra baļķa attēla norāda maksimālo bebru skaitu, kas šo baļķi var šķērsot vienlaikus.

Skaitlis uz katra salas attēla norāda maksimālo bebru skaitu, kas vienlaikus var atrasties šajā salā.

Uz katras no salām A un B jebkurā laikā var atrasties ne vairāk kā 15 bebri.

Pāri baļķiem bebru grupas iet vairākos soļos. Piemēram, pirmajā solī četri bebri no salas A var doties uz salu kreisajā pusē, viens uz salu vidū un trīs uz salu labajā pusē.

Tikai tad, kad visi bebri ir nonākuši savās salās, var sākties otrais solis. Bebri, protams, var nolemt, ka kāds vai visi bebri kādā solī nepārvietojas un paliek savā salā.



Jautājums / izaicinājums

Kāds ir lielākais bebru skaits, kāds var būt salā B pēc pieciem soļiem?

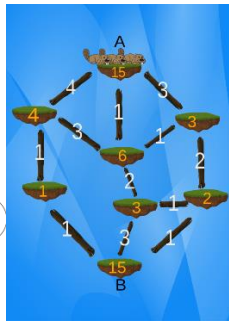
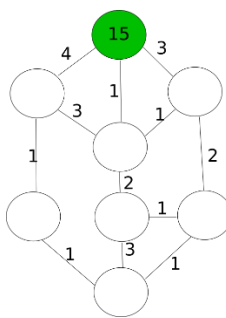
Atbilžu varianti

- A) 11
- B) 12
- C) 13
- D) 14
- E) 15

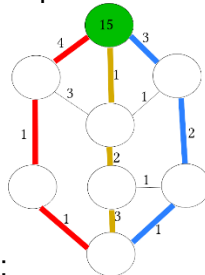
Atbildes izskaidrojums

Pareizā atbilde: C

Šī jautājuma risināšanā palīdz attēlu vienkāršošana mezglu tīklā, kur zaļajā aplī norādīts bebru skaits šajā salā, bet baltie mezgli atbilst tukšām salām. Tā kā baļķu kravnesība ir vienāda ar to savienoto salu kapacitāti vai mazāka par to, mēs varam ignorēt salu ietilpību. Ceļojuma sākums būtu šāds:



Mēs redzam, ka salas B sasniegšanai nepieciešami vismaz trīs soļi. To iespējams



panākt, virzoties pa vienu no trim ceļiem:

- Ja beбри dodas pa ceļu, kas attēlā atrodas visvairāk pa kreisi (sarkanais), tad četri beбри var doties uz nākamo salu pirmajā solī, bet nākamajos divos soļos var doties tikai viens bebris.
- Ja beбри dodas pa ceļu, kas attēlā atrodas vidū (dzeltenbrūnais), tad katrā solī var pārvietoties tikai i viens bebris.
- Ja beбри dodas pa ceļu, kas attēlā atrodas visvairāk pa labi (zilais), tad trīs beбри var doties uz nākamo salu pirmajā solī, divi - otrajā, un viens - trešajā.

Tādējādi, pēc trim soļiem ne vairāk kā trīs beбри var sasniegt salu B.

Tā kā pa baļķiem, kas savienoti ar salu B, vienā solī var pāriet ne vairāk kā $1+3+1=5$ beбри, pēc 5. soļa maksimālais bebru skaits salā B var būt 13 (t.i., $3+5+5$). Tāpēc mēs varam izslēgt atbildes D) un E).

