Международно състезание "Европейско Кенгуру"

19 март 2005 г.

ТЕМА за 11 и 12 клас

След всяка задача има посочени 5 отговора, от които само един е верен. За даден верен отговор се присъждат 5 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори или таблици. ВРЕМЕ ЗА РАБОТА: 75 минути. Пожелаваме Ви успех!

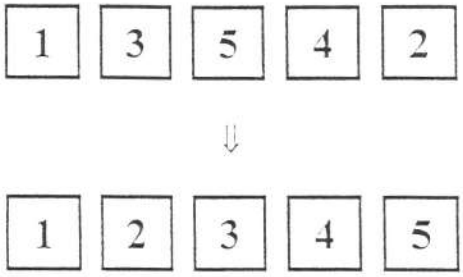
1. За коя от посочените стойности на x изразът $\frac{x^2}{x^3}$ има най-малка стойност?

A) 2 B) 1 C) -1 D) -2 E) -3

2. Да се намери броят на числата между 2 и 100, които са точни кубове.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3. Пет карти са номерирани с числата от 1 до 5 и са подредени, както е показано на



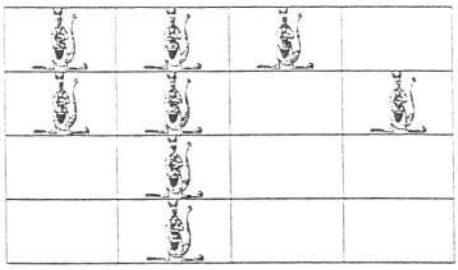
първия ред вляво. За един ход могат да се разменят местата на произволни две карти. Да се намери минималният брой ходове, с които петте карти могат да се подредят в нарастващ ред, както е показано на втория ред вляво.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

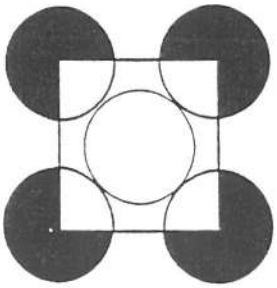
4. Да се намери цялото положително число n, което изпълнява равенството $888.111 = 2(2n)^2$.

A) 8 B) 11 C) 22 D) 111 E) 444

5. В 8 от полетата вдясно се намират 8 кенгурчета.Всяко от тях може да се премести в произволно свободно поле с един единствен скок. Да се намери минималният брой скокове, с които кенгурчетата могат да се подредят така, че във всеки ред и всеки стълб да има точно по две кенгурчета.



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5



6. Петте кръга на чертежа вляво са с един и същи радиус. Центровете на четирите от тях са върхове на квадрат, а кръгът във вътрешността на квадрата се допира до останалите четири кръга, както е показано. Да се намери отношението на лицето на частите от петте кръга, които не са зачернени, и лицето на частите от петте кръга, които са зачернени.

A) 1:3 B) 1:4 C) 2:5 D) 2:3 E) 5:4

7. Кое от посочените по-долу числа не е сума на четири последователни естествени числа?

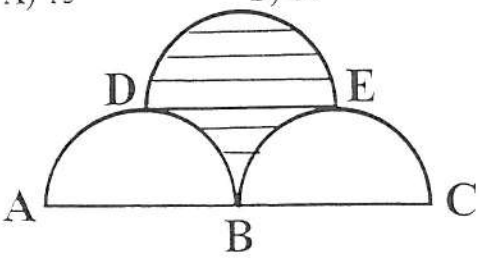
A) 2002 B) 22 C) 202 D) 222 E) 220

8. Куб $3\times3\times3$ тежи 810 г. В центъра на всяка негова стена е пробита дупка с формата на правоъгълен паралелепипед с размери $1\times1\times3$. Да се намери теглото в грамове на оставащата част.

A) 540 B) 570 C) 600 D) 630 E) 660

9. Майката и малкото кенгурче обикалят стадиона, чийто периметър е 330 м. Всеки от двамата прави по един скок за секунда, като един скок на майката е дълъг 5 м, а един скок на малкото кенгурче е 2 м. Двамата тръгнали едновременно от едно и също място и започнали да скачат в една и съща посока. След 25 секунди малкото кенгурче се уморило и спряло да почива, докато майката продължила да скача. След колко секунди майката ще бъде отново при кенгурчето?

A) 15 B) 24 C) 40 D) 51 E) 66



10. Три полукръга с диаметри $AB = BC = DE = 4$ са разположени така, че точките A, B и C лежат на една права, а точките D и E – върху общата външна допирателна на долните два полукръга. Да се намери лицето на защрихованата част.

A) 8 B) 7 C) 2π D) $2\pi+1$ E) $2\pi+2$

11. Да се намери $f(2004)$, ако f е такава функция, че $f(x+1)=2f(x)-2002$ за всяко цяло число x и $f(2005)=2008$.