Bet kura no atlikušajām iespējām ir maksimālā? Parādīsim, ka līdz 5. soļa beigām uz salas B patiešām ir iespējams atrasties 13 bebriem. Kā to izdarīt, ir parādīts zemāk esošajos attēlos:

Sākumā	Pēc 1. soļa	Pēc 2. soļa	Pēc 3. soļa	Pēc 4. soļa	Pēc 5. soļa

Groza pieskatīšana

Draugu grupa spēlē groza pieskatīšanas spēli un cenšas, lai grozā būtu tieši 10 āboli. Noteiktā laika brīdī kāds no draugiem ielūkojas grozā un rīkojas saskaņā ar ieraudzīto:

	Novērojums	Darbība
1	Grozā ir mazāk par 10 āboliem	Ieliek grozā vienu ābolu
2	Grozā ir vairāk par 10 āboliem	Paņem no groza vienu ābolu
3	Grozā ir tieši 10 āboli	Nedara neko

Ābolu saskaitīšana notiek momentāni, bet ābola ielikšana vai paņemšana notiek tieši piecas sekundes pēc novērojuma. Drugi savā starpā nesazinās. Katrs no draugiem ielūkojas grozā un tieši piecas sekundes vēlāk veic nepieciešamo darbību.

Jautājums / izaicinājums

Sākoties hronometra laika atskaitei, grozā ir deviņi āboli un katrs no draugiem veica savu novērojumu šādā laika brīdī, saskaņā ar hronometra rādījumu:

Laiks	Notikums
0 sekundes	Alise ielūkojas grozā
4 sekundes	Bobs ielūkojas grozā
7 sekundes	Centis ielūkojas grozā
8 sekundes	Dana ielūkojas grozā
10 sekundes	Ernests ielūkojas grozā
11 sekundes	Francis ielūkojas grozā

Kāds būs ābolu skaits grozā pēc tam, kad visi draugi būs veikuši uz saviem novērojumiem balstītās darbības?

Atbilžu varianti

- A. 8
- B. 9
- C. 10
- D. 11
- E. 12

Atbildes izskaidrojums

Parezā atbilde: B

Varam papildināt doto tabulu, atzīmējot grozā veiktās izmaiņas:

Laiks	Notikums	Ābolu skaits grozā
0 sekundes	Alise ielūkojas grozā	9
4 sekundes	Bobs ielūkojas grozā	9
5 sekundes	Alise ieliek grozā ābolu	10
7 sekundes	Centis ielūkojas grozā	10
8 sekundes	Dana ielūkojas grozā	10
9 sekundes	Bobs ieliek grozā ābolu	11
10 sekundes	Ernests ielūkojas grozā	11
11 sekundes	Francis ielūkojas grozā	11
15 sekundes	Ernests paņem ābolu	10
16 sekundes	Francis paņem ābolu	9

Palindroma paroles

Hanna un Otto plāno tikšanos savā klubā. Slepenās tikšanās laiks ir iekodēts burtu un ciparu koda blokā. Koda bloks tiek lasīts pa rindām, sākot no augšas, katra rinda no kreisās uz labo pusi, it kā tie veidotu vienu garu simbolu virkni.

Slepenās tikšanās laiks ir garākā palindroma garums šajā koda blokā. Palindroms ir burtu un ciparu virkne, kas lasāma vienādi gan no kreisās puses uz labo, gan no labās puses uz kreiso. Piemēram, zemāk ir parādīts pagājušās nedēļas tikšanās koda bloks. Garākais palindroms ir "E33EMMME33E". Tāpēc slepenās tikšanās laiks bija 11.00.



Jautājums

Nākamajā attēlā parādīts šīs nedēļas tikšanās koda bloks. Cikots notiks slepenā tikšanās?



Atbildes izskaidrojums

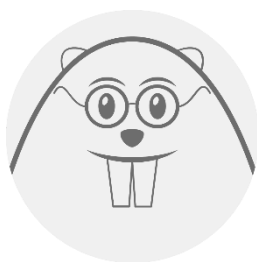
Garākais palindroms ir 7 blokus garš. Tādējādi, slepenās tikšanās laiks ir 7.00.



Izskaidrojums:

Šīs nedēļas attēlā ir diezgan daudz palindromu, bet **M E 3 3 3 E M** ir garākais. Tas satur garāko secīgu bloku virkni, kas lasāma vienādi abos virzienos.





Copyright Bebras