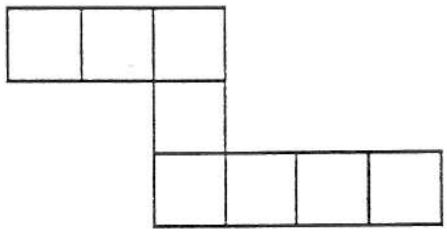
A) 2004 B) 2005 C) 2008 D) 2010 E) 2016

12. По колко различни начина могат да се оцветят стените на куб в два цвята, като се използват и двата цвята?

A) 7 B) 8 C) 12 D) 16 E) 32

13. Сборът от точките върху противоположните стени на един зар е винаги 7.

Зар, чиито стени са с размерите на показанатие квадратчета, е поставен върху първото поле отляво надясно и се търкаля от поле върху поле, докато стигне последното. Колко са точките върху най-горната стена на зара в крайното му положение, ако в началото точките върху лицевата (южната) стена са 2, върху най-горната са 3, а върху дясната (източната) стои 1? (Изгледът на чертежа е отгоре.)



A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

14. В една кутия има 60 топки: бели, червени и сини. Ако червените топки се заменят със сини, то в кутията ще има два пъти повече сини топки отколкото бели. Ако белите топки се заменят със сини, то в кутията ще има три пъти повече сини топки отколкото червени. Колко са сините топки в кутията?

A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30

15. Даден е правоъгълен триъгълник с катети a и b. Да се намери сумата от радиусите на описаната и вписаната окръжност на триъгълника.

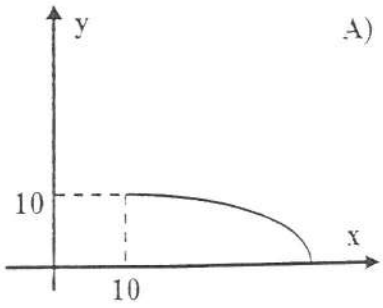
A) $a+b$ B) $2(a+b)$ C) $\frac{1}{2}(a+b)$ D) $\sqrt{ab}$ E) $\sqrt{a^2+b^2}$

16. Да се намери множеството на реалните числа x, за които $2^{4^x} < 4^{2^x}$.

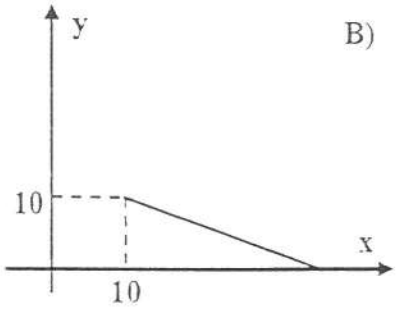
A) $(-\infty;1)$ B) $(0;1)$ C) $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$ D) $(0;+\infty)$ E) $(-\infty;+\infty)$

17. Върху хоризонтална равнина е закрепена вертикално пръчка с височина 10 см. На разстояние 10 см от пръчката върху хоризонталната равнина се намира светлинен източник, който се движи вертикално нагоре. В резултат на това дължината на сянката на пръчката върху хоризонталната равнина се променя в зависимост от разстоянието x в сантиметри между светлинния източник и равнината. Коя от посочените графики изобразява изменението на дължината y на сянката в сантиметри в зависимост от x?

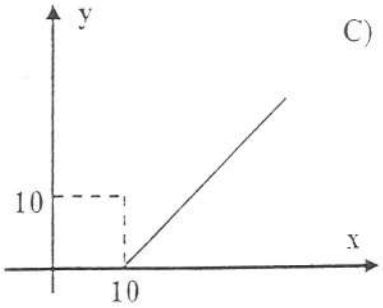
A)



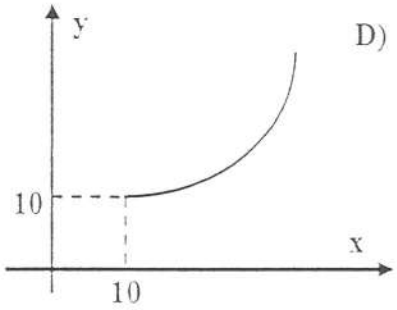
B)



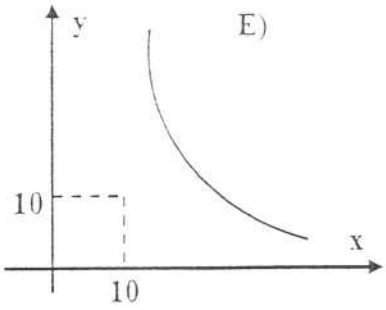
C)



D)



E)



18. Върху страната CD на правоъгълник $ABCD$ е взета точка M така, че $DM = 6$ и $MC = 2$. Да се намери лицето на ΔABM, ако $\angle AMD = \angle MBC$.

A) 12 B) 16 C) $8\sqrt{2}$ D) $8\sqrt{3}$ E) друг отговор

19. Иванчо казва истината през ден, като през останалото време лъже. Един ден той изказал точно 4 от посочените по-долу 5 твърдения. Кое твърдение не е между изказаните?

A) Броят на приятелите ми е просто число.
B) Имам толкова приятели, колкото и приятелки.
C) 288 се дели на 12.
D) Винаги казвам истината.
E) Трима от приятелите ми са по-големи от мен.

20. Кое от посочените числа може да се представи като произведение на 4 различни естествени числа, които са по-големи от 1?

A) 625 B) 124 C) 108 D) 2187 E) 2025

21. Да се намери обемът на тетраедър с основа ABC и връх S, ако равнинните ъгли при върха S са прави и лицата на околните стени са съответно 3, 4 и 6.

A) 4 B) 5 C) 6 D) 8 E) 12

22. Сборът от цифрите на естественото число m е 30. Кое от посочените числа не може да бъде сбор от цифрите на $m + 3$?

A) 6 B) 15 C) 21 D) 24 E) 33

23. Една кутия съдържа 17 топки, които са номерирани с числата $5 + 125k$, където $k = 0, 1, 2, \ldots, 16$. Колко най-малко топки трябва да се извадят от кутията (без да се гледа), за да е сигурно, че измежду извадените топки има две, сборът от номерата на които е 2010?

A) 7 B) 8 C) 10 D) 11 E) 17

24. Да се намери стойността на $\lg\left(\sqrt{2005}-\sqrt{1995}\right)$, ако $\lg\left(\sqrt{2005}+\sqrt{1995}\right)=n$.

A) $n-1$ B) $1-n$ C) $\frac{1}{n}$ D) $n+1$ E) друг отговор

25. Да се намери сумата на най-малката стойност на функцията $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}$ при $x > 0$ и стойността на x, при която тази най-малка стойност се достига.

A) 2 B) 3 C) $3\sqrt{2}$ D) $2\sqrt{3}$ E) $5\sqrt{5}$

26. Числото m има точно три делителя, различни от 1, а числото n има точно пет делителя, различни от 1. Да се намери броят на различните от 1 делители на числото mn.

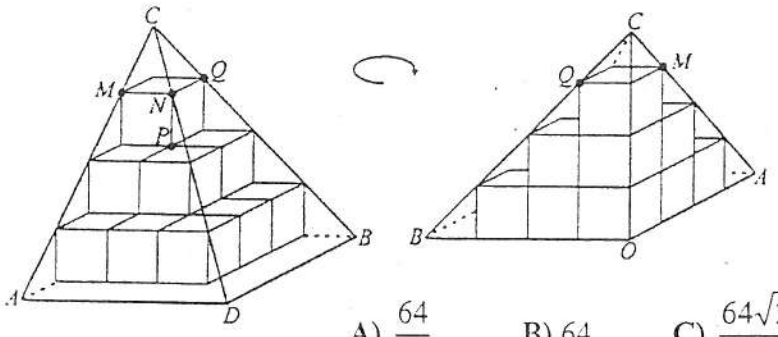
A) 17 B) 15 C) 23 D) 120 E) друг отговор

27. Даден е правилен осмоъгълник $ABCDEFGH$ със страна 1. Окръжността с център A и радиус 1 пресича окръжността с център B и радиус 1 в точка P, която е вътрешна за осмоъгълника. Окръжността с център C и радиус 1 пресича окръжността с център B и радиус 1 в точка Q, която също е вътрешна за осмоъгълника. Да се намери $\angle APQ$.

A) $\frac{19}{24}\pi$ B) $\frac{8}{11}\pi$ C) $\frac{3}{8}\pi$ D) $\frac{3}{4}\pi$ E) $\frac{7}{9}\pi$

28. Върху черната дъска е записано едно число. То се удвоява и след това се изважда единица. Новото число се записва отново върху дъската. Да се намери първоначално записаното число, ако стотното е $2^{100}+1$.

A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) друг отговор



29. Вляво са показани два изгледа на пирамида, в която са поместени 14 единични кубчета. Да се намери обемът на пирамидата.

A) $\frac{64}{3}$ B) 64 C) $\frac{64\sqrt{2}}{3}$ D) $\frac{64\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{32}{3}$

30. Иванчо планирал да измине разстоянието от A до B с постоянна скорост. Той забелязал, че ако увеличи скоростта си с 5 км/ч., ще пристигне 5 часа по-рано от предвиденото време, а ако увеличи скоростта си с 10 км/ч., ще пристигне 8 часа по-рано от предвиденото. Да се намери първоначално предвидената скорост на Иванчо.

A) 10 км/ч. B) 15 км/ч. C) 20 км/ч. D) 25 км/ч. E) 30 км/ч.